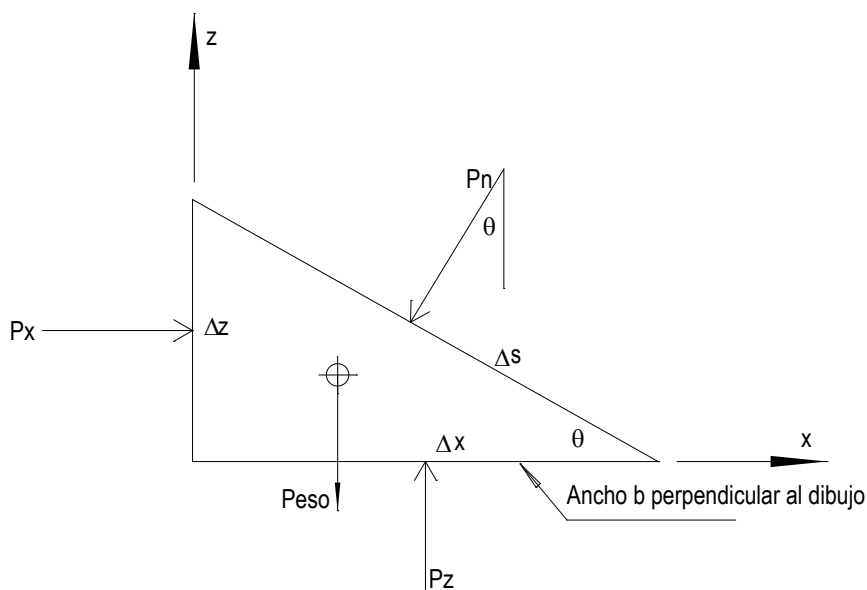


PRESIÓN EN EL SENO DE UN FLUIDO:

En los capítulos anteriores se vio que un fluido no puede soportar esfuerzos de cizalla o corte, esto quiere decir que un esfuerzo normal sobre cualquier plano que pase por una partícula de fluido en reposo tendrá un único valor de presión del fluido, el cual a pesar de ser de compresión por convención se lo considera positivo.

La figura muestra una cuña de fluido en reposo de tamaño Δx por Δz por Δs y un ancho b , el cual suponemos perpendicular al plano del dibujo. Por definición no hay esfuerzo cortante, pero vamos a postular que las presiones pueden ser diferentes, el peso del elemento que consideraremos como

$$\text{Peso} = \delta g \left(\frac{1}{2} b \Delta x \Delta z \right).$$



Como la partícula de fluido que estamos considerando esta en reposo no tiene aceleración por lo tanto la suma de las fuerzas debe ser cero en todas las direcciones

$$\sum F_x = 0 = P_x b \Delta z - P_n b \Delta s \sin \theta$$

$$\sum F_z = 0 = P_z b \Delta x - P_n b \Delta s \cos \theta - \frac{1}{2} \delta g b \Delta x \Delta z$$

pero por la geometría de la figura tenemos que $\Delta s \sin \theta = \Delta z$ y $\Delta s \cos \theta = \Delta x$, sustituyendo estos términos en las ecuaciones anteriores y reagrupando los términos nos queda:

$$P_x = P_n \quad P_z = P_n + \frac{1}{2} \delta g \Delta z$$

Las expresiones deducidas muestran dos resultados importantes de la estática de los fluidos

- No hay variación de presión en la dirección horizontal

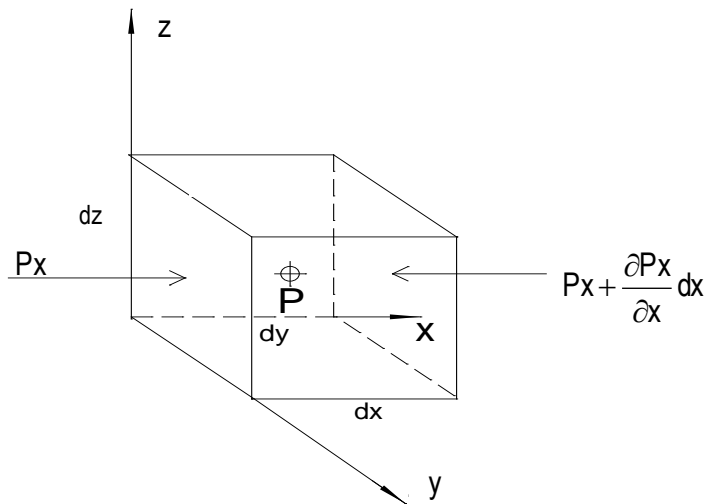
ESTÁTICA DE LOS FLUIDOS

- Hay una variación en sentido vertical proporcional a la densidad, la gravedad y la diferencia de alturas

En el límite cuando la cuña de fluido colapsa hasta ser “un punto”, o sea $\Delta z \rightarrow 0$ las expresiones deducidas nos dan:

$$P_x = P_n = P_z = P$$

Como el ángulo θ es arbitrario concluimos que la presión en cualquier punto es independiente de la dirección, de modo que la presión es, en este caso, un escalar.

LAS ECUACIONES DE EQUILIBRIO DE LA ESTÁTICA:

Para un elemento de volumen de fluido en reposo con respecto a los ejes coordenados que se adopten, deben cumplirse que las ecuaciones correspondientes en las componentes de la resultante de las fuerzas aplicadas al mismo en las direcciones (x, y, z) deben ser nulas.

Si se representa un elemento de fluido como el de la figura superior con forma de un cubo de lados dx, dz y dy de modo que su volumen es $dV_e = dx \cdot dy \cdot dz$; por lo que podemos decir que su masa puede definirse como $dm_e = \delta dV_e$, siendo δ la densidad del mismo.

Como definimos que el cubo está en reposo, no existen esfuerzos tangenciales por lo tanto las fuerzas que aparecen son las debidas a la presión sobre las caras del elemento y las debidas a la masa.

La fuerza neta de presión que resulta de la variación de presión puede evaluarse mediante las sumas de las fuerzas que actúan sobre las seis caras del elemento en cuestión, para mas simplicidad se evaluarán en una dirección pudiéndose aplicar el mismo concepto a las demás direcciones.

Las presiones P_x y P_{x+dx} en las caras de abscisas x y x+dx, dan lugar a fuerzas

$$dF_x = P_x dz dy - \left(P_x + \frac{\partial P}{\partial x} dx \right) dz dy$$

de donde distribuyendo y agrupando términos tenemos que en la dirección de x dF_x queda

ESTATICA DE LOS FLUIDOS

$$dF_x = -\frac{\partial P}{\partial x} dx dz dy = -\frac{\partial P}{\partial x} dV_e$$

En correspondencia con su baricentro, el punto P, para un elemento de fluido como el de la figura la componente de la fuerza en la dirección x será:

$$X \cdot dm_e$$

Es condición de equilibrio que en la dirección x la sumatoria de las fuerzas sea nula

$$X \cdot dm_e - \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) dV_e = 0$$

reemplazando dV_e , por dm_e / δ y dividiendo por dm_e queda

$$X - \frac{1}{\delta} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) = 0$$

que expresa la Ecuación de Equilibrio en la dirección del eje x, para el elemento de fluido en reposo considerado, para todas las direcciones se tendrá:

$$X - \frac{1}{\delta} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) = 0$$

$$Y - \frac{1}{\delta} \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right) = 0$$

$$Z - \frac{1}{\delta} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right) = 0$$

EXPRESIÓN VECTORIAL:

Siendo $p = p_x = p_z = p_y$, puede expresarse vectorialmente las ecuaciones como sigue:

$$\bar{F}_{\text{SUPERFICIE}} = F_x \bar{i} + F_y \bar{j} + F_z \bar{k}$$

$$\bar{F}_{\text{SUP}} = -\left(\frac{\partial P}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z \right) \bar{i} - \left(\frac{\partial P}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z \right) \bar{j} - \left(\frac{\partial P}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z \right) \bar{k} = -\left(\frac{\partial P}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial P}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial P}{\partial z} \bar{k} \right) \Delta x \Delta y \Delta z$$

El término entre paréntesis es el gradiente de la presión, al tomar el gradiente de un campo escalar se obtiene un campo vectorial, por lo tanto podemos escribir la ecuación como:

$$F_{\text{sup}} = -\text{grad } P \Delta x \Delta y \Delta z$$

siendo $\Delta x \Delta y \Delta z$ el volumen del cubo elemental la fuerza resultante es entonces $\bar{F}_{\text{sup}} = -\text{grad } P \Delta v$

Por otra parte las fuerzas másicas que actúan sobre el mismo cubo pueden tener distintos orígenes, para este análisis consideraremos la existencia de un campo gravitatorio, que generará una fuerza

$$\bar{F}_{\text{másica}} = \bar{g} \delta \Delta v = -\bar{g} \bar{k} \delta \Delta v$$

Para una partícula de fluido, la segunda ley de Newton nos dice $\bar{F} = \bar{a} dm = \bar{a} \delta dv$. En el caso de un fluido estático la aceleración debe ser cero, por lo tanto:

ESTATICA DE LOS FLUIDOS

$$\sum \bar{F} = -\text{gra } dP \Delta v - \bar{g} \bar{k} \delta \Delta v = 0,$$

de donde se deduce que:

$$\text{gra } dP = -\bar{g} \bar{k} \delta$$

Para un fluido en reposo, o con aceleración nula, tenemos que $\nabla P = \delta \mathbf{g}$, esta es la distribución de presiones en hidrostática para todo fluido en reposo, no importa cual sea su viscosidad.

Recuérdese que el vector ∇P expresa la magnitud y dirección del máximo ritmo de variación de la propiedad escalar presión P , por ello ∇P es perpendicular en todo punto a las superficies de presión constante.

ECUACIÓN DE LA HIDROSTÁTICA

No existiendo fuerzas inerciales y por estar los ejes en reposo con respecto a la tierra, de las ecuaciones de equilibrio:

$$X - \frac{1}{\delta} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) = 0; \quad Y - \frac{1}{\delta} \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right) = 0; \quad \text{a con } X = 0 \quad Y = 0 \text{ se deduce que } \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

y $Z - \frac{1}{\delta} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right) = 0$ donde Z es igual a $-g$, ya que se trata de una fuerza por unidad de masa

$$-g - \frac{1}{\delta} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right) = 0$$

Como P varía solo con la altura, podemos usar diferencial total, por lo tanto: $-g - \frac{1}{\delta} \frac{dP}{dz} = 0$

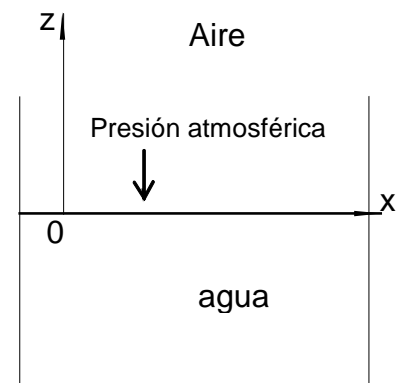
Entonces $dP = -g \delta dz$, pero el producto de la densidad por la aceleración de la gravedad no es otra cosa que el peso específico nos queda que: $dP = -\gamma dz$, ecuación que podemos integrar tomando para nuestro caso el peso específico constante como:

$$P = \int -\gamma dz = -\gamma z + \text{cte}$$

Esta ecuación se conoce como la ecuación de la hidrostática y para determinar la constante, debemos considerar un sistema de coordenadas adecuado al problema de queremos resolver, supongamos un tanque con agua con un sistema de coordenadas ubicado en la superficie libre, para $z = 0$, la presión coincide con la presión atmosférica (P_0); a una profundidad z se tendrá entonces una presión:

$$P = P_0 + \gamma z$$

De la fórmula anterior se deduce que la presión sólo cambia con la

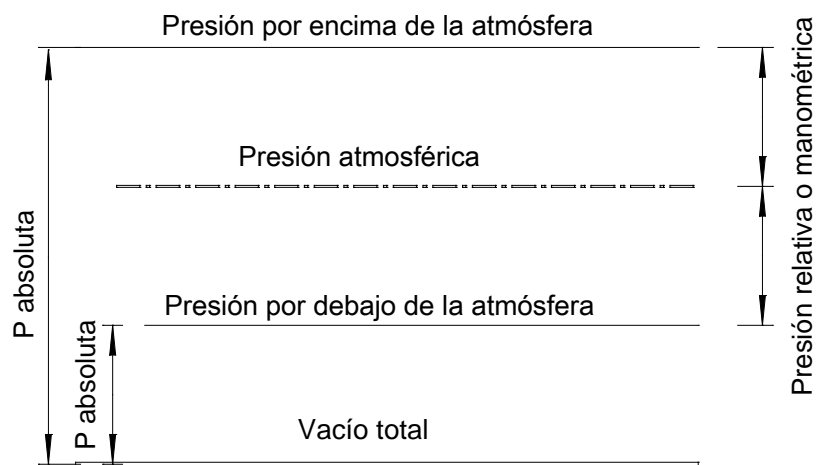


profundidad, resultando que las superficies equipotenciales para las que se tiene presión constante son perpendiculares en cada punto a la aceleración de la gravedad.

Presión absoluta y manométrica:

Muchas veces en el trabajo del ingeniero se deben medir presiones o interpretar lo que sucede dentro de un lugar donde la presión reinante es distinta de la atmosférica. Por ello se hace necesario definir dos conceptos muy importantes como son la *presión absoluta* y la *presión manométrica o relativa*.

En la figura se muestran en distintos niveles los conceptos de presión absoluta y relativa.



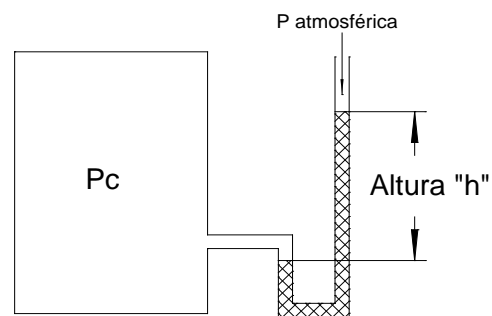
Para una mejor identificación supongamos que tenemos una cámara en la cual se desea medir la presión P_c , se ha conectado un tubo en "U" con un líquido de peso específico γ_f , midiendo la altura "h" se puede determinar la presión dentro de la cámara.

- Presión absoluta:

$$P_c = P_{atm} + \gamma_f \cdot h$$

- Presión relativa o manométrica

$$P_c - P_{atm} = \gamma_f \cdot h$$



Este tipo de tubos utilizados para medir la presión, se

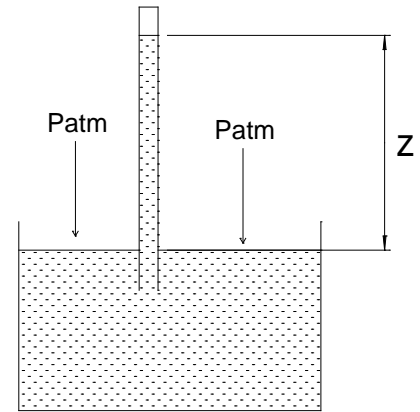
llama Manómetro, el cual utiliza los distintos desplazamientos de las columnas de fluido para determinar diferencia de presión.

El instrumento utilizado para medir la presión atmosférica recibe el nombre de *Barómetro*, puede efectuarse con un tubo de vidrio abierto en un extremo, el cual es llenado de mercurio para desalojar todo el aire en su interior, una vez lleno se sumerge en un recipiente con mercurio cuidando quedando el

ESTATICA DE LOS FLUIDOS

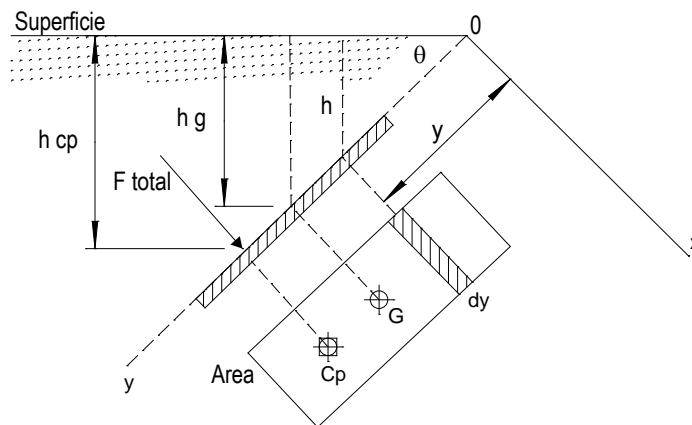
extremo superior cerrado hacia arriba y no permitiendo la entrada de aire al interior. Una vez sumergido se observa que se establece una columna z de mercurio, como lo muestra el esquema, en la superficie libre del mercurio actúa la presión atmosférica por lo tanto puede establecerse una relación entre la altura y dicha presión, Como en la parte superior del mercurio no hay aire¹, tenemos que:

$$P_{\text{atm}} = \gamma_{\text{mercurio}} \cdot z$$



Para fines prácticos esta distancia se toma en 760 mm de Hg,

por eso es muy común escuchar que la presión se mide en “columna de mercurio” ó “columna de agua”.

FUERZAS SOBRE SUPERFICIES SUMERGIDAS

Si tenemos una superficie sumergida, formando un ángulo θ cualquiera con la superficie, nos interesa saber cual es la fuerza que el fluido ejerce sobre la misma, como puede ser el caso de diques o represas.

Primero consideremos una superficie genérica la cual tiene un área sumergida que puede tener cualquier forma (por simplicidad se ha hecho rectangular), dicha superficie tiene un centro de gravedad C_g y tomamos dos ejes coordenados sobre la misma con el centro en 0.

Como la fuerza actúa en toda el área y la superficie esta sumergida, la presión sobre la misma variará con la distancia h , por lo tanto la fuerza total será:

$$dF = p \, dA = \gamma \cdot h \cdot dA$$

Pero la distancia h puede ser expresada en función de la distancia al centro de los ejes coordenados como

$$h = y \cdot \text{sen } \theta$$

Debemos integrar a lo largo de toda la superficie la expresión de dF , quedando entonces

¹ Pero se tiene la presión de vapor del mercurio, la cual como es muy pequeña, se puede despreciar a los fines prácticos

ESTATICA DE LOS FLUIDOS

$$F = \int \gamma \cdot h \cdot dA = \int \gamma \cdot y \cdot \text{sen } \theta \cdot dA$$

$$F = \gamma \cdot \text{sen } \theta \int y \cdot dA$$

Donde $\int y \cdot dA$ es el momento estático de la superficie, el cual por definición $\int y \cdot dA = y_{CG} \cdot A$ quedando

$$F = \gamma \cdot \text{sen } \theta \cdot Y_{CG} \cdot A$$

Observando el dibujo se deduce que el producto Y_{CG} por $\text{sen } \theta$, no es otra cosa que la profundidad del centro de gravedad o baricentro de la superficie en cuestión h_{CG} , por lo que la fuerza total sobre la superficie sumergida es:

$$F = \gamma \cdot h_{CG} \cdot \text{Area}$$

Pero resta conocer donde esta aplicada esta fuerza, por que su ubicación no es en el centro de gravedad, sino un punto llamado centro de presión (Cp). Para esto tomamos momentos a partir del eje 0x, mostrado en la figura superior, recordando que la suma de los momentos de todas las fuerzas es igual al momento de la resultante:

$$\int dF \cdot y = F_R \cdot y_{CP}$$

De donde $dF = \gamma \cdot h \cdot dA = \gamma \cdot (y \text{ sen } \theta) dA$, reemplazando dF a la izquierda del signo igual en la ecuación anterior, queda

$$\Rightarrow \int \gamma \cdot y \cdot \text{sen } \theta dA y = \gamma \text{ sen } \theta \int y^2 dA$$

Por otro lado a la derecha del signo igual podemos hacer el siguiente reemplazo, teniendo en cuenta que la fuerza total sobre la superficie no es otra cosa que la resultante de todas las fuerzas aplicadas a la superficie

$$F_R = \gamma \cdot (y_{cg} \text{ sen } \theta) A$$

Igualando términos tenemos $\gamma \cdot \text{sen } \theta \int y^2 dA = \gamma \cdot (y_{cg} \text{ sen } \theta) A y_{CP}$ pero la expresión $\int y^2 dA$ no es otra cosa que el Momento de Inercia de la superficie sumergida en cuestión, tomado a partir del eje de momentos.

Entonces, simplificando y ordenando nos queda $I_{\text{Area}} = y_{cp} \cdot y_{cg} \cdot A \Rightarrow y_{CP} = \frac{I_{\text{Area}}}{y_{cg} A}$, recordando el Teorema

de Steiner, nos queda que para un eje no baricentrico la expresión final es:

$$y_{CP} = y_{CG} + \frac{I_{\text{Area}}}{y_{CG} \cdot A}$$

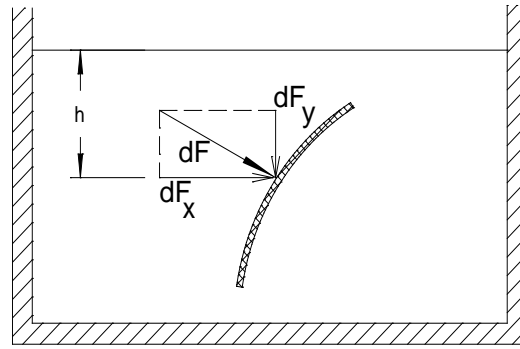
De donde se deduce que el centro de presión de la resultante esta aplicada por debajo del centro de gravedad de la superficie sumergida.

SUPERFICIES CURVAS:

Para una superficie curva se tienen dos componentes en las direcciones x e y.

$$F_x = \int_{\text{AREA}} \gamma h dA_x \quad y \quad F_y = \int_{\text{AREA}} \gamma h dA_y$$

Por eso se debe hallar las componentes para hallar la fuerza total y el lugar donde está aplicada.



- La *componente horizontal* de la fuerza hidrostática sobre la superficie curva es igual a la fuerza normal sobre la proyección vertical de la superficie y pasa por el centro de presión.
- La *componente vertical* de la fuerza hidrostática sobre la superficie es igual al peso del líquido situado por sobre el área real o imaginaria y pasa por el centro de gravedad.

EMPUJE:

Los mismos principios aplicados a las superficies sumergidas se pueden utilizar para al cálculo de la resultante sobre un cuerpo completamente sumergido o uno que flota, esto fue deducido por Arquímedes²

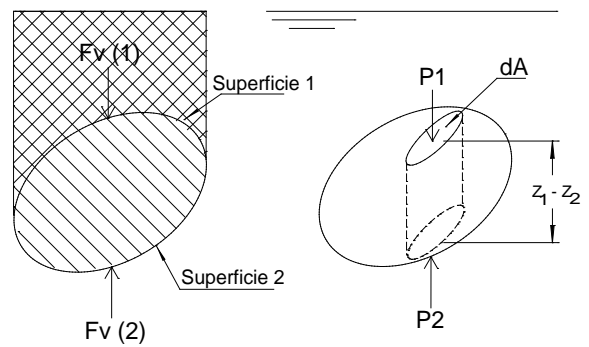
1. Un cuerpo sumergido experimenta una fuerza de flotación vertical o empuje igual al peso de fluido que desaloja.
2. Un cuerpo que flota desaloja su propio peso en el fluido en que flota

En las figura de la izquierda se aprecia que el cuerpo esta limitado por una superficie superior y otra inferior, el cuerpo experimenta un empuje vertical de

$$E = F_{v_2} - F_{v_1}$$

$$E = (\text{peso del fluido sobre } 2) - (\text{peso del fluido sobre } 1)$$

$$E = \text{peso del fluido desplazado por el cuerpo}$$



En la figura de la derecha podemos sumar las fuerzas elementales verticales que actúan sobre el cuerpo

$$E = \int_{\text{CUERPO}} (P_2 - P_1) dA = -\gamma \int (z_2 - z_1) dA = -\gamma \cdot (\text{Volumen del cuerpo})$$

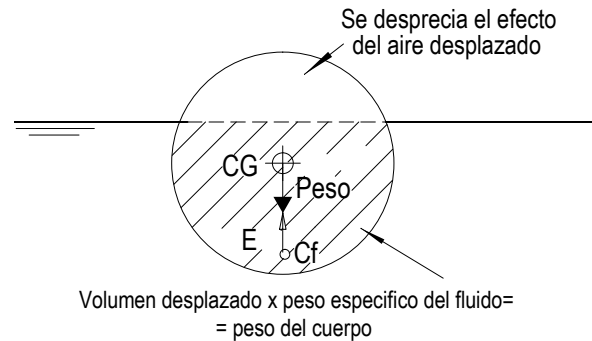
La expresión anterior supone que el fluido tiene un peso específico uniforme, la línea de acción de la fuerza de empuje o flotación pasa por en centro de gravedad del cuerpo, el punto donde actúa el Empuje se llama Centro de flotación (Cf en el dibujo)

² Siglo tercero antes de Cristo, famoso por su frase "Eureka" y por haber aplicado este principio cuando el Rey Hierón le solicita que verifique si la cantidad de oro y plata entregada para la fabricación de su corona al orfebre era correcta, las consecuencias por la aplicación de su principios fueron desastrosas....para el orfebre.

En un cuerpo que flota sólo una parte está sumergida y el resto sobresale a la superficie, en este caso la fuerza de flotación o Empuje (E en el dibujo es:

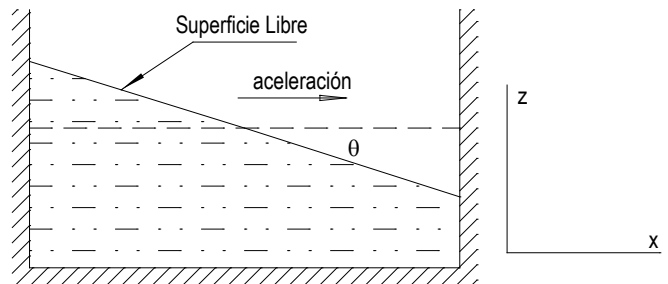
$$E = \gamma \cdot (\text{volumen desplazado}) = \text{peso del cuerpo flotante}$$

El empuje no sólo equilibra al peso, sino que debe estar aplicado en la misma recta de acción, de esa forma en el equilibrio estático no hay momentos.



FLUIDOS ACELERADOS EN AUSENCIA DE ESFUERZOS CORTANTES

Consideremos un fluido con una aceleración constante con el tiempo, cada partícula no tiene movimiento relativo con relación a su vecina inmediata, así que el fluido se mueve como si fuese un sólido rígido.



Aplicando las ecuaciones de equilibrio de la estática tenemos

$$X - \frac{1}{\delta} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) = 0 \Rightarrow -a_x - \frac{1}{\delta} \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = -\delta a_x$$

$$Z - \frac{1}{\delta} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right) = 0 \Rightarrow -g - \frac{1}{\delta} \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \rightarrow \frac{\partial P}{\partial z} = -\delta g$$

$$\partial P_{(x,z)} = \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial z} dz = -\delta a_x dx - \delta g dz$$

Para una superficie equipotencial (superficie libre) tenemos que $\partial P_{(x,z)} = 0$, por lo tanto

$$0 = \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial z} dz = -\delta a_x dx - \delta g dz = 0 \rightarrow -\delta a_x dx = \delta g dz \Rightarrow$$

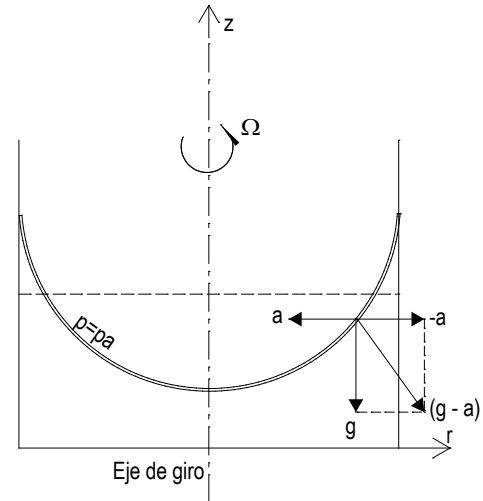
$$\Rightarrow \frac{-a_x}{g} = \frac{dx}{dz} = \tan \theta (\text{ángulo de inclinación})$$

ESTÁTICA DE LOS FLUIDOS

Otro caso especial es el de la rotación de un fluido alrededor de un eje de giro (eje z en nuestro caso) como se ve en la figura, si suponemos que el recipiente que contiene el fluido lleva girando un tiempo a una velocidad constante Ω , el fluido puede considerarse como sólido rígido, y tendrá aceleración centrípeta. Aplicando las ecuaciones de la estática tenemos que:

$$-r\Omega^2 + \frac{1}{\delta} \frac{\partial P}{\partial r} = 0 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial r} = \delta r \Omega^2$$

$$-g + \frac{1}{\delta} \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial z} = -\delta g$$



podemos decir que la presión depende de dos variables, r y z .

$$\partial P(r, z) = \frac{\partial P}{\partial r} dr + \frac{\partial P}{\partial z} dz = \delta r \Omega^2 dr - \delta g dz$$

Podemos integrar manteniendo una de las variables constantes, por ejemplo z , el resultado es

$$P = \frac{1}{2} \delta r^2 \Omega^2 + f(z)$$

donde la constante de integración es función de z . Integrando ahora respecto a z tenemos que

$P = -\delta g z + C$, de donde deducimos que esta es $f(z)$, por lo tanto $P = Cte - \delta g z + \frac{1}{2} r^2 \Omega^2$, esta es la

distribución de presiones del fluido. Si $P = p_{atm}$ en $(r, z) = (0, 0)$, la Cte es p_{atm} , la distribución buscada es

$$P = p_{atm} - \delta g z + \frac{1}{2} r^2 \Omega^2$$

La distribución es lineal con respecto a z y parabólica respecto a r . Si despejamos z tendremos

$$z = \frac{p - p_{atm}}{\delta g} + \frac{r^2 \Omega^2}{2g}$$

Para una superficie equipotencial donde la variación de presión es nula se tiene $z = \frac{r^2 \Omega^2}{2g}$ que es un

paraboloide de revolución.

Bibliografía complementaria para referencia y consulta:

FRANK M. WHITE, Mecánica de Fluidos, Ed. Mc Graw Hill

ROBERT FOX – ALAN MAC DONALD, Introducción a la Mecánica de Fluidos, 4ta Edición, Mc Graw Hill

IRWIN SHAMES, Mecánica de Fluidos, 6ta Ed. Editorial Mc Graw Hill

RONALD GILES, Mecánica de los fluidos e Hidráulica, Ed. Mc Graw Hill

STREETER Y WEELER, Mecánica de los fluidos, Ed. Mc Graw Hill