

3 ANÁLISIS DIMENSIONAL Y SEMEJANZA.

3.1. Generalidades.

En un campo de flujo, la velocidad del fluido en un punto dado, está definida por la velocidad absoluta en el caso de flujo no turbulento, o por la velocidad media para flujo turbulento permanente, según se indicó antes.

En todos los casos como el impulso se define como: $\vec{J} = m \vec{V}$, de donde, la definición de velocidad surge de $\vec{V} = \vec{J}/m$; o sea el impulso total de la región diferencial en torno a un punto, dividido por una masa de la región; o $\vec{V} = \frac{\vec{F} \cdot t}{m}$, o sea que la velocidad de la partícula, depende de la fuerza instantánea sobre ella.

Las pequeñas regiones que definimos en torno a un punto de control que luego seguimos de acuerdo al criterio de Lagrange se denominan “partículas de fluido” y que de acuerdo a la definición que dimos de medio continuo, siguen siendo, por pequeñas que las definamos, muchos órdenes de magnitud superiores que las distancias intermoleculares.

El movimiento de cada partícula obedece a las leyes de la física, y por tanto, las fuerzas que pueden actuar sobre ellas son de dos tipos posibles según vemos también en la Fig.: 3.1.1

- Fuerzas corporales: que actúan a través de campos.
- Fuerzas superficiales: que actúan por contacto directo.

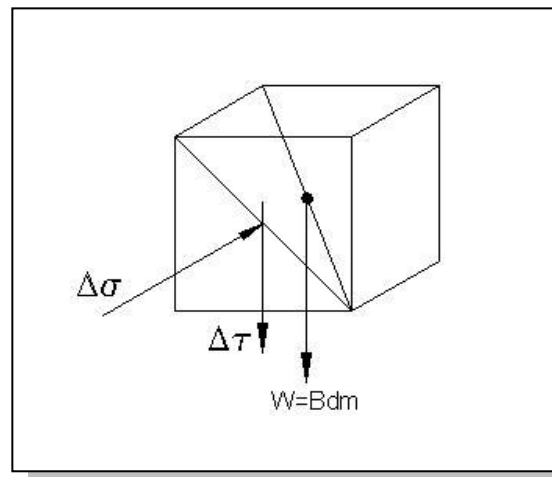


Fig.3.1.1

3.2 Clasificación de las fuerzas sobre as partículas fluidas:

<u>Fuerzas de campo</u>	Gravitatorias Eléctricas Magnéticas
<u>Fuerzas superficiales</u>	Normales (fuerzas debidas a la presión). Tangenciales (fuerzas debidas a fricción viscosa).

Reduciendo las fuerzas por unidad de área, obtenemos los esfuerzos normales σ y las tangenciales o cortantes τ .

El movimiento de la partícula solamente se produce cuando hay gradientes o diferencias no nulas de estas tensiones sobre caras opuestas.

Las fuerzas tangenciales como ya lo estudiamos, nos introducen al concepto de “viscosidad absoluta”. Para un sólido, la deformación al corte, se cuantifica por el ángulo de deformación de una partícula aislada de forma cúbica, con un anclaje o empotramiento relativo en la base opuesta a la aplicación de la tensión, para el caso de los sólidos es entonces:

$$\tau = G \cdot \gamma$$

donde G se denomina módulo de elasticidad transversal, es el coeficiente de proporcionalidad entre la tensión de cortante y la deformación angular, según se indica en la Fig.3.2.1, para sólidos su valor es aproximadamente la mitad del módulo de elasticidad de Young $G \cong 1/2E$.

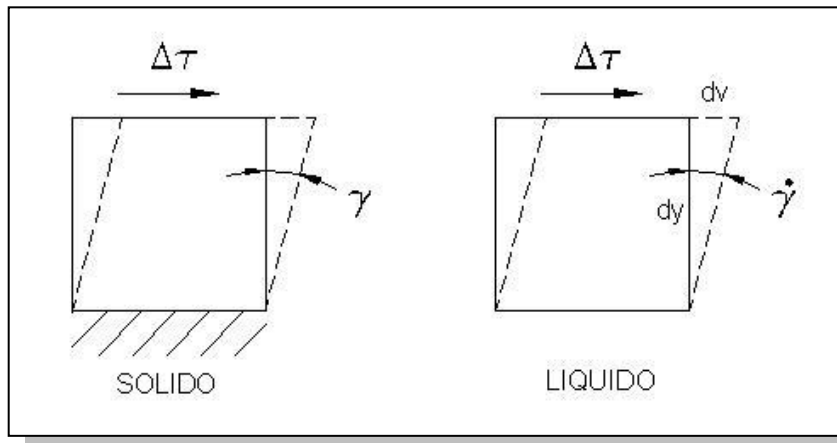


Fig.3.2.1

Para los líquidos la relación de la tensión es proporcional no ya a la deformación angular sino a su velocidad de deformación angular $\dot{\gamma}$; como $\dot{\gamma}$ es una velocidad angular, podrá establecerse la relación $\dot{\gamma} = Vt/R$ siendo Vt la velocidad tangencial del extremo y R el radio de rotación en la dirección “y”, o sea $\dot{\gamma} = \frac{V_o}{R} = \frac{dV}{dy}$

O sea, finalmente podemos expresar la ecuación de la deformación para líquidos en función de una nueva constante de proporcionalidad que llamábamos viscosidad,

$$T = \mu \left(\frac{dV}{dy} \right) \rightarrow F_{corte} = \mu A \left(\frac{dV}{dy} \right)$$

Cualidades propias de la fricción viscosa:

1.- A diferencia de la fricción seca de Coulomb, la fricción viscosa es independiente de la presión, por ejemplo, dos tuberías que conduzcan el mismo fluido a igual velocidad, si uno tiene una presión interna de fluido de 10 BAR y el otro de 0.1 BAR, la resistencia a la conducción del fluido será igual en ambos casos.

2.- El fluido que queda en contacto directo con la superficie sólida (o las partículas en contacto) se solidarizan y la velocidad de estas partículas en la superficie fija es = 0. A partir de este punto, las capas fluidas se van deslizando unas sobre otras, si el régimen es laminar de manera de reproducir el gradiente de una sola partícula.

Si en el dibujo, la placa superior que se mueve a una velocidad v , tiene un área “A”, se establece un flujo bi – dimensional, la fuerza resistente al movimiento será:

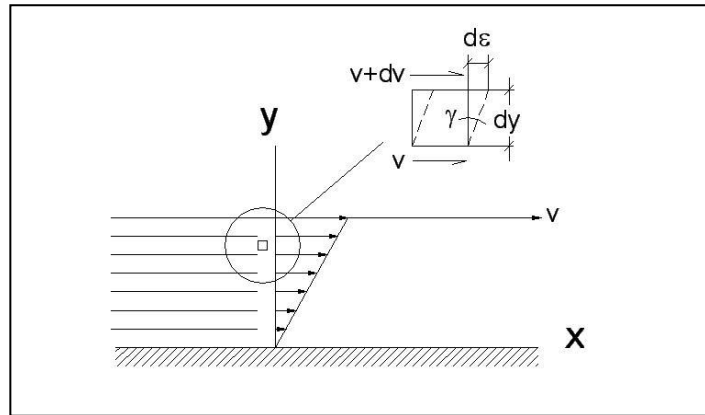


Fig.3.2.2.

$$F_R = \mu A \left(\frac{dV_x}{dy} \right) = \mu A \frac{V_x}{y}$$

3.3 Equilibrio dinámico de fuerzas sobre la línea de corriente:

Si recordamos lo estudiado en el módulo 1, decíamos que en cada instante la partícula está en equilibrio dinámico de fuerzas bajo la acción de las componentes actuantes:

- Fuerzas de presión
- Fuerzas Viscosas
- Fuerzas Inerciales

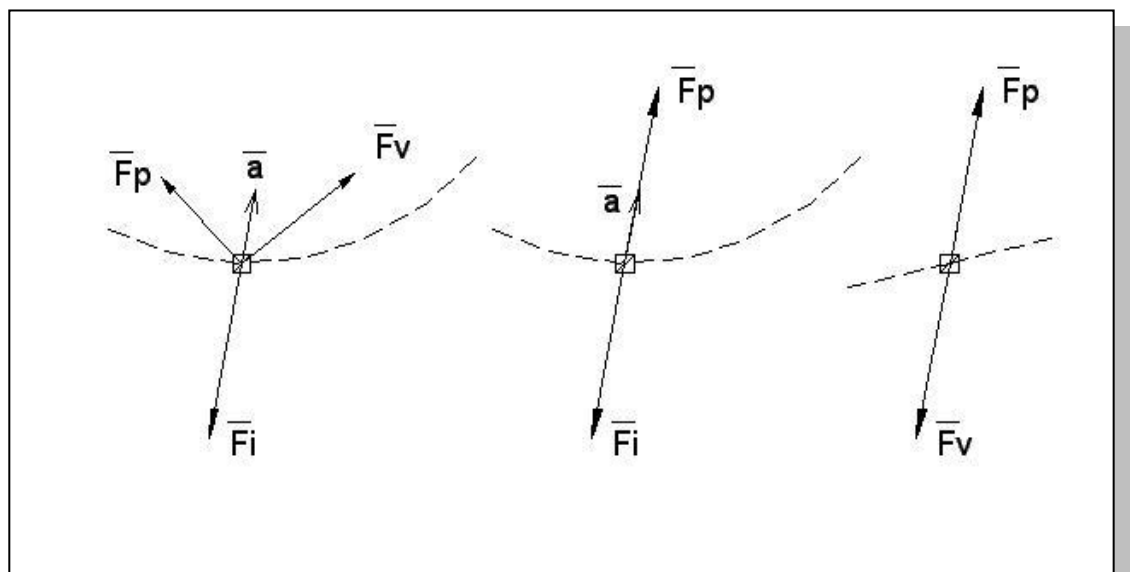


Fig.3.3.1

Tomamos en cuenta 2 cosas:

a.- La aceleración instantánea en el instante t , (aceleración tangencial + aceleración normal) producida por las fuerzas instantáneas determina la trayectoria en el siguiente instante.

b.- La dirección de la componente inercial será en la dirección de la aceleración instantánea y en sentido opuesto a la misma, la dirección instantánea del movimiento, no necesariamente debe coincidir con el vector de aceleración ni con la dirección de cualquiera de los vectores.

Esto es un equilibrio dinámico D'Alembert, o sea que la fuerza neta instantánea considerando la fuerza inercial es = 0, lo que no significa que no haya aceleración, y en general se puede escribir:

$$\vec{F}_p + \vec{F}_v = \vec{F}_i$$

3.3.1

Si tuviéramos un fluido de viscosidad muy pequeño, $\vec{F}_p = \vec{F}_i$

Asimismo para flujo muy viscoso, la partícula se moverá prácticamente sin aceleración y la ecuación 3.3.1 quedaría:

$$\vec{F}_p + \vec{F}_v \approx 0 \rightarrow \vec{F}_p = -\vec{F}_v$$

Si la aceleración es = 0 es lógico pensar que al no haber aceleración normal a_n las trayectorias a velocidad constante sobre las líneas de corriente serán rectas. Antes de continuar con nuestro análisis sobre las fuerzas actuantes sobre las partículas del flujo, vamos a definir que son los grupos adimensionales.

3.4 Un pequeño intermedio, el teorema Π (Pi) de Buckingham y los grupos adimensionales:

Sabemos de física básica que las magnitudes escalares o vectoriales pueden ser expresadas dimensionalmente a través de unidades en un dado sistema de referencia, por ejemplo, sistema Técnico (Fuerza, Longitud Tiempo) o (FLT) o al sistema MKS (Masa longitud Tiempo) o (MLT), también son a veces usados los sistemas cgs, y sistema inglés.

Por ejemplo, en el sistema MLT, la expresión de fuerza según la segunda ley será dimensionalmente:

$$\vec{F} = M \vec{a} = \frac{ML}{T^2} = \frac{\text{masa} \cdot \text{espacio}}{\text{tiempo}^2}$$

la velocidad según una dirección s será:

$$V = \frac{L}{T} = \frac{\text{espacio}}{\text{tiempo}}$$

Las magnitudes siempre podrán ser referidas a las básicas MLT. Hay algunas unidades auxiliares en MKS que sirven para magnitudes de estado termodinámico o electromagnético, que a veces se agregan a las anteriores. Por ejemplo θ (temperatura), q (carga eléctrica), etc.

Hay veces que se arman o aparecen en las ecuaciones grupos de magnitudes combinadas, que se simplifican y quedan reducidas a la unidad., a estos los llamamos grupos adimensionales, y algunos tienen nombres especiales como número de Reynolds (Re).

Ejemplo 1:

Explorar el grupo adimensional llamado N° Reynolds definido como la combinación de magnitudes:

$Re = \frac{\rho V D}{\mu}$, por ejemplo, estudiando un flujo de un fluido viscoso en torno a una esfera se trabaja con la combinación de densidad (ρ); velocidad (V), diámetro (D) y viscosidad (μ).

Para probar que la combinación de ellas definida como número de Reynolds es un adimensional ponemos, cada magnitud en función de sus unidades básicas en el sistema MKS, y observamos que ellas se cancelan mutuamente dando como resultado la unidad.

$$Re = \frac{(M / L^3) \cdot (L / T) \cdot (L)}{M / LT} = 1$$

En muchos problemas físicos se conocen las magnitudes o variables que intervienen es un problema pero no se conocen las relaciones que las ligan, en este tipo de problemas es específicamente útil el teorema de π de Buckingham, del que no daremos una demostración formal, sino que solamente aplicaremos.

Ejemplo 2:

Consideraremos que un ingeniero tiene el problema de hallar una fórmula que permita calcular el arrastre o resistencia al avance F de una esfera lisa de diámetro D , que se mueve a través de un fluido viscoso e incomprensible a velocidad V .

Parece evidente que el arrastre será entonces una función del diámetro de la esfera, la velocidad, la densidad y la viscosidad:

$$F = F(D, V, \rho, \mu)$$

La determinación de esta relación desconocida en forma experimental encierra gran dificultad ya que debe variarse una de las variables del paréntesis a la vez, manteniendo constantes las otras tres, pero a su vez cambiando sus valores a forma de parámetros; todo esto daría lugar a pilas de gráficas de correlación, con el consiguiente gasto en experimentación y tiempo.

Si la dependencia de una función es respecto a una sola variable independiente, por ejemplo $y = f(x)$, bastará con un gráfico en dos dimensiones (y versus x). si la dependencia es de dos variables, $z = f(x, y)$, será una superficie en el espacio, que es una gráfica que se puede trabajar con dos abacos de dos dimensiones cada uno, o familias de curvas parametrizando una de las tres variables con valores constantes y trabajando con las otras dos., con una función de tres variables independientes, serían necesarios tres ábacos y así sucesivamente.

Por ejemplo si hubiera tres variables independientes $w = f(x, y, z)$ se requieren tres ábacos, si cada variable independiente se parametriza una por vez por ejemplo con 10 valores constantes, y cada curva trazada tiene, digamos diez puntos, serían necesarias 1000 mediciones experimentales, y la obtención de cada punto experimental puede llevar muchas horas de preparación, así el problema se complica en progresión geométrica.

Apliquemos el siguiente planteo matemático:

Para el problema planteado en el ejemplo 2, supongamos que la expresión buscada de F es una expresión del producto ponderado de las variables independientes, con exponentes desconocidos:

$$F = k \cdot D^a \cdot V^b \cdot \rho^c \cdot \mu^d \quad 3.4.1$$

k es una constante de proporcionalidad; a, b, c y d son exponentes enteros desconocidos.

Establecemos la igualdad algebraica de las unidades en un sistema coherente entre todas, por ejemplo (MLT)

$$\frac{ML}{T^2} = L^a \cdot \left(\frac{L}{T}\right)^b \cdot \left(\frac{M}{L^3}\right)^c \cdot \left(\frac{M}{TL}\right)^d$$

Comparando las unidades miembro a miembro, podemos establecer las siguientes ecuaciones:

$$\begin{array}{ll} \text{Comparo L:} & 1 = a + b - 3c - d \quad \rightarrow \quad a = 1 - b + 3c + d \\ \text{Comparo M:} & 1 = c + d \quad \rightarrow \quad c = 1 - d \\ \text{Comparo T:} & -2 = -b - c \quad \rightarrow \quad b = 2 - d \end{array}$$

De lo que obtuve, reemplazo los valores de b y c , en $a \rightarrow$

$$\begin{array}{l} a = 1 - (2 - d) + 3(1 - d) + d = 2 - d \\ c = \quad \quad \quad = 1 - d \\ b = \quad \quad \quad = 2 - d \end{array} \quad \left| \quad \text{Queda todo como función de } d$$

ahora reemplazamos lo obtenido en la expresión (3.4.1), y queda:

$$F = k^{(2-d)} \cdot D \cdot V^{(2-d)} \cdot \rho^{(1-d)} \cdot \mu^d \quad 3.4.2$$

que podemos escribir como:

$$F = k \frac{D^2 V^2 \rho \mu^d}{D^d V^d \rho^d}$$

que separando los términos y reagrupándolos queda:

$$\left(\frac{F}{D^2 \cdot V^2 \cdot \rho}\right) = k \left(\frac{\mu}{DV\rho}\right)^d \quad 3.4.3$$

En esta expresión podemos comprobar fácilmente que los 2 grupos de variables entre paréntesis son adimensionales, los llamaremos:

$$\pi_1 = \left(\frac{F}{D^2 V^2 \rho}\right)$$

$$\pi_2 = \left(\frac{\mu}{DV\rho}\right)$$

En general a todo grupo que una vez operando dé adimensional lo llamaremos grupo (π); también resulta claro ver que como k y d no se calcularon ya que hay 3 ecuaciones y 5 incógnitas, la expresión (3.4.3) podrá expresarse de cualquier otra forma siempre que no se altere la condición de adimensionalidad. O sea, se puede expresar:

$$\left(\frac{F}{D^2 V^2 \rho}\right) = k_1 \left(\frac{D\rho V}{M}\right)^{d_1} \quad \text{o bien} \quad E_U = k_1 (\text{Re})^{d_1}$$

o sea, estos adimensionales poseen nombres específicos.

$$\text{N}^\circ \text{ de Euler: } \left(\frac{F}{D^2 V^2 \rho}\right) = \pi_1$$

$$\text{N}^\circ \text{ de Reynolds: } \left(\frac{\rho VD}{\mu}\right) = \pi_2$$

Si bien no conocemos k_1 y d_1 podemos construir ahora una sola curva en forma experimental que nos permite obtener la correlación empíricamente. Procederemos de la siguiente forma:

a.- Con un dispositivo de pruebas que contenga nuestro fluido viscoso por ejemplo aire en un túnel de viento, construimos una sola esfera de diámetro D_1 , y variamos V , con lo cual tenemos un amplio rango de variación para la variable independiente Π'_2

b.- Para cada valor de velocidad obtenemos un arrastre F , y como el resto de los parámetros son conocidos calculamos un valor de Π_1 a la vez para cada cambio de V y construimos la curva siguiente:

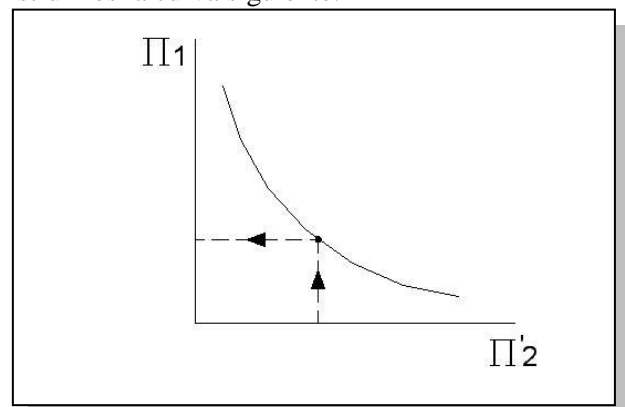


Fig.3.4.1

Resulta claro que, aunque trabajando con una sola esfera de diámetro D_1 , los valores obtenidos de la curva son absolutamente generales; basta establecer la entrada a la curva calculando el valor $\Pi_2 = \frac{\rho V D}{\mu}$ y salir de la curva

$$\text{con } \Pi_1 = \frac{F}{D^2 V^2 \rho}.$$

Como D , V y ρ son conocidos para las nuevas condiciones, calculamos el nuevo F y esto utilizando la misma curva experimental siempre.

Hay técnicas matemáticas simples que nos permiten, conociendo la curva experimental, hallar los parámetros de ajustes faltantes, en este caso k y D_1 . También se puede reescalar los ejes y parametrizar la curva para μa y ρa ; es decir, un fluido en particular. Entonces, entrando con D , sacamos F directamente.

3.4.1 Expresión del Teorema π de Buckingham:

En el ejemplo expuesto teníamos $F = F(D, V, \rho, \mu)$. Es decir, una variable dependiente (F) y 4 variables independientes (D, V, ρ, μ); o sea, 5 variables en total que podemos expresar como :

$$F - F(D, V, \rho, \mu) = 0$$

El teorema dice:

“El número de grupos adimensionales independientes que pueden emplearse para describir un fenómeno desconocido, en el que intervienen n variables (n es el número total dependientes e independientes) es igual al número: $(n - r)$. Siendo r el número de variables básicas o fundamentales necesarias para expresar las variables dimensionalmente.”

En nuestro caso: $n = 5$; $r = 3$ (M, L, T). Por lo tanto: $n - r = 2$

O sea que obtendremos dos grupos π independientes, que fue nuestro resultado, o sea la obtención del número Eu y el número Re .

3.5 Semejanza:

Ya hablamos de la condición de equilibrio dinámico instantáneo de la partícula fluida sobre la línea de corriente. Precisemos un poco más el concepto de equilibrio dinámico.

A partir de la ecuación de la segunda ley: $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ se deduce que, $\vec{F} - m \cdot \vec{a} = 0$ expresión esta última que se conoce como Corolario o Teorema de D'alambert, lo que en un sentido amplio significa que un cuerpo en movimiento rectilíneo acelerado puede considerarse en equilibrio en todo instante bajo la acción entre las fuerzas:

- Activas (fuerzas exteriores y fuerzas de campo)
- Reactivas (Fuerzas resultantes de la 3ra ley)
- Vinculares (Fuerzas de contacto como rozamiento)
- Internas (Fuerzas interiores por ejemplo cohesión molecular)
- Inerciales cambiadas de signo (Resultantes de la 2da ley)

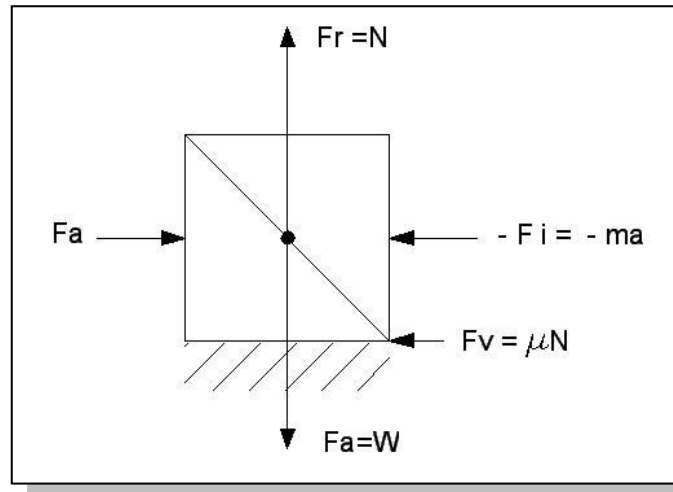


Fig.3.5.1

3.5.1 Semejanza Geométrica: Los objetos que están en escala en todas sus dimensiones con respecto a un objeto original se denominan “modelos”. El “modelo” y el “objeto” son geoméricamente semejantes ya que conociendo las dimensiones del modelo y la razón de escala, puede reproducirse el “objeto” original.

3.5.2 Semejanza Cinemática: En referencia a la figura 3.5.2, si estudiamos el objeto bajo la acción del flujo de un fluido y el modelo bajo la acción de otro, pero logramos que las líneas de corriente mantengan el mismo patrón en torno a objeto y modelo; y para cada punto de los campos fluidos tanto en objeto como en modelo damos con una combinación de los vectores $\vec{F} p, \vec{F} v, \vec{F} i$, que guarden iguales proporciones en puntos homólogos del flujo en torno a objeto y modelo en dirección sentido y magnitud., podemos decir que objeto y modelo, además de ser geoméricamente semejantes, son también “cinemática mente semejantes”. Puede pensarse a primera vista que la semejanza geométrica entre objeto y modelo acarrea automáticamente la semejanza cinemática, sin embargo esto no es así.

Ejemplo: En aerodinámica supersónica, los perfiles de ala poseen formas geométricas con bordes o extremos delantero y posterior aguzados como ser perfil rómbico también llamado perfil diamante. Si hacemos un modelo a escala geométrica de una de estas alas pero la probamos en un túnel de viento en régimen subsónico $M < 1$, el patrón de flujo establecido será muy diferente al correspondiente al objeto que se mueve en régimen supersónico $M > 1$, el patrón de líneas de corriente en este caso se establece a partir de mecanismos termodinámicos de compresión y expansión, con lo que concluimos que la semejanza geométrica es condición necesaria pero no es condición suficiente para la semejanza cinemática.

3.5.3 Semejanza Dinámica. Si estos vectores homólogos de todas la fuerzas actuantes se aplican sobre partículas que cumplan la condición de que para cualquier par de puntos homólogos de los campos de flujo la relación de densidades $\rho (Po) / \rho (Pm) = Cte$, o sea aseguramos una distribución de masas semejantes, en ambos flujos, entonces los flujos serán dinámicamente semejantes.

Esto es: en lo que respecta a la mecánica Newtoniana los experimentos con objeto y modelo son “idénticos”.

Nuestro propósito es demostrar que si los cuerpos son geoméricamente semejantes, los experimentos serán dinámicamente semejantes, solamente si la combinación de magnitudes llamada Número de Reynolds

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu}$$

son iguales numéricamente en ambos experimentos.

Examinemos flujos permanentes, viscosos, e incompresibles, geoméricamente semejantes en torno a dos esferas, “objeto” y “modelo” respectivamente. Despreciando las fuerzas másicas sobre las partículas, sabemos que sobre

cada par homólogo de ellas actuarán la triada de fuerzas D’alambert; debidas a la presión, a la viscosidad y a la inercia; y cumpliendo: $\vec{F}_p + \vec{F}_v = \vec{F}_i$ en cada punto.

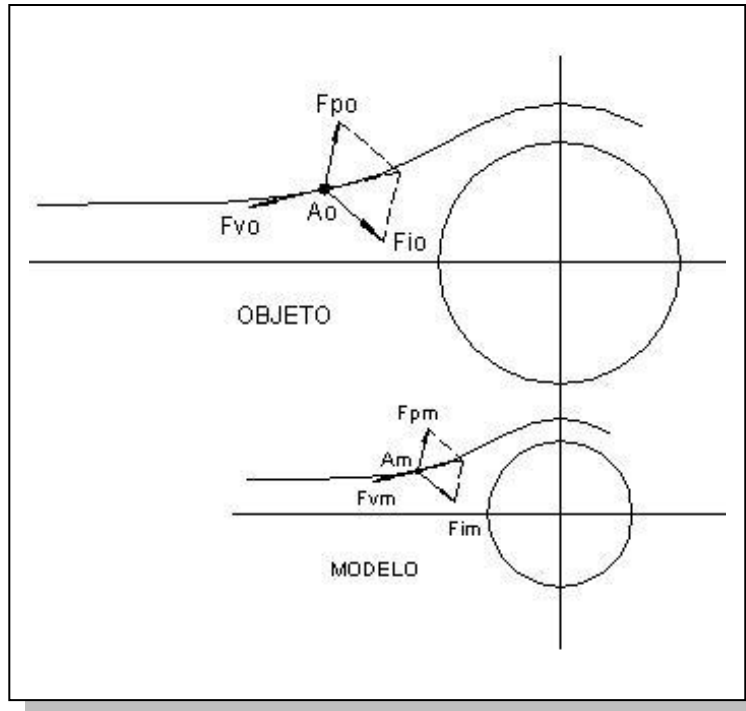


Fig..3.5.2

En la figura aparecen dos puntos equivalentes de los respectivos sistemas de referencia los puntos A_o y A_M ; es evidente que si los dos flujos son geoméricamente semejantes, la triada de A_o será semejante a los vectores de la triada de A_M .

Podemos establecer las siguientes ecuaciones que son ciertas para todos los pares de puntos homólogos:

$$\frac{\left(\vec{F}_p\right)_m}{\left(\vec{F}_p\right)_p} = \frac{\left(\vec{F}_v\right)_m}{\left(\vec{F}_v\right)_p} = \frac{\left(\vec{F}_i\right)_m}{\left(\vec{F}_i\right)_p} \rightarrow$$

$$\frac{\left(\vec{F}_i\right)_m}{\left(\vec{F}_v\right)_m} = \frac{\left(\vec{F}_i\right)_p}{\left(\vec{F}_v\right)_p} = C1$$

3.5.3

$$\frac{\left(\vec{F}_i\right)_m}{\left(\vec{F}_p\right)_m} = \frac{\left(\vec{F}_i\right)_p}{\left(\vec{F}_p\right)_p} = C2$$

Magnifiquemos una partícula cúbica sobre la línea de corriente y calculemos estas últimas constantes , con el siguiente criterio, en lugar de hacer los cocientes de las magnitudes totales vectoriales, tomaremos los cocientes de algunas de las componentes ya que si los vectores en puntos homólogos son semejantes, también lo serán sus componentes. Haciendo referencia a la figura 3.5.3.

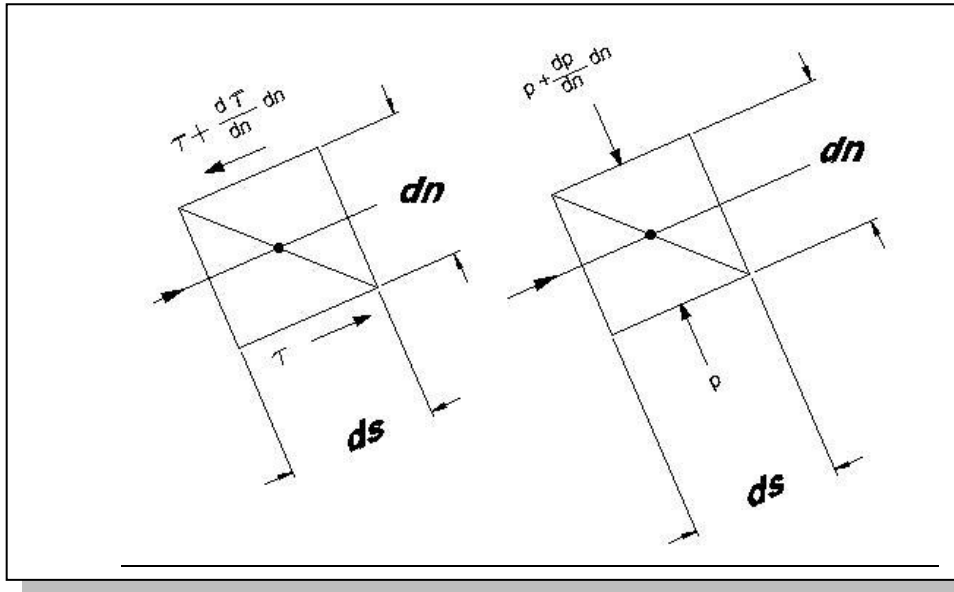


Fig.3.5.3

Fuerza de Fricción Viscosa en la dirección tangente:

Las dimensiones de la partícula son: $dv = ds \cdot dn \cdot dz$, se deduce del esquema que la fuerza cortante neta sobre un par de cosas paralelas en la dirección tangente es:

$$\left(\frac{\partial \tau}{\partial n}\right) dn \cdot ds \cdot dz$$

Utilizando la ley de viscosidad de Newton $\tau = \mu \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)$, y reemplazando la fuerza cortante será

$$F_V = \mu \left(\frac{\partial^2 V}{\partial n^2}\right) dv_n$$

Fuerza de Presión en la dirección normal a la línea de corriente:

La fuerza de presión neta es igual a: $\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right) dm \times ds \cdot dz = \left(\frac{\partial p}{\partial n}\right) dv_{ol}$.

Siendo dv_{ol} el diferencial de volumen.

Fuerza de Inercia en la dirección tangencial:

La componente seleccionada es la tangente a la línea de corriente, como:

$$a_T = V \cdot \frac{dv}{ds} \rightarrow dF_I = dm \cdot a_T = dm V \left(\frac{dv}{ds}\right) = \rho dv_{ol} V \left(\frac{dv}{ds}\right)$$

$$\left(a_T \vec{T} = \frac{dv}{dt} \vec{T} \rightarrow a_T = \frac{dv}{dt} \rightarrow a_T = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} \rightarrow a_T = \frac{dv}{ds} v\right)$$

Aunque sólo se han desarrollado algunas de las componentes de los 3 tipos de fuerzas, es evidente que las relaciones entre el objeto y el modelo serán las mismas que las respectivas fuerzas completas ya que en ambos casos los vectores son semejantes.

Reemplazando entonces estas ecuaciones obtenidas, en el sistema 4.1, que puede escribirse de la siguiente manera:

$$\frac{F_I}{F_V} \left| \begin{array}{l} m \\ 0 \end{array} \right. = \frac{\rho V \left(\frac{\partial V}{\partial s} \right)}{\mu \left(\frac{\partial V}{\partial n^2} \right)} = C_1$$

$$\frac{F_I}{F_p} \left| \begin{array}{l} m \\ 0 \end{array} \right. = \frac{\rho V \left(\frac{\partial V}{\partial s} \right)}{\left(\frac{\partial p}{\partial n} \right)} = C_2$$

Por semejanza geométrica, las magnitudes presión y velocidad, y diferencias de presión y velocidad en dos puntos próximos seguirán siendo valores semejantes para objeto y modelo, por tanto es válido escribir:

$$\frac{\partial V}{\partial s} = \frac{V}{L}; \quad \frac{\partial p}{\partial n} = \frac{p}{L}; \quad \frac{\partial V}{\partial s} = \frac{L}{s}$$

Entonces, reemplazando sobre los valores obtenidos de C_1 y C_2 :

$$\frac{F_I}{F_V} = \frac{\rho V^2 L^2}{MVL} = \frac{\rho VL}{M} = C_1$$

$$\frac{F_i}{F_p} = \frac{\rho V^2 / L}{P/L} = \frac{\rho V^2}{p} = C_2$$

o bien:

$$\frac{F_p}{F_I} = \frac{p}{\rho V^2} = C_3$$

Como en el análisis del teorema π habíamos establecido que había una relación funcional entre los 2 grupos adimensionales,

$$\frac{F}{\rho V^2 D^2} = g\left(\frac{\rho VD}{\mu}\right) \rightarrow \frac{p}{\rho V^2} = g\left(\frac{\rho VD}{\mu}\right) \rightarrow E_U = g(Re)$$

D es equivalente a L ya que es cualquier dimensión característica.

De esta última expresión, se observa que Eu y Re están relacionadas a través de una relación funcional particular por lo cual una sola cualquiera de ambas hace preservar la condición de “dinámicamente semejantes”; para objeto y modelo, habitualmente se toma que los Re deben ser iguales.

Resumen:

Nosotros partimos de obtener una relación funcional $Eu = g(Re)$ y esto surgió de un problema que tenía 5 variables relacionadas $F - F(D, V, \rho, \mu) = 0$, y 3 magnitudes (M,L,T) y como todas las variables se podían expresar como combinaciones de estas tres; entonces $n - r = 5 - 3 = 2$ era el número de grupos funcionales π , independientes serían dos, que en este caso eran Eu y Re .

Si apareciera una variable adicional, por ejemplo si en vez de bolas lisas queremos caracterizar bolas rugosas aparecería una nueva variable, que es la rugosidad ν y sería:

$F = F(D, V, \nu, \rho, \mu) = 0$; ahora $n = 6$ y $r = 3$, por lo tanto: $n - r = 3$, y al final del análisis habría $(n - r) - 1 = 2$ o sea dos relaciones funcionales independientes.

$$\pi_1 = g \pi_2$$

$$\pi_1 = h \pi_3$$

Y la semejanza dinámica requeriría ahora de cumplir con dos igualdades en lugar de 1.

Esto se puede generalizar, y objeto y modelo deben cumplir tantas restricciones como lo indique: $(n - r) - 1$ para cumplir con la semejanza dinámica.

La teoría de semejanza permite efectuar ensayos sobre modelos a escala de artefactos en proyecto de diversa índole, desde barcos, aviones, torres de transporte de energía, canales, desagües, o sus partes, a fin de estudiar de forma menos costosa el comportamiento y posibles cambios y mejoras antes de la construcción del prototipo real. Los ensayos más comunes son los de túnel hidrodinámico y el túnel de viento.

3.6 Implicancia del número de Re en el comportamiento del fluido:

Como el número Re es el cociente entre las fuerzas de Inercia y las fuerzas Viscosas, $Re = |F_I / F_V|$; su valor tiene implicancia sobre el comportamiento dinámico del fluido; por ejemplo:

Si Re está entre 0,1 y 10, o sea: $0,1 < Re < 10$, podemos decir que F_I y F_V son comparables y habrá que expresar la tríada de fuerzas como $\vec{F}_p + \vec{F}_v = \vec{F}_I$

Si $Re < 0,1 \rightarrow F_V \gg F_I \rightarrow \vec{F}_p + \vec{F}_v \cong 0$; o sea que hay preponderancia de las fuerzas viscosas sobre las inerciales.

Si $Re > 1000 \rightarrow F_I \gg F_V \rightarrow \vec{F}_p = \vec{F}_I$; o sea que hay preponderancia de las fuerzas de inercia sobre las viscosas.

Otro dato importante a observar es que como $Re = \frac{\rho VD}{\mu}$ o sea una combinación de variables; un dado Re alto (> 1000), puede provenir de una viscosidad muy baja, pero si la viscosidad y la dimensión son muy pequeños, Re puede ser $< 0,1$ y el comportamiento será viscoso a pesar de tener μ pequeño. Es el caso del vuelo a gran altitud donde ρ es muy pequeño, o es el caso de los microbios o insectos de escasa dimensión que vuelan en el aire, donde el comportamiento es de naturaleza viscosa.

Por eso conviene hablar de “Comportamiento” viscoso y no de fluido viscoso, y recíprocamente.

3.6.1. Flujos dominados por Re bajos (ley de arrastre de Stokes)

Cuando hablamos de “arrastre” nos referimos a la resistencia al avance de un cuerpo en movimiento respecto a una masa fluida que lo baña completamente, el arrastre tiene una componente de presión (o resistencia por fuerza de presión, a veces denominado resistencia de forma) y una componente de viscosidad (o resistencia debida a fuerzas de viscosidad).

$$F_a = F_{rf} + F_{rv}$$

Los fluidos de Re bajos ($< 0,1$) generan sobre los cuerpos interpuestos en ellos, una fuerza de arrastre definidas empíricamente por la ley de Stokes:

$$F_a = kV\mu D \quad (6.1)$$

El factor k depende de la forma del cuerpo, por ejemplo, si es una esfera o un cuerpo aerodinámico que caen en glicerina tendrán coeficientes k diferente.

3.6.2 Flujos dominados por Re altos (>1000):

La evidencia experimental, indica ahora que la fuerza total de arrastre viene dada por:

$$F_a = k\rho V^2 D^2$$

A menudo se acomoda en este caso el k para que se haga explícito el valor de la presión dinámica en la fórmula, o sea se toma una nueva constante definida como:

$$k = \frac{1}{2} C_D \quad \text{siendo } C_D \text{ el "drag coefficient" o coeficiente de arrastre.}$$

Por lo tanto, queda:

$$F_a = C_D \left(\frac{1}{2} \rho V^2 \right) D^2$$

Como D^2 representa dimensionalmente a un área genérica, tomamos como referencia el área de la sección que el cuerpo interpone en la corriente fluida, por ejemplo, según se ve en el dibujo siguiente, si el cuerpo interpuesto es una esfera, el área interpuesta a la corriente U_o será la sección circular frontal máxima

$$A = \left(\frac{\pi \phi^2}{4} \right).$$

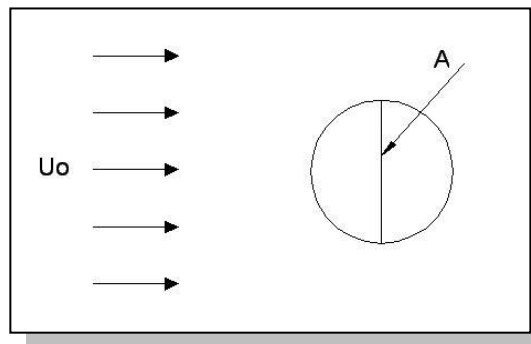


Fig.3.6.1

De la fórmula vemos que en este caso, el arrastre se cuadruplica si la velocidad o el tamaño de la sección se duplica. También, como Potencia = Fuerza \times Velocidad:

$$P = C_D \left(\frac{1}{2} \rho V^2 \right) D^2 V \quad \text{o sea: } P \cong V^3$$

o sea la potencia requerida para el movimiento es proporcional al cubo de la velocidad

Ejemplo:

Si comparamos 2 peces, uno pequeño y uno grande, y observamos el valor de la potencia por unidad de peso que debe invertir cada uno para el movimiento:

$$\frac{P}{W} = \frac{\frac{1}{2} C_D \rho V^3 D^2}{\rho D^3 g} = \frac{1}{2} C_D \frac{V^3}{Dg} \rightarrow V^3 = \left(\frac{2Dg}{C_D} \right) \left(\frac{P}{W} \right)$$

Si asumimos que ambos deben moverse a la misma velocidad V , para el pez con D mas chico $\frac{P}{W} \rightarrow$ debe ser mas grande. Por tanto, para lograr la misma velocidad, un pez pequeño debe emplear mayor potencia por unidad de peso (o relación peso – potencia), que un pez grande. Por eso, cuanto más pequeño es el ente acuático, menor es la velocidad observada.

3.7 Ley de equivalencia de los Coeficientes de Arrastre:

Como vimos al estudiar el arrastre de la esfera de acuerdo a las leyes de semejanza, concluimos que dos experimentos con cuerpos interpuestos a un flujo, que cumplan con semejanza geométrica, cinemática y dinámica, y que tengan igual número Re ; tendrán igual valor para el número Π_1 y por tanto se cumplirá para ambos cuerpos:

$$\frac{F_2}{\rho V_2^2 D_2^2} = \frac{F_1}{\rho V_1^2 D_1^2} = cte \quad \text{Para ambos}$$

Es decir como los cocientes son iguales y al mismo tiempo el primero era k_1 y el segundo k_2 resultará:

$$k_1 = k_2 \therefore \frac{1}{2} C_{D1} = \frac{1}{2} C_{D2} \rightarrow C_{D1} = C_{D2}$$

O sea llegamos a la ley de equivalencia siguiente:

Para experimentos en que la semejanza geométrica, cinemática y dinámica, se cumplan, igualdad en el número Re lleva a la igualdad del coeficiente de Arrastre.

Esto nos indica que el proceso de experimentación debería tener los siguientes pasos:

- 1- Construir un modelo a escala geométrica del objeto proyectado.
- 2- Obtener en el túnel aerodinámico o hidrodinámico el valor Π_1 que será numéricamente igual al coeficiente de arrastre $k=1/2 C_D$.
- 3-Obtenido k , calcular la fuerza de arrastre para el modelo $F_{AM} = k \rho V_M^2 D_M^2$.
- 4- Obtener la fuerza de arrastre para el objeto proyectado en su condición de operación, usando el mismo k obtenido en 2:

$$F_0 = k \rho V_0^2 D_0^2$$

Esto nos permitirá de antemano conocer la fuerza de arrastre esperada, antes de construir el objeto prototipo, y hacer cambios sobre el modelo si fuera necesario, y nuevas pruebas de ajuste.

Un dato importante a tener en cuenta es que en el paso 1, el modelo a construir debe proyectarse para soportar el tipo de esfuerzos a los que será sometido con deformaciones proporcionales a las que tendrá finalmente el prototipo bajo las cargas reales, y no mayores o menores a esta estimación, para que los resultados obtenidos en los ensayos de túnel sean significativos.

Esto es una especie de garantía estructural que debemos asegurar para el modelo. Por ejemplo si ensayamos en un túnel de viento el comportamiento de un puente, las deformaciones estáticas propias que tendrá el puente real, deberán estar representadas en el modelo.

A veces a esta condición adicional de semejanza entre modelo y prototipo se la llama “semejanza estática” y se añade a las otras tres.

En general, para modelos en los cuales $F = F(L, V, \rho, \mu)$, o sea una dependencia de cuatro variables independientes, por ejemplo objetos en movimiento totalmente inmersos en la masa de aire o agua, en flujo subsónico, será necesario la igualdad de tres grupos adimensionales, $Eu = (Re)$ y $Eu = (Fr)$ esto se hace especialmente importante si en el fenómeno hay superficies de interfase aire agua como en caso del oleaje sobre los cascos de los barcos, habrá que asegurar en este caso, la igualdad de Re y Fr , cosa que es básicamente difícil de cumplir, salvo que las dimensiones de objeto y modelo se vayan aproximando, y que el fluido de prueba coincida para objeto y modelo, o bien aplicar técnicas especiales durante el ensayo.

Pero al aproximar los tamaños de objeto y modelo, la semejanza estática comienza a imponer restricciones estructurales, o sea nos está diciendo en idioma matemático: “pruebe con el objeto real mismo” cosa que nos devuelve al inicio del problema planteado.[]

Bibliografía complementaria para consulta:

FRANK M. WHITE, Mecánica de Fluidos, Ed. Mc Graw Hill

WILLIAM F. HUGES, Dinámica de los fluidos, Ed Mc Graw Hill

ROBERT FOX – ALAN MAC DONALD, Introducción a la Mecánica de Fluidos, 4ta Edición, Mc Graw Hill

IRWIN SHAMES, Mecánica de Fluidos, 6ta Ed. Editorial Mc Graw Hill

RONALD GILES, Mecánica de los fluidos e Hidráulica, Ed. Mc Graw Hill

STREETER Y WEELER, Mecánica de los fluidos, Ed. Mc Graw Hill