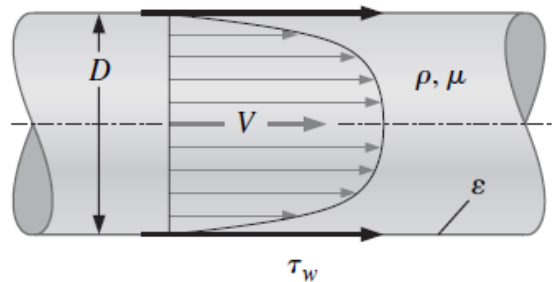


## Modelo Segundo Parcial

### Ejercicio 1

#### Fricción de un tubo

Considere el flujo de un fluido incompresible de densidad  $\rho$  y viscosidad  $\mu$  a través de una larga sección horizontal de tubo redondo de diámetro  $D$ . El perfil de velocidad se bosqueja en la figura 7-34;  $V$  es la velocidad promedio a través de la sección transversal del tubo, que por conservación de masa permanece constante a lo largo del tubo. Para un tubo muy largo, el flujo finalmente se volverá **totalmente desarrollado**, lo que significa que el perfil de velocidad también permanece uniforme a lo largo del tubo. Debido a las fuerzas de fricción entre el fluido y la pared del tubo, existe un esfuerzo de corte  $\tau_w$  sobre la superficie interior del tubo, como se ilustra. El esfuerzo de corte también es constante a lo largo del tubo en la región totalmente desarrollada. Se supone cierta rugosidad promedio constante  $\varepsilon$  a lo largo de la superficie interior del tubo. De hecho, el único parámetro que *no* es constante a lo largo del tubo es la presión, que debe disminuir (linealmente) a lo largo del tubo con la finalidad de “empujar” el fluido a través del tubo para superar la fricción. Desarrolle una relación adimensional entre esfuerzo de corte  $\tau_w$  y los otros parámetros en el problema.



**FIGURA 7-34**

Fricción en la superficie interior de un tubo. El esfuerzo de corte  $\tau_w$  sobre las paredes del tubo es una función de la velocidad promedio del fluido  $V$ , la rugosidad promedio de la superficie interior del tubo  $\varepsilon$ , la densidad del fluido  $\rho$ , la viscosidad del fluido  $\mu$  y el diámetro interior del tubo  $D$ .

**Hipótesis** 1 El flujo está totalmente desarrollado. 2 El fluido es incompresible. 3 En el problema no son significativos otros parámetros.

**Análisis** Se emplea paso a paso el método de repetición de variables para obtener los parámetros adimensionales.

**Paso 1** En este problema existen seis variables y constantes;  $n = 6$ . Con ellos se elabora una lista en forma funcional, y la variable dependiente se menciona como una función de las variables y constantes independientes:

$$\text{Lista de parámetros relevantes: } \tau_w = f(V, \varepsilon, \rho, \mu, D) \quad n = 6$$

**Paso 2** Se hace una lista con las dimensiones primarias de cada parámetro. Note que el esfuerzo de corte es una fuerza por unidad de área y, por lo tanto, tiene las mismas dimensiones que presión:

$$\begin{array}{cccccc} \tau_w & V & \varepsilon & \rho & \mu & D \\ \{m^1L^{-1}t^{-2}\} & \{L^1t^{-1}\} & \{L^1\} & \{m^1L^{-3}\} & \{m^1L^{-1}t^{-1}\} & \{L^1\} \end{array}$$

**Paso 3** Como primera suposición,  $j$  se hace igual a 3, el número de dimensiones primarias representadas en el problema (m, L y t).

$$\text{Reducción: } j = 3$$

Si este valor de  $j$  es correcto, el número esperado de  $\Pi$ 's es  $k = n - j = 6 - 3 = 3$ .

**Paso 4** Se eligen tres parámetros repetitivos pues  $j = 3$ . Cuando se siguen los lineamientos de la Tabla 7-3, no se puede elegir la variable dependiente  $\tau_w$ . No se pueden elegir simultáneamente  $\varepsilon$  y  $D$  pues sus dimensiones son idénticas y no sería deseable que ni  $\mu$  ni  $\varepsilon$  aparecieran en todas las  $\Pi$ . La mejor elección de parámetros repetitivos es por tanto  $V$ ,  $D$  y  $\rho$ .

$$\text{Parámetros repetitivos: } V, D \text{ y } \rho$$

**Paso 5** Se genera la  $\Pi$  dependiente:

$$\Pi_1 = \tau_w V^{a_1} D^{b_1} \rho^{c_1} \rightarrow \{\Pi_1\} = \{(m^1L^{-1}t^{-2})(L^1t^{-1})^{a_1}(L^1)^{b_1}(m^1L^{-3})^{c_1}\}$$

a partir de lo cual  $a_1 = -2$ ,  $b_1 = 0$ , y  $c_1 = -1$ , y por lo tanto la  $\Pi$  dependiente es:

$$\Pi_1 = \frac{\tau_w}{\rho V^2}$$

A partir de la Tabla 7-5, el parámetro adimensional establecido más similar a esta  $\Pi_1$  es el **factor de fricción de Darcy**, que se define con un factor de 8 en el numerador (Fig. 7-35). Por lo tanto, esta  $\Pi$  se puede manipular del modo siguiente de acuerdo con los lineamientos mencionados en la Tabla 7-4:

$$\Pi_1 \text{ modificada: } \quad \Pi_{1, \text{modificada}} = \frac{8\tau_w}{\rho V^2} = \text{factor de fricción de Darcy} = f$$

De manera similar se generan las dos  $\Pi$  independientes, cuyos detalles se dejan al lector:

$$\Pi_2 = \mu V^{a_2} D^{b_2} \rho^{c_2} \quad \rightarrow \quad \Pi_2 = \frac{\rho V D}{\mu} = \text{número de Reynolds} = \text{Re}$$

$$\Pi_3 = \varepsilon V^{a_3} D^{b_3} \rho^{c_3} \quad \rightarrow \quad \Pi_3 = \frac{\varepsilon}{D} = \text{rugosidad relativa}$$

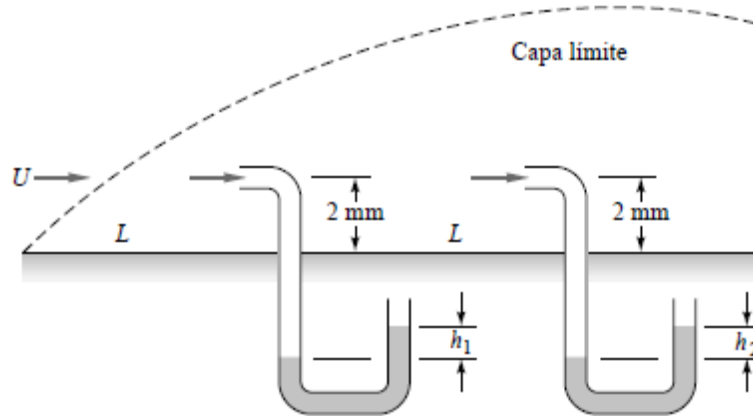
**Paso 6** La relación funcional final se escribe como:

$$f = \frac{8\tau_w}{\rho V^2} = f\left(\text{Re}, \frac{\varepsilon}{D}\right) \quad (1)$$

**Discusión** El resultado se aplica a flujo en tubo totalmente desarrollado tanto laminar como turbulento; sin embargo, se evidencia que la segunda  $\Pi$  independiente (rugosidad relativa  $\varepsilon/D$ ) no es tan importante en flujo laminar como en flujo turbulento. Este problema presenta una interesante conexión entre similitud geométrica y análisis dimensional. A saber, es necesario empatar  $\varepsilon/D$  pues es una  $\Pi$  independiente en el problema. Desde una perspectiva diferente, si se considera la rugosidad como una propiedad geométrica, es necesario empatar  $\varepsilon/D$  para garantizar *similitud geométrica* entre dos tubos.

## Ejercicio 2 (Tablas al final)

\*P7.24 Aire a 20 °C y 1 atm fluye en régimen laminar alrededor de la placa de la Figura P7.24. Se dispone de dos tubos de pitot equiespaciados, cada uno a 2 mm de la pared. El fluido manométrico es agua a 20 °C. Si  $U = 15$  m/s y  $L = 50$  cm, determine los valores de las lecturas manométricas  $h_1$  y  $h_2$  en mm.



P7.24

**Solution:** For air at 20°C, take  $\rho = 1.2$  kg/m<sup>3</sup> and  $\mu = 1.8E-5$  kg/m·s. The velocities  $u$  at each pitot inlet can be estimated from the Blasius solution:

$$(1) \quad \eta_1 = y[U/\nu x_1]^{1/2} = (0.002)\{15/[1.5E-5(0.5)]\}^{1/2} = 2.83, \quad \text{Table 7.1: read } f' \approx 0.816$$

$$\text{Then } u_1 = Uf' = 15(0.816) \approx 12.25 \text{ m/s}$$

$$(2) \quad \eta_2 = y[U/\nu x_2]^{1/2} = 2.0, \quad f' \approx 0.630, \quad u_2 = 15(0.630) \approx 9.45 \text{ m/s}$$

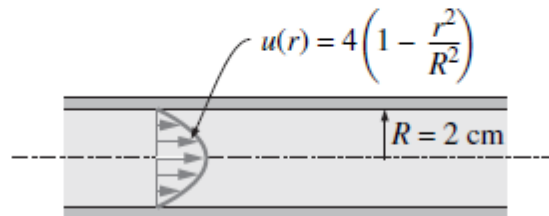
Assume constant stream pressure, then the manometers are a measure of the local velocity  $u$  at each position of the pitot inlet, so we can find  $\Delta p$  across each manometer:

$$\Delta p_1 = \frac{\rho}{2} u_1^2 = \frac{1.2}{2} (12.25)^2 = 90 \text{ Pa} = \Delta \rho g h_1 = (998 - 1.2)(9.81)h_1, \quad \mathbf{h_1 \approx 9.2 \text{ mm}}$$

$$\Delta p_2 = \frac{\rho}{2} u_2^2 = \frac{1.2}{2} (9.45)^2 = 54 \text{ Pa} = (998 - 1.2)(9.81)h_2, \quad \text{or: } \mathbf{h_2 \approx 5.5 \text{ mm}} \quad \textit{Ans.}$$

### Ejercicio 3

**8-35** El perfil de velocidad en flujo laminar totalmente desarrollado en una tubería circular de radio interior  $R = 2$  cm, en m/s, está dado por  $u(r) = 4(1 - r^2/R^2)$ . Determine las velocidades promedio y máxima en la tubería y el flujo volumétrico.



**FIGURA P8-35**

**Solution** The velocity profile in fully developed laminar flow in a circular pipe is given. The average and maximum velocities as well as the flow rate are to be determined.

**Assumptions** The flow is steady, laminar, and fully developed.

**Analysis** The velocity profile in fully developed laminar flow in a circular pipe is given by

$$u(r) = u_{\max} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

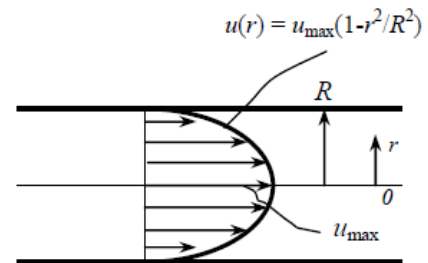
The velocity profile in this case is given by

$$u(r) = 4(1 - r^2 / R^2)$$

Comparing the two relations above gives the maximum velocity to be  $u_{\max} = 4.00$  m/s. Then the average velocity and volume flow rate become

$$V_{\text{avg}} = \frac{u_{\max}}{2} = \frac{4 \text{ m/s}}{2} = 2.00 \text{ m/s}$$

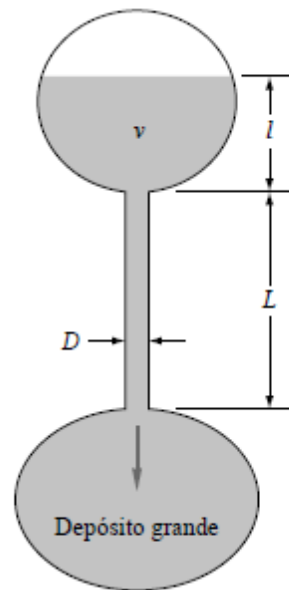
$$\dot{V} = V_{\text{avg}} A_c = V_{\text{avg}} (\pi R^2) = (2 \text{ m/s}) [\pi (0.02 \text{ m})^2] = 0.00251 \text{ m}^3/\text{s}$$



**Discussion** A unique feature of fully developed laminar pipe flow is that the maximum velocity is exactly twice the average velocity. This is *not* the case for turbulent pipe flow, since the velocity profile is much fuller.

### Ejercicio 4

Un viscosímetro capilar mide el tiempo que necesita un volumen dado de fluido  $v$  en fluir a través de un tubo estrecho, como el de la Figura P6.17. El tiempo de tránsito está correlacionado con la viscosidad. Para el sistema mostrado en la Figura P6.17, (a) obtenga una expresión aproximada para el tiempo necesario, suponiendo flujo laminar y despreciando pérdidas localizadas. (b) Si  $L = 12$  cm,  $l = 2$  cm,  $v = 8$  m<sup>3</sup> y el fluido es agua a 20 °C, ¿cuál es el diámetro capilar si el tiempo  $t$  es de 6 s?



**Solution:** (a) Assume no pressure drop and neglect velocity heads. The energy equation reduces to:

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = 0 + 0 + (L + l) = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_f = 0 + 0 + 0 + h_f, \quad \text{or: } h_f \approx L + l$$

$$\text{For laminar flow, } h_f = \frac{128\mu LQ}{\pi\rho g d^4} \quad \text{and, for uniform draining, } Q = \frac{v}{\Delta t}$$

$$\text{Solve for } \Delta t = \frac{128\mu Lv}{\pi\rho g d^4 (L + l)} \quad \text{Ans. (a)}$$

(b) Apply to  $\Delta t = 6$  s. For water, take  $\rho = 998 \text{ kg/m}^3$  and  $\mu = 0.001 \text{ kg/m}\cdot\text{s}$ . Formula (a) predicts:

$$\Delta t = 6 \text{ s} = \frac{128(0.001 \text{ kg/m}\cdot\text{s})(0.12 \text{ m})(8E-6 \text{ m}^3)}{\pi(998 \text{ kg/m}^3)(9.81 \text{ m/s}^2)d^4(0.12 + 0.02 \text{ m})}$$

$$\text{Solve for } \mathbf{d \approx 0.0015 \text{ m}} \quad \text{Ans. (b)}$$

## Ejercicio 5

1. Determinar el coeficiente de corrección  $\beta$  de la cantidad de movimiento, que ha de aplicarse cuando se emplea la velocidad media  $V$  en el principio de la cantidad de movimiento, en el caso de flujo bidimensional.

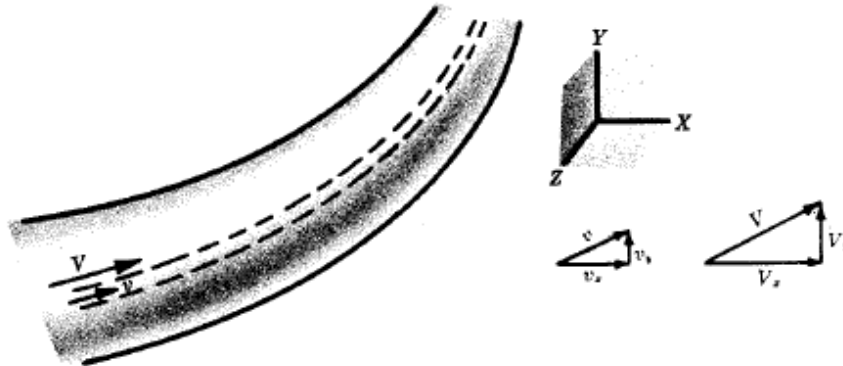


Fig. 11-1

**Solución:**

El caudal en masa  $dM$  que circula a través del tubo de corriente mostrado en la Fig. 11-1 es igual a  $\rho dQ$ . La cantidad de movimiento correcta en la dirección  $X$  es

$$(\text{Cant. mov.})_x = \int dM v_x = \int \rho dQ v_x = \int \rho v_x (v dA)$$

Utilizando la velocidad media, en la sección recta, la cantidad de movimiento correcta sería

$$(\text{Cant. mov.})_x = \beta(MV_x) = \beta(\rho QV_x) = \beta\rho(AV)V_x$$

Igualando los dos valores anteriores

$$\beta = \frac{\int \rho v (v dA)}{\rho AV(V_x)} = \frac{1}{A} \int_A (v/V)^2 dA$$

ya que del diagrama vectorial de las velocidades de la figura se deduce  $v_x/V_x = v/V$ .

## Ejercicio 6

### Cuestión 5

Para la instalación de la figura, las pérdidas menores (expresadas en metros de columna de fluido) vienen dadas por la expresión:

$$h_m = k \frac{v^2}{2g}$$

donde  $k=4$  en este caso, siendo  $v$  la velocidad media en m/seg. Las pérdidas por fricción (expresadas en metros de columna de fluido) en un tramo de longitud  $L$  se calculan a partir de:

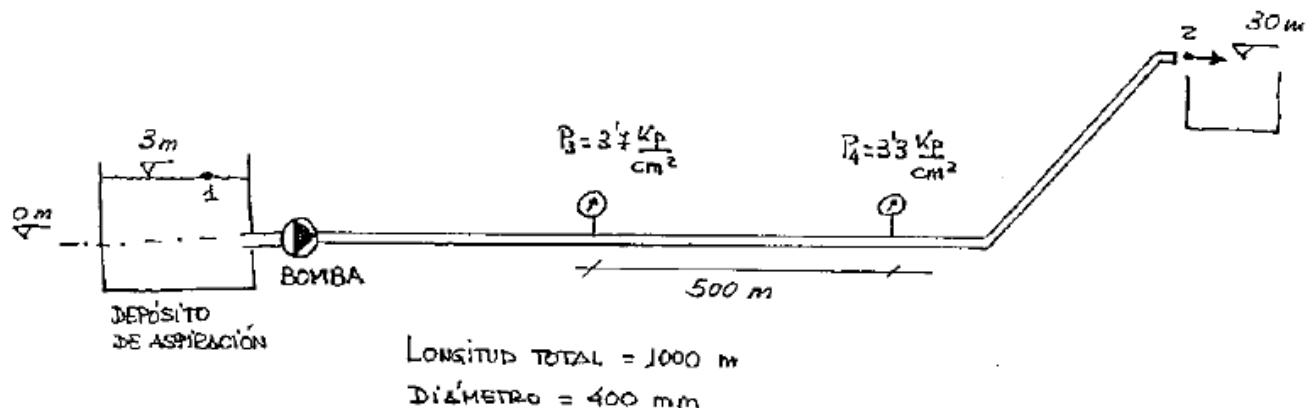
$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g}$$

siendo  $f$  el factor de fricción ( $f=0,018$  en nuestro caso),  $L$  la longitud expresada en metros y  $D$  el diámetro, también expresado en metros.

- Determinar el caudal circulante (en litros/seg) a partir de las lecturas de los manómetros instalados en los puntos 3 y 4.
- Calcular la altura manométrica que está proporcionando la bomba situada a la salida del depósito.
- Sabiendo que la potencia eléctrica consumida por la instalación es 135 kw y que el rendimiento del motor eléctrico es de un 90 %, determinar el rendimiento de la bomba.

#### NOTAS:

- Se desprecia la energía cinética del flujo en el punto 1 (depósito de aspiración de la bomba), pero no en el punto 2 (chorro de descarga al depósito superior).



$$a) B_3 = B_4 + h_{34} \rightarrow h_{34} = B_3 - B_4 = \left( \frac{P_3}{\gamma} + z_3 + \frac{V_3^2}{2g} \right) - \left( \frac{P_4}{\gamma} + z_4 + \frac{V_4^2}{2g} \right)$$

$$h_{34} = B_3 - B_4 = \frac{P_3}{\gamma} - \frac{P_4}{\gamma} \text{ ya que } z_3 = z_4 \text{ y } V_3 = V_4 \text{ pues } D_3 = D_4$$

En el tramo en cuestión no hay pérdidas menores, por lo que

$$h_{34} = f \frac{L_{34}}{D} \frac{V^2}{2g}$$

$$P_3 = 37 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} = 37 \cdot 981 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \rightarrow \frac{P_3}{\gamma} = \frac{37 \cdot 981 \cdot 10^4}{981 \cdot 10^3} = 37 \text{ mca}$$

$$P_4 = 33 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} = 33 \cdot 981 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \rightarrow \frac{P_4}{\gamma} = \frac{33 \cdot 981 \cdot 10^4}{981 \cdot 10^3} = 33 \text{ mca}$$

$$f \frac{L_{34}}{D} \frac{V^2}{2g} = 37 - 33 = 4 \text{ mca.}$$

Sustituyendo  $f = 0.018$   $L_{34} = 500 \text{ m}$   $D = 0.4 \text{ m}$

$$0.018 \frac{500}{0.4} \frac{V^2}{2g} = 4 \rightarrow V = 1.8676 \text{ m/s}$$

$$Q = V \cdot \frac{\pi D^2}{4} = 1.8676 \frac{\pi \cdot 0.4^2}{4} = 0.2347 \text{ m}^3/\text{s} = \underline{234.7 \text{ l/seg.}}$$

b) Bernoulli entre 1 y 2 (incluire las pérdidas menores y la altura de la bomba, así como las pérdidas por fricción):

$$B_1 + H_b = B_2 + \sum h_f + \sum h_m$$

$$B_1 = \frac{P_1}{\rho} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} = 3$$

despr.

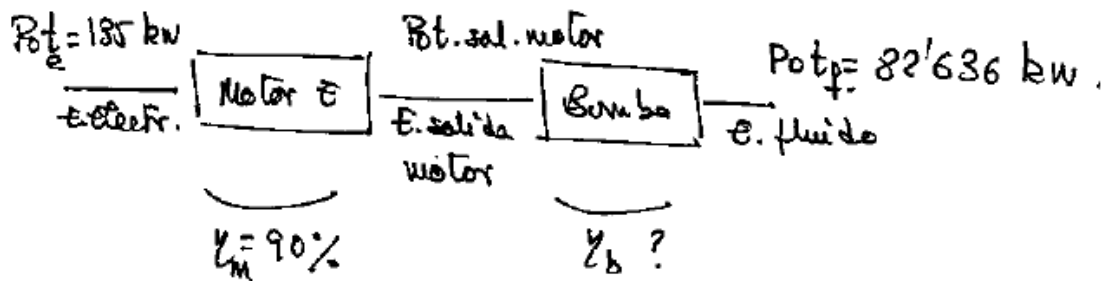
$$B_2 = \frac{P_2}{\rho} + z_2 + \frac{V_2^2}{2g} = 30 + \frac{18646^2}{2g} = 30'18 \text{ mca}$$

$$\sum h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} = 0'018 \frac{1000}{0'4} \frac{18646^2}{2g} = 8 \text{ mca}$$

$$\sum h_m = k \frac{V^2}{2g} = 4 \frac{V^2}{2g} = 0'711 \text{ mca}$$

$$\underline{H_b} = B_2 + \sum h_f + \sum h_m - B_1 = 30'18 + 8 + 0'711 - 3 = \underline{35'891 \text{ mca}}$$

c) Pot fluido =  $\gamma Q H_b = 9'81 \cdot 10^3 \cdot 0'2347 \cdot 35'891 = 82'636 \text{ watio}$



$$P_{e,salida \text{ motor}} \cdot \eta_b = P_{e,fluido} \quad \uparrow \quad \frac{P_{e,elec} \cdot \eta_m \cdot \eta_b = P_{e,fluido}}{135 \text{ kW} \quad 0'9 \quad 82'636}$$

$$P_{e,elec} \cdot \eta_m = P_{e,salida \text{ motor}}$$

$$\eta_b = \frac{P_{e,fluido}}{P_{e,elec} \cdot \eta_m} = 0'68 \rightarrow \eta_b = 68\%$$

## Tablas

**Tabla 7.1.** Perfil de velocidad de Blasius [1 a 3].

$y[U/(vx)]^{1/2}$	$u/U$	$y[U/(vx)]^{1/2}$	$u/U$
0,0	0,0	2,8	0,81152
0,2	0,06641	3,0	0,84605
0,4	0,13277	3,2	0,87609
0,6	0,19894	3,4	0,90177
0,8	0,26471	3,6	0,92333
1,0	0,32979	3,8	0,94112
1,2	0,39378	4,0	0,95552
1,4	0,45627	4,2	0,96696
1,6	0,51676	4,4	0,97587
1,8	0,57477	4,6	0,98269
2,0	0,62977	4,8	0,98779
2,2	0,68132	5,0	0,99155
2,4	0,72899	$\infty$	1,00000
2,6	0,88246		