

2 FLUJO POTENCIAL INCOMPRESIBLE.

En el capítulo 1 mencionamos que fuera de la capa límite, al hacerse despreciables los gradientes de velocidades transversales a la corriente, puede considerarse aproximadamente que un flujo no está sometido a fricción, por tanto es irrotacional, y si además es permanente e incompresible, se lo denomina Flujo Potencial. Aquí nos limitaremos tan solo a dar una referencia global sobre el manejo de los flujos potenciales o flujos con potencial, recomendando que estos temas se profundicen más con la bibliografía de la referencia.

2.1 Condiciones de borde para Flujo Potencial.

Las condiciones necesarias que vamos a tomar en este caso son que el flujo considerado sea:

a.- Incompresible, $\rho = Cte$, o bien si es un gas por ejemplo aire, el número de Mach $M < 0.3$, es decir la suposición de flujo incompresible, cosa que es válida para aerodinámica subsónica.

b.- Permanente, $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0$ para todo el campo de flujo en estudio. De esto se desprende que, como la ecuación diferencial de la continuidad era :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \text{grad} \times \rho \vec{V} = 0 \rightarrow \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho \text{grad} \times \vec{V} = 0 \rightarrow$$

a partir de las condiciones a y b, deducimos entonces que:

$$\text{grad} \times \vec{V} = 0 \rightarrow \text{div} \vec{V} = 0$$

c.- Irrotacional, $\text{rot} \vec{V} = 0$

d.- Análisis 2D o sea bidimensional.

Llamamos movimiento bidimensional a aquel en que cada partícula se mueve paralelamente a un plano fijo, (x,y) y las velocidades de todas las partículas correspondientes en profundidad, tienen la misma velocidad y dirección. Es decir el campo es de vectores paralelos homólogos en z desde $-\infty$ a $+\infty$.

A veces a este espacio donde la ocurrencia de los campos de velocidades y presiones se repite sin cambios para todos los planos homólogos paralelos a (x,y) desde $-\infty$ a $+\infty$ se lo llama 2D.

La restricción a dos dimensiones, asegura un análisis matemático fácil de manejar, aunque el potencial de velocidad se puede definir para cualquier flujo irrotacional, incluso en 3D, el término se asocia en general a flujo incompresible irrotacional en dos dimensiones. Ejemplo: el flujo en torno a un cilindro infinito por una corriente que lo embiste puede ser estudiado con análisis 2D, para el análisis del flujo en torno a una esfera se requiere análisis 3D.

2.2 Definición de Potencial de Velocidades.

Aplicando las condiciones c y d junto con la definición de rotacional, y llamando u y v a las componentes de la velocidad de la partícula en movimiento 2D:

$$\text{rot} \vec{V} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{k} = 0 \rightarrow \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0$$

Si para este campo de velocidades, podemos encontrar una función escalar Φ que haga cumplir la condición anterior, debería ser:

$$\begin{array}{l}
 u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\
 v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}
 \end{array}
 \left| \rightarrow \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x} = 0 \right. \text{ o también }
 \begin{array}{l}
 u = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \\
 v = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}
 \end{array}
 \left| \rightarrow -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x} = 0
 \right.$$

Es decir el campo de velocidades se puede tomar: $\vec{V} = \text{grad}\phi$ o bien $\vec{V} = -\text{grad}\phi$

Esta condición se cumple si Φ es una función continua y derivable con continuidad. A tal campo escalar se lo llama Potencial del campo vectorial de velocidades inicial si es que existe, o Función Potencial.

La aplicación de la ecuación diferencial de la continuidad dará:

$$\text{grad} \times \vec{V} = 0 \rightarrow \text{div} \vec{V} = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$$

lo que indica también que el campo escalar o Función Potencial es una función armónica, (recordamos que una función armónica es aquella que satisface para un campo escalar la ecuación de Laplace $\nabla^2 \Phi = 0$).

2.3 La Función Corriente.

En flujo incompresible permanente, no puede fluir materia a través de las líneas de corriente ya que por definición las velocidades de las partículas son tangentes a ellas, o sea que se cumple con:

$$\vec{V} \wedge d\vec{s} = 0$$

para toda trayectoria diferencial $d\vec{s}$ sobre la línea de corriente, de la cual se deducen las ecuaciones de las líneas de corriente en este caso bi-dimensional según vimos en el Módulo 1, que para el caso 2D es:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u}$$

Además por lo indicado por la Ecuación de Continuidad, entre dos líneas de corriente dadas circulará un caudal único. En la Fig 2.3.1 hemos representado dos líneas de corriente en flujo bi-dimensional, y dos curvas arbitrarias entre los puntos 1 y 2, es fácil ver que el caudal que atraviesa estas zonas entre las posiciones 1 y 2 es igual para ambas curvas, y su valor lo llamamos $q_{12} = \Psi_2 - \Psi_1$, los valores de Ψ_2 y Ψ_1 son arbitrarios siempre que $\Psi_2 - \Psi_1 = q_{12}$ es decir Ψ_2 y Ψ_1 son valores funcionales arbitrarios siempre que la diferencia sea el valor del caudal entre ambas líneas de corriente. En general a Ψ se la llama función corriente.

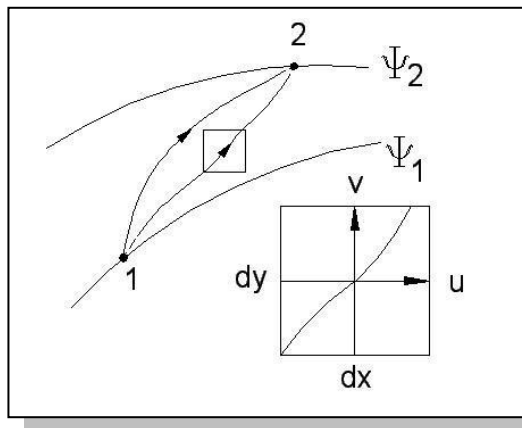


Fig.2.3.1

Cabe acotar que cada una de las curvas dibujadas, puede imaginarse como la directriz de una superficie cilíndrica de generatrices paralelas al eje z , por lo cual la región limitada entre las dos superficies Ψ , da lugar a un volumen cilíndrico paralelo al eje z , como el flujo es incompresible, y por la ecuación de continuidad, el caudal que pasa por

 FUNDAMENTOS DE DINAMICA DE FLUIDOS – FLUJO POTENCIAL

la superficie 1-2 izquierda es igual al que pasa por la superficie 1-2 derecha o sea $q_{12i} = q_{12d}$, en lo cual hemos llamado q al caudal másico por unidad de profundidad z .

Con la anterior definición no hay duda de que a las líneas de corriente las podemos caracterizar por funciones $\Psi(x, y) = C$ y por tanto:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = - \frac{\partial \psi / \partial x}{\partial \psi / \partial y}$$

como por la definición de línea de corriente bi-dimensional era a su vez:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u}$$

comparando ambos resultados,

$$v = - \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

haciendo referencia a la figura, para el caudal a través de cada porción diferencial de la curva 1- 2, el pasaje a velocidad u por dy , aumenta el caudal, mientras que la componente v que pasa por dx lo disminuye, estos se puede observar en la viñeta de la figura tendremos entonces:

$$q_{12} = \int_1^2 u dy - v dx = \int_1^2 \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = \int_1^2 d\psi = \psi_2 - \psi_1$$

Siendo $\Psi_2 - \Psi_1 = q_{12}$ un valor constante, resulta evidente que Ψ_2 y Ψ_1 también lo son individualmente, y como estamos trabajando con flujo bi-dimensional y ambas funciones representan líneas de corriente, podemos deducir que siempre las funciones de corriente tendrán la forma $\Psi(x, y) = C$.

Otra forma más matemática de demostrar esto es a partir de la definición de línea de corriente bi – dimensional

$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u}$ podemos escribir: $u dy - v dx = 0$ pero como se ve en la viñeta de la figura 2.2.1 u es una función solamente de y , análogamente v lo es únicamente de x por lo que podemos escribir a partir de:

$$u dy - v dx = 0 \text{ como } u = f(y) \quad v = f(x) \rightarrow$$

$$f(y) dy - f(x) dx = 0 \rightarrow d \int f(y) dy - d \int f(x) dx = d(Cte) = 0 \rightarrow$$

$$\int f(y) dy - \int f(x) dx = (Cte) \rightarrow \psi(x, y) = Cte$$

ya que la diferencia de las integrales anteriores será una función de las variables combinadas x e y .

Ejemplo:

Supongamos el caso particular de la distribución para el campo de velocidades siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} u = y \\ v = x \end{array} \right\} \rightarrow y dy - x dx = 0 \rightarrow \int y dy - \int x dx = 0 \rightarrow \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} = Cte$$

A su vez, por la condición de irrotacionalidad, aplicada a este caso,

$$\text{rot } \vec{V} = \left(\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy} \right) = 0 \rightarrow -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

de donde deducimos por esta última condición que Ψ es también una función armónica, ya que cumple con la ecuación de Laplace: $\nabla^2 \Phi = 0$.

2.4 Relación entre el Potencial de Velocidad y la Función de Corriente.

Como de acuerdo a las definiciones anteriores resulta:

$$\left. \begin{array}{l} u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{array} \right|$$

Estas dos últimas expresiones se conocen como identidades de Cauchy – Riemann. Como para ambas funciones según vimos se cumple que

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy = 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0 \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\phi=k} = \frac{\partial \phi / \partial x}{\partial \phi / \partial y}$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\psi=c} = \frac{\partial \psi / \partial x}{\partial \psi / \partial y} = \frac{-\partial \phi / \partial y}{\partial \phi / \partial x} = \frac{1}{-\left(\frac{\partial \phi / \partial x}{\partial \phi / \partial y} \right)} = - \frac{1}{\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\phi=k}}$$

Con lo cual vemos que las tangentes son ortogonales ya que en el punto común A las coordenadas de los puntos $\Psi = c$, y $\Phi = k$ son idénticas y los segundos miembros de las ecuaciones anteriores son uno recíproco del otro y con signo opuesto. O sea las líneas equipotencial y de corriente para un punto se cortan ortogonalmente, como A es arbitrario, concluimos que la totalidad de las líneas de ambas familias conforma una red ortogonal.

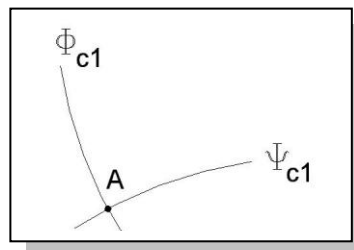


Fig.2.3.2

2.4 Propiedades de los flujos potenciales.

Podemos definir las siguientes:

- Las familias $\Psi = c$, y $\Phi = k$ son curvas ortogonales.
- las ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \vec{V} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{V} &= 0 \end{aligned} \right|$$

dan lugar a:

$$\nabla^2 \phi = 0$$

$$\nabla^2 \psi = 0$$

O sea que las funciones potencial y corriente deben satisfacer las condiciones de armonicidad, por tanto deben ser continuas, y derivables con continuidad.

c.- Como vimos, la ecuación diferencial de la cantidad de movimiento, da lugar a la ecuación de Bernoulli para línea de corriente, es decir los lugares, $\Psi = c$ la cumplen, y por ello es posible conociendo la malla o familia de $\Psi = c$ determinar el campo de presiones.

d.- Como vimos la aplicación del primer principio a un volumen de control que contenga un tubo de corriente, conduce a la ecuación de Bernoulli, o sea que si se satisface para flujo potencial la ecuación de cantidad de movimiento, también se satisface la de energía

e.- El segundo principio en ausencia de fricción y por tanto procesos irreversibles de transmisión del calor, no agrega restricciones.

f.- Además de ser armónicas las funciones de corriente y potencial de velocidades de un flujo potencial no deben violar las condiciones de pared si hay un obstáculo. La condición de obstáculo es que sobre la superficie límite, las velocidades normales deben ser nulas ya que el obstáculo en si debe ser tomado como una línea de corriente límite al ser bañado por una corriente, y no puede pasar flujo a través de ella, no obstante no hay restricción a la velocidad tangencial aún sobre la pared ya que el flujo ideal no se adhiere a la pared, y aquí no se presenta el fenómeno de capa límite.

Tome en cuenta que los flujos potenciales son una idealización matemática cuyo rango de aplicación con poco error, es la obtención de los campos de velocidades y presiones en las proximidades de los objetos pero no en regiones tan próximas como el entorno de las capas límites reales donde el error sería apreciable. Llamando con el subíndice b a los puntos sobre un obstáculo sólido será entonces (en referencia a la Fig 2.4.1.):

$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial n} \right]_{\mathbf{b}} = 0$$

$$\left[\frac{\partial \psi}{\partial s} \right]_{\mathbf{b}} = 0$$

y a gran distancia del obstáculo:

$$u = V_0 = \left[\frac{\partial \phi}{\partial x} \right]_{x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty} = \left[\frac{\partial \psi}{\partial y} \right]_{x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty}$$

En las proximidades del obstáculo, el campo de velocidades viene dado por:

$$\phi = ux + vy$$

$$\psi = uy - vx$$

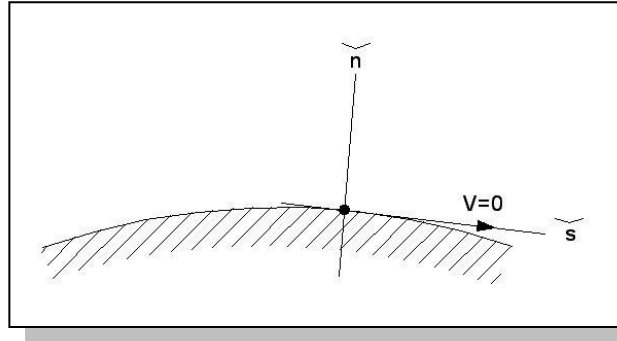


Fig:2.4.1.

2.5 Patrones de Flujo Simples.

2.5.1 Flujo Uniforme.

Supongamos que el flujo venga definido por el campo $\vec{V} = V_0 \vec{i}$, en este caso las componentes de velocidad del campo son:

$$u = V_0$$

$$v = 0$$

de donde:

$$\left. \begin{array}{l} u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = V_0 \\ v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \phi = \int V_0 dx = V_0 x + C_1$$

$$\left. \begin{array}{l} u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = V_0 \\ v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \psi = \int V_0 dy = V_0 y + C_2$$

Los dos resultados anteriores dan lugar a una malla ortogonal, dibujada en la Figura 2.5.1.

Probemos primero al efecto de verificar que los campos $\Psi = c$, y $\Phi = k$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = V_0 \rightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = 0$$

por tanto se satisface la condición de armonicidad, y análogamente se demuestra para $\Psi = c$

En este caso el caudal entre dos líneas de corriente será:

$$\psi_{1,2} = \int_1^2 d\psi = \psi_2 - \psi_1 = V_0 y_2 - V_0 y_1 = V_0 (y_2 - y_1)$$

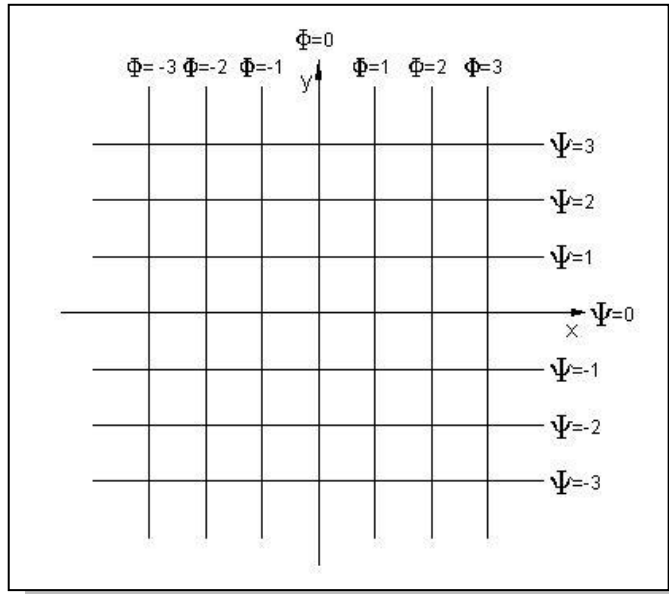


Fig.2.5.1

2.5.2 Fuente y Sumidero.

Estos casos son singularidades en los cuales las líneas Ψ son radiales con sentido desde y hacia el origen respectivamente y Φ son circunferenciales concéntricas y ortogonales a las primeras. Las ecuaciones a las que responden los campos respectivos son:

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \frac{Q}{2\pi} \ln r \\ \psi &= \frac{Q}{2\pi} \theta \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{Fuente}$$

$$\left. \begin{aligned} \phi &= -\frac{Q}{2\pi} \ln r \\ \psi &= -\frac{Q}{2\pi} \theta \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{Sumidero}$$

en la cual las coordenadas polares se han tomado:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \text{arc tg } \frac{y}{x}$$

y Q es el caudal másico o intensidad de la Fuente o Sumidero.

En la figura, para Fuente V_r es saliente del origen, en el Sumidero, V_r es entrante hacia el origen.

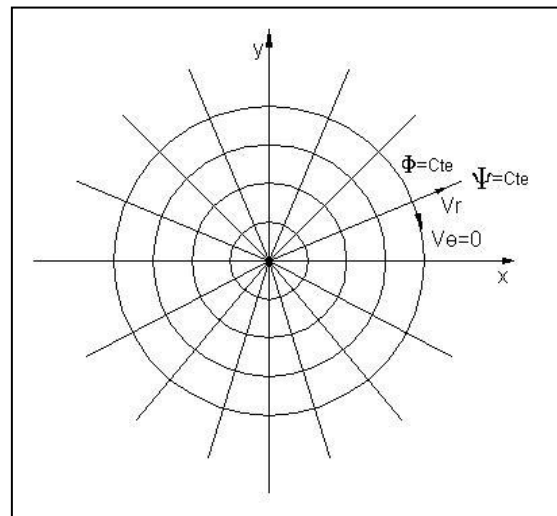


Fig.2.5.2

Puede demostrarse fácilmente que ambos grupos de funciones cumplen la condición de armonicidad, que en coordenadas polares es:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \rightarrow \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right) = 0$$

Las rectas de las líneas de corriente vienen dadas por la ecuación:

$$\frac{Q}{2\pi} \theta = Cte$$

que en coordenadas polares son rectas que parten del origen, mientras que las líneas de equipotencial vienen dadas por:

$$\frac{Q}{2\pi} \ln r = Cte$$

que son circunferencias concéntricas. Las componentes radial y tangencial de la velocidad, vienen dadas por:

$$V_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{Q}{2\pi r}$$

$$V_\theta = \frac{\partial \psi}{r \partial \theta} = 0$$

Aplicando los resultados anteriores, podemos calcular el caudal total que como es lógico es:

$$q = \int_0^{2\pi} V_r r d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{Q}{2\pi r} r d\theta = Q$$

siendo el resultado para el sumidero, $-Q$; también el caudal es constante para cada gajo. Si calculamos la circulación respecto del origen, de acuerdo a la definición que habíamos dado de la misma:

$$\Gamma = \oint \vec{V} \times d\vec{l} = \int_0^{2\pi} V_\theta r d\theta = 0$$

O sea, el flujo de la fuente o el sumidero tienen circulación nula sobre todos los circuitos cerrados posibles, incluso si estos rodean al origen.

2.5.3 Hilo de Vórtice según la dirección “z”.

Si en las ecuaciones anteriores invertimos los roles de las funciones Φ y Ψ utilizadas para los modelos de fuente y sumidero, obtendremos las ecuaciones del hilo de vórtice, esto es:

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \frac{Q}{2\pi} \theta \\ \psi &= \frac{Q}{2\pi} \ln r \end{aligned} \right\}$$

Ahora, las líneas de corriente son circunferencias concéntricas y el valor de la velocidad será:

$$V_\theta = \frac{Q}{2\pi r}$$

$$V_r = 0$$

y la circulación:

$$\Gamma = \oint \vec{V} \times \vec{dl} = \int_0^{2\pi} V_{\theta} r d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{Q}{2\pi r} r d\theta = Q$$

En la figura, línea de vórtice entrante hacia el papel, circulación dextrógira, o a derecha, línea de vórtice saliendo del papel, circulación levógira o a izquierda.

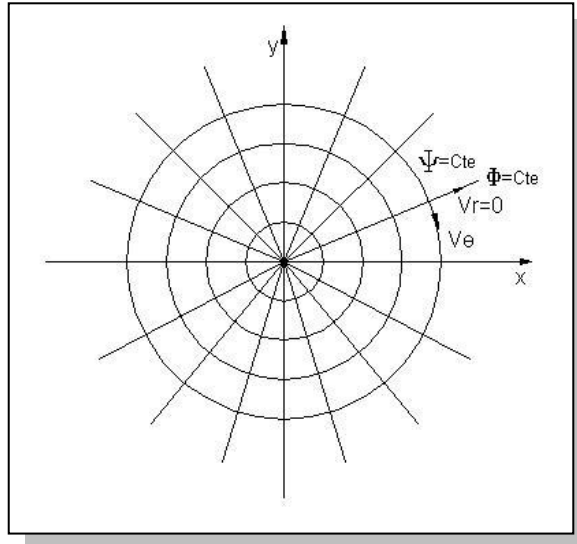


Fig. 2.5.3

2.6. Superposición.

El principio de superposición es válido por la condición de Laplace y el corolario del mismo que nos indica que si dos o más funciones $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3 \dots$ son armónicas, entonces la suma $\sum \phi_i$ también lo será. A modo de ejemplo, examinamos el óvalo o elipse de Rankine, en el cual una fuente y un sumidero, se colocan a distancia $+a$ y $-a$ del origen (según se indica en la figura 2.6.1) y se superpone además un flujo uniforme.

Todo el flujo de la fuente F es absorbida por el sumidero S , pero entre los tres flujos, se establece una elipse como línea divisoria cuya forma dependerá de las intensidades relativas. Los valores de la combinación se establecen por suma directa:

$$\phi = V_{ox} + \frac{Q}{2\pi} \ln r_1 - \frac{Q}{2\pi} \ln r_2$$

$$\psi = V_{oy} + \frac{Q}{2\pi} \theta_1 - \frac{Q}{2\pi} \theta_2$$

Puede reemplazarse $r_1 = x + a$, $r_2 = x - a$, quedando:

$$\phi = V_{ox} + \frac{Q}{4\pi} \ln \left[\frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2} \right]$$

$$\psi = V_{oy} - \frac{Q}{2\pi} \left[\operatorname{arc\,tg} \left(\frac{y}{x+a} \right) - \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{y}{x-a} \right) \right]$$

la elipse divisoria cerrada puede asumirse también como un límite sólido, así la superposición de flujos permite el estudio de flujos abiertos embistiendo sólidos, obteniéndose distribuciones aproximadas de velocidades y presiones fuera de la capa límite.

Si bien el flujo estudiado es 2.D la elipse puede ser análogamente interpretada como la sección de un prisma elíptico que va desde $z = -\infty$ a $z = \infty$, ya que cada corte será homólogo en su flujo

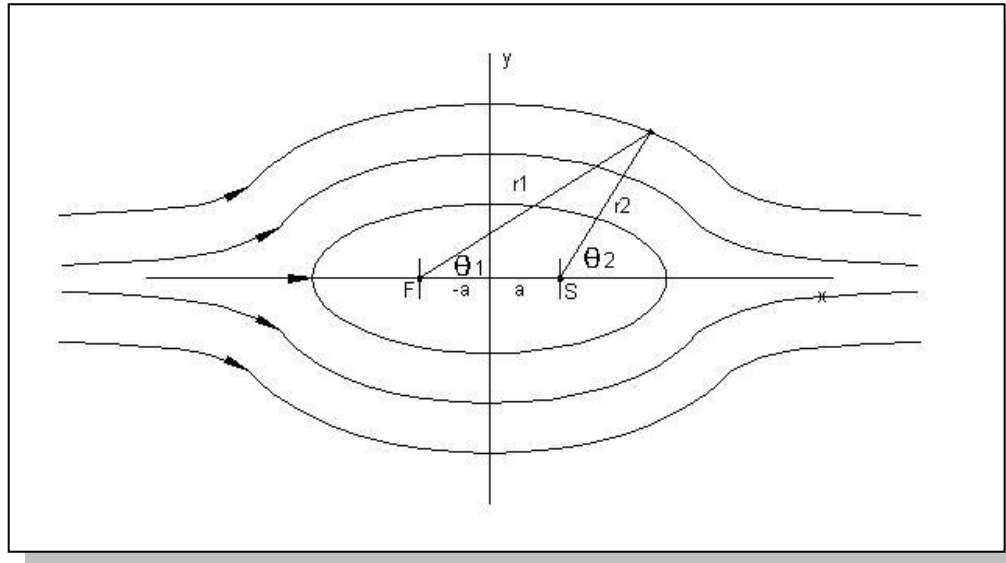


Fig.2.6.1

2.7 Potencial complejo. y Transformaciones Conformes.

Para estos casos simples precedentes, Φ y Ψ se encontraron resolviendo la ecuación armónica, o por integración simple de los valores conocidos de la velocidad. En general, la mejor forma de determinar Φ y Ψ , es utilizando la teoría de variable compleja y las transformaciones conformes.

Para ello el plano físico (x, y) en el cual habíamos representamos Φ y Ψ , como familias ortogonales, lo transformamos en un plano base complejo: $z = x + iy$, z es ahora, un punto de este plano, si ahora definimos una función genérica del plano complejo, que llamamos potencial complejo como:

$$F(z) = \Phi(z) + i\Psi(z)$$

F puede describirse como una función de z , donde la parte real de F es $\Phi(x,y)$ y la parte imaginaria, $\Psi(x,y)$.

En el espacio complejo así definido de F , las funciones Φ y Ψ forman como vimos una red ortogonal. Es posible ahora pasar del plano $z = x + iy$ de referencia a otro $\zeta = \eta + i\xi$ a través de una transformación, pero tal que conserve la naturaleza ortogonal de Φ y Ψ . la transformación entre estos planos referenciales puede quedar definida por una función:

$$\zeta = f(z).$$

Por ejemplo cuando transformamos un globo terráqueo en un mapa plano a través de una transformación Mercator, los paralelos y meridianos son ortogonales entre sí tanto en la representación esférica como plana, lo mismo que se conserva para cada punto homónimo los valores de latitud y longitud, sin embargo las superficies de ambas representaciones del planeta Tierra se deforman y en particular más hacia los polos y menos hacia el ecuador.

Estas apropiadas transformaciones que mantienen la naturaleza del potencial complejo original, se denominan Transformaciones Conformes. Escogiendo funciones apropiadas del tipo $\zeta = f(z)$ podemos obtener modelos de flujo en torno a formas complicadas si se conoce el patrón de flujo $F(z)$ para una forma simple a través de la descripción del plano ζ una vez obtenido $F(\zeta)$.

Por ejemplo un cilindro circular en rotación embestido por una corriente presenta un fenómeno de sustentación positiva conocido como Efecto Magnus, la transformación conforme de Joukowski, nos permite obtener formas complicadas con aspecto de perfiles de gota arqueados y de cola afilada que presentan sustentación, estas formas reciben el nombre de su descubridor "Perfiles Joukowski".

A diferencia de la transformación Mercator, la transformación Joukowski deforma más en las posiciones próximas al origen y menos hacia los extremos de los ejes, por tanto una circunferencia se deformará en un perfil, pero lejos del centro, las líneas de corriente casi no se deformarán es decir se mantienen las condiciones de la corriente lejos de la forma o en infinito.

En estos perfiles aerodinámicos las curvas superior e inferior que convergen en la cola afilada presentan la particularidad de tener tangentes coincidentes (o ángulo de salida de perfil de 0°), a veces esta descripción geométrica se llama “punto cuspidal”. En general estos puntos llevan implícita una discontinuidad del flujo de escurrimiento que proviene de la región superior e inferior del perfil, pero Joukowski demostró que siempre existe una configuración de escurrimiento para la cual el aire abandona la cola sin discontinuidad, y es la adaptación del valor de la circulación transformada.

Si el valor de la circulación de base en el cilindro con efecto Magnus se ajusta a un valor específico, la discontinuidad no se manifiesta después de la transformación. Este valor de circulación óptima solamente será función de la velocidad del flujo horizontal en infinito, y en los perfiles reales la velocidad de infinito ajusta automáticamente la circulación.

Para visualizar físicamente el efecto Magnus, al cilindro circular se lo hace rotar sobre su eje y luego se hace embestir la corriente horizontal (o mover horizontalmente el cilindro), así generamos la circulación física apoyados en la viscosidad, para los perfiles aerodinámicos reales la discontinuidad inicial de los escurrimientos sobre la parte superior e inferior del perfil antes de lograr la igualación de los flujos, produce la estela parásita y en acuerdo con el teorema Kelvin – Helmholtz, la circulación inversa compensadora en torno al perfil, (ya que si la circulación era nula, ahora la sumatoria de la vorticidad de estela más la circulación también deberá ser nula) así a diferencia de la sustentación por efecto Magnus en un cilindro, el perfil no necesita rotar para generar sustentación.

La profundización de estos aspectos nos llevaría de pleno al terreno de las bases de la aerodinámica teórica subsónica, cosa que nos apartaría del propósito de estas notas, pero el alumno interesado puede profundizar estos interesantes temas con la bibliografía de referencia

Bibliografía complementaria para consulta y referencia:

FRANK M. WHITE, Mecánica de Fluidos, Ed. Mc Graw Hill

WILLIAM F. HUGES, Dinámica de los fluidos, Ed Mc Graw Hill

ROBERT FOX – ALAN MAC DONALD, Introducción a la Mecánica de Fluidos, 4ta Edición, Mc Graw Hill

IRWIN SHAMES, Mecánica de Fluidos, 6ta Ed. Editorial Mc Graw Hill

RONALD GILES, Mecánica de los fluidos e Hidráulica, Ed. Mc Graw Hill

STREETER Y WEELER, Mecánica de los fluidos, Ed. Mc Graw Hill