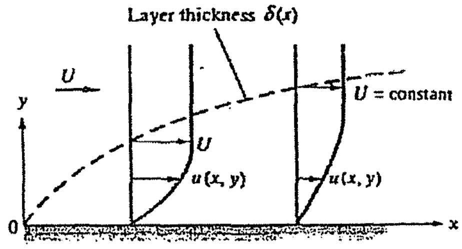
PARTE TEORICA

PROBLEMA 1

Una aproximación razonable para una capa limite bidimensional de un flujo incompresible sobre una placa plana es:



$$u = U\left(\frac{2y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2}\right) \quad \text{for } y \le \delta$$

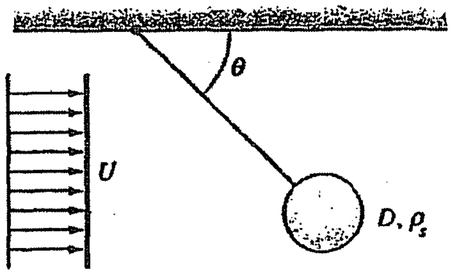
where $\delta \approx Cx^{1/2}$, $C = \text{const}$

a) Suponiendo la condición de no deslizamiento en la pared, encontrar una expresión para la componente de la velocidad v = v (x, y), para y <δ.
b) Hallar el valor máximo de v en x = 1m (la velocidad máxima ocurre en y = δ) cuando U = 3 m/s y δ = 1,1 m.

δ = 1.1 m.

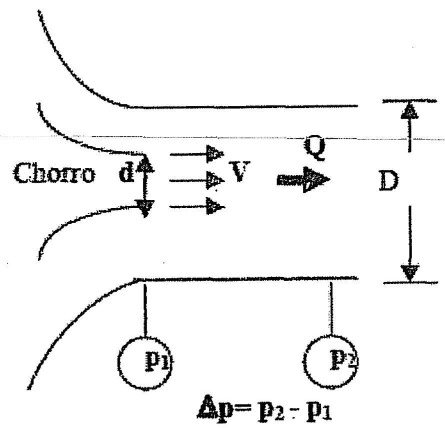
PROBLEMA 2

Una esfera pesada de acero de diámetro D, agarrada a un tensor, permanece a un ángulo θ cuando sopla viento de velocidad U, como muestra la figura. Hallar una expresión para el ángulo θ justificar la respuesta en función de las hipótesis realizadas.



PROBLEMA 3

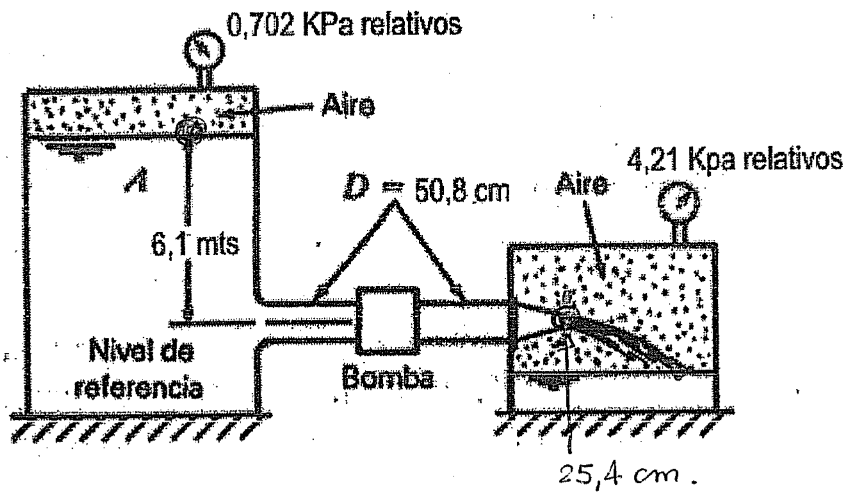
Se necesita un análisis dimensional para organizar los datos de funcionamiento medidos para la tobera. La dependencia funcional es: ΔP=f(ρ,μ,v,d,D,Q). Hallar los números adimensionales para el problema y explicarlos.



PARTE PRÁCTICA – SEGUNDO PARCIAL- ING. AMBIENTAL- 8-11-2012

Problema 1:

¿Cuál es la potencia necesaria para que un caudal de 0,85 m^3/s de agua fluya por la bomba de la figura? La pérdida energía puede evaluarse como 5 $V^2/2g$, donde V es la velocidad del agua en la tubería. La densidad del fluido puede tomarse como 1000 Kg/m^3. Las presiones son relativas en ambos manómetros. El diámetro de salida de la boquilla dentro del tanque de la derecha es de 25,4 cm.

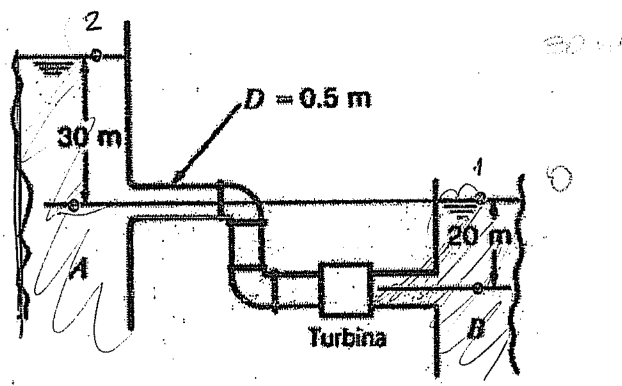


B

Problema 2:

Si no se tiene en cuenta la fricción, ¿Cuál es la potencia desarrollada por la turbina? Considere que en B se tiene un chorro de agua, o sea un escurrimiento libre hacia la atmósfera. El caudal másico de agua es de 500 Kg/s, la densidad del agua para este caso se puede tomar como 1000 Kg/m^3.

B



Problema 3:

La fuerza de arrastre F_D sobre la batisfera sumergible, depende de las siguientes variables:

V, volumen del vehículo

ρ, densidad del agua

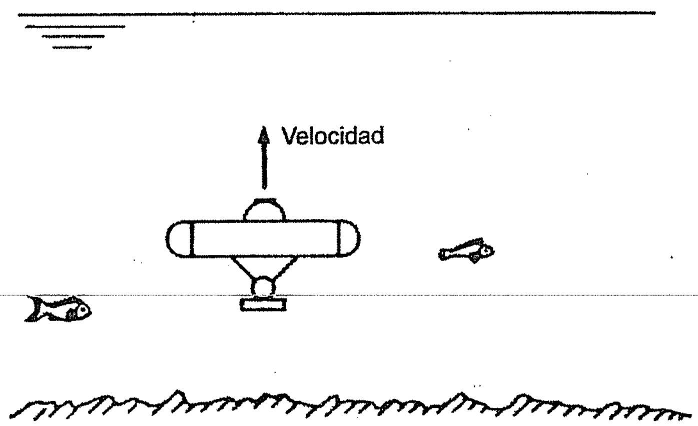
μ, viscosidad del agua

v, velocidad de ascensión del vehículo

e, rugosidad de la superficie

Deducir un conjunto de grupos adimensionales que gobiernan este fenómeno, utilice el sistema MLT de dimensiones básicas.

B



Parte teórica

Problema 1

Dada $\bar{V} = u\hat{i} + v\hat{j}$; $\bar{V}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\boxed{\bar{V}(x,y) = \left[U \cdot \left(\frac{2y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2}\right)\right]\hat{i} + V \cdot \hat{j}} \quad (1)$$

Con $\delta = C \cdot x^{1/2}$; $C \in \mathbb{R}$

a) Hallar componente "v" de velocidad.

Consideraciones previas:

·) Con la velocidad $\bar{V} = u\hat{i} + v\hat{j}$. para un flujo incompresible, se cumple:

$$\boxed{div(\bar{V}) = 0} \quad (2)$$ div: divergencia

Con $div(\bar{V}) = \bar{\nabla} \cdot \bar{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}\right) \cdot (u, v) = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$; para obtener v, desarrollo:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x};$$

$$v = \int \partial v = (-1) \cdot \int \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dy + C_1$$

$$\boxed{v = (-1) \cdot \int \frac{\partial}{\partial x}(u) \cdot dy + C_1} \quad (3)$$

(4) Calculo $\frac{\partial u}{\partial x}$. $u = U\left(\frac{2y}{x^{1/2} \cdot C} - \frac{y^2}{(x^{1/2})^2 \cdot C^2}\right)$

$$u = U\left(\frac{2y}{c}\cdot x^{-1/2} - \frac{y^2}{c^2}\cdot x^{-1}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = U\cdot\frac{\partial(\ )}{\partial x} = U\cdot\left[\frac{2y}{c}\cdot\frac{\partial(x^{-1/2})}{\partial x} - \frac{y^2}{c^2}\,\frac{\partial(x^{-1})}{\partial x}\right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = U\cdot\left[\frac{2y}{c}\cdot -\frac{1}{2}\cdot x^{-1/2-1} - \frac{y^2}{c^2}\cdot -1\cdot x^{-1-1}\right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = U\cdot\left[-\frac{y}{c}\cdot x^{-3/2} + \frac{y^2}{c^2}\cdot x^{-2}\right]$$

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = U\cdot\left[\left(\frac{y^2}{c^2}\cdot\frac{1}{x^2}\right) - \left(\frac{y}{c}\cdot\frac{1}{x^{3/2}}\right)\right]} \quad (4)$$

de (4) en (3):

$$V = (-1)\int_0^y \frac{\partial u}{\partial x}\, dy$$

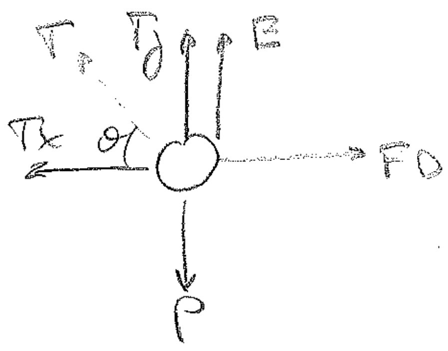
$$V = (-1)\left[\int_0^y \left(\frac{U}{cx^2}\right) y^2\, dy - \int_0^y \left(\frac{U}{cx^{3/2}}\, y\right) dy\right]$$

$$\boxed{V = \frac{U}{2cx^{3/2}}\, y^2 - \frac{U}{3cx^2}\, y^3} \quad \text{Tmb. } V = 2U\frac{d\delta}{dx}\left(\frac{y^2}{2\delta^2} - \frac{y^3}{3\delta^3}\right)$$

b) $V\left(x = 1m, U = 3\frac{m}{s}\right)_{max}$? V_{max} en $y = \delta$

$$\left[V_{max} = \frac{U\cdot\delta}{6x} = \frac{(3m/s)\cdot(0,011)m}{6\cdot(1m)} = 5,5\cdot 10^{-3}\frac{m}{s}\right]$$

Problema 2



$$\boxed{\sum \bar{F} = m \cdot \bar{a}} \quad (1)$$

Para cuerpo en equilibrio: $\bar{a} = 0$

$$\sum \bar{F} = 0$$

$\hookrightarrow \sum F_x = 0 \quad (2) \; \sum F_x = F_D - T_x = 0$

$\hookrightarrow \sum F_y = 0 \quad (3) \; \sum F_y = T_y + E - P = 0$

Para ecs. (2) y (3):

·) $\boxed{F_D = \frac{1}{2} \cdot \delta_{fluido} \cdot V^2 \, C_d \cdot A_{proyectada}}$ (4) Fuerza de drag

$\hookrightarrow A_{proy} \Rightarrow$ área circular: $\boxed{A_p = \frac{\pi \cdot \phi^2}{4} = \pi \cdot r^2}$ (5)

queda: $F_D = \frac{1}{2} \cdot \delta_{fl} \cdot V^2 \, C_d \cdot \frac{\pi \cdot \phi^2}{4}$

$$\boxed{F_D = \frac{\pi}{8} \cdot \delta_{fl} \cdot V^2 \, C_d \cdot \phi^2} \quad (4^*)$$

·) ¿Empuje? (E): $E = \delta_{fl} \cdot g \cdot vol)_{esfera}$

$$E = \delta_{fl} \cdot g \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot r^3 \cdot \left(\frac{\phi}{2} \cdot \frac{1}{r}\right)^3$$

$$E = \delta_{fl} \cdot g \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot \frac{\phi^3}{8} \cdot \cancel{r^3} \frac{1}{\cancel{r^3}}$$

(lo expreso en función del dato ϕ: diámetro)

$$\boxed{E = \frac{\pi}{6} \delta_{fl} \cdot g \cdot \phi^3} \quad (5)$$

·) ¿Peso? $P = \delta_{bola} \cdot g \cdot Vol)_{esfera}$; al igual que en Empuje:

$$\boxed{P = \frac{\pi}{6} \cdot \delta_b \cdot g \cdot \phi^3} \quad (6)$$

·) ¿Tensión? $\boxed{T_x = T \cdot \cos(\theta)}$ (7) $\boxed{T_y = T \cdot \sin(\theta)}$ (8)

En ecs ② y ③:

$) \; F_D - T_x = 0 \longrightarrow$ ②' $T \cdot \cos(\theta) = \frac{\pi}{8} \cdot \delta_{pl} \cdot V^2 \cdot Cd \cdot \phi^2$

$) \; T_y + E - P = 0 \longrightarrow$ ③' $T \cdot sen(\theta) = P - E$

$$T sen(\theta) = (\delta_b - \delta_{pl}) \cdot \frac{\pi}{6} \cdot g \cdot \phi^3$$

Por definición, $\boxed{\tan(\theta) = sen(\theta) / \cos(\theta)}$, se logra con ③'/②'

$$\frac{\cancel{T} sen(\theta)}{\cancel{T} \cos(\theta)} = \tan(\theta) = \frac{(\delta_b - \delta_{pl}) \cancel{\pi} \cdot g \cdot \phi^{\cancel{3}} \cdot 8}{6 \cdot \cancel{\pi} \cdot \delta_{pl} \cdot V^2 \cdot Cd \cdot \cancel{\phi^2}}$$

$$\boxed{\theta = \operatorname{atan}\left[\frac{(\delta_b - \delta_{pl}) \cdot g \cdot \phi \cdot 4}{3 \cdot \delta_{pl} \cdot V^2 \cdot Cd}\right]}$$

¡Verifico unidades!

$[\theta] = 1$ (s/u)

$$[\theta] = \left[\frac{\delta \cdot g \cdot \phi}{\delta \cdot V^2 \cdot Cd}\right] = \frac{\cancel{[\delta]}[g][\phi]}{\cancel{[\delta]}[V]^2 \cdot 1} = \frac{\cancel{L} T^{-2} \cdot L}{T^{-2} \cancel{L^2}} = 1 \checkmark$$

Problema 3

Hallar $\Delta P = f(\delta, \mu, V, d, D, Q)$

¿Números π? π_n = Variables − magnitudes fundamentales

$\pi_n = 7 - 3 = 4$; ∴ 4 nros Pi

Consideraciones previas: Fluido en movimiento en tobera

) ¿Puede aparecer el nro. de Reynolds?

) ¿Puede aparecer el nro de Euler? relacionado a cavitación

) ¿Hay variables que posean las mismas unidades? d y D

Resolución:

Variable	ΔP	δ	μ	V	d	D	Q
Magnitudes	$\frac{M}{LT^2}$	$\frac{M}{L^3}$	$\frac{M}{LT}$	$\frac{L}{T}$	L	L	$\frac{L^3}{T}$

Variables tomadas fijas

) $\boxed{\pi_1 = \frac{d}{D}}$ (1)

) $\pi_2 = \delta^a \cdot V^b \cdot d^c \, \Delta P^1$

$[\pi_2] = \left(\frac{M}{L^3}\right)^a \cdot \left(\frac{L}{T}\right)^b (L)^c \left(\frac{M}{LT^2}\right)^1$

$0 = a + 1$

$0 = -3a + b + c - 1$

$0 = -b - 2$

$a = -1$, $c = 0$, $b = -2$

queda:

$\boxed{\pi_2 = \frac{\Delta P}{\delta \cdot V^2}}$ (2)

donde $Eu = \pi_2$

Eu: nro de euler; Aplicable a cuerpos sumergidos o en flotación

Eu → "Fuerzas de presión" / "Fuerzas de inercia"

$$\Pi_3 = \delta^a \cdot V^b \cdot d^c \cdot \mu^{-1}$$

$$[\Pi_3] = \left(\frac{M}{L^3}\right)^a \cdot \left(\frac{L}{T}\right)^b \cdot (L)^c \left(\frac{M}{LT}\right)^{-1} \longrightarrow \begin{cases} 0 = a - 1 \\ 0 = -3a + b + c + 1 \\ 0 = -b + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 1 \\ c = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$\therefore \quad \boxed{\Pi_3 = \frac{\delta \cdot V \cdot d}{\mu}} \quad (3)$$

Vemos que $\Pi_3 = \mathrm{Re}$ (nro. de Reynolds)

$$\mathrm{Re} \longrightarrow \frac{\text{Fuerzas de inercia}}{\text{Fuerzas de viscosidad}}$$

) $\Pi_4 = \delta^a \cdot V^b \cdot d^c \cdot Q^1$

$$\left(\frac{M}{L^3}\right)^a \left(\frac{L}{T}\right)^b \cdot (L)^c \left(\frac{L^3}{T}\right)^1 \longrightarrow \begin{cases} M) \ a = 0 \\ T) \ -b - 1 = 0, \ b = (-1) \\ L) \ b + c + 3 = 0, \ c = -2 \end{cases}$$

$$\Pi_4 = V^{-1} \cdot d^{-2} \cdot Q \longrightarrow \boxed{\frac{Q}{V d^2} = \Pi_4}$$

Finalmente queda:

$$\boxed{\Delta P = \delta \cdot V^2 \cdot f\left(\mathrm{Re}, \frac{d}{D}, \frac{Q}{V \cdot d^2}\right)}$$

Parte práctica

Problema 1: Tomo como volumen control a toda la sección de fluido circulante (desde recipiente superior hasta salida de tobera)

$$\boxed{\frac{(P_2-P_1)}{\gamma}+\frac{(V_2^2-V_1^2)}{2g}+(h_2-h_1)=h_b-h_p} \quad ①$$

h_b: altura suministrada por bomba

h_p: altura de pérdidas

Consideraciones de ec. ①: Datos: $P_2, P_1, h_2, h_1, h_p=f(V_{tubería}), Q$

·) $V_1 \to 0$ dado que $A_1 >> A_2$

$$(Q_1=Q_2;\quad Q=V.A)$$

·) $\boxed{V_{Tub}=\frac{Q}{A}=\frac{4Q}{\pi\,\phi_T^2}}$ ② ·) $\boxed{V_{Tobera}\,(V_2)=\frac{4Q}{\pi\,\phi_{Tob}^2}}$ ③

$\phi_T=50{,}8$ cm $\qquad \phi_{Tob}=25{,}4$ cm

queda:

$$h_b=\frac{\Delta P}{\gamma}+\frac{V_{Tob}^2-\cancel{V_1^2}^{\,0}}{2g}+(h_2-h_1)-\frac{5}{2g}\cdot V_T^2;$$ reemplazo ② y ③:

$$\boxed{h_b=\frac{\Delta P}{\delta\cdot g}+\frac{16\,Q^2}{\pi^2\,\phi_{Tob}^4}\cdot\frac{1}{2g}+(h_2-h_1)+\frac{5}{2g}\cdot\frac{16Q^2}{\pi^2\,\phi_T^4}}$$

reemplazo valores.

① $$\frac{\Delta P}{\delta\cdot g}=\frac{P_2-P_1}{\delta\cdot g}=\frac{(P_2)_{rel}+P_0)-(P_1)_{rel}+P_0)}{\delta\cdot g}$$

$$\frac{\Delta P}{\delta g} = \frac{P_2)_{rel} - P_1)_{rel}}{\delta \cdot g} = \frac{(4{,}21 - 0{,}702)\,\cancel{kPa} \cdot \cancel{m^3} \cdot \cancel{s^2} \cdot \cancel{10^3 Pa}}{\cancel{10^3}\,\cancel{kg} \cdot 9{,}81\,\cancel{m} \cdot \cancel{kPa}} \cdot \frac{\cancel{kg} \cdot m}{\cancel{s^2} \cdot \cancel{m^2} \cdot \cancel{Pa}}$$

$$\boxed{\frac{\Delta P}{\delta g} = 0{,}36\,m}$$

·) $$\left[\frac{16\,Q^2}{2g \cdot \pi^2 \cdot \phi_{rob}^4} = \frac{8 \cdot (0{,}85)^2\,m^6 \cdot \cancel{s^2}}{\cancel{s^2} \cdot 9{,}81\,m \cdot \pi^2 \cdot (0{,}254\,m)^4} = 14{,}34\,m\right]$$

·) $h_2 - h_1 = 6{,}1\,m$

·) $$\frac{5 \cdot 16 \cdot Q^2}{2g \cdot \pi^2\, \phi_T^4} = \frac{5 \cdot (0{,}85)^2\,m^6 \cdot 8\,\cancel{s^2}}{\cancel{s^2} \cdot 9{,}81\,m \cdot \pi^2 (0{,}508\,m)^4} = 4{,}48\,m$$

Finalmente: $h_b = 0{,}36\,m + 14{,}34\,m - 6{,}1\,m + 4{,}48\,m$

$$\boxed{h_b = 13{,}08\,m}$$

$$\therefore \dot{L}_b = \delta \cdot g \cdot Q \cdot h_b = \frac{\cancel{10^3}\,kg \cdot 9{,}81\,m \cdot 0{,}85\,m^3 \cdot 13{,}08\,m}{\cancel{m^3}\ s^2\ s} \cdot \frac{1\,kW}{\cancel{10^3}\,W}$$

$$\boxed{\dot{L}_b = 109\,kW}$$

Problema 2: hallar $\dot{L}_T$ (potencia de turbina)

Datos: Q, δ, h_2, h_1, ~~Φ~~, ∄ Fricción (no considero Temperatura)

Aplico ec. de energía entre 1 y 2 (ver esquema)

$$\boxed{\frac{P_2 - P_1}{\delta g} + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} + h_2 - h_1 = h_T} \quad (1)$$

Para Sup libre $P_2 = P_1 = P_{atm}$, $V_2 \to 0$, $V_1 \to 0$

$$h_T = -(h_2 - h_1)$$

$|h_T| = 30\,m$, definida la potencia de turbinas

$$\boxed{\dot{L}_T = \delta g \cdot h_T \, Q} \quad (2)$$

$$\dot{L}_T = \cancel{10^3} \frac{kg}{\cancel{m^3}} \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2} \cdot 30m \cdot \frac{500 \cancel{kg}\, \cancel{m^3}}{\cancel{10^3} \cancel{kg}\, s}$$

$$\boxed{\dot{L}_T = 147150\,W} \quad (3)$$

Problema 3

$$\boxed{F_D = f(\forall, \rho, \mu, V, \varepsilon)} \quad (1)$$

$\forall$: Volumen

ε: rugosidad

- ¿Puede aparecer el nro de Reynolds? si, tomando ε como L característica
- ¿Puede aparecer fuerza de drag? si, es lo que estoy calculando
- ¿Hay variables con magnitudes similares? $\forall$ y ε

$$[F_D] = \frac{M.L}{T^2}, \quad [\rho] = \frac{M}{L^3}; \quad [\mu] = \frac{M}{LT}, \quad [V] = \frac{L}{T}, \quad [\varepsilon] = L, \quad [\forall] = L^3$$

·) Variables fijas: ρ, V, ε

4) $\pi_1 = \rho^a \cdot V^b \cdot \varepsilon^c \cdot \mu^1$

$$\pi_1 = \left(\frac{M}{L^3}\right)^a \cdot \left(\frac{L}{T}\right)^b \cdot (L)^c \cdot \left(\frac{M}{LT}\right)^1 \nearrow \begin{array}{l} M)\ a+1=0 \\ L)\ -3a+b+c-1=0 \\ T)\ -b-1=0 \end{array} \left| \begin{array}{l} a=-1 \\ b=-1 \\ c=-1 \end{array} \right.$$

$$\pi_1 = \rho^{-1} \cdot V^{-1} \cdot \varepsilon^{-1} \cdot \mu^1 \rightarrow \boxed{\pi_1^* = 1/\pi_1 = \frac{\rho V \varepsilon}{\mu} = \mathrm{Re}}$$ (2)

·) $\pi_2 = \rho^a \cdot V^b \cdot \varepsilon^c \cdot Fd^1$

$$[\pi_2] = \left(\frac{M}{L^3}\right)^a \left(\frac{L}{T}\right)^b \cdot (L)^c \cdot \frac{ML}{T^2} \begin{array}{l} M)\ a+1=0 \\ L)\ -3a+b+c+1=0 \\ T)\ -b-2=0 \end{array} \left. \begin{array}{l} a=-1 \\ b=-2 \\ c=-2 \end{array} \right\}$$

$$\pi_2 = \rho^{-1} \cdot V^{-2} \cdot \varepsilon^{-2} \cdot Fd^1 \rightarrow \boxed{Fd = \pi_2 \cdot \rho V^2 \cdot \varepsilon^2}$$

$\propto \frac{1}{2} c_d \rho V^2 A$!

·) $\pi_3 : \rho^a \cdot V^b \cdot \varepsilon^c \cdot \forall^1$, $[\pi_3] = \left(\frac{M}{L^3}\right)^a \cdot \left(\frac{L}{T}\right)^b \cdot (L)^c \cdot L^3$

M) $a = 0$ L) $c = -3$ $\boxed{\pi_3 = \frac{\forall}{\varepsilon^3}}$

T) $b = 0$

(4) Finalmente: $\pi_2 = f(\pi_1, \pi_3)$; $\therefore$

$$\boxed{Fd = \rho \cdot V^2 \cdot \varepsilon^2 \cdot f\left(\mathrm{Re}, \frac{\forall}{\varepsilon^3}\right)}$$