1 MODELOS MATEMATICOS EN ANÁLISIS DE FLUJOS

A.- Conceptos básicos previos para entender este módulo

a.1 .- Definición de Fluido.

Un fluido es una sustancia que puede fluir, y una sustancia puede fluir si tiene fluidez, esta definición no parece ser muy útil, podemos dar más detalles acerca de que significa fluidez ?

Suponga que en un experimento clásico de movimiento unidimensional se coloca una sustancia desconocida entre dos láminas sólidas, cuando a la placa superior se le aplica una fuerza F cualquiera , y la inferior permanece fija, pueden suceder tres cosas:

1.- Que se establezca en la placa superior un movimiento uniformemente acelerado, en este caso hay vacio entre ambas láminas.

2.- Que se establezca un movimiento uniformemente retardado, en este caso, después de un tiempo la lámina se detendrá pero la fuerza seguirá presente. En este caso hay una sustancia sólida entre las láminas y unida a ellas.

3.- Que se establezca un movimiento uniforme (de velocidad constante no nula) y en este caso se establece que la sustancia ubicada entre las láminas es un fluido. Es un hecho experimental comprobado, con láminas sólidas de diversos materiales y fluidos diferentes que la sustancia se adhiere a ambas láminas presentando velocidad nula en la inferior y la velocidad correspondiente al desplazamiento de la lámina en la superior (es decir también está adherido a ella) , así como un patrón de distribución de velocidades lineal entre ambas.

a.2.- Los tres parámetros que definen un fluido

La densidad es una medida de la resistencia inercial del fluido o resistencia a la aceleración, si la densidad puede variar mucho con las fuerzas actuantes, los fluidos se llaman compresibles e incompresibles en caso contrario. Para el aire la densidad varía grandemente con la altura o sea con el peso de la columna por encima de una cota dada.

La temperatura es una manifestación de la energía cinética, a mayor energía cinética molecular mayor Temperatura.

La presión es una manifestación del promedio de las fuerzas de choque molecular con un cuerpo sumergido en el flúido, la presión media en una superficie diferencial sumergida, se manifiesta perpendicular a la superficie, siendo $p = dF / ds$ si suponemos un cuerpo facetado, por ejemplo un icosaedro sumergido en la masa de un flúido en reposo, cada faceta recibirá una tensión normal o presión perpendicular a ella, ahora si hacemos tender este volumen $\rightarrow 0$, la presión sería la misma para toda dirección del punto sumergido en el que se ha transformado el icosaedro.

Los principios de Pascal y de Arquímedes estudiados en Estática de flúidos, son consecuencia de la Ecuación Fundamental de la hidrostática $dp = -\rho g \; dh$, el primero surge del concepto anterior de equipresión en un punto para un nivel de inmersión dado y de la definición de presión (el concepto de inmersión está tomado con criterio amplio ya sea para un liquido o un gas).

El principio de Arquímedes es en realidad un teorema muy fácil de demostrar, si imaginamos una porción de fluido geométricamente delimitada por un contorno imaginario en el seno del mismo flúido en el que está sumergido, si el flúido está en reposo, la región está en equilibrio gravitacional entre el peso del volumen de la región y la resultante de fuerzas de presión sobre el contorno imaginario.

Por tanto, la resultante de presiones debe ser igual a un empuje $E = \gamma \, . \, Vol = W$ siendo W el peso del volumen seleccionado, al reemplazar el volumen por el de otra sustancia, la resultante de presiones no cambia, pero si lo hará *W*, el empuje entonces seguirá siendo igual al peso del líquido desalojado y dirigido en sentido opuesto al peso actual del volumen sumergido, con lo cual el teorema queda demostrado.

El peso se ubica en el c.g del cuerpo, mientras que el empuje tendrá su punto de aplicación en el c.g del equivalente del flúido desalojado, ambos puntos por lo general no coinciden.

a.3.- Características generales de un flúido.

Los flúidos responden mejor al tratamiento matemático como cuerpos flexibles, es decir manifestar poca capacidad para resistir esfuerzos de corte, y se clasifican generalmente en líquidos y gases lo que incluye vapores.

Los líquidos, presentan fuerzas intermoleculares que permiten definir volumen pero no forma, son poco compresibles y la Densidad varía poco con la Presión y Temperatura

Los gases, tienen un comportamiento diferente, P, V y T se relacionan a través de las ecuaciones de Estado termodinámico.

En mecánica clásica basta con seguir la trayectoria de un punto particular del cuerpo discreto llamado c,g, (centro de gravedad) respecto a un sistema de referencia, para conocer su trayectoria, velocidad y aceleración, en fluidos esto no se puede hacer debido a la falta de cohesión pero podemos hacer dos cosas,

seguir cada partícula de fluido en particular con el transcurso del tiempo, como si fuera un cuerpo sólido de volumen $\rightarrow 0$ (descripción Langrangiana)

o bien elegir un punto no material del campo flúido, referido a un sistema de coordenadas inerciales, sin mirar que partícula pasa por allí, y describir los parámetros físicos y termodinámicos del punto a medida que transcurre el tiempo (descripción Euleriana)

a.4.- Acerca del concepto de velocidad de una partícula .

Podemos definir la velocidad en una partícula dada y en un instante dado, como el cociente del impulso total en la región diferencial dividido por la masa de la región diferencial o sea $I / m = m\boldsymbol{V} / m = \boldsymbol{V}$

Debido a que las moléculas individuales se mueven en todas direcciones, cada una tiene un impulso diferente, por eso definimos la velocidad del flúido en un punto como el cociente del impulso total de las moléculas que forman la región sobre la masa total de las moléculas de la región., tenemos entonces la velocidad de la partícula fluida.

Las fuerzas que pueden actuar sobre la partícula fluida son de dos tipos

1.- Fuerzas corporales.
actúan por campos (gravitatorias , eléctricas y magnéticas).

2..- Fuerzas superficiales.
Actúan por contacto y son de dos tipos, (normales a las superficies) o fuerzas de presión
Tangenciales (paralelas a las superficies) o fuerzas de fricción viscosa.

En cada instante, la partícula está en equilibrio dinámico bajo la acción de fuerzas de presión, viscosas e inerciales, la aceleración instantánea producida por estas fuerzas, más las ecuaciones de unicidad que se dan en el punto 1.8, y determinan la ubicación del punto en el siguiente instante y finalmente la trayectoria de la partícula.

Nótese aquí que el efecto gravitatorio de la partícula se traduce en un aumento de la presión en una de sus caras por lo cual intrínsecamente se compone con el vector resultante de las fuerzas netas de presión. También prescindimos de las fuerzas eléctricas y electromagnéticas.

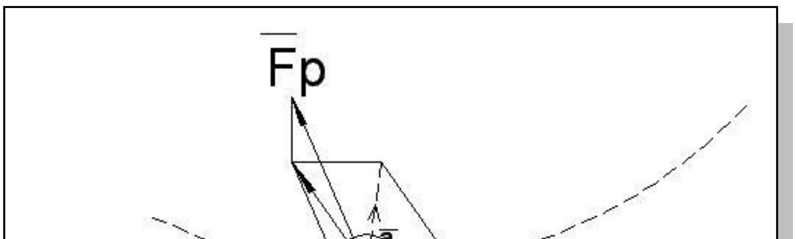

Fig. A.1

La dirección instantánea del movimiento, no necesariamente debe coincidir con el vector de aceleración ni con la dirección de los vectores componentes, ya que el vector aceleración contiene las componentes tangencial y normal a la trayectoria.

La resultante de las fuerzas viscosas o superficiales en las caras, se puede aplicar en el baricentro de la partícula si adicionamos un momento de rotación.

La partícula se considera en equilibrio dinámico instantáneo de acuerdo con el corolario D'Alembert dado por:

$\Sigma\, Fi - m.\, \boldsymbol{a} = 0$
$\Sigma\, Mi - J.\, \boldsymbol{\alpha} = 0$

Donde $\boldsymbol{a}$ es la aceleración neta de la partícula y $\boldsymbol{\alpha}$ su aceleración angular según el eje z.

La aceleración angular termina anulándose debido a la presencia de la misma viscosidad que hace crecer el par antagónico por resistencia con las partículas vecinas, sin embargo la rotación de velocidad angular constante persistirá, ya que el fenómeno de la rotación es creado por la viscosidad, y en presencia de viscosidad el fluido siempre será rotacional.

O sea que la condición básica es que $\boldsymbol{F}p + \boldsymbol{F}v - \boldsymbol{F}i = 0$ en cada instante como se observa en la figura anterior, si tuviéramos un fluido de viscosidad muy pequeña, $\boldsymbol{F}v \approx 0$ (fuerzas debidas a la viscosidad muy pequeñas) quedará $\boldsymbol{F}p + \boldsymbol{F}i = 0$ análogamente, si las fuerzas de inercia pueden despreciarse, (flujo altamente viscoso) $\boldsymbol{F}p + \boldsymbol{F}v = 0$ en este caso no habrá aceleración neta para la partícula.

Los comportamientos fluidos como veremos más adelante pueden clasificarse en relación a la importancia relativa de los módulos de los vectores $\boldsymbol{F}v$ y $\boldsymbol{F}i$, y en particular a su cociente: $\left|\vec{F}i\right| / \left|\vec{F}v\right|$

1.1 <u>Conceptos Introductorios</u>.

a.- Admitimos cono conocida la definición y propiedades de Campo Escalar.

b.- Análogamente para la definición y propiedades del Campo Vectorial concepto que aplicaremos especialmente en referencia al campo vectorial de velocidades y aceleraciones.

c.- Criterio de Euler: Se definen los lugares geométricos del campo flúido mediante un sistema de coordenadas genérico inercial, que determina un conjunto de puntos fijos y no materiales del campo respecto de dicha terna, así por ejemplo, se establece el campo de velocidades para cada punto y su variación en el tiempo, es decir el campo de velocidades queda definido por: $\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t)$, donde las coordenadas *x, y, z,* corresponden a las posiciones de los puntos genéricos del espacio definido por el sistema de coordenadas, y *t* a la coordenada temporal.

d.- Criterio de Lagrange: Obedece a la definición del movimiento y seguimiento de cada una de las partículas del campo de flujo, también a partir de una referencia de coordenadas genérica inercial. Por ejemplo la velocidad de la partícula n_esima puede describirse a través de tres ecuaciones escalares deducibles a partir de: $\vec{V}_n = \vec{V}_n(t)$ la velocidad de la partícula elegida para el seguimiento es función de las posiciones instantáneas de los puntos que va recorriendo, y del tiempo *t,* como la posición de la partícula n_esima varía con el tiempo, $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, la velocidad de la partícula variará solamente con el tiempo.

La descripción Langrangiana determina la línea de trayectoria de cada partícula al transcurrir el tiempo; mientras que en la descripción Euleriana podemos unir los puntos no materiales para los cuales el vector velocidad pueda con continuidad en magnitud y dirección, y que llamamos "filete posible", la partícula que en el instante t_o pase por el punto no material *A* en el instante siguiente $t + \Delta t$ ocupará la posición B de alguna de los "filetes posibles" y no otra posición.

e.- Variación Incremental Euleriana de una propiedad cualquiera de la partícula, ya sea una propiedad física escalar o vectorial, tendrá una variación continua en espacio y tiempo por ejemplo la velocidad entre dos puntos próximos de su movimiento, quedará definida por:

$$d\vec{V} = (\frac{\partial \vec{V}}{\partial x})dx + (\frac{\partial \vec{V}}{\partial y})dy + (\frac{\partial \vec{V}}{\partial z})dz + (\frac{\partial \vec{V}}{\partial t})dt \qquad 1.1.1$$

Cada término contiene un producto de la razón de cambio del parámetro según la dirección correspondiente multiplicado por la métrica de distancia en dicha dirección, el último término corresponde al cambio temporal del campo al transcurrir el tiempo, a su vez la ecuación vectorial dará lugar a tres ecuaciones escalares.

Los tres primeros términos representan el cambio de la velocidad debida al cambio de posición en el tiempo de la imagen en el instante inicial *t,* como si el campo fuera permanente, el último término, al cambio de velocidad en la posición espacial ocupada por la partícula , no debida al cambio de posición , sino al cambio del instante temporal de *t* a $t + \Delta t$. del campo de velocidades, en general no permanente.

Para establecer el campo de aceleraciones aplicamos las leyes de derivación de funciones compuestas, tomando en cuenta que como x, y, z, son funciones del tiempo :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = (\frac{\partial \vec{V}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z}\frac{dz}{dt}) + (\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}) \quad o\,bien, \quad \vec{a} = \vec{V}_S \cdot \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial s}\right) + \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}\right)$$

$$\vec{a} = \frac{D\vec{V}}{Dt} = (\frac{\partial \vec{V}}{\partial x}V_x + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y}V_y + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z}V_z) + (\frac{\partial \vec{V}}{\partial t})$$

que da lugar a tres ecuaciones escalares de aceleración .

Para el resultado anterior vemos que el campo vectorial de aceleración está compuesto de dos partes, el paréntesis largo que representa las variaciones de velocidad de acuerdo al cambio de posición espacial, se la denomina "componente de transporte de la aceleración".

Y el término del segundo paréntesis nos define el cambio de velocidad en el punto de destino al transcurrir el tiempo en un campo no permanente, se lo denomina "aceleración local".

Aplicando la definición del operador gradiente del Análisis vectorial :

$$grad = (\frac{\partial}{\partial x}\breve{i} + \frac{\partial}{\partial y}\breve{j} + \frac{\partial}{\partial z}\breve{k})$$

la expresión anterior de la aceleración puede escribirse como:

$$\vec{a} = \frac{D\vec{V}}{Dt} = \vec{V} \times grad\,\vec{V} + (\frac{\partial \vec{V}}{\partial t})$$

Obsérvese que hemos puesto ***DV**/Dt* que es la simbología usada para la <u>derivada sustancial o total</u> para significar que la derivada respecto del tiempo deber realizarse siguiendo a la partícula.

La variación : *dx **i** + dy **j** + dz **k** = ds* se utiliza para definir la porción de trayectoria seguida por la partícula o envolvente de la trayectoria o también línea de corriente.

La partícula siguiente que pase por el punto de referencia inicial donde comenzamos a seguir a la partícula típica, tendrá en general una velocidad diferente en magnitud y dirección (un vector diferente) a la partícula inicial, es decir no seguirá en general la misma traza de trayectoria que la partícula típica. Fundamentaremos mejor este concepto cuando definamos Línea de Corriente, más adelante.

1.2.- <u>Propiedades Extensivas e Intensivas de la materia</u>:

Propiedades Extensivas son aquellas que dependen de la cantidad de materia presente en el sistema. Por ejemplo: peso, cantidad de movimiento, masa, energía.

Las propiedades Intensivas no dependen de la cantidad de materia. Por ejemplo: presión, temperatura, etc.

Las propiedades Extensivas pueden transformarse en Intensivas, dividiendo por la cantidad de masa presente en un sistema por ejemplo:

$v = v/m$ Volumen por unidad de masa,
$e = E/m$ Energía por unidad de masa, etc.

Las propiedades extensivas así definidas en general se denominan <u>específicas</u>.

El concepto de derivada total o sustancial puede aplicarse a cualquier variable del campo ya sea Escalar o Vectorial, y quedará en general como:

$$\dot{N} = \frac{DN}{Dt} = \vec{V} \times grad\,N + (\frac{\partial N}{\partial t}) \qquad 1.2.1$$

siendo N una propiedad genérica, ya sea escalar o vectorial.

1.3- <u>Siguiendo una partícula según Lagrange:</u>

Ubicar una partícula del campo y seguirla implica conocer su ecuación de posición para el intervalo de tiempo de seguimiento o sea:

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\breve{i} + \acute{y}(t)\,\breve{j} + z(t)\,\breve{k}$$

es decir para todo instante a partir de $t = 0$, hemos tomado un vector posición (Fig 1.3.1), desde el origen de coordenadas inercial, hasta la posición x, y, z., de la partícula, aquí hemos congelado la línea de corriente que sigue la partícula que pasó por el punto P en el instante $t = 0$, esta línea de corriente puede no variar con el tiempo si el flujo es permanente.

La velocidad instantánea para la partícula "n"_enésima en el punto P , puede ser obtenida fácilmente a partir de:

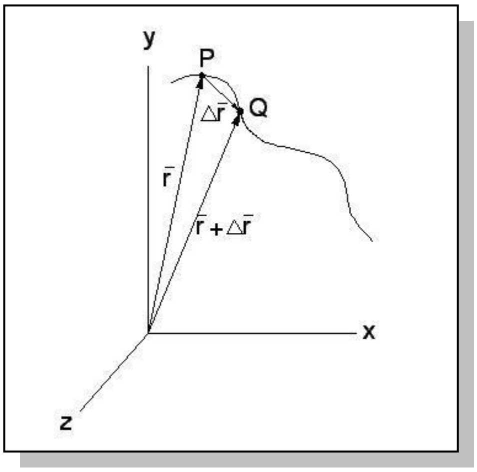

Fig.1.2

$$\vec{V}_n = \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = (\frac{dx}{dt})\breve{i} + (\frac{dy}{dt})\breve{j} + (\frac{dz}{dt})\breve{k} = V_x\breve{i} + V_y\breve{j} + V_z\breve{k} = v_s\breve{T}$$

$$\left|\vec{V}_n\right| = \sqrt{Vx2 + Vy2 + Vz2} = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = v_s = \frac{ds}{dt}$$

donde ds es un tramo diferencial de la curva en la dirección de Δr.

También podemos escribir:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \left|V\right| \cdot \frac{d\vec{r}}{ds} = v \cdot \breve{T}$$

siendo T el versor tangente, a partir de este resultado, podemos calcular la aceleración:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(v \cdot \breve{T}) = \frac{dv}{dt} \cdot \breve{T} + v \cdot \frac{d\breve{T}}{dt} = a_T \cdot \breve{T} + v\frac{d\breve{T}}{ds}\frac{ds}{dt} = a_T \cdot \breve{T} + v \cdot \frac{d\breve{T}}{ds} \cdot v \Rightarrow$$

$$a = a_T \cdot \breve{T} + v^2 \cdot (\frac{d\breve{T}}{ds})$$

(si v es constante entre dos puntos próximos, $a_t = 0$)

Ahora hacemos una pequeña construcción auxiliar, tomamos $T \times T = 1$ (el producto escalar de dos vectores en general es : $|A| \cdot |B| \cdot \cos\theta$). Ahora derivamos el resultado anterior, respecto de S miembro a miembro por lo cual obtenemos :

$$\frac{d}{ds}(\breve{T} \times \breve{T}) = 0 = \frac{d\breve{T}}{ds} \times \breve{T} + \breve{T} \times \frac{d\breve{T}}{ds} = 2\breve{T} \times \frac{d\breve{T}}{ds} = 0 \rightarrow \breve{T} \times \frac{d\breve{T}}{ds} = 0 \rightarrow$$

o sea que *T* es perpendicular a *(dT/ds)* por tanto si llamamos a *(dT/ds) = χ.N =(1/R) N* llamando a χ curvatura y R: radio de curvatura, donde también *R=1/ χ*

Finalmente podemos escribir:

$$\bar{a} = a_T \cdot \breve{T} + a_N \cdot \breve{N} = a_t \cdot \breve{T} + (\frac{v2}{R}) \cdot \breve{N}$$

Así cada punto de la curva de trayectoria tiene asignado un vector *T* (tangente), un vector *N* (normal) y un vector *B* (versor Binormal). Siendo $\breve{B} = \breve{T} \wedge \breve{N}$. *B* y *N* forman el plano osculador de la curva, que es un plano normal a ella en cada punto.

<u>Ejemplo 1:</u>

Dada la curva de trayectoria en el espacio:

$$F(t) = 3\cos 2t\ \breve{i} + 3sen2t\ \breve{j} + (8t - 4)\ \breve{k}$$

hallar:

1- Versor tangente a curva en cada punto de la trayectoria.

$$\vec{V} = \frac{d\bar{r}(t)}{dt} = -6\ sen2t\ \breve{i} + 6\cos 2t\ \breve{j} + 8\ \breve{k}$$

El versor tangente estará dado por:

$$\vec{T} = \frac{\vec{V}}{v} = \frac{d\bar{r}/dt}{|d\bar{r}/dt|}$$

hallamos el módulo

$$v = \left|\frac{dr}{dt}\right| = \sqrt{(-6sen2t)^2 + (6\cos 2t)^2 + 8^2}$$

$$= \sqrt{36(sen^2 2t + \cos^2 2t) + 64}$$

$$= \sqrt{100} = 10$$

$$\breve{T} = -0{,}6sen2t\ \breve{i} + 0{,}6\cos 2t\ \breve{j} + 0{,}8\ \breve{k}$$

2.- La aceleración tangencial.

$$\vec{at} = at.\vec{T}$$

$$at = \frac{dv}{dt} = \left|\frac{dV}{dt}\right| = \left|-12sen2t\ \vec{i} - 12\cos 2t\ \vec{j}\right| = 12$$

3.- La aceleración normal.

$$\vec{a}_n = \frac{v2}{R}.\vec{N} = v^2.\kappa.\vec{N}$$

como:

$$\kappa.\vec{N} = \frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d\vec{T}}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{d\vec{T}}{dt}\frac{1}{ds/dt} = \frac{d\vec{T}}{dt}\frac{1}{v} = \left(-\frac{6}{5}\cos 2t\,\breve{i} - \frac{6}{5}sen2t\,\breve{j}\right).\frac{1}{10} =$$
$$= -\frac{3}{25}\cos 2t\,\breve{i} - \frac{3}{25}sen2t\,\breve{j}$$

3.1- La curvatura:

y la curvatura será :el módulo:

$$x = \left|\frac{d\vec{T}}{ds}\right| = \sqrt{(-3/25\cos 2t)^2 + (-3/25sen2t)^2} = \frac{3}{25}$$

resultado del cual obtenemos que el radio de curvatura será R=1/χ =25/3

3.2- El versor normal a la curva:

$$\frac{d\breve{T}}{ds} = \kappa\,\vec{N} = \frac{\vec{N}}{R} = \left(-\frac{3}{25}\cos 2t\,\breve{i} - \frac{3}{25}sen2t\,\breve{j}\right) \Rightarrow$$
$$\vec{N} = R\frac{d\breve{T}}{ds} = -\cos 2t\,\breve{i} - sen2t\,\breve{j}$$

3.3 finalmente con estos datos calculamos la aceleración normal

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{R}.\vec{N} = v^2.\kappa.\vec{N}$$

reemplazando queda:

$$\vec{a}_n = \frac{10^2.3}{25}(-\cos 2t\,\breve{i} - sen3t\,\breve{j})$$

4 -Expresión general de la aceleración:

$$\bar{a} = 12(-3/5sen2t\,\breve{i} + 3/5\cos 2t\,\breve{j} + 4/5\,\breve{k}) + \frac{300}{25}(\cos 2t\,\breve{i} - sen2t\,\breve{j})$$

1.4.- <u>Definición de la línea corriente:</u>

Una línea de corriente es en general la traza seguida por una partícula identificada del flujo. Por otra parte es una curva cuya dirección en cada punto coincide con la dirección del vector velocidad. O sea una línea trazada por una partícula de fluido, que es en cada punto tangente al vector velocidad de la partícula.

Hay un caso usual particular en el cual cada punto de la traza inicial repetirá sus parámetros (velocidad, densidad, presión etc) con las partículas siguientes que pasen por dicho punto, a medida que transcurre el tiempo, en este caso las líneas de trayectoria no cambian en el tiempo y el flujo se dice <u>permanente</u>. En este caso a través de la línea de corriente no puede pasar fluido, como la partícula se mueve en la dirección de la línea de corriente, en cualquier instante, su desplazamiento *ds* tiene los componentes: *dx, dy, dz* .que a su vez tienen los componentes del vector velocidad:

$$\vec{V} = V_x \cdot \breve{i} + V_y \cdot \breve{j} + V_z \cdot \breve{k}$$

Se cumplirán entonces las relaciones:

$$\frac{dx}{Vx}=\frac{dy}{Vy}=\frac{dz}{Vz}\rightarrow \quad (\frac{dy}{dx})=\frac{Vy}{Vx}, \quad (\frac{dy}{dz})=\frac{Vy}{Vz}$$

En general, cualquier curva que provenga de una función continua y derivable con continuidad las satisface.

Estas son dos ecuaciones diferenciales independientes, cualquier curva en el espacio que las satisfaga, es una línea corriente que puede ser transitada por una partícula fluida del campo en alguna circunstancia.

En el caso de flujo permanente al conjunto de líneas de corriente forma un gran tubo de corriente por donde el fluido pasa, por la ley de conservación de la materia es lógico concluir que la cantidad de fluido por unidad de tiempo atravesando cada sección genérica del tubo de corriente permanecerá constante y que si la sección disminuye la velocidad debe aumentar para mantener este valor de caudal constante.[]

ANALISIS DE FLUJOS – PROBLEMAS Resueltos

Ejemplo1:

A partir de conocer las componentes escalares de velocidad de un flujo bidimensional siguientes:

$$\begin{vmatrix} Vx=-Ax \\ Vy=Ay \\ Vz=0 \end{vmatrix}$$

Establecer las ecuaciones de las líneas de corriente del flujo.

Respuesta:

1° Observamos que el flujo es permanente ya que no aparece la variable tiempo en las ecuaciones escalares.

2° Por definición de línea de corriente para flujo bidimensional:

$$(\frac{dy}{dx})=\frac{Vy}{Vx}=\frac{Ay}{-A}=-\frac{y}{x}\rightarrow\frac{dy}{y}=\frac{-dx}{x}$$ integrando:

ln y = - ln x +C

que se puede escribir:

ln y = - lnx + ln k

ya que siempre se podrá hacer:

C=ln k

Por lo tanto queda finalmente:

$x\cdot y=k$

que representan una familia de hipérbolas equiláteras.

Ejemplo 2:

Para el ejemplo anterior, definir el vector aceleración o la aceleración del campo vectorial:

$$a_x = \left(\frac{\partial Vx}{\partial x}\right) Vx + \left(\frac{\partial Vy}{\partial y}\right) Vy + \left(\frac{\partial Vz}{\partial z}\right) Vz \rightarrow$$

$$a_x = (-Ax)(-A) + (Ay).0 + 0.0 = A^2 x$$

$$a_y = (-Ax).0 + (Ay).A + 0.0 = A^2 y$$

$$a_z = 0$$ de donde

$$\bar{a} = A^2 x\breve{i} + A^2 y\breve{j} + 0\breve{k}$$

<u>Ejemplo 3:</u>

Dado el campo de velocidades:

$$\bar{V} = 10x^2\,\breve{i} - 20\,x\,y\,\breve{j} + 100t\,\breve{k}$$

determinar la velocidad y la aceleración de una partícula situada en el punto x=1 y=2 z=5 t=0,1

La velocidad de la partícula en el punto es:

$$\bar{V} = 10.1\breve{i} - 20.2.1\breve{j} + 100.0{,}1\breve{k} = 10\breve{i} - 40\breve{j} + 10\breve{k}$$

y la aceleración:

$$\bar{a} = (Vx\,\frac{\partial\bar{V}}{\partial x} + Vy\,\frac{\partial\bar{V}}{\partial y} + Vz\,\frac{\partial\bar{V}}{\partial z}) + \frac{\partial\bar{V}}{\partial t}$$

operando, queda:

$$\bar{a} = 10x^2(20x\breve{i} - 20y\breve{j}) + (-20yx)(-20x\breve{j}) + 100\breve{k}$$

y luego reemplazar en el punto para tener el valor del vector aceleración en él..

<u>Ejemplo 4</u>:

Ya vimos en el ejemplo 1 que dado el campo de velocidades pueden obtenerse las ecuaciones de las líneas de corriente. Ahora veremos el problema inverso, dada la ecuación de las líneas de corriente y el módulo de la velocidad en los puntos de la región, determinan el campo de velocidades.

Supongamos que las líneas de corriente están dadas por las ecuaciones: $y = C\,x$ es decir en forma general son rectas que parten del origen en cualquier dirección angular.

Y supongamos que conocemos

$$\left|\bar{V}\right| = \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$ donde k es una constante para todo campo.

De la primera ecuación:

$$y = Cx$$

$$\frac{y}{x} = C = (\frac{dy}{dx}) = \frac{Vy}{Vx}$$

como en general:

$$\left|\bar{V}\right| = \sqrt{V_x^{\,2} + V_y^{\,2}} = V_X\sqrt{1 + (\frac{Vy}{Vx})^2} = V_X\sqrt{1 + C^2}$$

de la segunda ecuación:

$$V_x = \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2}\,\sqrt{1 + C^2}} = \frac{kx}{x^2 + y^2}$$

y reemplazando:

$$Vy = CVx = \frac{ky}{x^2 + y^2}$$

El campo de velocidades será:

$$\bar{V} = Vx\,\breve{i} + Vy\,\breve{j} = \frac{k\,x}{x^2 + y^2}\,\breve{i} + \frac{k\,y}{x^2 + y^2}\,\breve{j}$$

Este es el campo que produce una fuente ideal bidimensional.

Bibliografía complementaria para consulta:

FRANK M. WHITE, Mecánica de Fluidos, Ed. Mc Graw Hill

WILLIAM F. HUGES, Dinámica de los fluidos, Ed Mc Graw Hill

ROBERT FOX – ALAN MAC DONALD, Introducción a la Mecánica de Fluidos, 4ta Edición, Mc Graw Hill

IRWIN SHAMES, Mecánica de Fluidos, 6ta Ed. Editorial Mc Graw Hill

RONALD GILES, Mecánica de los fluidos e Hidráulica, Ed. Mc Graw Hill

STREETER Y WEELER, Mecánica de los fluidos, Ed. Mc Graw Hill