

1.5.- Clasificación de los flujos de fluidos:

a.- **Permanente:** Cuando el flujo es permanente no hay cambios en el tiempo para el vector velocidad en cada punto no material del campo, (pero la velocidad puede cambiar de un punto a otro), por consiguiente las líneas de corriente serán invariables en el espacio y las podemos visualizar introduciendo tinta coloreada en un punto. Lo que formará la traza de una línea de corriente (en rigor un tubo de corriente). Cuando la superficie transversal Δs de un tubo $\rightarrow 0$, tendremos una línea de corriente.

Para el flujo permanente el campo de velocidades \vec{V} es independiente del tiempo. Es decir, $\vec{V} = \vec{V}(x, y, z)$ o también $dV/dt = 0$ aunque tampoco deben cambiar para cada punto las propiedades como presión, temperatura, densidad etc, o lo que es lo mismo las derivadas de estas variables deben ser iguales a cero para cada punto del campo.

b.- **Permanente – permanente uniforme:** Cuando todo punto de un campo de flujo mantiene sus propiedades a lo largo del tiempo el flujo es permanente, si además la velocidad es la misma en módulo para cualquier línea de corriente y en cualquier punto es permanente y uniforme, es decir se cumple que $(dV/dt) = 0$ y $(dV/ds) = 0$

c.- **No permanente:** Lo opuesto a lo anterior.

d.- **Laminar:** Las partículas se mueven a lo largo de trayectorias por capas o laminas, y el perfil del campo de velocidades es una función en (x,y) , puede ser un patrón 2D, en este caso todos los cortes según z darán el mismo perfil.

El flujo puede también ser laminar en 3D. (por ejemplo tubos concéntricos de fluido dentro de una tubería de sección circular). En el flujo laminar se cumple con la ley de viscosidad de Newton:

$$\tau = \mu \cdot \left(\frac{dV}{dy} \right) \quad 1.5.1$$

en la cual la tensión de corte τ producida en el deslizamiento de las láminas por unidad de superficie de contacto, es proporcional al gradiente de velocidad en el sentido normal al movimiento, la constante de proporcionalidad μ se denomina coeficiente de viscosidad dinámica o simplemente coeficiente de viscosidad, el flujo laminar tiende a volverse inestable al disminuir μ o aumentar V .

Al efecto de obtener una representación física de la fricción en los fluidos, consideremos el movimiento del mismo entre dos placas paralelas donde una se mueve relativamente respecto de la otra entre las cuales se aloja una capa fluida homogénea, según se ve en la figura. siguiente,

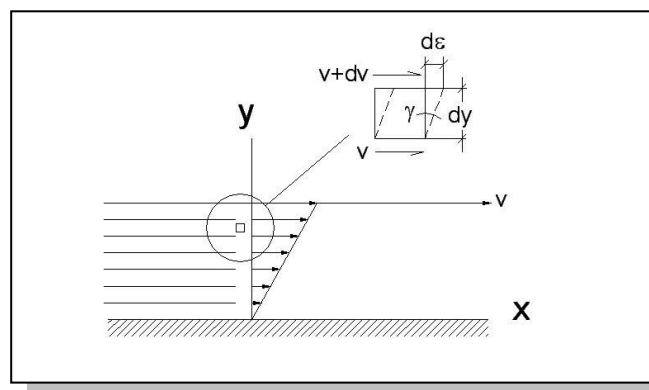


Fig. 1.5.1

asumimos que la placa inferior está quieta y que la superior se mueve con una velocidad v , constante hacia la derecha; producto de la aplicación de una fuerza también constante, (de acuerdo con la definición de fluido que dimos en la sección anterior) el experimento arroja las siguientes observaciones:

- 1.- el fluido se pega en las superficies de ambas placas.
- 2.-el patrón de velocidad entre las placas es lineal (en nuestro caso la velocidad en cualquier punto entre las placas, es proporcional a la distancia de ese punto respecto de la placa inferior).
- 3.- la fricción interna del fluido crea una resistencia al movimiento de la placa superior que es proporcional como indicamos al gradiente de la velocidad vertical, hay una fuerza por unidad de área o tensión de corte τ de la magnitud: $\tau = \mu(dv/dy)$
donde μ es el factor de proporcionalidad que se denomina viscosidad dinámica. Esta es una constante para cada fluido dependiendo mucho de la temperatura.
- 4.- el flujo laminar tiende a desestabilizarse a medida que aumentan la velocidad de desplazamiento de la placa y/o la temperatura.

Sabemos también de teoría de la elasticidad que en un medio sólido la tensión de corte es proporcional a la deformación angular γ o sea $\tau = G \cdot \gamma$ con $\tan \gamma = (d\xi/dy)$ ángulo del prisma deformado, donde G es llamado el módulo de elasticidad transversal y ξ es el desplazamiento de un punto de la cara superior en la dirección x .

En una partícula elemental cúbica pero de fluido tomada entre las placas, como se ve en la figura, la tensión de corte resulta ahora proporcional a la velocidad angular de deformación $(d\gamma/dt)$, y como una velocidad angular es $\omega = V_i / R$ resultará si analizamos el esquema del prisma diferencial que $(d\gamma/dt) = (dV/dy)$ lo cual reemplazando, nos reestablece la ecuación inicial de la definición, basada en los resultados experimentales, o sea:

$$\tau = \mu \cdot \left(\frac{dV}{dy} \right)$$

En resumen la ley de viscosidad de Newton establece que la velocidad de deformación angular es proporcional a la tensión de corte superficial, y que la constante de proporcionalidad es el coeficiente de viscosidad.

El coeficiente de viscosidad en los gases aumenta con la temperatura, por el contrario en los líquidos disminuye con esta. La explicación de este fenómeno se vislumbra considerando que la temperatura contribuye a la desaparición de las fuerzas de cohesión moleculares que están presentes en los líquidos, e incrementa en los gases la agitación molecular y por tanto el intercambio de cantidad de movimiento entre las partículas, si imaginamos dos partículas separadas por dy arrojándose proyectiles una a la otra, si bien inicialmente la partícula más alejada de la superficie fija tiene mas velocidad, ambas velocidades tenderán a ecualizarse al aumentar la cantidad de movimiento molecular intercambiada, y el efecto es como tener un aumento en el coeficiente de viscosidad.

En un fluido en reposo, o con un movimiento tal que no existe un movimiento relativo entre capas adyacentes, no habrá tensiones de corte ya que estará desprovisto de gradientes del tipo dv/dy . De aquí se desprende que para el estudio de la estática de fluidos no hay que considerar fuerzas cortantes, y las únicas tensiones presentes son las normales o presiones, de aquí que su estudio sea mas directo que para los fenómenos de la dinámica de fluidos

A diferencia de la fricción seca de Coulomb la fricción viscosa es independiente de la presión, por ejemplo, dos tubos que conducen un fluido a igual velocidad pero uno tiene una presión interna de 100 bar y el otro de 0,1 bar tendrán la misma resistencia friccional.

e- Turbulento: Es el más frecuente en las aplicaciones prácticas de la ingeniería. El movimiento de las partículas es irregular y hay profuso intercambio de cantidad de movimiento, similar al intercambio molecular pero en la escala mucho mayor de las partículas fluidas mismas. Las partículas pueden tener un tamaño muy pequeño o muy grande dependiendo del fenómeno. El fluido turbulento origina tensiones de corte superiores al laminar. Las pérdidas globales de energía están con la potencia $\wedge 2$ de la velocidad, mientras que con la potencia $\wedge 1$ en laminar, la tensión de corte puede manejarse con la fórmula:

$$\tau = \eta \cdot \left(\frac{dV}{dy} \right)$$

Ec.1.5.2

con η denominada viscosidad de remolino, como coeficiente de proporcionalidad la que depende del fluido y además de la densidad y tipo de movimiento.

Las condiciones de flujo laminar y turbulento están asociadas a rotacionalidad y vorticidad conceptos que definiremos mejor más adelante.

f.- Ideal: Es aquel en que $\mu = 0$ y que $\rho = cte.$, no debe confundirse con un gas perfecto, que es comprensible, es habitual para números de Mach bajos asumir flujo ideal fuera de la capa límite. La condición de flujo ideal puede asumirse con bastante exactitud para flujos abiertos o cerrados fuera de la capa límite que rodea los objetos o las paredes de las tuberías y canales, el flujo y las partículas se mueven sobre un esquema de traslación pura sin rotacionalidad aunque pueden seguir trayectorias curvas.

g.- Acerca de la ecuación de estado para los gases perfectos. Se considera al igual que al definir la ley de Newton de la viscosidad, un principio secundario o constitutivo, que se agrega al conjunto de ecuaciones generales para la resolución de los movimientos del campo o de las trayectorias de las partículas, no están dentro de las leyes generales, por ejemplo si el continuo fuera diferente, como ser un sólido elástico, el principio constitutivo sería la ley de Hooke de la elasticidad y no la ley de Newton de la viscosidad.

Pero tratándose de gases, como el aire en primera aproximación puede usarse la ley constitutiva de los gases perfectos.

Cuando una masa gaseosa que ocupa un volumen V ejerciendo una presión absoluta p sobre las paredes que lo contienen, y a una temperatura absoluta T , la ecuación establece que:

$$\frac{p \cdot V}{T} = n \cdot R$$

siendo n el número de moles de la masa gaseosa y R una constante universal $R = 8.31 \times 10^7$ ergio/mol.°K, como n se puede expresar como $n = m / M$, o sea masa total sobre masa de cada mol, la ecuación anterior queda:

$$\frac{p \cdot V}{T} = \frac{m}{M} R \quad \rightarrow \quad \frac{p}{\rho T} = \left(\frac{R}{M} \right)$$

$R/M = R'$ se la denomina constante particular, que para el caso del aire vale: $R' = 2.87 \cdot 10^6$ ergio/gramo °K. En general tomando como referencia el nivel del mar para la masa de aire, podremos escribir:

$$\frac{p_0}{\rho_0 T_0} = \frac{p}{\rho T} = cte = R' \rightarrow \frac{p}{\rho_0} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{T}{T_0}$$

esto nos permite calcularlas condiciones en altura, conociendo los valores a nivel del mar:

$$p_0 = 1013.2 \text{ grf} / \text{cm}^2$$

$$\rho_0 = 0.001225 \text{ gr} / \text{cm}^3$$

$$T_0 = 273 + 15 = 288^\circ K$$

g.1- Adiabático e Isentrópico: Atendiendo a las condiciones que se verifiquen dentro del volumen de control, (una región fija contenida dentro del campo de flujo, arbitraria y definida al efecto de permitir el estudio del escurrimiento) si no hay intercambio de calor y trabajo con la región exterior, entonces el fluido se denomina adiabático. Además, si es ideal y el proceso no tiene irreversibilidades en el sentido termodinámico se denomina isentrópico.

Si la transformación es adiabática y corresponde a un gas perfecto, se cumple que:

$$pV^\gamma = \text{cte} \quad \text{o sea: } p_1V_1^\gamma = p_2V_2^\gamma \quad \text{con } \gamma = \frac{C_p}{C_v}$$

$$T.V^{\gamma-1} = \text{cte} \quad \text{o sea } T_1V_1^{\gamma-1} = T_2V_2^{\gamma-1}$$

El calor específico es la cantidad de calor necesaria para elevar 1°C la temperatura de la unidad de masa, pero para un gas esta cantidad de calor es diferente si se hace el calentamiento a presión constante en cuyo caso se obtiene C_p o a volumen constante C_v ; siendo mayor a presión constante ya que el gas debe expandirse además de aumentar su temperatura.

h.- Turbulento - permanente: Si en cada punto se admite una fluctuación tal que el promedio de la velocidad

temporal = cte., o sea el muestreo $Vn = \frac{1}{t} \int_0^t v \cdot dt = \text{cte}$ el flujo es turbulento permanente.

i.- Compresible - Incompresible: Si $\rho \neq \text{cte.}$ de un punto a otro en el campo del fluido, es compresible, en general los gases se consideran compresibles y los líquidos no, salvo en este último caso para el estudio de fenómenos que involucren la propagación del sonido.

El volumen en los líquidos varía con la temperatura con un coeficiente de dilatación volumétrico $\Delta V/V = k \cdot \Delta T$. y con la presión a través de coeficientes de compresibilidad para líquidos $\Delta V/V = c \cdot \Delta P$.

j.- Subsónico - Supersónico: Para los fluidos compresibles como los gases, existe una gran diferencia de comportamiento definida por el rango de velocidad a la que se mueven y puede ser subsónico o supersónico.

La velocidad del sonido en el aire es de 330 m/seg, unos 1200 km/h. El número de Mach es una medida relativa del valor de la frontera, cuando $M = 1$. El número de Mach, se define como: $M = V(TAS)/c$ a su vez $c = c_0 \sqrt{\theta}$ con $\theta = T/T_0$, c y T son los valores actuales y c_0 y T_0 , los correspondientes a nivel del mar en atmósfera tipo.

Velocidad TAS significa (True Airspeed) o velocidad verdadera, en la lectura de la velocidad a una cierta altura se cometen errores debido a que la densidad disminuye con la altura y los instrumentos están calibrados para densidad a nivel del mar, por lo cual la velocidad leída debe corregirse, dando lugar a la velocidad verdadera.

k.- Atendiendo a las propiedades Newtonianas de los comportamientos laminares, dada la ecuación:

$$\tau = \mu \cdot \left(\frac{dV}{dy} \right),$$

cuando $\mu = \text{cte.}$ el fluido se llama "Newtoniano", $\mu = \text{cte}$ significa tener, una gráfica de líneas rectas que pasan por el origen con pendientes de ángulo:

$\alpha = \tan 1/\mu$, la representación se hace en diagramas que representan τ (la fuerza de corte superficial), en

ordenadas, en función del gradiente $\frac{dV}{dy} = \dot{\gamma}$ en abscisas, (ver el diagrama de la Fig. 1.4) ,la pendiente es

constante para un dado fluido, para temperatura y presión constante pero puede haber comportamientos de no linealidad que se encuadran en los denominados: Fluidos No-Newtonianos.

l – Fluidos No-Newtonianos.

Los Fluidos que no cumplen con la ley básica de linealidad $\tau = \mu \cdot \left(\frac{dV}{dy} \right)$, se denominan no-Newtonianos y

son estudiados por la Reología. El comportamiento reológico en estado estacionario de los fluidos no-Newtonianos puede establecerse por una fórmula generalizada de la anterior como:

$\tau = \eta \cdot \left(\frac{dV}{dy}\right)$, en la que η , puede expresarse como una función de (dVx/dy) , o sea $\eta = \eta(dVx/dy)$ o sea tendrá una dependencia funcional con el gradiente por lo que dejará de ser una constante, en las regiones en las que η disminuye al aumentar el gradiente de velocidad (dVx/dy) , el comportamiento se llama pseudo-plástico, y por el contrario si η aumenta con el aumento del gradiente, se llama comportamiento dilatante, si η resulta independiente del gradiente, se comporta como Newtoniano y es el caso límite en el que $\eta = \mu$.

Se han propuesto numerosos modelos representativos para hallar la relación funcional $\eta = \eta(dVx/dy)$ que tienen nombres de sus creadores tales como Modelo Bingham, Modelo Ellis, Modelo Eyring, y Modelo Ostwald de Waale, aquí explicitaremos este último por ser uno de los más simples y efectivos en la modelización de los comportamientos reales.

Modelo Ostwald de Waale.

La ecuación descriptiva del modelo es:

$$\tau_{xy} = m \cdot \left(\frac{dVx}{dy}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{dVx}{dy}\right)$$

aquí vemos que el coeficiente η tiene dos parámetros numéricos de ajuste m y n , se conoce también como ley de la potencia, se ve fácilmente que si $m = \mu$, y $n = 1$ el fluido se reduce a Newtoniano, si $n < 1$, tiene comportamiento pseudo-plástico y si $n > 1$ comportamiento dilatante, habitualmente los valores m y n se encuentran tabulados en función de la sustancia estudiada.

En la figura siguiente, 1.5.2, se observa el tipo de representaciones del modelo y las características que adoptan las sustancias que se aproximan a ellas.

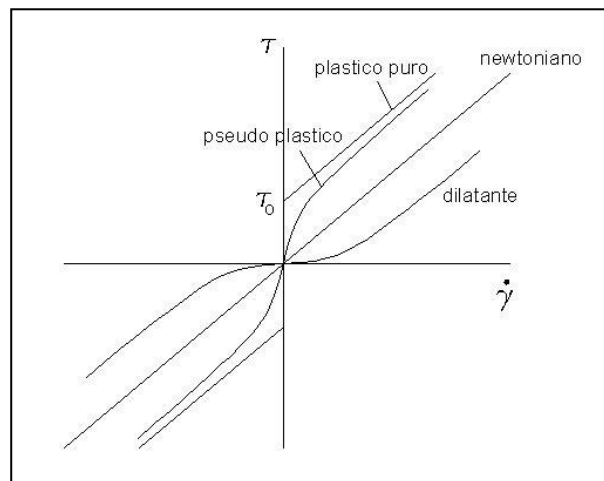


Fig. 1.5.2

Ejemplos:

Tixotrópicos o pseudo plásticos: Tinta de imprenta, sangre, mostaza

Pseudo Plásticos: brea, grasas, betún.

Dilatables: arena movediza.

Newtonianos: agua, aire, gases en general.

El aire y los gases son fluidos de comportamiento Newtoniano puro, para el aire, el comportamiento viscoso se observa dentro de lo que denominamos capa límite, concepto que discutiremos más adelante, para el aire a nivel del mar y 15°C :

$$\mu_0 = 17,9 \text{ kg/m.seg}$$

En los fluidos de comportamiento plástico puro o casi puro, se observa una tensión de umbral τ_0 con deformación nula y luego un comportamiento lineal.

En los de comportamiento no lineal en general, (Tixotrópicos, y Dilatables) a cada tensión de cortante corresponde una deformación que se aparta en el gráfico respecto a la linealidad y por tanto es como si el fluido presentara un coeficiente particular para cada situación, no obstante, la distribución de velocidades entre las placas sigue siendo una línea recta, si Ud entiende correctamente este concepto verá por que la definición de fluido dada al final del Módulo 2 sigue siendo válida para fluidos no Newtonianos.

m- Atendiendo a la clasificación por tipo de flujos desarrollado, pueden ser:

Flujos externos: los que se producen sobre objetos libres como perfiles, formas geométricas, árboles, puentes, barcos, etc.

Flujos internos: son los que están desarrollados dentro de tuberías, canales, boquillas, chimeneas, turbo maquinaria, vertederos, etc. Los analizaremos luego en detalle.

1.6.- Cambio de Referencia Inercial.

Problema propuesto :

Un remero hace avanzar un bote en contra de la corriente de un río. En la popa del bote lleva una botella de whisky medio vacía. Cuando pasa justo por debajo de un puente la botella cae al agua sin que el remero se de cuenta. El remero avanza 20 minutos más, al cabo de lo cual se da cuenta de que la botella ha caído. Da media vuelta y vuelve a buscarla remando siempre a velocidad constante. Finalmente encuentra la botella a 1 Km. corriente abajo del puente. Hallar la velocidad del río.

Trate de resolver este problema la respuesta es: Velocidad de la Corriente = 1.5 Km/h.

Medite acerca de los cambios de referencia inercial para la resolución, esto no tienen que ver con el criterio de Euler o Lagrange. Ambos se emplean de o a partir de una terna inercial fija ya sea para observar siempre un punto fijo o para seguir una partícula. El cambio de referencia inercial se usa para simplificar la resolución de problemas.

Ejemplo 2:

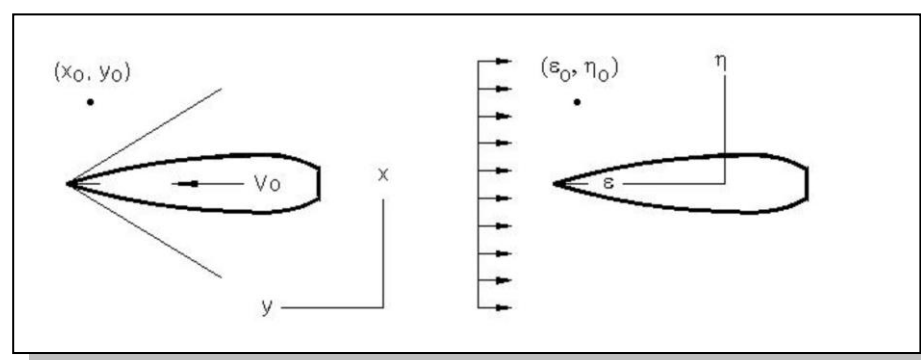


Fig.1.6.1

Examinemos un flujo creado por un barco en movimiento sobre una masa de agua, como se observa en la Fig. 1.6.1. El barco avanza sobre el agua no perturbada a velocidad V_0 con respecto a la referencia x, y .

Se ve que es un flujo no permanente, por ejemplo la velocidad en un punto como el (x_0, y_0) de la figura de la izquierda será cero, y cuando el punto sea alcanzado por la estela la medición de velocidad sufrirá variaciones complejas por largo tiempo hasta volver a cero. O sea, estamos en presencia de flujo no-permanente en el campo vectorial de x, y del agua.

Ahora consideremos un sistema inercial de coordenadas tomadas sobre el barco (η, ξ) , podemos ahora considerar al barco quieto y el agua moviéndose hacia la derecha a una velocidad constante $-V_0$.

Si nosotros como observadores nos colocamos en esta terna, y subimos al barco, ahora el campo es permanente y la velocidad medida en el puente (η_0, ξ_0) , es la misma para todas las partículas fluidas que pasan por dicho punto fijo en relación al barco. Es lo que ocurre en los túneles de viento o en los túneles hidrodinámicos, el objeto en estudio es fijo y se mueve la corriente en torno a él con velocidad igual y de signo opuesto a la que la corriente posee en la realidad, pero esto permite cambiando la posición del sistema de referencia inercial, transformar un flujo típicamente no permanente en permanente.

1.7.- El significado de Continuo: Si la distancia o camino libre medio entre choques moleculares es mucho menor que cualquiera de las dimensiones físicas del problema, podemos asumir el medio como continuo, es decir con partículas divisibles cada vez más pequeñas sin que pierdan las propiedades de la partícula original, y sin que los procesos de paso al límite matemático pierdan significado.

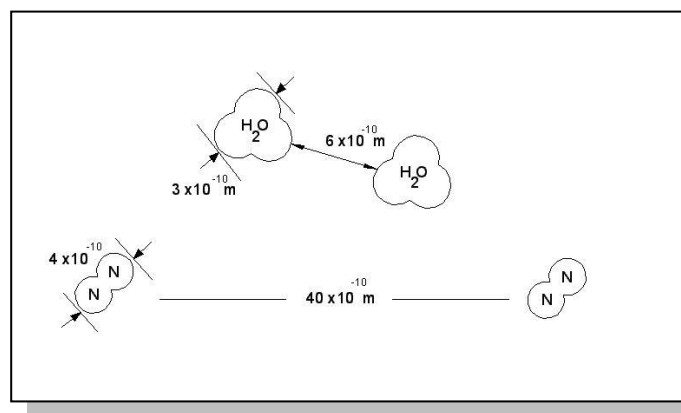


Fig. 1.7.1

Para una comprensión más clara de esto, observe la figura anterior, allí se representan dos moléculas de agua con su separación o camino libre medio, y análogamente para el componente más abundante del aire, las moléculas de nitrógeno, si la partícula de fluido tomada ya sea de agua o de aire fuese un cubo de un micrón de largo de arista, el recuadro debería ser 10.000 veces mayor, y comprendería una cantidad enorme de moléculas individuales.

Al tratar el abordaje matemático para la dinámica de fluidos, es necesario considerar que la estructura molecular real se reemplaza por un medio continuo hipotético llamado el continuo o continuum. Por ejemplo la velocidad en un punto del campo no está definida en un medio molecular, porque sería igual a cero, siempre, salvo cuando una molécula ocupara exactamente dicho punto, y entonces sería la velocidad de la molécula y no la de la masa media de las moléculas ocupantes del entorno. Por esta razón en lugar de considerar las moléculas individuales es conveniente reemplazarlas por lo que llamamos un modelo físico, este modelo no tiene moléculas sino propiedades medias, que representan el comportamiento estadístico de las moléculas del fluido real.

Con las consideraciones previas se consideran partículas muy pequeñas y se trabaja con las velocidades típicas moleculares promediadas dentro de ellas, por ejemplo un cubo de un micrón de lado (10^{-6} m) contiene del orden de 10^9 moléculas, así que el promedio de velocidad en la región, de un micrón o partícula de un micrón de diámetro, dará la precisión de análisis necesaria aún soslayando la realidad física.

1.8.- Principios básicos que deben cumplir los medios continuos: Habitualmente las situaciones de flujo establecidas, salvo los casos más complejos como los de flujo turbulento, pueden tratarse usando 5 ó 6 variables independientes (tres componentes de velocidad y 2 ó 3 parámetros termodinámicos tales como presión, densidad y temperatura). Con ellos se arma un sistema de 5 ó 6 ecuaciones que son las 3 componentes escalares de la cantidad de movimiento, la ecuación de la energía y la ecuación de estado.

La solución de las ecuaciones diferenciales que se obtienen permiten la obtención de los campos escalares y vectoriales que definen el flujo en cada punto, lo que puede resolverse para modelos de flujo simples.

Cada partícula de fluido debe cumplir con las leyes de la Física y por tanto cumplir con las siguientes ecuaciones:

- 1- La segunda ley de Newton de la mecánica clásica.
- 1.b. Conceptos derivados de la segunda ley por ejemplo, conservación de la cant.de mov.lineal y angular, también conocidas como 1ª y 2ª leyes cardinales de la dinámica.
- 2- La ecuación de conservación de masa.
- 3- La ecuación de conservación de la energía o primer ppio de la Termodinámica.
- 4- El segundo ppio de la Termodinámica.
- 5- La ley de viscosidad de Newton y su generalización 3D, las ecuaciones de Navier-Stokes.
- 6- La ecuación de estado que relaciona P, V, y T en el caso de los gases.
- 7- Límites físicos de los objetos sólidos que interactúan con el fluido.

1.9.- Procedimientos de análisis: Si tomamos una porción de la masa fluida y la seguimos partícula a partícula, según Lagrange tendremos un “sistema” que mantiene su identidad, aunque puede cambiar sus condiciones o estado a medida que transcurre el tiempo.

Una vez identificado el sistema se podrán aplicar las leyes 1 a 4 anteriores. Sin embargo, ya vimos que es complicado identificar y seguir un sistema, es mejor aplicar el criterio de Euler y definir una región fija del espacio que llamamos “Volumen de Control”.

Sin embargo las 4 leyes no se pueden aplicar directamente a volúmenes fijos sino a cantidades fijas de materia, por lo cual debemos encontrar un proceso que permita adaptar las leyes para aplicarlas a “volúmenes de control”. Este proceso permite establecer las denominadas “Ecuaciones Integrales aplicadas a Volúmenes de Control”, las que se utilizan principalmente para la resolución de problemas.

1.10.-Variables Extensivas e Intensivas : Como ya lo anticipamos en el punto 1.2, en Termodinámica se hace una distinción entre las propiedades de la sustancia cuya medida depende de la cantidad de masa presente y aquellas cuya medida es independiente de esta.

Las primeras, tales como el peso, la masa, la cantidad de movimiento, la energía, etc, se denominan “Extensivas”, y las otras, que no dependen de la cantidad de sustancia presente, como la presión o la temperatura, se las denomina “Intensivas”.

Para las correspondientes variables extensivas pueden introducirse las respectivas variables intensivas simplemente dividiendo por la cantidad de masa del sistema a veces a la variable así adoptada de la llamada “específica”, y se indican con letras minúsculas.

1.11.- Relación entre sistema y volumen de control: Consideramos un campo vectorial de velocidades $\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t)$ visto desde una referencia inercial donde se observa un sistema finito de fluido en los instantes t , y $t + \Delta t$. En la figura siguiente, las líneas de corriente dibujadas corresponden al instante t .

En t , el sistema y el volumen de control. seleccionado coinciden en el espacio (en rigor el sistema constituye el conjunto de partículas que en el instante t ocupan la región definida por el Volumen de Control dentro del campo fluido, no así en $t + \Delta t$, en que el sistema se ha desplazado respecto al volumen de control.

Consideremos ahora una propiedad extensiva arbitraria N y tratemos de relacionar el cambio de la propiedad N en el sistema en el intervalo Δt ., con el cambio de la misma propiedad en el volumen de control.

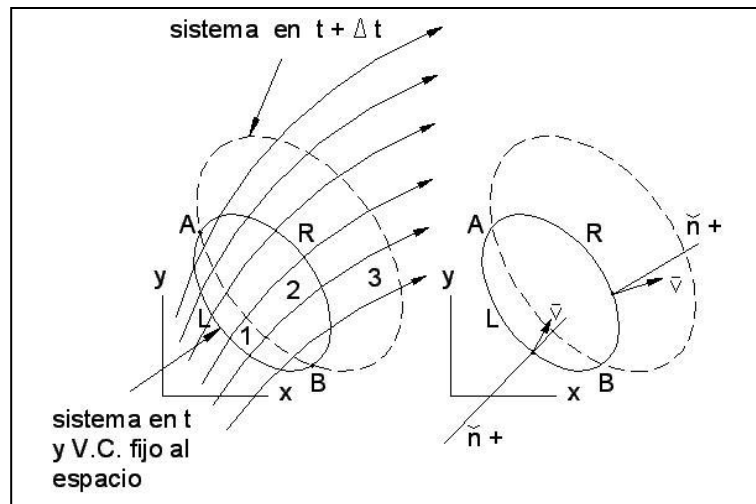


Fig. 1.11.1

Primero definimos el valor específico de la propiedad como $\eta = N/M$. De donde deducimos que:

$$N = \int_{sist} \eta \cdot dm = \int_{sist} \eta \rho \cdot dv$$

Observemos las 3 regiones indicadas por 1,2,3 en la figura anterior.

Calculemos el “cambio” o la velocidad de variación de la propiedad N en el sistema durante el intervalo Δt , haciendo el paso al límite hasta hacer coincidir sistema y volumen de control. Así tenemos:

$$\begin{aligned} \dot{N} &= \left(\frac{dN}{dt} \right)_{SIST} = \frac{DN}{Dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\text{valor de } N \text{ en } 2 + 3)_{t+\Delta t} - (\text{valor de } N \text{ en } 1 + 2)_t}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{(\text{valor de } N \text{ en } 2 \text{ en } t + \Delta t) - (\text{valor de } N \text{ en } 2 \text{ en } t)}{\Delta t} \right] + \\ &+ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\text{Valor de } N \text{ en } 3 \text{ en } t + \Delta t}{\Delta t} \right) - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\text{Valor de } N \text{ en } 1 \text{ en } t}{\Delta t} \right) \end{aligned}$$

Hay derivada sustancial porque estamos hablando de cambio en posición y en tiempo. Si consideramos ahora cada uno de los límites separadamente, vemos que cuando Δt tiende a cero, el volumen 2 tiende al volumen seleccionado como “Volumen de Control”. Entonces para el corchete largo podemos escribir:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V.C} \eta \cdot \rho \cdot dv$$

Consideremos ahora el segundo término, o sea el cambio de la propiedad N en 3. En el límite, la región 3 coincide con la frontera ARB, y la cantidad de la propiedad N en 3 es la que instantáneamente está cruzando el límite ARB hacia fuera del volumen de control. Aquí vemos que el flujo de la propiedad N que atravesó el volumen de control a través de la región ARB es igual numéricamente a:

$$\int_{ARB} \eta \cdot \rho \cdot \vec{V} \times \vec{dA} \left(\frac{\text{propiedad}}{Kg} \right) \cdot \left(\frac{Kg}{m^3} \right) \cdot \left(\frac{m}{seg} \right) \cdot m^2 = \frac{\text{propiedad}}{seg}$$

Observe que en este arco o zona el producto escalar es positivo, ya que la dirección del versor normal a la superficie dA y la dirección de V dan un coseno positivo, cuando $\Delta t \rightarrow 0$ el cambio es solamente posicional a través de la frontera, análogamente para por la región 1.

$$\int_{ALB} \eta \cdot \rho \cdot \vec{V} \times \vec{dA}$$

Sin embargo en este caso, la componente de V y el versor normal dan lugar a valores negativos del flujo de la propiedad N al pasar la frontera ALB hacia el interior del volumen de control, quedando entonces:

$$\int_{ARB} \eta \cdot \rho \cdot \vec{V} \times \vec{dA} - \left(- \int_{ALB} \eta \cdot \rho \cdot \vec{V} \times \vec{dA} \right) = \int_{S.C} \eta \cdot \rho \cdot \vec{V} \times \vec{dA}$$

O sea la unión de los dos flujos, nos da el flujo total de N que atraviesa la superficie de control en el instante t . Si adoptamos el criterio de que \vec{dA} y \vec{n} están dirigidos hacia el exterior para una superficie cerrada la suma algebraica da positiva y los signos coinciden en la primera expresión. Con lo cual queda finalmente:

$$\dot{N} = \frac{DN}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V.C} \eta \cdot \rho \cdot dv + \int_{S.C} \eta \cdot \rho \cdot \vec{V} \times \vec{dA} \quad 1.11.1$$

La expresión 1.11.1 establece la velocidad de variación con el tiempo de la propiedad N en un “sistema” en el instante t , en relación al volumen de control que ocupa circunstancialmente y es igual a la suma de dos términos:

- La velocidad de variación de la propiedad genérica N en el interior del volumen de control que tiene la forma del sistema en el instante t , y
- El flujo de la propiedad genérica N por unidad de tiempo que atraviesa la superficie de control en el instante t .

Por supuesto el análisis gráfico dado en la figura 1.7 puede generalizarse al espacio de 3 dimensiones, las regiones dibujadas como elipses serían ahora elipsoides o regiones cualquiera de 3D, y el campo de flujo que lo atraviesa, un campo de líneas o curvas del espacio 3D.[]

Tabla 1.1 De lo más grande a los más pequeño

Radio del objeto en (metros)	Objetos característicos
10^{26}	Universo observable.
10^{24}	Supercúmulos de Galaxias
10^{23}	Cúmulos de Galaxias
10^{22}	Grupo Local
10^{21}	Galaxia Vía Láctea (en la cual el sistema solar ocupa un suburbio apartado).
10^{12}	Sistema Solar
10^{11}	Atmósferas externas de estrellas gigantes rojas.
10^9	El Sol.
10^8	Planetas gigantes por ejemplo Júpiter.
10^7	Planetas similares a La Tierra.
10^5	Asteroides, Núcleos de cometas
10^4	Ciudades típicas por ejemplo Buenos Aires.
10^0	Seres vivientes en la Tierra
10^{-2}	Moléculas de ADN de eje largo
10^{-5}	Células vivas
$10^{-6} = 1$ micrón	
$10^{-9} = 1$ nanómetro	Moléculas de ADN de eje corto.
$10^{-10} = 1$ Ångstrom	Átomos medidos sobre la capa electrónica exterior.
10^{-14}	Núcleos de átomos pesados
10^{-15}	Protones, Neutrones
10^{-18}	Quarks (componentes de los protones y neutrones)
10^{-35}	Longitud de Plank (radio de las partículas sin dimensiones en la teoría de cuerdas incluyendo electrones)