1.12.- Ecuaciones integrales: La deducción de las Ecuaciones Integrales para Volumen de Control, se hace en forma inmediata a partir de la ecuación genérica obtenida 1.11.1.

1.12.1 Ecuación de Continuidad o Conservación de Masa:

Postulado: La masa permanece constante para el "sistema" .o bién *Msist = cte*.
La propiedad intensiva o especifica para la masa es:

$$\eta = \frac{M_{sist}}{M_{sist}} = 1$$

y si *Msist* es constante resulta que: $\frac{DM}{Dt} = \left(\frac{dM}{dt}\right)_{sist} = 0$

Por lo tanto, aplicando la ecuación 1.11.1 queda para este caso:

$$\frac{DM}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{V.C} \rho \cdot dv + \int_{S.C} \rho \cdot \vec{V} \times d\vec{A} = 0 \qquad 1.12.1$$

Casos particulares: Si el flujo es permanente, no hay variación temporal de masa dentro del volumen de control y el primer término es igual a 0. Por lo tanto queda:

$$\int_{SC} \rho \overline{V} \times d\overline{A} = 0 \qquad 1.12.1.b \text{ Flujo permanente}$$

Si además el flujo es incompresible, ρ sale fuera de la integral y se anula.

$$\int_{SC} \overline{V} \times d\overline{A} = 0 \qquad 1.12..1c \text{ Flujo permanente incompresible.}$$

Ejemplo 3: Consideremos el flujo permanente de la figura 1.8, donde el flujo entra en la sección 1, y sale por las secciones 2 y 3.

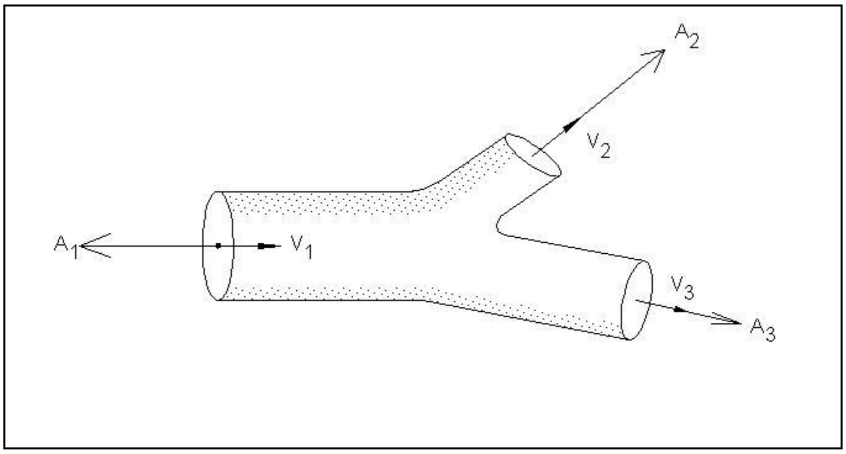


Fig.1.8

$$\int \rho \overline{V} \times d\overline{A} = 0$$

$$\int_{A2} \rho \overline{V} \times d\overline{A} + \int_{A3} \rho \overline{V} \times d\overline{A} + \int_{A1} \rho \overline{V} \times d\overline{A} = 0$$

Suponiendo que la velocidad es normal a todas las superficies por donde atraviesa el fluido el Volumen de Control y observando que las normales positivas quedan definidas hacia el exterior del Volumen de Control, queda:

$$\int_{A1} \rho_2 V_2 dA + \int_{A3} \rho_3 V_3 dA - \int_{A1} \rho_1 V_1 dA = 0$$

Si las densidades y las velocidades son uniformes cuando pasan a través de sus áreas respectivas:

$$\rho_2 V_2 A_2 + \rho_3 V_3 A_3 - \rho_1 V_1 A_1 = 0$$

Si la densidad es constante (flujo incompresible):

$$V_2 A_2 + V_3 A_3 = V_1 A_1$$

1.12.2.-<u>Ecuación Integral de Cantidad de Movimiento Lineal</u>: Como a partir de la segunda ley de Newton tenemos que:

$$\overline{F} = m \cdot \overline{a} = m \frac{d\overline{V}}{dt}$$

la cantidad de movimiento lineal se define como:

$$\vec{P} = m \cdot \overline{V} \rightarrow \overline{F} = \frac{d\overline{P}}{dt}$$

nuestra propiedad ahora es:

$N = \overline{P}$ una cantidad vectorial

$$\eta = \frac{\overline{P}}{M_{sis}} = \vec{V}$$

Aplicando la ecuación 1.11.1 será:

$$\overline{F} = \frac{D\overline{P}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{SC} \rho \overline{V} dv + \int_{SC} \rho \overline{V} (\overline{V} \times d\overline{A}) \qquad 12.2.1$$

Una fuerza total F está compuesta por la fuerza superficial F_s (proveniente de los esfuerzos de presión y de los esfuerzos de corte) más una fuerza interna B que es una fuerza por unidad de volumen (proveniente de campos, como gravitacional y otros) o sea que 12.2.1 queda en forma más general:

$$\overline{F}_s + \int_{VC} \overline{B} dv = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \overline{V} dv + \int_{SC} \rho \overline{V} (\overline{V} \times d\overline{A}) \qquad 12.2.1b$$

para flujo “permanente” y despreciando las fuerzas internas:

$$\overline{F}_s = \int_{SC} \rho \overline{V} (\overline{V} \times d\overline{A}) \qquad 12.2.1c$$

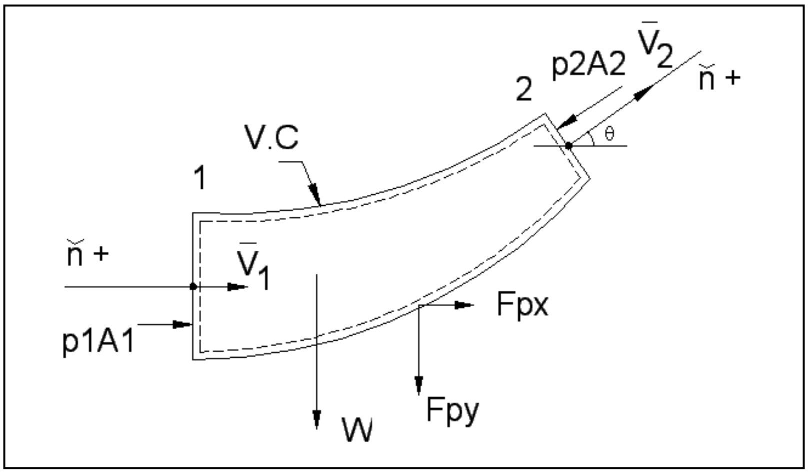
Además, si suponemos que la densidad y velocidad son uniformes en las áreas por donde el fluido atraviesa el volumen de control, para una entrada 1 y una salida 2 tenemos:

$$(\overline{V} \times d\overline{A}) = \dot{m}$$
$$F_x = \dot{m}\,(V_{x2} - V_{x1})$$
$$F_y = \dot{m}\,(V_{y2} - V_{y1})$$
$$F_z = \dot{m}\,(V_{z2} - V_{z1})$$

<u>Ejemplo 4</u>:

La figura siguiente, muestra un flujo permanente compresible a través de un tubo curvo. Determinar la fuerza del fluido sobre el tubo entre las secciones 1 y 2.

Fig.1.9



Inicialmente aplicamos la ecuación 14.2c ya que se trata de flujo permanente y despreciamos las fuerzas gravitacionales frente a otras.

$W = \int_{V.C} \vec{B}.dv \approx 0$, sobre todo si dentro del codo se mueve un gas, entonces queda:

$$\overline{F}s = \int_{SC} \rho\overline{V}(\overline{V} \times d\overline{A})$$

El primer miembro corresponde a la suma vectorial de las fuerzas exteriores sobre el Volumen de Control, las fuerzas tangenciales también se desprecian si el codo es suficientemente corto. Podemos evaluar las fuerzas del primer término como:

$$\overline{F}_s \rightarrow \left| \begin{array}{l} F_{sx} = p_1 A_1 - p_2 A_2 \cos\theta + F_{px} \\ F_{sy} = -p_2 A_2 sen\theta + F_{py} - W \end{array} \right.$$

Donde p. es la presión manométrica y F_{px} e F_{py} son las fuerzas desconocidas que ejercen las paredes del tubo sobre el fluido, es decir las fuerzas equilibrantes y tienen la dirección y sentido necesarios para que la pipa este en equilibrio. Las fuerzas activas que el fluido ejerce sobre la pipa, tienen sentidos opuestos a *Fpx* y *Fpy*, la única fuerza interna es la fuerza de gravedad y es igual al peso del fluido *W* contenido entre 1 y 2, en muchos casos esta fuerza es despreciable frente a las otras, en particular para los gases como este caso, o sea:

$W = \int_{V.C} \vec{B}.dv \approx 0$, sobre todo si dentro del codo se mueve un gas, entonces queda:

Los términos de cantidad de movimiento del flujo valen:

$$\int_{SC} \rho V_x (\overline{V} \times d\overline{A}) = \rho_2 A_2 V_2^2 \cos\theta - \rho_1 A_1 V_1^{\,2}$$
$$\int_{SC} \rho V_y (\overline{V} \times d\overline{A}) = \rho_2 A_2 V_2^2 sen\theta$$

Entonces podemos igualar con los primeros miembros:

$$\left.\begin{aligned} p_1 A_1 - p_2 A_2 \cos\theta + F_{px} &= \rho_2 A_2 V_2^2 \cos\theta - \rho_1 A_1 V_1^2 \\ - p_2 A_2 sen\theta + F_{py} &= \rho_2 A_2 V_2^2 sen\theta \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} F_{px} &= (\rho_2 A_2 V_2^2 + p_2 A_2)\cos\theta - (\rho_1 A_1 V_1^2 + p_1 A_1) \\ F_{py} &= (\rho_2 A_2 V_2^2 + p_2 A_2) sen\theta \end{aligned}\right\}$$

Si al hacer los cálculos los signos coinciden con las direcciones supuestas estas fueron correctas, de lo contrario, van en sentido opuesto. Téngase en cuenta que estas son fuerzas reactivas, es decir las equilibrantes de la pipa, las fuerzas que el fluido ejerce sobre la pipa son opuestas.

1.12.3.-<u>Ecuación Integral de la Cantidad de Movimiento angular</u>: (Momentum)

La equivalencia rotacional de la segunda ley de Newton es:

$$\overline{F} = m \cdot \overline{a} \rightarrow \overline{\tau} = J\overline{\alpha}$$
$$\overline{F} = m\frac{d\overline{V}}{dt} \rightarrow \overline{\tau} = J\frac{d\overline{\omega}}{dt}$$
$$\overline{F} = \frac{d\overline{P}}{dt}$$

$$\overline{P} = M_{SIS}\overline{V} \rightarrow \overline{\tau} = \frac{d\overline{H}}{dt}$$
$$\overline{H} = \sum mvsen\theta$$

Es decir la sumatoria de los torques aplicados al sistema es igual a la derivada primera del “Momentum”. Los torques externos en nuestro esquema están dados por 3 sumandos:

$$\overline{T} = \overline{r} \wedge \overline{F}_s + \int_{VC} (\overline{r} \wedge \overline{B}) dv + T_S = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \overline{r} \wedge \rho\overline{V} dv + \int_{SC} \overline{r} \wedge \rho\overline{V}(\overline{V} \times d\overline{A})$$

Los componentes correspondientes a:

a.- Los torques de las fuerzas superficiales $\vec{r} \wedge \vec{F_S}$.

b.- Los componentes de torque de las fuerzas de campo $\vec{r} \wedge \vec{B}$.

c.- Los torques externos puros, por ejemplo agitadores, paletas que entran al volumen de control.

Vamos ahora a analizar el segundo miembro:

Como $\bar{H} = \int_{SIST} (\bar{r} \wedge \bar{V}) dm \rightarrow d\bar{H} = (\bar{r} \wedge \bar{V}) \rightarrow \eta = \frac{d\bar{H}}{dm} = (\bar{r} \wedge \bar{V})$

Entonces reemplazando en la fórmula general 1.11.1

$$\bar{T} = \frac{D\bar{H}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} (\bar{r} \wedge \bar{V}) \rho dv + \int_{SC} (\bar{r} \wedge \bar{V}) \rho (\bar{V} \times d\bar{A}) \qquad 12.3.1$$

Como antes, para flujo permanente:

$$\bar{T} = \int_{SC} (\bar{r} \wedge \bar{V}) \rho (\bar{V} \times d\bar{A}) \qquad 12.3.1b$$

1.12.4 <u>Ecuación Integral de la Energía:</u>

El <u>trabajo mecánico</u> a lo largo de una trayectoria cualquiera l, en general se define como: $W = \int \bar{F} \times \bar{dl}$, es una magnitud escalar.

El trabajo que realiza un sistema sobre sus contornos (expansión hacia el medio ambiente) se representa con W y se considera positivo. Recíprocamente, si el contorno realiza trabajo sobre el sistema, este se considera negativo. La unidad de trabajo mecánico en MKS es el *New . m = Joule.*

A su vez, 1 Joule = 1N. m = 1kg m/seg^2 . m = 1kg m^2/seg^2

Y la unidad específica del trabajo mecánico. $w = \frac{W}{M} = \frac{1kgm^2 / seg^2}{kg} = \frac{m^2}{seg^2}$

Si el sistema y el medio ambiente tienen temperaturas diferentes y una membrana de separación capaz de permitir pasaje de calor, se produce un intercambio de energía de otro tipo que es trabajo llamado <u>Transferencia de Calor</u>. No es correcto afirmar que un sistema contiene calor, ya que el calor sólo se manifiesta si hay transferencia.

La energía en forma de calor y/o trabajo mecánico puede cruzar las fronteras del sistema pero por definición la masa no puede hacerlo. Como dos formas de energía, el calor y el trabajo poseen equivalencias entre sí, cuantificadas por:

1 cal pequeña = 4.18 Joule
1 BTU = 778 lib. Pie

El sistema, si posee un estado energético *E*, la energía del sistema es una suma que incluye: la energía cinética, la energía potencial, la energía eléctrica, etc., aunque en general la Energía se cuantifica en 3 partes:

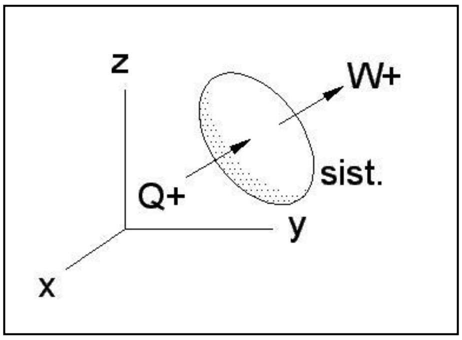
- Cinética = ½ MV^2
- Potencial gravitatoria = M.g.z
- Interna (que agrupa todas las formas restantes) = E_i

De manera que: $E = E_i + \frac{1}{2} MV^2 + Mgz$, que referida a su valor específico sería : $e = e_i + \frac{1}{2} V^2 + gz$

<u>Enunciado de la primera Ley de la Termodinámica</u>: La primera ley expresa básicamente que la energía se mantiene constante en la transferencia entre el sistema y medio ambiente; y especifica que el balance para el sistema, si W_{12}

es el trabajo efectuado por el <u>sistema</u> y Q_{12} es el calor recibido por el <u>sistema</u>, entre los dos estados *1* y *2* o inicial y final, es:

Fig..1.10



$Q_{12} - W_{12} = E_2 - E_1$ 14.4

O sea, Energía que recibe el sistema en forma de calor – Energía que transfiere el sistema en forma de trabajo mecánico = Cambio de estado de energía dentro del sistema.

De lo anterior surge que la cantidad específica de energía se relaciona con la Energía total del sistema a través de:

$$E = \int_{SIST} e dm = \int_{SIST} e\rho dv$$

Y que a fin de aplicar la Ec. 1.11.1:

$$\eta = e = ei + V^2 / 2 + gz$$

La aplicación de la ecuación 13.1 con $N = E$, $\eta = e$, nos dará:

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{DE}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} e\rho dv + \int_{SC} e\rho \overline{V} \times d\overline{A} \qquad 12.4.1$$

A su vez, la variación del trabajo está dada por:

$$\dot{W} = \dot{W}_{ejes} + \dot{W}_{\sup} = \dot{W}_{ejes} + \dot{W}_{normales} + \dot{W}_{\tan genciales}$$

Es decir, trabajo mecánico sobre partes o mecanismos internos al vol. de control, y que salgan y entreguen trabajo al medio ambiente a través de ejes, más lo necesario para impulsar las partículas, a su vez $\dot{W}_n$ se expresa como:

$$\dot{W}_n = \int_{SC} p d\overline{A} \times \overline{V}$$

$\dot{W}$ tiene las dimensiones de una potencia: trabajo / tiempo.
Reemplazando:

$$\dot{Q} - \dot{W} = \dot{Q} - \dot{W}_{ejes} - \int_{SC} p d\overline{A} \times \overline{V} - \dot{W}_{\tan g}$$

$$\dot{Q} - \dot{W}_{ejes} - \dot{W}_{\tan g} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} e\rho\, dv + \int_{SC} (\rho + \frac{p}{\rho})\rho \overline{V} \times d\overline{A}$$

como $\rho = \frac{M}{V} \rightarrow \rho = \frac{M/M}{V/M} = \frac{1}{v} \rightarrow \rho v = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{p}{\rho} = p \cdot v$

siendo v , volumen específico, a veces para la resolución de algunos problemas es conveniente definir h , (entalpía específica) $h = e_i + pv = e_i + p/\rho$

$$\dot{Q}-\dot{W}_{ejes}-\dot{W}_{\tan g}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} e\rho\,dv+\int_{SC}(e_i+\frac{V^2}{2}+g\,z+\frac{p}{\rho})\,\rho\bar{V}\times d\bar{A} \qquad 12.4.2$$

La ecuación establece que la razón de cambio con respecto al tiempo del calor agregado al sistema menos el trabajo realizado por el sistema (diferente del trabajo de flujo) es igual a la razón de cambio respecto del tiempo de la energía almacenada en el volumen de control más la razón neta del flujo de energía y del trabajo de flujo que atravesó el volumen de control.

Ejemplo 5:

Consideremos el flujo permanente unidireccional del sistema mostrado. El trabajo efectuado sobre la hélice es llamado trabajo de eje.

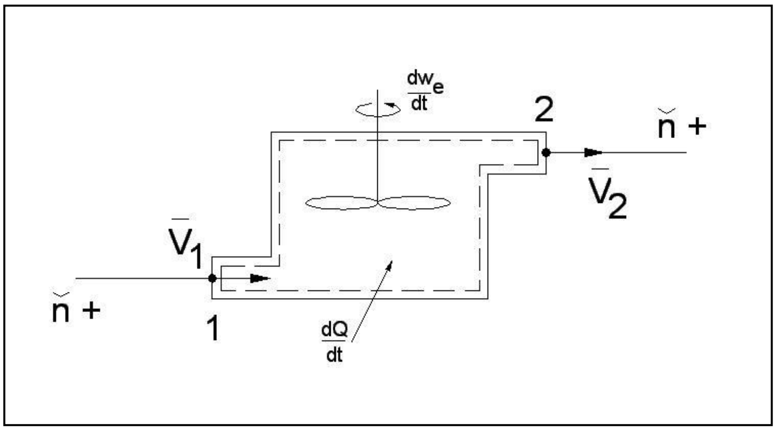


Fig.1.11

El trabajo de esfuerzo cortante hecho en todas las otras partes del contorno en 0, porque la velocidad del flujo es = 0 en las paredes o bien normal a ellas y a la dirección de la cortante en la entrada y la salida.

Entonces la ecuación 12.4.2 queda:

$$\frac{dQ}{dt}-\frac{dWe}{dt}=\int_{1+2}(\frac{p}{\rho}+\frac{V^2}{2}+gz+e_i)\rho VdA$$

Puesto que el flujo es unidimensional p, v, e, ρ son uniformes sobre A_1 y A_2 y si despreciamos la variación de z sobre estas áreas, pero si la consideramos entre la entrada y la salida tenemos:

$$\frac{dQ}{dt}-\frac{dW_e}{dt}=(\frac{p2}{\rho 2}+\frac{V_2{}^2}{2}+gz_2+e_{i2})\rho_2 A_2 V_2-(\frac{p_1}{\rho_1}+\frac{V_1{}^2}{2}+gz_1+li_1)\rho_1 A_1 V_1$$

Como el flujo es estable y unidireccional de acuerdo a la ecuación de la continuidad tenemos

$\rho_1 A_1 V_1=\rho_2 A_2 V_2=\frac{dm}{dt}\therefore$ es reemplazado:

$$\frac{dQ}{dt}-\frac{dWe}{dt}=(\frac{P2}{\rho_2}+\frac{V_2{}^2}{2}+gz_2+ei_2)\frac{dm}{dt}-(\frac{p_1}{\rho_1}+\frac{V_1{}^2}{2}+gz_1+ei_1)\frac{dm}{dt}$$

dividiendo m. a. m. por dm $\rightarrow$

$$q-w_e=(\frac{p2}{\rho 2}+\frac{V_2{}^2}{2}+gz_2+ei_2)-(\frac{p_1}{\rho_1}+\frac{V_1{}^2}{2}+gz_1+ei_1)$$

ordenando y suponiendo flujo incompresible:

$$q - w_e = \frac{p_2 - p_1}{\rho} + \frac{V_2^{\ 2} - V_1^{\ 2}}{2} + g(z_2 - z_1) + (ei_2 - ei_1)$$

Hemos supuesto que el flujo es ideal, por tanto los esfuerzos cortantes sobre las superficies de intercambio de entrada y salida son nulos, y solo actúan los esfuerzos o tensiones normales; si además no hay trabajo extraído y si no cambia la energía interna y si el proceso es adiabático $q = 0$ entonces queda:

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho} + \frac{V_2^{\ 2} - V_1^{\ 2}}{2} + g(z_2 - z_1) = 0$$

Esta ecuación vincula los estados en las estaciones 1 y 2 del sistema, y se conoce como Ecuación de Bernuolli , dividiendo miembro a miembro por g, obtenemos otra forma de la ecuación muy utilizada:

$$\frac{p_2 - p_1}{\gamma} + \frac{V_2^{\ 2} - V_1^{\ 2}}{2g} + (z_2 - z_1) = 0$$

En esta última γ es el peso específico de la sustancia que evoluciona

NOTA DE APLICACIÓN

Ecuación Integral de la Cantidad de Movimiento para referencia no - inercial.

Cuando una partícula o una región de fluido se mueven referidas a una terna no inercial, estará sometida en general a un movimiento acelerado no uniforme introducido por el movimiento de la terna, esto se observa en la Fig. 1.12 en la cual se ha representado una partícula en un instante dado genérico referida a una terna no - inercial x, y ,z observados desde una terna fija o inercial X,Y,Z.

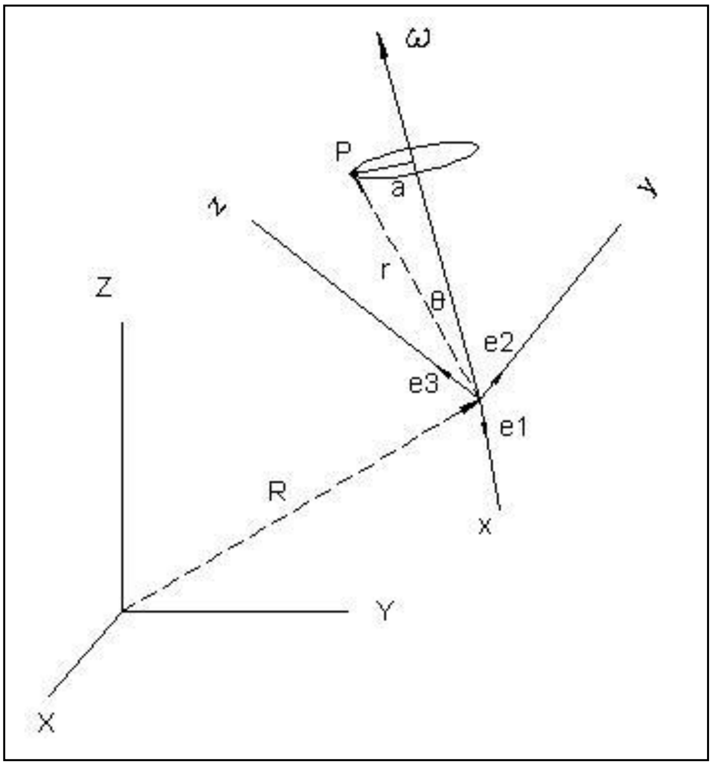


Fig. 1.12

El movimiento genérico de la terna no – inercial quedará definido sobre la terna inercial mediante una traslación R y una rotación dada por el vector ω, el movimiento instantáneo de la partícula genérica podrá siempre ser descompuesto desde el punto de vista del sistema fijo o inercial mediante una traslación instantanea, vector R y una rotación instantánea, vector ω.

La velocidad tangencial instantánea de la partícula estará dada por:

$V_P = |\varpi| . |r| . sen\theta \rightarrow \vec{V} = \vec{\varpi} \wedge \vec{r} \rightarrow \overset{*}{\vec{r}} = \vec{\varpi} \wedge \vec{r}$

Supongamos que la terna solidaria al sistema no inercial x,y,z, sea e1, e2, e3., como estoa versores pertenecen al sistema no inercial, la ultima expresión anterior, por tanto será aplicable a ellos con lo cual podemos escribir:

$$\overset{*}{\breve{e}}1 = \vec{\varpi} \wedge \breve{e}1$$

$$\overset{*}{\breve{e}}2 = \vec{\varpi} \wedge \breve{e}2$$

$$\overset{*}{\breve{e}}3 = \vec{\varpi} \wedge \breve{e}3$$

que se pueden escribir de acuerdo a la definición de producto vectorial como:

$$\overset{*}{\breve{e}}1 = \vec{\varpi} \wedge \breve{e}1 = \begin{vmatrix} e1 & e2 & e3 \\ \varpi 1 & \varpi 2 & \varpi 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \varpi_3 \breve{e}_2 - \varpi_2 \breve{e}_3$$

$$\overset{*}{\breve{e}}2 = \vec{\varpi} \wedge \breve{e}2 = \begin{vmatrix} e1 & e2 & e3 \\ \varpi 1 & \varpi 2 & \varpi 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \varpi_1 \breve{e}_3 - \varpi_3 \breve{e}_1$$

$$\overset{*}{\breve{e}}3 = \vec{\varpi} \wedge \breve{e}3 = \begin{vmatrix} e1 & e2 & e3 \\ \varpi 1 & \varpi 2 & \varpi 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \varpi_2 \breve{e}_1 - \varpi_1 \breve{e}_2$$

Definamos ahora a partir de la Fig. 1.12 la posición del punto P visto desde la terna fija o inercial:

$$\vec{P} = \vec{R} + \vec{r} = \vec{R} + (x \breve{e}_1 + y \breve{e}_2 + z \breve{e}_3)$$

y la expresión de las velocidades sería:

$$\dot{\vec{P}} = \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{R}} + (\dot{x} \breve{e}_1 + \dot{y} \breve{e}_2 + \dot{z} \breve{e}_3) + (x \dot{\breve{e}}1 + x \dot{\breve{e}}2 + x \dot{\breve{e}}3)$$

reemplazando los valores obtenidos para las velocidades de los versores y operando queda finalmente:

$$\dot{\vec{P}} = \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}} + \vec{\varpi} \wedge \vec{r} \qquad \text{(na 2.1)}$$

Al efecto de simplicar la nomenclatura, nos valemos de la siguiente notación auxilar:

$\dot{\vec{P}} = \left.\dfrac{d\vec{P}}{dt}\right|_F = D_F P$ o sea la derivada primera respecto a tiempo referida a la terna fija o inercial del vector P

$\dot{\vec{r}} = \left.\dfrac{d\vec{P}}{dt}\right|_M = D_M P$ o sea la derivada primera respecto a tiempo referida a la terna movil o no- inercial del vector P

Si los orígenes de ambos sistemas coinciden *(R =0)* tendremos un caso particular para la expresión (na 2.1)que podemos escribir:

$$D_F P = D_M P + \vec{\varpi} \wedge \vec{r} \Rightarrow D_F \vec{r} = D_M \vec{r} + \vec{\varpi} \wedge \vec{r}$$

de la cual podemos definir el operador auxiliar:

$[D_F = D_M + \vec{\varpi} \wedge]$ que aplicaremos en el desarrollo siguiente.

Partiendo de la expresión (na 2.1), de la velocidad de la partícula vista desde la terna fija o inercial, y de la expresión del operador auxiliar, podremos calcular la aceleración de la partícula:

$$D_F(D_F\,P) = D_F\,\overset{\bullet}{\vec{R}} + D_F(D_M\,\vec{r} + \vec{\varpi} \wedge \vec{r}\,) =$$

$$D_F(D_F\,P) = D_F\,\overset{\bullet}{\vec{R}} + (D_M + \vec{\varpi}\,\wedge)(D_M\,\vec{r} + \vec{\varpi} \wedge \vec{r}\,) =$$

$$= D_F\,\overset{\bullet}{\vec{R}} + D_M(D_M\,\vec{r} + \vec{\varpi} \wedge \vec{r}\,) + \vec{\varpi} \wedge (D_M\,\vec{r} + \vec{\varpi} \wedge \vec{r}\,) =$$

$$= D_F\,\overset{\bullet}{\vec{R}} + D_M^{\,2}\,r + D_M(\vec{\varpi} \wedge \vec{r}\,) + \vec{\varpi} \wedge + D_M\,\vec{r} + \vec{\varpi} \wedge (\vec{\varpi} \wedge \vec{r}\,)$$

y tomando en cuenta que el tercer término, aplicando las propiedades del producto vectorial es:

$$D_M(\vec{\varpi} \wedge \vec{r}\,) = (D_M\,\vec{\varpi}\,) \wedge \vec{r} + \varpi \wedge D_M\,\vec{r}$$

Reemplazando queda:

$$D_F(D_F\,P) = D_F\,\overset{\bullet}{\vec{R}} + D_M^{\,2}\,\vec{r} + (D_M\,\vec{\varpi}\,) \wedge \vec{r} + 2\,\vec{\varpi} \wedge (D_M\,\vec{r}\,) + \vec{\varpi} \wedge (\vec{\varpi} \wedge \vec{r}\,)$$

Entonces en la forma más general la aceleración de un punto correspondiente a una terna no inercial observado desde una terna fija o inercial quedará:

$$\vec{a}_F = \overset{\bullet\bullet}{\vec{R}} + \vec{a}_M + \left[\overset{\bullet}{\vec{\varpi}} \wedge \vec{r} + 2\,\vec{\varpi} \wedge \overset{\bullet}{\vec{r}} + \vec{\varpi} \wedge (\vec{\varpi} \wedge \vec{r}\,)\right] = \overset{\bullet\bullet}{\vec{R}} + \vec{a}_M + \vec{a}_{ARR}$$

A veces al término dentro del corchete se lo llama aceleración de arrastre.

Esta expresión de la aceleración de la partícula vista desde la terna de referencia inercial, contiene los términos de:

- ✓ aceleración del origen de coordenadas de la terna móvil, con respecto a la terna fija.
- ✓ aceleración lineal de la partícula con respecto la terna móvil, sobre su trayectoria circular, se ve fácilmente que si la aceleración angular es nula este término desaparece, es el caso de la velocidad de rotación constante de la Tierra.
- ✓ aceleración tangencial de la partícula en la terna móvil,
- ✓ aceleración Coriolis de la partícula sobre la terna móvil y
- ✓ aceleración central (centrifuga) de la partícula en la terna móvil.

Las dos últimas son seudofuerzas observadas solamente desde la terna móvil.

Multiplicando m.a.m por la masa de la partícula diferencial *dm*, obtenemos la expresión del principio de Newton para el sistema infinitesimal de una partícula:

$$dm.\vec{a}_F = dm.\left[\overset{\bullet\bullet}{\vec{R}} + \vec{a}_M + \overset{\bullet}{\vec{\varpi}} \wedge \vec{r} + 2\,\vec{\varpi} \wedge \overset{\bullet}{\vec{r}} + \vec{\varpi} \wedge (\vec{\varpi} \wedge \vec{r}\,)\right]$$

que reordenándola queda:

$$dm.\vec{a}_F - dm.\left[\overset{\bullet\bullet}{\vec{R}} + \overset{\bullet}{\vec{\varpi}} \wedge \vec{r} + 2\,\vec{\varpi} \wedge \overset{\bullet}{\vec{r}} + \vec{\varpi} \wedge (\vec{\varpi} \wedge \vec{r}\,)\right] = dm.\vec{a}_M = D_M(dm..\overset{\bullet}{\vec{r}}\,) = \frac{D\,\vec{P}_M}{Dt}$$

Siendo P_M la cantidad de movimiento referida a la terna móvil.

Podemos ahora integrar la expresión anterior sobre todos los elementos del sistema, designando, con Fs, la fuerza superficial sobre el sistema y B la fuerza másica de campo por unidad de masa., quedando:

$$\vec{F}_S + \int_V \vec{B}.\rho.dv - \int_V [\ddot{\vec{R}} + 2\vec{\varpi} \wedge \dot{\vec{r}} + \dot{\vec{\varpi}} \wedge \vec{r} + \vec{\varpi} \wedge (\vec{\varpi} \wedge \vec{r})].\rho.dv = \frac{D}{Dt}\int_V \dot{\vec{r}}.(\rho dv)$$

Como el volumen de control es solidario a la terna móvil, y fijo respecto de ella ydado que la expresión de la derivada total del segundo miembro la podemos reemplazar por la forma explícita de la ecuación integral para cantidad de movimiento, quedará finalmente la expresión:

$$\vec{F}_S + \int_{VC} \vec{B}.\rho.dv - \int_{VC} [\ddot{\vec{R}} + 2\vec{\varpi} \wedge \dot{\vec{r}} + \dot{\vec{\varpi}} \wedge \vec{r} + \vec{\varpi} \wedge (\vec{\varpi} \wedge \vec{r})].\rho.dv = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \vec{V}_M \ (\rho dv) + \int_{SC} \vec{V}_M \ (\rho \vec{V}_M \times \vec{n}\, dA)$$

Ejemplo de aplicación. Movimiento del Cohete.

Un cohete según se indica en la figura siguiente, empieza a funcionar desde el reposo moviendose a lo largo de una linea recta en el espacio exterior.*(p_{atm} = 0)* donde pueden despreciarse tanto la resistencia del aire como la acción de la gravedad. En el motor del cohete se queman β *(Kg/seg)* de combustible por unidad de tiempo, y tiene inicialmente una masa m_o . Su masa despues de transcurrir un tiempo t será por tanto:

$M = m_o - \beta.t$

por esta razón a los problemas de este tipo se los llama problemas de masa variable. La velocidad de eyección de los gases desde la tobera se supone constante y de valor V_e con relación al cohete, cuando en la salida la presión interior es p_e y la densidad ρ_e. La velocidad del cohete respecto de la terna inercial se lo designa V_R, se trata de determinar el movimiento del cohete respecto de la terna inercial.

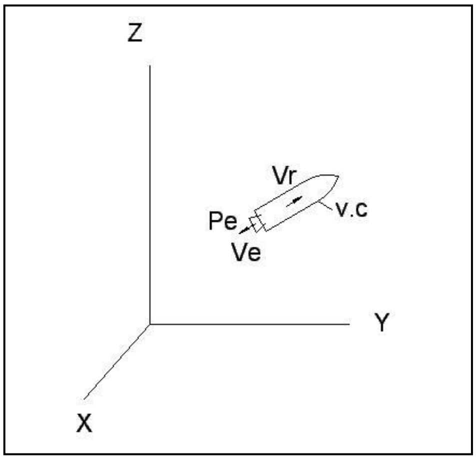


Fig.1.13

El volumen de control se toma coincidente con la silueta del cohete, por tanto , la aceleración del volumen de control es la aceleración del cohete respecto a la terna fija, o sea:

$$\ddot{\vec{R}} = \dot{\vec{V}}_R$$

También en este caso la velocidad angular y su derivada son nulas ya que el movimiento de la terna móvil solidaria al cohete es lineal, también la única fuerza superficial que actúa es pe.Ae , donde Ae es el area de la tobera, volviendo a la ecuación general:

$$\vec{F}_S + \int_{VC} \vec{B}.\rho.dv - \int_{VC} [\ddot{\vec{R}} + 2\vec{\varpi} \wedge \dot{\vec{r}} + \dot{\vec{\varpi}} \wedge \vec{r} + \vec{\varpi} \wedge (\vec{\varpi} \wedge \vec{r})].\rho.dv = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \vec{V}_M \;(\rho dv) + \int_{SC} \vec{V}_M \;(\rho \vec{V}_M \times \vec{n}\, dA)$$

tomamos en cuenta que los términos que contienen ω se anulan, también la integral que contiene B, ya que en el espacio exterior el campo es nulo, y asimismo la primera integral del segundo miembro, ya que no hay variación en el tiempo de la cantidad de movimiento de las partículas que salen del cohete, con estas simplificaciones, queda:

$$pe.Ae - \ddot{\vec{R}} \int_{VC} \rho.dv = -Ve^2.\rho_e.Ae =$$

$$pe.Ae - \dot{V}_R \int_{VC} \rho.dv = -Ve^2.\rho_e.Ae =$$

$$pe.Ae - \dot{V}_R\, M = -Ve^2.\rho_e.Ae$$

observe que $V_M \times n$ tiene sentido positivo ya que la normal a la superficie y el sentido del vector velocidad son iguales, pero $V_M\,(\rho V_M \times n)$, tiene signo negativo opuesto a la dirección de vuelo y el sentido de *PeAe*.

Como:

$$\rho_e.V_e.A_e = \beta = -\dot{M} \rightarrow$$

$$p_e.A_e - \frac{dV_R}{dt}(m_o - \beta t) = -\beta V_e \rightarrow$$

$$\frac{dV_R}{p_e A_e + \beta V_e} = \frac{dt}{m_o - \beta t} \rightarrow$$

$$dV_R = (p_e A_e + \beta V_e) \quad \frac{dt}{mo - \beta t} \rightarrow$$

$$dV_R = \frac{(p_e A_e + \beta V_e)}{-\beta} \quad \frac{d(mo - \beta t)}{(mo - \beta t)}$$

ahora integramos esta última expresión, suponiendo que la velocidad inicial es $v = 0$ cuando se inicia la expulsión de gases en $t = 0$.

$$\int_0^v dV_R = -\frac{peAe + \beta Ve}{\beta} \int_0^t \frac{d(m_o - \beta t)}{(m_o - \beta t)} \rightarrow$$

$$V_R - 0 = -\frac{peAe + \beta Ve}{\beta} \ln (m_o - \beta t) \Big|_0^t =$$

$$V_R = -(\frac{peAe}{\beta} + Ve)[\ln(m_o - \beta t) - \ln m_o] = [Ve + \frac{peAe}{\beta}] \;.\ln [\frac{m_o}{m_o - \beta t}]$$

que es la velocidad del vehiculo al cabo del tiempo *t*, partiendo del reposo en el espacio exterior.

Bibliografía complementaria para consulta:

FRANK M. WHITE, Mecánica de Fluidos, Ed. Mc Graw Hill

WILLIAM F. HUGES, Dinámica de los fluidos, Ed Mc Graw Hill

ROBERT FOX – ALAN MAC DONALD, Introducción a la Mecánica de Fluidos, 4ta Edición, Mc Graw Hill

IRWIN SHAMES, Mecánica de Fluidos, 6ta Ed. Editorial Mc Graw Hill

RONALD GILES, Mecánica de los fluidos e Hidráulica, Ed. Mc Graw Hill

STREETER Y WEELER, Mecánica de los fluidos, Ed. Mc Graw Hill