

1.13. Ecuaciones Diferenciales de tratamiento de un fluido:

El tratamiento es equivalente a sustituir un volumen de control discreto por uno diferencial. A menudo el paquete de ecuaciones diferenciales puede usarse con más éxito en la resolución de problemas y la obtención de fórmulas de uso general simplificadas. La forma más directa de obtenerlas es utilizar el cálculo vectorial para llegar a las formas diferenciales a partir de las formas integrales. Para ello aplicamos las formas finales de los teoremas del análisis vectorial siguientes:

El teorema de la divergencia o de Gauss:

$$\int_A \bar{B} \times d\bar{A} = \int_V \text{div} \bar{B} \cdot dv$$

El teorema del Gradiente:

$$\int_A \phi d\bar{A} = \int_V \text{grad} \phi dv$$

Definiciones de Gradiente, divergencia y rotacional:

$\bar{A} = \bar{A}(x \cdot y \cdot z)$ es una función vectorial o campo vectorial

$\phi = \phi(x \cdot y \cdot z)$ es una función escalar o campo escalar

operador gradiente: $\text{grad} = \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k} \right)$

El gradiente aplicado a una función escalar, da una magnitud vectorial:

$$\text{grad} \phi = \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \bar{k}$$

La divergencia es el producto escalar del operador gradiente con un vector o campo vectorial y da una magnitud escalar:

$$\text{Div} \bar{A} = \nabla \cdot \bar{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k} \right) \cdot (A_1 \bar{i} + A_2 \bar{j} + A_3 \bar{k}) = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}$$

El rotacional es el producto vectorial del operador gradiente y un vector de componentes A_1, A_2, A_3 , o campo vectorial, como resultado de un vector.

$$\text{rot} \bar{A} = \nabla \wedge \bar{A} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) \bar{i} + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \right) \bar{j} + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) \bar{k}$$

Dos identidades importantes son:

$$\text{div} \text{rot} \bar{A} = \nabla \cdot (\nabla \wedge \bar{A}) = 0$$

$$\text{rot} \text{grad} \phi = \nabla \wedge (\nabla \phi) = 0$$

1.13.1 Ecuación Diferencial de la Continuidad:

Partimos de:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dv + \int_{SC} \rho \bar{V} \times d\bar{A} = 0 \quad \text{Aplicando el teorema de la divergencia al segundo sumando:}$$

$$\int_{VC} \frac{\partial}{\partial t} (\rho dv) + \int_{VC} \text{div}(\rho \bar{V}) dv = 0 \rightarrow \int_{VC} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \bar{V}) \right] dv = 0 \rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \bar{V}) = 0 \quad 1.13.1$$

Esta última es la denominada Ecuación diferencial de la continuidad.

También se puede escribir:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \times (\rho \bar{V}) = 0 \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{V} \times \nabla \rho + \rho \nabla \times \bar{V} = 0$$

Que resulta en ecuaciones más reducidas para los siguientes casos particulares:

Si el flujo es permanente: $\nabla \times (\rho \bar{V}) = 0$

Si el flujo es incompresible: $\nabla \times \bar{V} = 0$

1.13.2 Ecuación diferencial de la cantidad de movimiento lineal:

Aquí el análisis se hace a partir de un volumen de control diferencial. La cantidad de movimiento lineal está definida por:

$$\bar{F} = \frac{D\bar{P}}{Dt} = \frac{D(\bar{V} \cdot M_{sist})}{Dt} \rightarrow d\bar{F} = \frac{D}{Dt} (\bar{V} \cdot dm) = \frac{D}{Dt} (\bar{V} \rho dv)$$

Como $dm = \rho dv$ es constante para el sistema en virtud del principio de conservación de masa podemos escribir la expresión anterior como:

$$d\bar{F} = \rho dv \frac{D\bar{V}}{Dt} = \rho dv \left(\frac{D\bar{V}}{Dt} + \bar{V} \times \text{grad}\bar{V} \right) \quad \text{que para un volumen discreto será:}$$

$$\bar{F} = \int_{Vol} \left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \bar{V} \times \text{grad}\bar{V} \right) \rho dv$$

Esta fuerza total puede ser desglosada en las fuerzas concurrentes, asumiendo que no hay fuerzas tangenciales $\bar{F}_{TAN} = 0$. O sea para fluido no viscoso sería:

a) Fuerzas másicas: $\bar{F}_{MAS} = \int_{VOL} \rho dv \bar{f}$ siendo \bar{f} el valor intensivo de las fuerzas másicas.

b) Fuerzas superficiales: $\bar{F}_{SUP} = - \int_A p d\bar{A} = - \int_{VOL} \text{grad}p \cdot dv$

Igualando: $\int_{VOL} p \cdot \bar{f} dv - \int_{VOL} \text{grad}p dv = \int_{VOL} \left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \bar{V} \times \text{grad}\bar{V} \right) \rho dv$

De donde surge la expresión diferencial:

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \bar{V} \times \text{grad}\bar{V} = \bar{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad}p \quad 1.13.2$$

Ecuación diferencial de la cantidad de movimiento lineal para fluido no viscoso.

Con las ecuaciones integrales y el análisis con volúmenes de control se solucionan muchos problemas con flujo uniforme y unidimensional que a menudo dan soluciones muy aproximadas con la realidad física, pero su uso es limitado cuando se desea obtener las distribuciones exactas de velocidad y presiones en torno a objetos o tomar en cuenta las restricciones que impone un flujo real en lugar de un flujo ideal.

Cuando se comparan las técnicas de uso de las ecuaciones diferenciales con respecto a las de volumen de control, puede decirse que se trata de métodos a escala reducida. Las ecuaciones de mecánica de fluidos aparecen en su forma final como Ecuaciones Diferenciales y se realiza un “Análisis diferencial” de los problemas de flujo.

1.13.3 Simplificaciones de la Ecuación Diferencial de Continuidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \bar{V}) = 0 \quad \text{Como } \text{div} \bar{A} = \text{grad} \times \bar{A} = \nabla \times \bar{A}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_x(\rho \bar{V}) = 0 \rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{V} \times \nabla \rho + \rho \nabla \times \bar{V} = 0$$

Si el fluido es incompresible y homogéneo $\rho = cte$, se cumple que:

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{V} \times \text{grad} \rho = 0$$

Por lo tanto los 2 primeros términos de la ecuación anterior se anulan y queda:

$$\rho \nabla \times \bar{V} = 0 \rightarrow \nabla \times \bar{V} = 0$$

O bien : $\text{grad} \times \bar{V} = 0$

$$\text{O bien: } \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0$$

Si el flujo es permanente: $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

$$\bar{V} \times \text{grad} \rho + \rho \text{grad} \bar{V} = 0$$

1.13.4 Simplificaciones de la Ecuación Diferencial de Cantidad de Movimiento Lineal:

A partir de:

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \bar{V} \times \text{grad} \bar{V} = \bar{f} - \frac{\text{grad} p}{\rho}$$

Como \bar{f} representa a las fuerzas másicas o de campo, si suponemos que la única fuerza de campo que opera es la gravedad quedará:

$f = -\text{grad} z$ Reemplazando:

$$\frac{DV}{Dt} = \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \bar{V} \times \text{grad} \bar{V} = -g \cdot \text{grad} z - \frac{\text{grad} p}{\rho}$$

Es llamada “Ecuación de Euler”.

Si el flujo es permanente queda:

$$\frac{d\bar{V}}{dt} = 0 \rightarrow$$

$$\bar{V} \times \text{grad } \bar{V} = -\frac{\text{grad } p}{\rho} - g(\text{grad } z)$$

Ecuación de Euler para Flujo Permanente

1.14 Definiciones de Flujo Irrotacional y Rotacional.

Consideremos una partícula cúbica aislada dentro del mismo fluido (la partícula es una región idealizada del mismo fluido). Idealicemos dos segmentos ortogonales sobre la cara ‘x z’ de la partícula.

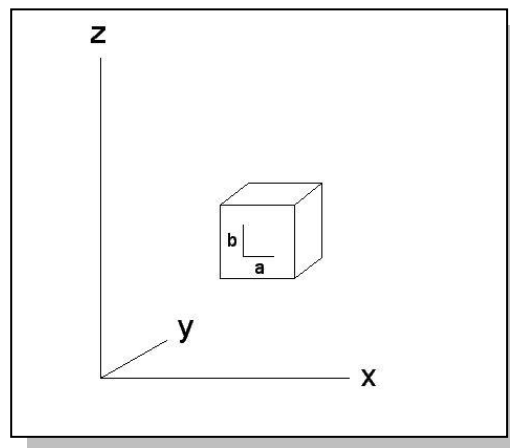


Fig 1.12

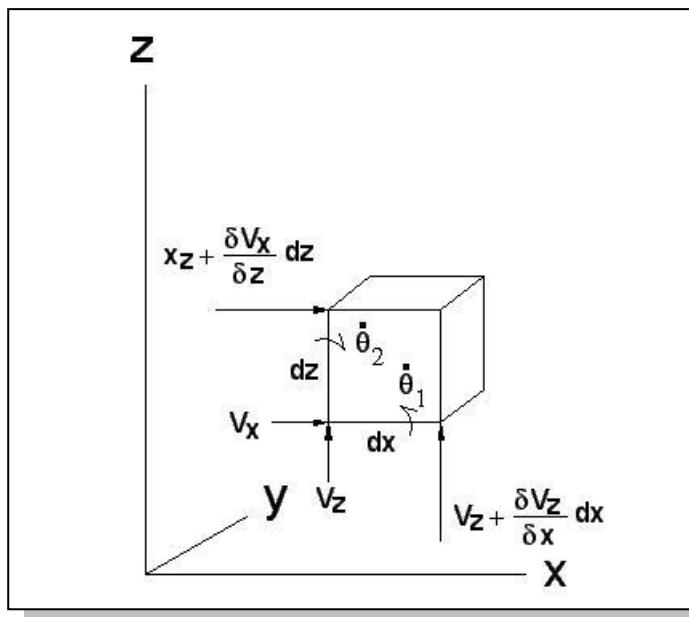
Ya sea que el segmento a o b roten se creará una velocidad angular cuyo vector dirección tendría que ser paralelo al eje “y”. Si la partícula rota respecto a un eje paralelo a “y”, los segmentos a y b se mantendrán ortogonales entre sí, sin embargo, si la partícula se deforma a y b podrán cerrarse o abrirse entre sí.

Podemos imaginar que si tomamos un promedio de las velocidades angulares $(\omega_{ay} + \omega_{by}) / 2$ si este promedio es nulo, puede haber deformación o no, pero no rotación de la partícula; en cambio si el promedio da un valor positivo o negativo, habrá una velocidad angular neta según “y” y la partícula rotará.

Si al menos una partícula en la región bajo estudio posee una rotación efectiva, decimos que el flujo es rotacional en la región e irrotacional si ninguna partícula presenta rotación efectiva respecto a los 3 ejes principales de acuerdo con el criterio anterior

O, en otras palabras, si los componentes de la velocidad angular respecto a los 3 ejes ortogonales se anulan en promedio para todas las partículas fluidas de una región, el flujo es “irrotacional” en dicha región.

Fig 1.13.



Si ahora consideramos los segmentos a y b del elemento cúbico coincidiendo con las aristas dx y dz , la componente de velocidad angular de la partícula en la dirección “ y ” debe ser igual al promedio de velocidades angulares de los segmentos dx y dz en torno a “ y ”, con lo cual quedaría (recuerde que $\omega.R$ = velocidad tangencial) :

$$\dot{\theta}_1 = - \frac{(V_z + \frac{\partial V_z}{\partial x} dx) - V_z}{dx} = - \frac{\partial V_z}{\partial x}$$

$$\dot{\theta}_2 = - \frac{(V_x + \frac{\partial V_x}{\partial z} dz) - V_x}{dz} = - \frac{\partial V_x}{\partial z}$$

Y la componente de la velocidad angular según “ y ” sería:

$$\omega_y = \frac{1}{2} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right)$$

Haciendo lo mismo para las otras dos componentes, queda finalmente:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \vec{k} \right\} \quad 1.14.1$$

A la magnitud $2 \vec{\omega}$ se la llama “vector vorticidad” la condición de irrotacionalidad viene dada si las 3 componentes de $2 \vec{\omega}$ son nulas.

Aplicando la definición matemática de rotacional, a la expresión (1.14.1) esta quedará expresada como:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{V} \quad 1.14.2$$

El operador rotacional, aplicado a cualquier campo vectorial continuo da otro campo vectorial, en particular cuando es aplicado al campo de velocidad, nos da el campo “vorticidad”. De la ecuación (1.14.2) surge la condición de irrotacionalidad de la región fluida, si se cumple que:

$$\text{rot } \vec{V} = 0 \quad 1.14.3$$

1.14.1 Ecuación de Bernuolli para línea de corriente:

Partimos de la ecuación diferencial de la cantidad de movimiento lineal:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \times \text{grad} \vec{V} = f - \frac{1}{\rho} \text{grad} \rho \quad 1.14.4$$

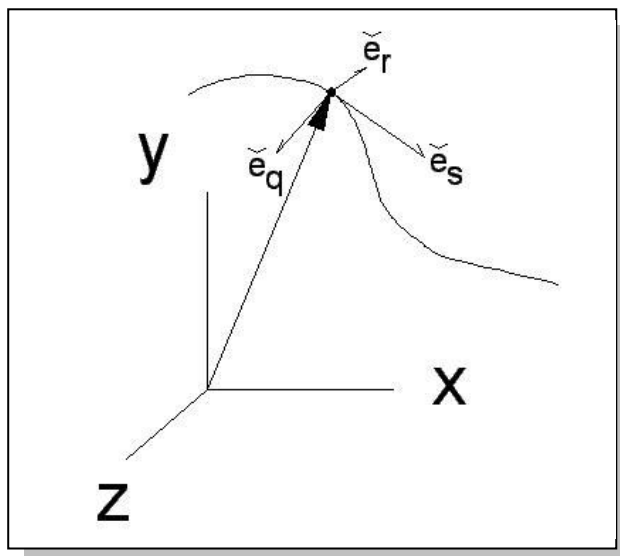


Fig. 1.14

Si consideramos el movimiento de la partícula sobre la línea de corriente, $\vec{V} = V \vec{e}_s$ y el operador gradiente será:

$$\text{grad} = \frac{\partial}{\partial s} \vec{e}_s + \frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{\partial}{\partial q} \vec{e}_q$$

Consideremos la ecuación 15.2 para flujo permanente:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0 \rightarrow \vec{V} \times \text{grad} \vec{V} = f - \frac{1}{\rho} \text{grad} p \quad \text{En este caso:}$$

$$\vec{V} \times \text{grad} \vec{V} = V \frac{\partial V}{\partial s} \vec{e}_s$$

y:

$$\text{grad} p = \frac{\partial p}{\partial s} \vec{e}_s + \frac{\partial p}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{\partial p}{\partial q} \vec{e}_q$$

Multiplicando m. a . m. la ecuación (15.2) escalarmente por $d\vec{s} = ds \vec{e}_s$:

$$V \frac{dv}{ds} \bar{e}_s \times ds \bar{e}_s = \bar{f} \times d\bar{s} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} ds$$

$$V \frac{\partial V}{\partial s} ds = \bar{f} \times d\bar{s} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} ds$$

Como los derivados parciales son únicas, pueden convertirse en derivadas totales:

$$VdV = \bar{f} \times d\bar{s} - \frac{1}{\rho} dp \quad 1.14.5$$

Si ahora pasamos a coordenadas x, y, z , los componentes V y p ahora son independientes de las coordenadas, ya que son valores en módulo o puntuales. O sea que ahora:

$$\bar{f} = -g\bar{k} \quad d\bar{s} = dx\bar{i} + dy\bar{j} + dz\bar{k} \rightarrow \bar{f} \times d\bar{s} = -gdz$$

Reemplazando queda:

$$VdV = -gdz - \frac{1}{\rho} dp \rightarrow VdV + \frac{1}{\rho} dp + gdz = 0$$

Al integrar lo anterior queda la ecuación de Bernuolli formal:

$$\frac{1}{2} V^2 + \frac{p}{\rho} + gz = cte \rightarrow \frac{p_1}{\rho} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho} + z_2 + \frac{V_2^2}{2g}$$

que es válida para flujo permanente tomando los puntos 1 y 2 sobre la línea de corriente.

1.14.2 Flujo Rotacional, Irrotacional y Viscosidad:

El desarrollo de una rotación en una partícula fluida que inicialmente este en flujo irrotacional, requerirá la acción de Fuerzas de corte sobre la superficie de la partícula, estas fuerzas por ejemplo sobre las caras superior e inferior de un pequeño cubo diferencial en flujo paralelo según x está dado por $T = \mu \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)$

que es la ley de Newton para viscosidad, con la cual vemos que la tensión y por ende la Fuerza, depende de la viscosidad y del gradiente de velocidad según la dirección normal a la cara y actúa paralelamente a la cara superior e inferior.

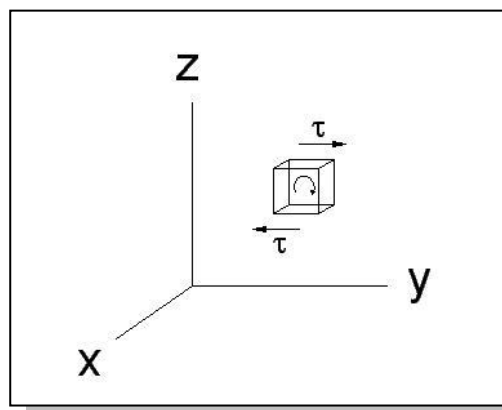


Fig.1.15

Para fluidos con pequeña viscosidad como el aire, el flujo puede esperarse irrotacional para todas aquellas regiones donde no existan gradientes de velocidad elevados.

Por ejemplo para un perfil de ala de avión que se mueve en un flujo de aire inicialmente no perturbado, el flujo es irrotacional en la mayor parte del campo.

No obstante, por pequeña que sea la viscosidad, la velocidad del fluido en contacto con la superficie es siempre cero, o sea los fluidos se “pegan” a las superficies de los cuerpos sólidos, como las condiciones de corriente libre o próximas a ellas se obtienen a distancias pequeñas del cuerpo, se concluye que debe haber zonas de pequeño espesor próximas a la superficie, donde el gradiente de velocidad debe ser muy grande y por ende las tensiones de corte en estas zonas, ya que las velocidades pasan de cero al valor de corriente libre.

Al haber tensiones de cortante, el flujo se torna también rotacional, debido a los fenómenos descritos anteriormente, por tanto, estas zonas denominadas “capas límite” poseen flujo rotacional no estacionario, con excepción de una pequeña región inicial donde los gradientes de presión son nulos o negativos en que la capa límite se denomina laminar, y es de flujo rotacional estacionario, esta región estacionaria es coincidente con la región próxima al punto de estancamiento de proa para perfiles, cilindros, esferas y placas planas horizontales en flujo abierto, y bocas de entrada a tuberías, toberas y difusores en flujos cerrados.

En un perfil alar con un ángulo de incidencia pequeño (inferior a 5°) puede observarse una zona de discontinuidad entre las capas límite superior e inferior al sobrepasar el punto del vértice posterior. o sea una discontinuidad entre la región superior e inferior, a partir de el punto de estancamiento o estagnación de popa, esta discontinuidad da lugar a una zona de desprendimiento vorticosa llamada estela.

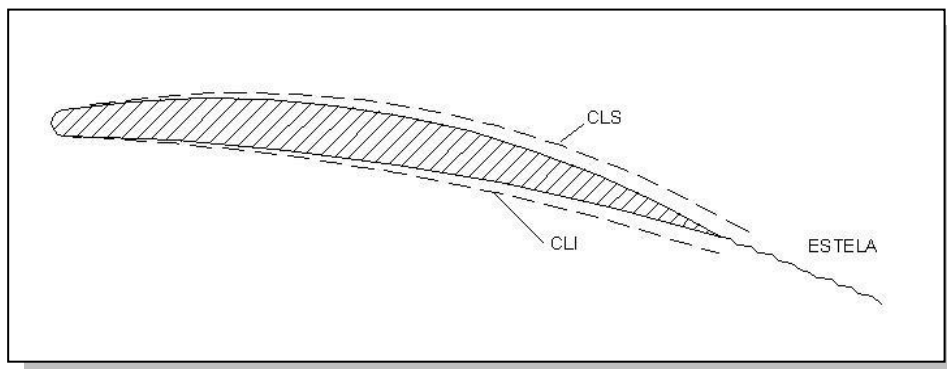


Fig.1.16

Los espesores de la capa límite son pequeños, digamos del orden de décimas de milímetro hasta alcanzar el máximo espesor del perfil, (zona del gradiente negativo de presiones) luego corriente abajo, el flujo vuelve a tener gradientes de presión casi nulos, y más atrás gradientes de presión positivos, la capa límite pasa de laminar a turbulenta aumentando un poco el espesor, a la salida se crea una discontinuidad ambas capas que se desprenden a velocidades diferentes formando una estela o calle de remolinos también llamada calle de Von Karman, que es creada continuamente y luego atenuada y anulada por la viscosidad.

La estela rotacional persistiría por siempre si la viscosidad no la detuviera al igual que la rotación de una bola de billar persistiría por siempre en ausencia de rozamiento, como estos mecanismos son teóricos, podríamos esperar un flujo teórico vorticial no-viscoso persistente en el tiempo; pero en la realidad, la viscosidad se ocupa de generar y luego destruir la vorticidad.

1.14.3 Ecuación de Bernuolli para Flujo Irrotacional:

Hasta ahora, hemos considerado el flujo como:

- a.- Incompresible
- b.- Permanente
- c.- No-viscoso

Agregamos ahora la condición de irrotacional en la ecuación de Euler, para lo cual la misma debe ser reescrita de forma que se ponga de manifiesto la componente de rotacionalidad no restringida hasta ahora:

A partir de la Ecuación de Euler ya obtenida:

$$\bar{V} \times \text{grad} \bar{V} = -\frac{\text{grad } p}{\rho} - g(\text{grad } z)$$

En la cual la única fuerza másica considerada es la gravedad.

Demostraremos primero que el primer miembro, puede reescribirse como:

$$\bar{V} \times \text{grad} \bar{V} = \text{grad} \left(\frac{\bar{V}^2}{2} \right) - \bar{V} \wedge \text{rot} \bar{V}$$

(tómese en cuenta que en álgebra vectorial $\bar{V}^2 = \bar{V} \times \bar{V}$)

Para ello consideremos que:

$$\begin{aligned} \bar{V} \times \text{grad} \bar{V} &= (V_x \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} + V_y \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} + V_z \frac{\partial \bar{V}}{\partial z}) = (V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z}) + (V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z}) \\ &+ (V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z}) = \end{aligned}$$

Desarrollamos primero, el primer término:

$$\begin{aligned} \text{grad} \left(\frac{\bar{V}^2}{2} \right) &= \frac{\partial(\bar{V}^2/2)}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial(\bar{V}^2/2)}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial(\bar{V}^2/2)}{\partial z} \bar{k} = \\ &= \left\{ \frac{\partial(\bar{V}_x^2/2)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{V}_y^2/2)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{V}_z^2/2)}{\partial x} \right\} \bar{i} + \left\{ \frac{\partial(\bar{V}_x^2/2)}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{V}_y^2/2)}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{V}_z^2/2)}{\partial y} \right\} \bar{j} + \\ &\left\{ \frac{\partial(\bar{V}_x^2/2)}{\partial z} + \frac{\partial(\bar{V}_y^2/2)}{\partial z} + \frac{\partial(\bar{V}_z^2/2)}{\partial z} \right\} \bar{k} = \end{aligned}$$

Ahora desarrollamos el segundo término:

$$\bar{V} \wedge \text{rot}\bar{V} =$$

$$\begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ V_x & V_y & V_z \\ \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right) & \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right) & \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right) \end{vmatrix} =$$

$$\left\{ V_y \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) - V_z \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) \right\} \check{i} +$$

$$\left\{ V_z \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) - V_x \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \right\} \check{j} +$$

$$\left\{ V_x \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) - V_y \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) \right\} \check{k} \Rightarrow$$

$$-\bar{V} \wedge \text{rot}\bar{V} =$$

$$\left\{ V_y \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) - V_z \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) \right\} \check{i} +$$

$$\left\{ V_x \left(\frac{\partial V_y}{\partial z} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) - V_z \left(\frac{\partial V_y}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial y} \right) \right\} \check{j} +$$

$$\left\{ V_x \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) - V_y \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) \right\} \check{k}$$

Comparando la igualdad componente a componente, por ejemplo para la componente en \check{i} , tenemos:

$$V_x \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} \right) + V_y \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} \right) + V_z \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} \right) =$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x} (V_x^2 / 2) + \frac{\partial}{\partial x} (V_y^2 / 2) + \frac{\partial}{\partial x} (V_z^2 / 2) + V_y \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) + V_z \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) \right\} =$$

Desarrollando:

$$V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + \cancel{V_y \frac{\partial V_y}{\partial x}} + \cancel{V_z \frac{\partial V_z}{\partial x}} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} - \cancel{V_y \frac{\partial V_y}{\partial x}} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} - \cancel{V_z \frac{\partial V_z}{\partial x}} =$$

Con lo cual se cumple la igualdad para la componente \check{i} , análogamente verifica para \check{j} y \check{k} ; por tanto es válida la identidad vectorial:

$$\frac{d\bar{V}}{dt} + \bar{V} \times \text{grad}\bar{V} = -\frac{\text{grad}p}{\rho} - g(\text{grad}z)$$

O bien:

$$\frac{DV}{Dt} = -\frac{\text{grad}p}{\rho} - g(\text{grad}z)$$

Forma 1 de Ec. De Euler

Y de acuerdo a la última identidad:

$$\frac{DV}{Dt} = \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \text{grad}\left(\frac{V^2}{2}\right) - \bar{V} \wedge \text{rot}\bar{v}$$

Forma 2 de Ec.de Euler

Para flujo permanente: $\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} = 0$ y queda igualando:

$$-\frac{\text{grad}p}{\rho} - g(\text{grad}z) = \text{grad}\frac{\bar{V}^2}{2} - \bar{V} \wedge \text{rot}\bar{V}$$

Si el flujo es irrotacional $\text{rot}\bar{V} = 0 \rightarrow$

$$\frac{\text{grad}p}{\rho} + g(\text{grad}z) = \text{grad}\frac{\bar{V}^2}{2}$$

Ec. Euler para flujo:

Permanente, incompresible, no-viscoso, irrotacional

Si multiplicamos todos los términos de la ecuación anterior por un vector desplazamiento diferencial:

$d\bar{r} = dx\bar{i} + dy\bar{j} + dz\bar{k}$ y observando que:

$$\text{grad}p \times d\bar{r} = dp$$

$$\text{grad}z \times d\bar{r} = dz$$

$$\text{grad}\left(\frac{\bar{V}^2}{2}\right) \times d\bar{r} = d\left(\frac{\bar{V}^2}{2}\right)$$

donde los diferenciales representan variaciones de las magnitudes en la dirección $d\bar{r}$ queda:

$$\frac{dp}{\rho} + g dz \cdot d\left(\frac{1}{2}V\right)^2 = 0$$

que integrando en ambos miembros queda:

$$\frac{p}{\rho} + gz + \frac{1}{2}V^2 = cte.$$

(Ec. De Bernuolli)

Como $d\bar{r}$ se tomó en forma arbitraria, la ecuación es válida en cualquier dirección. O sea al incluir la condición de irrotacionalidad los puntos inicial y final en la forma finita de la ecuación no es necesario tomarlos sobre una línea de corriente para asegurar su validez, o sea entre 2 puntos cualquiera de la región de flujo irrotacional se cumple:

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{V_2^2}{2g}$$

1.15 Circulación:

Dado un campo vectorial de velocidades en el plano o en el espacio, como se ve en la figura,

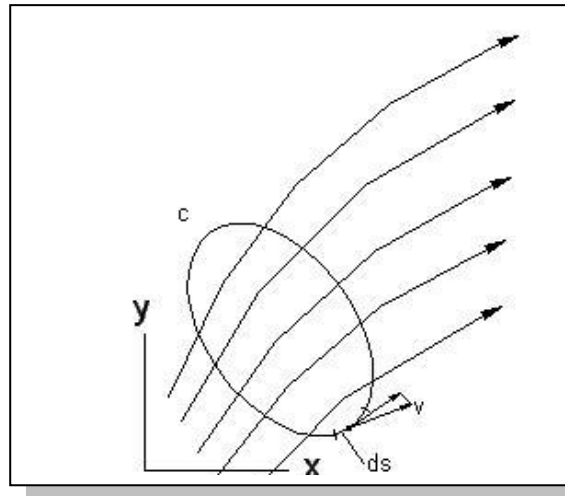


Fig.1.17

se define como circulación sobre una curva cerrada cualquiera del campo en el instante t a la suma extendida para cada punto de la componente tangencial de la velocidad sobre dicha curva, llamándola con la letra griega sigma mayúscula Γ resulta:

$$\Gamma = \oint_C \vec{V} \times d\vec{s} \quad 1.15.1$$

En mecánica hablamos de 2 movimientos básicos: “rotación” y “traslación”.

La traslación para un elemento de fluido significa que el elemento mantiene constante su relación angular respecto del sistema de ejes de referencia, pero el elemento puede describir cualquier trayectoria, incluidas las trayectorias curvas. El juego de los parques de diversiones, “la vuelta al mundo”, es un ejemplo de movimiento de traslación sobre la trayectoria curva circular.

La rotación tiene por significado que el elemento cambia su relación angular con respecto al sistema de ejes o que gira respecto a su centro de masa mientras se traslada. El movimiento de la Luna respecto a la Tierra es un ejemplo de traslación + rotación, ya que siempre vemos la misma cara lunar.

En fluidos los elementos forman un continuo, pero para cada elemento podemos hablar de escurrimiento rotacional o irrotacional basados en los conceptos anteriores, por ejemplo el escurrimiento sobre el cilindro circular embestido por una corriente y fuera de la capa límite, es irrotacional, o sea ningún pequeño elemento del fluido tiene movimiento rotacional aunque la corriente se desarrolla según trayectorias curvas.

El escurrimiento irrotacional es el tipo de movimiento fluido más simple, pudiendo por esta razón ser tratado matemáticamente. Es el escurrimiento que se encuentra fuera de la capa límite cuando una corriente de aire no turbulenta pasa bañando un obstáculo sólido.

En tal escurrimiento el movimiento de las partículas fluidas es solamente de traslación. Cuando no se satisface esta condición, como vimos, los elementos poseen vorticidad. Frecuentemente cuando el movimiento es irrotacional se dice que no tiene vorticidad, también se lo llama “escurrimiento potencial”.

Vamos ahora a dar una interpretación más física de la circulación. Supongamos que hacemos girar un cilindro a velocidad constante en un fluido en reposo.

Si no existiese viscosidad, es decir, si el fluido fuese ideal el cilindro giraría sin alterar para nada el flujo en torno de él. Pero como la viscosidad existe, el fluido se adhiere a las paredes del cilindro y se establece con un patrón decreciente de velocidades en primera aproximación de tipo hiperbólico, siendo todas las capas circunferenciales arrastradas por la rotación con velocidades decrecientes.

Para cada capa se establece un patrón de rotación que en rigor es una “traslación circular” ya que las partículas fluidas se moverán en trayectorias circulares, pero sin movimiento de rotación sobre sí mismas o sea en forma irrotacional sobre sí mismas.

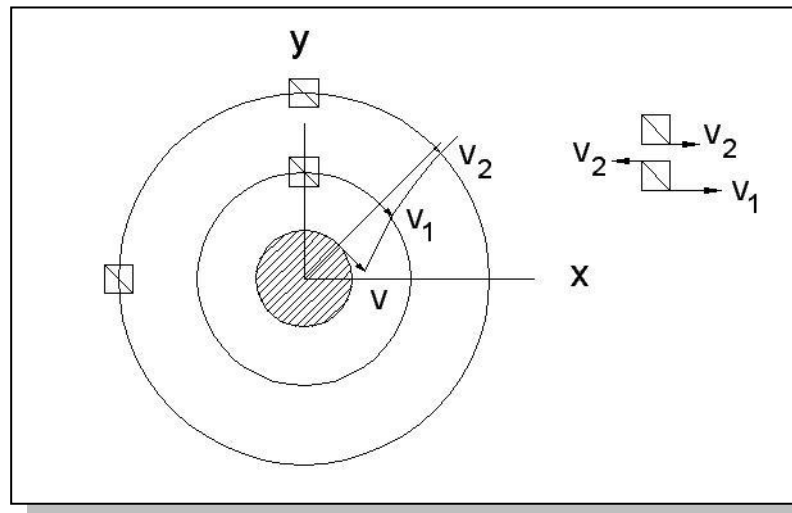


Fig.1.18

El hecho de que la partícula se traslada sin rotar se puede pensar como que la partícula recibe un “torque enderezante” debido a la diferencia de tensión entre la cara inferior y superior que le imponen las partículas de las circunferencias vecinas, la interior de mayor velocidad y la exterior de menor velocidad, en el patrón de flujo, y que hacen que el flujo sea irrotacional en referencia a ejes fijos x e y .

El escurrimiento entonces originado por la rotación de un cilindro será uniforme e irrotacional y las líneas de corriente son circunferencias concéntricas ocurriendo que a lo largo de cualquiera de ellas la velocidad se mantiene constante mientras que la velocidad decrece con el radio o distancia al centro.

El movimiento es equivalente al que se presenta cuando se vacía una bañera en la cual en lugar de un cilindro sólido tenemos una línea de vórtice perpendicular al centro en el punto $x=0, y=0$, pero igual que en el caso anterior las partículas que se mueven en circunferencias concéntricas al vórtice no tienen vorticidad.

Aplicando el resultado (1.15.1) a las circunferencias concéntricas, la circulación será: $\Gamma = 2\pi r V r$; de este resultado se observa fácilmente que la circulación será constante para cualquier línea de corriente.

O sea que el producto de la velocidad tangencial por la longitud de la curva cerrada $2\pi r$, nos proporciona una cantidad que caracteriza al movimiento. Si el cilindro se hiciera más chico, la velocidad periférica sería cada vez más grande. En orden de obtener el mismo valor de circulación, el punto $r=0, V_{\tau}=\infty$ no tiene sentido matemático y se describe diciendo que el punto $r=0$ contiene una línea de vórtice de intensidad Γ , perpendicular al plano del movimiento de las partículas y que en cualquier otro punto del campo el movimiento está inducido por esta intensidad Γ del vórtice.

Para este movimiento se observa también que la circulación sobre toda la curva cerrada que encierre al vórtice valdrá Γ , y valdrá 0 para toda curva que no lo encierre. Ahora si hacemos un cerramiento sobre una circunferencia diferencial del vórtice y formamos la razón:

$$\frac{\text{circulación sobre la curva diferencial}}{\text{área de la curva diferencial}} = \frac{2\pi dr V_r}{\pi dr^2} = 2 \omega = \Omega \quad 1.15.2$$

Este es el valor del vector vorticidad (su magnitud) que hemos definido antes (será también la velocidad angular del cilindro material que establezca el campo caracterizado por Γ).

O sea matemáticamente definimos la vorticidad del movimiento en un punto dado del campo como el valor límite del cociente cuando el área tiende a 0. Es así que la “vorticidad” mide la intensidad local de la rotación de la partícula. Si en un ejemplo dado encerramos cualquier partícula instantáneamente la vorticidad será 0, menos para el vórtice mismo.

1.15.1 Teorema de Stokes:

El resultado anterior (1.15.2) puede expresarse como:

$$\frac{d\Gamma}{dA} = 2 \omega = (\text{rot } \bar{V})$$

donde, en este caso particular, la componente de $(\text{rot } \bar{V})$ es la del eje “z”, ya que los componentes \bar{V} están en el plano “xy”. Como el resultado es válido para toda curva cerrada en torno a un vórtice podremos en general expresar para un flujo contenido en el plano:

$$\Gamma = \oint_c \vec{V} \times \vec{ds} = \int_A (\text{rot } \vec{V})_z dA \quad 1.15.3$$

Este resultado constituye el teorema de Stokes en dos dimensiones donde queda probado que la circulación del vector de velocidad en torno a una curva cerrada plana es igual al flujo del rotacional de velocidad a través de la superficie encerrada por la curva en la dirección normal a ella. La generalización 3D del resultado de Stokes dá:

$$\oint_C \bar{V} \times d\bar{s} = \int_{VOLA} \text{rot } \bar{V} \times d\bar{A}$$

que para flujo en el espacio 3D relaciona una integral curvilínea de circulación en el espacio 3D con una integral de superficie, que representa el flujo del rotacional del vector campo a través de una superficie cualquiera (un casquete) que tenga como borde o contorno la curva “c”.

El teorema de Stokes es válido para cualquier campo vectorial continuo incluso si es diferente de \bar{V} .

Como corolario del teorema de Stokes, es fácil observar que la circulación en toda región “simplemente conexa” de un flujo irrotacional es nula a lo largo de cualquier curva cerrada ya que esta puede asociarse a una superficie sobre la que se anula $(\text{rot } \bar{V})$.

Una curva “c” cerrada genera una superficie simplemente conexa si cualquier superficie cerrada que imaginamos que tenga a “c” por contorno inicial (como si fuera un bonete) no se lleva por delante un cuerpo sólido interpuesto. Por ejemplo, para la situación de la figura, la curva “c₁” es simplemente conexa y la “c₂” no lo es.

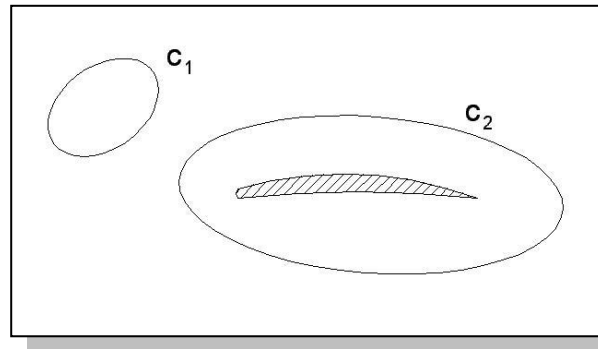


Fig.1.19

La superficie c_2 se cerrará en algún punto del eje normal al papel z , mientras que el perfil debe considerarse infinito según z , al efecto que la distribución de flujo pueda considerarse 2D y análoga para todo corte según z , por tanto en algún punto c_2 conexa, se llevará por delante al perfil.

1.15.2 . Teorema de Kelvin – Helmholtz.

Si calculamos la derivada total de la circulación respecto del tiempo.

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint \frac{D}{Dt}(\vec{V} \times d\vec{l}) = \oint \vec{V} \times \frac{D}{Dt}(d\vec{l}) + \oint d\vec{l} \times \frac{D\vec{V}}{Dt}$$

como $\frac{D\vec{V}}{Dt} = \vec{V} \times \text{grad } \vec{V} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$, que para flujo permanente queda de acuerdo a la forma 1 de la Ec. De Euler:

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \vec{V} \times \text{grad } \vec{V} = g \cdot \text{grad } z - \frac{1}{\rho} \text{grad } p \quad \text{o bien} \quad \frac{D\vec{V}}{Dt} = -g \nabla z - \frac{1}{\rho} \nabla p$$

y también:

$$\frac{D(d\vec{l})}{Dt} = d\vec{V} \rightarrow$$

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint \vec{V} \times d\vec{V} - \oint \left(g \cdot \nabla z + \frac{1}{\rho} \nabla p \right) \times d\vec{l}$$

analizando los integrandos de la expresión anterior vemos que:

$$\vec{V} \times d\vec{V} = dV = d\left(\frac{V^2}{2}\right)$$

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{dp}{dx} \vec{i} + \frac{dp}{dy} \vec{j} + \frac{dp}{dz} \vec{k} \right) \times (dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}) = \frac{1}{\rho} (3dp) = \frac{1}{\rho} dp$$

entonces el segundo integrando, queda:

$$\left(g \cdot \nabla z + \frac{1}{\rho} \nabla p \right) \times d\vec{l} = g \cdot dz + \frac{1}{\rho} dp$$

siendo entonces la derivada sustancial de la circulación:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint \left[d \frac{V^2}{2} + g \cdot dz + \frac{1}{\rho} \cdot dp \right]$$

El corchete dentro de la integral de línea es la expresión de la Ecuación. De Bernuolli en forma diferencial y cuyo valor es igual a cero como quedó demostrado anteriormente en este módulo, (ver el párrafo 1.13.1) entonces:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0 \rightarrow \Gamma = cte$$

que nos indica que para un flujo no viscoso permanente la circulación es constante, es decir si la circulación en un campo de flujo es $\Gamma = 0$ entonces permanecerá siempre igual a cero, y si hay al menos un vórtice matemático dentro de la curva “c”, la vorticidad permanecerá constante sin variación en su intensidad por siempre.

Decimos vórtice matemático porque la vorticidad no se puede crear en condiciones de viscosidad iguales a cero es decir para flujo ideal. Pero se puede trabajar con un flujo ideal mas vorticidad matemática, para simular flujos reales fuera de la capa límite.

Este es el análisis que se hace en una rama específica de la dinámica de fluidos llamada Estudio de los Flujos Potenciales Incompresibles o simplemente Flujo Potencial Incompresible, que estudiaremos sucintamente en la unidad siguiente.

La consecuencia más interesante del análisis de flujo potencial es la descripción del fenómeno conocido como Efecto Magnus y la transformación conforme que se hace desde el plano complejo de descripción de este modelo en otro plano complejo y es conocida como Transformación Jukowski, que es la base teórica para la descripción de los efectos de sustentación de perfil de la aerodinámica clásica.