

## 5 CONDUCCIÓN DE FLUJO LAMINAR EN TUBERÍAS

### 5.1 Transición de Flujo laminar a turbulento en una tubería:

Experimentos realizados por Osborne Reynolds a finales del siglo XIX, sobre tubos de vidrio conduciendo agua con aparatos similares al indicado en la figura 5.1.1 siguiente, permitían analizar, variando el caudal de salida a través de la válvula, diferentes velocidades de conducción en la tubería y visualizar el comportamiento del fluido en el interior del tubo.

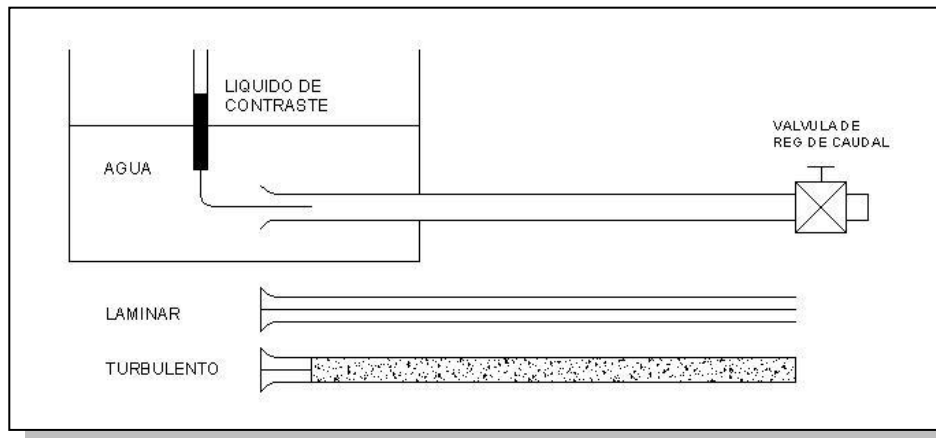


Fig.5.1.1

De las fórmulas anteriores referidas a la aplicación del teorema de Torricelli, vimos que en la práctica el caudal  $q$  de salida era  $q = C_d \sqrt{2gh} \cdot A$ , es decir, al disminuir  $A$  o sea el área del orificio de salida de la válvula, el coeficiente disminuye hasta cortar el flujo, así podemos obtener velocidades crecientes de flujo al ir abriendo lentamente la válvula.

Con velocidades bajas, el filete de fluido coloreado insertado en la corriente por la aguja de tinta de densidad igual al agua, se mantiene a lo largo del tubo formando una línea recta, el resto del agua forma una indefinible masa cristalina transparente, que permite leer un texto con aumento colocado detrás del tubo como si fuese una lupa. A este comportamiento de movimiento del fluido de filetes paralelos indistinguibles se lo llama Flujo Laminar.

Para velocidades mayores el filete coloreado testigo (y por tanto todos los demás) se hace inestable, es decir la traza pierde su forma de línea recta y empieza a oscilar y hay finalmente, a partir de una cierta velocidad, una dispersión completa de la tinta coloreada en el conducto, es decir, hemos reproducido una transición del flujo laminar al denominado flujo turbulento.

Si representamos matemáticamente la velocidad de las partículas, que pasan por un punto fijo no material, de acuerdo al criterio de Euler, la velocidad de las partículas que pasan por ese punto en régimen laminar permanente, nos dan la gráfica de la figura 5.1.2 izquierda,

Para algunas circunstancias de flujo turbulento, puede darse la gráfica de la derecha para la componentes horizontal de la velocidad, tomadas en el punto no material, en la cual se observa que la velocidad media según  $x$  se mantiene constante pero aparecen fluctuaciones instantáneas de la velocidad, no obstante, se puede hablar en este caso de flujo turbulento permanente, siempre que se cumpla que:

$$\bar{V} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} V dt$$

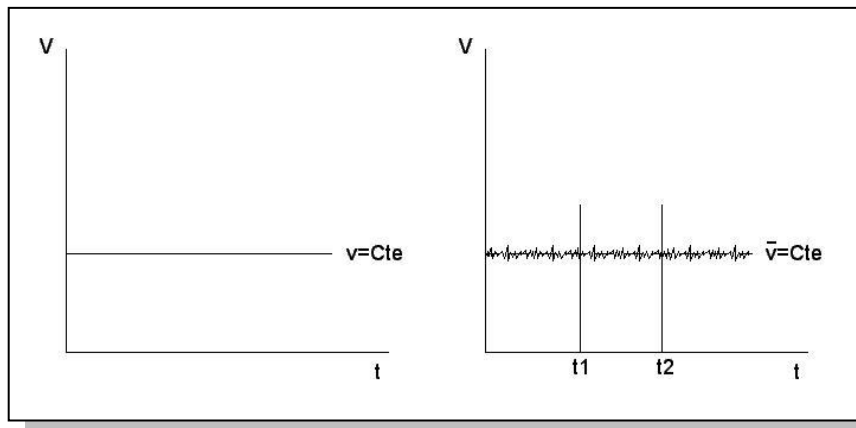


Fig.5.1.2

Los experimentos de Reynolds estuvieron basados en variar la velocidad en tubos de vidrio de diámetro constante, es decir, la obtención de diferentes valores del número adimensional que ya hemos definido como Número de Reynolds, para el cambio de la variable  $V$ :

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu} \text{ donde } D \text{ era el diámetro interior del tubo bajo prueba.}$$

Dependiendo de las condiciones de cómo se realiza el experimento, la transición laminar – turbulento se produce en un rango  $2.000 < Re < 4.000$  dependiendo fundamentalmente de la isolación del experimento a las vibraciones exteriores.

Para los casos prácticos, la transición en flujos interiores y para tuberías comerciales se toma en  $Re = 2.300$ .

Para flujos abiertos, las transiciones se producen en valores de otra magnitud, del orden de  $Re = 0,5 \cdot 10^6$ , y dependen de otras variables dimensionales como ser el tamaño del objeto.

## 5.2 Análisis de Flujo Laminar Unidimensional:

El análisis de flujos reales internos, impone la consideración de la viscosidad. La viscosidad es la propiedad del fluido que introduce las tensiones de corte, y es la causal de la irreversibilidad en los procesos de aumento de energía interna y eventualmente de las pérdidas de calor.

### 5.2.1 Flujo laminar incompresible entre placas paralelas:

En el experimento de la figura siguiente Fig.5.2.1, la placa superior se mueve paralela a la superficie libre y a la dirección del flujo. El flujo se toma unidimensional, es decir, todos los filetes y sus velocidades en las posiciones y respecto de la base, se repiten iguales para toda la profundidad  $z$ , y no se consideran los efectos del borde de la placa (los valores significativos del experimento, se toman lejos de los bordes).

Como el fluido tiene una componente gravitatoria en la dirección de la longitud  $l$ , hay una variación de presión hidrostática en este sentido. El análisis se hace considerando una partícula libre de fluido, como la dibujada en el seno del flujo, de dimensiones  $(\delta l \times \delta y \times 1)$  es decir de profundidad unitaria, (por supuesto las escala con que se dibujó la partícula ha sido muy ampliada). La lámina se mueve con velocidad constante  $U$  hacia abajo, inicialmente el fluido está en reposo.

La ecuación de movimiento a partir del balance de fuerzas, para la placa en la dirección  $l$  es:

$$p \delta y - (p \delta y + \frac{dp}{dl} \delta l \delta y) - \tau \delta l + (\tau \delta l + \frac{d\tau}{dy} \delta y \delta l) + \gamma (\delta l \delta y 1) \cdot \text{sen } \theta = 0$$

Dividimos m.a.m. por el volumen del elemento y simplificamos quedando:

$$-\frac{dp}{dl} + \frac{d\tau}{dy} + \gamma \operatorname{sen}\theta = 0$$

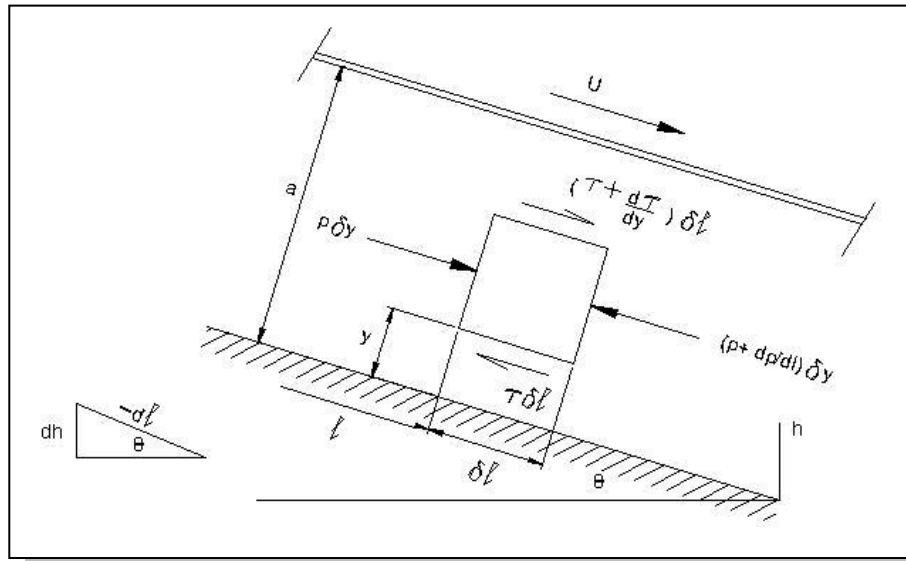


Fig.5.2.1

Como de la figura auxiliar:  $\operatorname{sen}\theta = -\frac{dh}{dl} \rightarrow$

$$\frac{d\tau}{dy} = \frac{d}{dl}(p + \gamma h) \quad \rightarrow \quad d\tau = \left[ \frac{d}{dl}(p + \gamma h) \right] dy$$

Como no hay aceleración respecto de  $y$ , ya que se trata de un deslizamiento de una placa sobre un seno fluido, todo el paréntesis es constante para la integración, quedando:

$$\tau = y \frac{d}{dl}(p + \gamma h) + C_1$$

Como asumimos el comportamiento como flujo laminar, sustituimos acuerdo a la ley de viscosidad para fluidos:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

Por lo tanto:

$$\frac{du}{dy} = \frac{1}{\mu} \frac{d}{dl}(p + \gamma h)y + \frac{C_1}{\mu}$$

Que integrando respecto de  $y$  nos da el perfil de velocidades entre la base y la placa.

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{d}{dl}(p + \gamma h)y^2 + \frac{C_1}{\mu}y + C_2 \quad (5.2.1)$$

$C_1$  y  $C_2$  son constantes de integración que pueden calcularse a partir de las condiciones de contorno siguientes:

Para  $y=0 \rightarrow u = 0$

Para  $y=a \rightarrow u = U$

Por lo tanto:  $C_2 = 0$ ;  $\frac{1}{2\mu} \frac{d}{dl}(p + \gamma h)a^2 + \frac{C_1}{\mu}a = U$

O sea, de la segunda:

$$\frac{C_1}{\mu} = \frac{U}{a} - \frac{1}{2\mu} \frac{d}{dl} (p + \gamma h) a$$

que reemplazando en 5.2.1 queda:

$$u = \frac{U y}{a} - \frac{1}{2\mu} \left[ \frac{d}{dl} (p + \gamma h) \right] (a y - y^2) \tag{5.2.2}$$

Si el esquema de la figura fuese horizontal, no habrá variación de presión hidrostática y  $\frac{d}{dl} (p + \gamma h) = 0 \rightarrow u = \frac{U y}{a}$  es decir daría una distribución lineal, ojo que en este caso supone también que no hay variación de presión,  $\Delta P / \Delta L = 0$ , es decir el conducto plano tiene áreas normales al movimiento constantes.

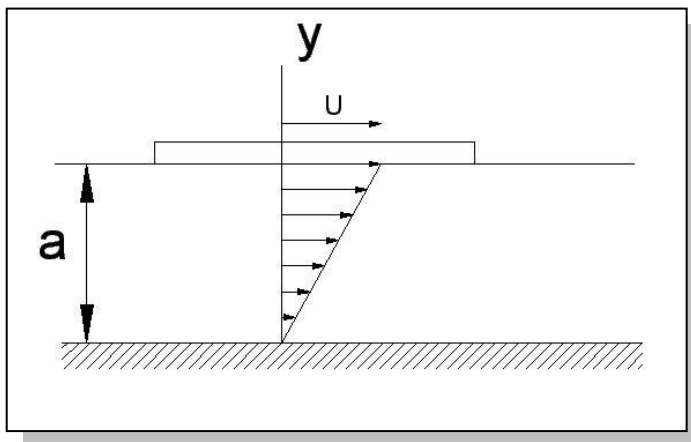


Fig.5.2.2

Ejemplo 5.1:

En el esquema de la figura siguiente, una placa móvil se mueve sobre la base fija según se indica:

$\mu = 0,80$  poise

$\rho = 93,5$  UTM / m<sup>3</sup>

Determinar:

La distribución de velocidades.

El caudal.

La tensión de corte sobre la placa móvil.

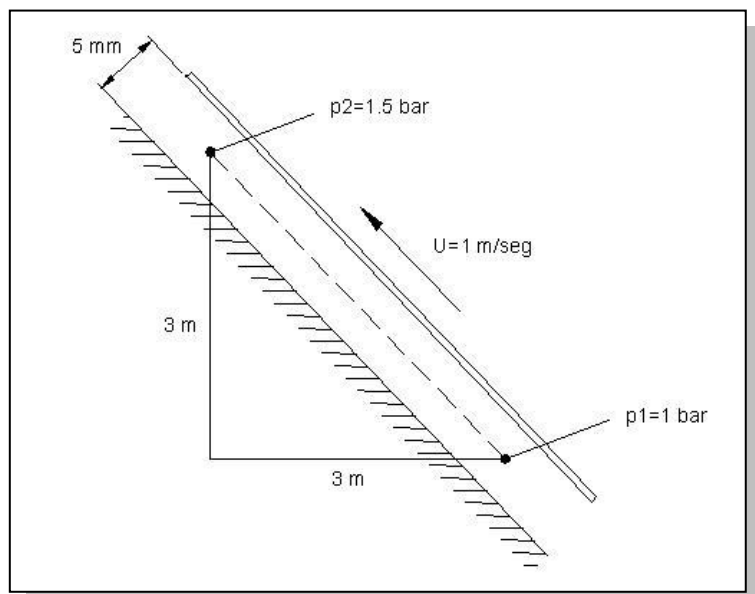


Fig.5.2.3

Resolución:

a.- la distribución de velocidades:

En el punto superior calculamos  $(p + \gamma h)$ :

$$p = 1,5 \frac{\text{KgF}}{\text{cm}^2} \cdot 10^4 \frac{\text{cm}^2}{\text{m}^2} = 1,5 \times 10^4 \frac{\text{KgF}}{\text{m}^2}$$

$$\gamma = \rho g = 93,5 \frac{\text{UTM}}{\text{m}^3} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{seg}^2} = 917,2 \frac{\text{KgF}}{\text{m}^3}$$

$$(p + \gamma h)_2 = 1,5 \times 10^4 + 917,2 \frac{\text{KgF}}{\text{m}^3} \cdot 3\text{m} = 17,750 \frac{\text{KgF}}{\text{m}^2}$$

$$(p + \gamma h)_1 = 1,10^4 \frac{\text{KgF}}{\text{m}^2} = 10000 \frac{\text{KgF}}{\text{m}^2}$$

Con los datos anteriores

$$\frac{\Delta(p + \gamma h)}{\Delta l} = \frac{d(p + \gamma h)}{dl} = \frac{10000 - 17750}{3\sqrt{2}} = -1825$$

$$21825 \frac{\text{KgF}}{\text{m}^3} \text{ también como datos tenemos:}$$

$$a = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$V = -1 \frac{\text{m}}{\text{seg}}$$

Los cuales reemplazados en la ecuación (5.2.2) queda:

$$u = -\frac{y}{5 \cdot 10^{-3}} + \frac{1825}{(2,08/98)}(0,005y - y^2)$$

En la cual se hizo la conversión de poise a  $(\frac{\text{KgF} \cdot \text{seg}}{\text{m}^2})$ : como poise es la unidad “cgs” de viscosidad:

$$1 \text{ poise} = 1 \frac{\text{dyn} \cdot \text{seg}}{\text{cm}^2} \cdot \frac{1}{980000} \left( \frac{\text{KgF}}{\text{dyn}} \right) \cdot 10000 \left( \frac{\text{cm}^2}{\text{m}^2} \right) = \frac{0,8}{98} \left( \frac{\text{KgF} \cdot \text{seg}}{\text{m}^2} \right)$$

Operando sobre el resultado final de “u” queda para la ecuación de distribución de velocidades:

$$u = 359y - 111800y^2$$

La velocidad máxima se presenta donde se obtienen los máximos y mínimos de la función u (y), o sea para

$$\frac{du}{dy} = 0$$

$$259 - 2 \cdot 111800y = 0 \rightarrow y = 359 / (2 \cdot 111800) = 1,60 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 1,6 \text{ mm}$$

Las velocidades mínimas, es decir donde el líquido se estagniza las obtenemos para:

$$y=0 \rightarrow u=0$$

$$y=5 \text{ mm} \rightarrow u = 359 \cdot 0,005 - 111800 \cdot (0,005)^2 = 1,795 - 2,795 = -1 \frac{\text{m}}{\text{seg}}$$

y la velocidad máxima:

$$y=5\text{mm} \rightarrow u = 359 \cdot 0,0016 - 111800 \cdot (0,0016)^2 = 0,29 \frac{m}{seg}$$

Y el perfil de velocidades sería:

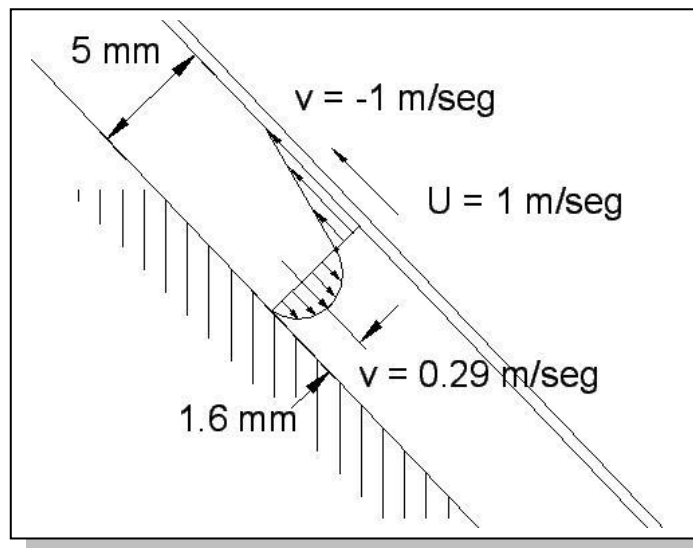


Fig.5.2.4

b.-Cálculo del caudal:

Como el diferencial de área es  $dA = dy \cdot 1$

$$Q = \int_0^a u dy = \frac{Va}{2} - \frac{1}{12\mu} \frac{d}{dl} (p + \gamma h) a^3 \quad \left[ \frac{m^2}{seg} \right]$$

Pero la unidad  $\left[ \frac{m^2}{seg} \right] = \frac{m^2 \cdot m}{seg \cdot m} = \left[ \frac{m^3}{seg} \right] \frac{1}{m}$  es decir caudal por unidad de dimensión en la profundidad de la placa.

Reemplazando valores  $Q = -0,17 \cdot 10^{-3} \left[ \frac{m^3}{seg} \right] \frac{1}{m}$  da en un sentido negativo, o sea hacia arriba, es decir que es mayor el flujo ascendente que el descendente.

c.- Cálculo de la tensión de corte:

Para calcular la tensión de corte que en definitiva nos permitiría calcular la fuerza necesaria para mover la placa corriente arriba, calculamos primero  $(du/dy)$  o sea el gradiente de velocidad para esa posición:

$$\left( \frac{du}{dy} \right) \Big|_{y=0,005} = \left( \frac{0,8}{98} \right) (-759) \frac{KgF \cdot seg}{m^2} \cdot \frac{1}{seg} = -6,19 \frac{KgF}{m^2}$$

Como da negativo la tensión para mover la placa debe ser en sentido negativo o sea oponiendo al movimiento de la placa. Observe que para calcular la fuerza total deberíamos multiplicar esta tensión de corte por el área de la placa y agregar la componente de peso de la placa según la dirección del movimiento.

### 5.3 Casos particulares del flujo unidimensional:

El alumno debería ahora estar en condiciones de responder a las siguientes preguntas:

5.3.1 ¿Qué pasa si  $V=0$ , o sea si tenemos dos superficies fijas? ¿Cómo es el patrón de velocidades en este caso?

5.3.2 ¿Qué pasa si  $V \neq 0$  pero el ángulo entre las placas es  $= 0$ , es decir, en desarrollo horizontal?

Ayuda: Observe que en este caso  $d h=0 \rightarrow h=0$

### 5.4 Análisis de Flujo Laminar Bidimensional:

Consideremos la condición de flujo incompresible, permanente y viscoso (que produce la condición de flujo laminar) desplazándose por un tubo de sección circular inclinado, de radio interior  $r = a$ , como se muestra en la figura 5.4.1 siguiente, que es la condición más general posible.

Sobre el elemento másico de fluido de forma anular, concéntrico con el tubo, tomamos todas las fuerzas de campo y superficiales que nos aparecen.

Aplicando la ecuación de movimiento en la dirección longitudinal  $l$  con aceleración nula tenemos  $\rightarrow \sum F_i = 0$  (Movimiento Uniforme)  $\rightarrow$

$$2\pi r \delta r p - (2\pi r \delta r p + 2\pi r \delta r \left(\frac{dp}{dl}\right) \delta l) + 2\pi r \delta l \tau - [2\pi r \delta l \tau + \frac{d}{dr}(2\pi r \delta l \tau) \delta r] + \gamma 2\pi r \delta r \delta l \sin \theta = 0$$

Como  $-\frac{dh}{dl} = \sin \theta$ ; sustituyendo y dividiendo por el volumen del cuerpo libre  $(2\pi r \delta r \delta l)$ , queda:

$$-(2\pi r \delta r \delta l) \frac{dp}{dl} - \frac{d}{dr}(2\pi r \delta l \delta r) \tau - \gamma \frac{d}{dl}(2\pi r \delta r \delta l) = 0 \rightarrow$$

$$\frac{d}{dl}(p + \gamma h) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(\tau \cdot r) = 0 \tag{5.4.1}$$

Multiplicando ambos miembros por  $(r \cdot dr)$  queda:

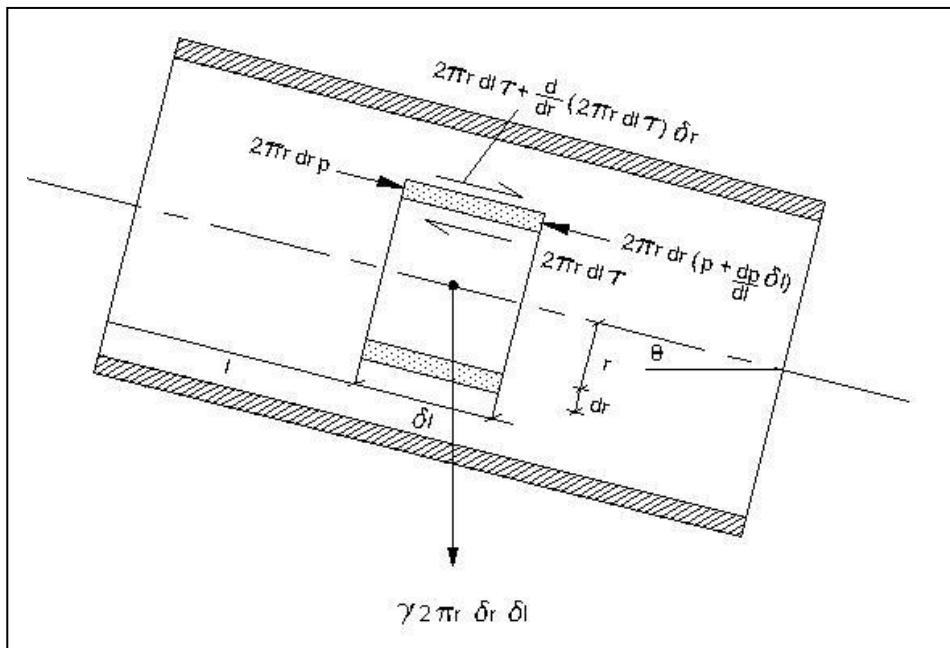


Fig.5.4.1

$$\left\{ \frac{d}{dl}(p + \gamma h) \right\} r \cdot dr + d(\tau r) = 0$$

Como la llave no es una función de  $r$ , y  $\tau$  es constante para el tubo de corriente  $r$ , entonces integrando queda:

$$\frac{d}{dl}(p + \gamma h) \int r \cdot dr + \tau \int dr = 0 \rightarrow \frac{r^2}{2} \frac{d}{dl}(p + \gamma h) + \tau r + C_1 = 0$$

Como esta ecuación debe ser válida para todo el campo del flujo, aún cuando  $r = 0 \rightarrow C_1 = 0 \rightarrow$

$$\frac{r}{2} \frac{d}{dl}(p + \gamma h) + \tau = 0 \text{ (simplifico una } r)$$

Sustituyendo ahora  $\tau$  por su valor para flujo viscoso  $\tau = \mu \left( \frac{du}{dr} \right)$

$$\frac{r}{2} \frac{d}{dl}(p + \gamma h) + \mu \left( \frac{du}{dr} \right) = -\frac{1}{2\mu} r \frac{d}{dl}(p + \gamma h) \rightarrow du = -\frac{1}{2\mu} \left\{ \frac{d}{dl}(p + \gamma h) \right\} r dr \rightarrow u = -\frac{1}{2\mu} \left\{ \frac{d}{dl}(p + \gamma h) \right\} \int r dr \quad (5.4.2)$$

$$u = -\frac{r^2}{4\mu} \frac{d}{dl}(p + \gamma h) + C_2$$

Aplicamos otra condición de borde para calcular la constante  $C_2$ .

Cuando  $r = a \rightarrow u = 0 \rightarrow C_2 = \frac{a^2}{4\mu} \frac{d}{dl}(p + \gamma h)$  que reemplazando en (7.2) queda la expresión general de la velocidad del campo fluido:

$$u = \left( \frac{a^2 - r^2}{4\mu} \right) \frac{d}{dl}(p + \gamma h) \quad (5.4.3)$$

y para la velocidad máxima en  $r = 0$ :

$$u_{mx} = \frac{a^2}{4\mu} \frac{d}{dl}(p + \gamma h)$$

y para tubo horizontal:

$$dh = 0 \rightarrow h = 0 \rightarrow$$

$$u = \left( \frac{a^2 - r^2}{4\mu} \right) \left( \frac{\Delta p}{\Delta l} \right)$$

siendo el valor de la velocidad máxima:

$$U_{mx} = \frac{a^2}{4\mu} \left( \frac{\Delta p}{\Delta l} \right)$$

$\Delta p / \Delta l$  es la razón de la presión entre 2 puntos del tubo entre los cuales calculamos la velocidad, o mejor el perfil de velocidades. La representación de la velocidad “ $u$ ” en función del radio “ $r$ ” como se ve en la ecuación es claramente una parábola para cada sección longitudinal y un “paraboloide de revolución” para la distribución bidimensional de velocidades en el tubo.

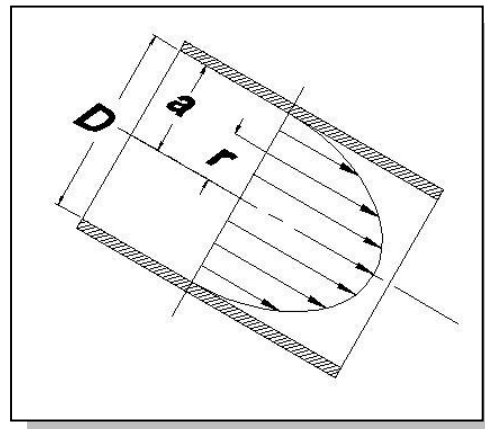


Fig. 5.4.2

Como la distribución de velocidades es un paraboloide, es fácil demostrar que la velocidad media es exactamente la mitad de la velocidad máxima o sea:

$$\bar{V} = \frac{a^2}{8\mu} \frac{d}{dl} (p + \gamma h)$$

y, por lo tanto, el caudal es:  $\bar{V} \cdot \pi a^2 = Q$

O sea:

$$Q = \frac{\pi a^4}{8\mu} \frac{d}{dl} (p + \gamma h), \text{ Como } a = \frac{D}{2} \rightarrow Q = \frac{\pi D^4}{128\mu} \frac{d}{dl} (p + \gamma h)$$

### 5.5 Caída de presión para flujo laminar en tubos, fórmula de Hagen-Poiseuille:

A partir de la fórmula de caudal para tubo horizontal:

$$Q = \frac{\pi D^4}{128\mu} \left( \frac{\Delta p}{\Delta l} \right)$$

y como en este caso:

$$\left( \frac{\Delta p}{\Delta l} \right) = \frac{\Delta P}{L}$$

Siendo  $L$  la distancia entre la ubicación de manómetros, queda:

$$Q = \frac{\pi D^4}{128\mu} \frac{\Delta P}{L} \rightarrow \Delta P = \frac{128\mu L Q}{\pi D^4}$$

Siendo:

$$Q = \frac{\pi D^2}{4} \cdot \bar{V}$$

Por lo tanto, vemos que la pérdida de presión (energía potencial) es directamente proporcional a la viscosidad, a la longitud y al caudal, e inversamente proporcional a la cuarta potencia del diámetro.

Observe que la rugosidad del tubo no interviene en la ecuación, simplemente porque la velocidad es cero en los bordes.

Esta ecuación es conocida como ecuación Hagen Poiseuille, y fueron obtenidas entre 1839 y 1840. Las ecuaciones son válidas para flujo ya establecido en cañería.

Para el tramo inicial de la cañería, si proviene de un depósito con una entrada abocinada, la velocidad es casi uniforme al valor de la velocidad media. Después, debido a la ecuación de continuidad, la velocidad aumenta sobre la línea central y disminuye hacia los bordes. Cuando estudiemos las propiedades de la capa límite, veremos que dentro del tubo el espesor de la misma va aumentando desde la entrada desde el depósito para cada sección longitudinal y en poco trecho la capa invade todo el volumen del tubo desde la periferia interior de velocidad cero hasta la línea central de velocidad máxima.

Se puede establecer analíticamente que la longitud de transición  $L = 0,058 Re \cdot D$  y está de acuerdo a las observaciones experimentales.

Podremos estar seguros del establecimiento de este patrón de flujo laminar como ya dijimos, si el número de Reynolds  $Re$  es inferior a 2.300, es decir, si se cumple:

$$Re = \frac{\rho \bar{V} D}{\mu} < 2.300$$

lo que indica flujo laminar desarrollado.

### 5.6 - Otra expresión de la fórmula de Hagen-Poiseville:

$$\text{Como } \left(\frac{\Delta P}{\Delta l}\right) = \frac{d}{dl}(p + \gamma h) \rightarrow \left(\frac{\Delta P}{\Delta l}\right) = \gamma \frac{d}{dl}\left(\frac{p}{\gamma} + h\right)$$

Al valor  $\frac{d}{dl}\left(\frac{p}{\gamma} + h\right)$  se lo llama “caída de presión por unidad de longitud”, y se lo indica con la letra “j”.

$$\text{Entonces: } \left(\frac{\Delta P}{\Delta L}\right) = \gamma \cdot j$$

De lo cual también se pueden escribir las ecuaciones anteriores como:

$$Q = \frac{\pi D^4}{128\mu}(\gamma j); \bar{V} = \frac{D^2}{32\mu}(\gamma j) \rightarrow j = \frac{32\mu}{\gamma D^2}\bar{V}$$

$$\text{Asimismo a partir de la expresión: } \left(\frac{\Delta P}{\Delta L}\right) = \gamma j \rightarrow \Delta P = \gamma j \Delta L$$

Y el valor de la fuerza resistente en la sección será:

$$W = \frac{\pi D^2}{4}(\Delta P) = \frac{\pi D^2}{4}\gamma j \Delta L$$

Y la resistencia en el contorno de la tubería será:

$$\tau_c = \frac{\frac{\pi D^2}{4}\gamma j \Delta L}{\pi D \Delta L} = \frac{\gamma D j}{4}$$

Tensión tangencial superficial en el contorno interior.

#### Ejemplo 5.6.1:

Determinar las características del flujo en el tubo representado en la figura 8.1 siguiente, siendo:

$$\gamma = 800 \text{ KgF} / \text{m}^3$$

$$\mu = 0,40 \text{ poises}$$

Calcular el caudal en el [litros / min.]  
y el n° *Re* del flujo.

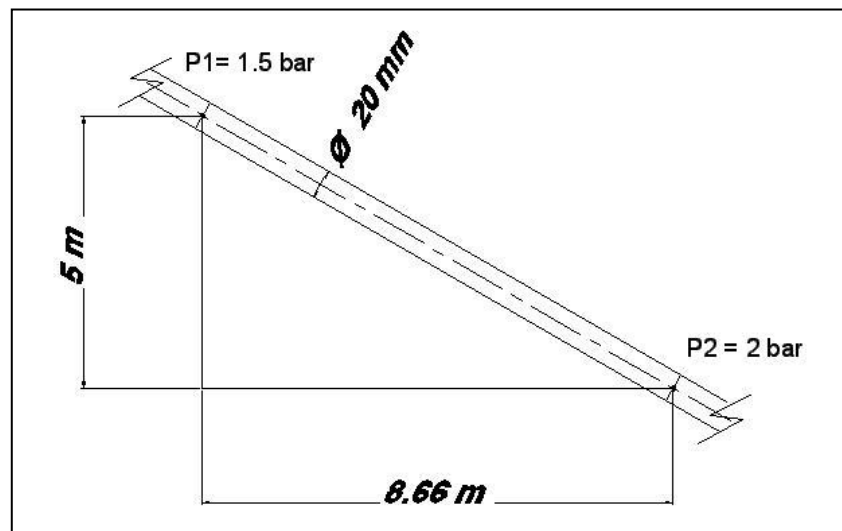


Fig.5.6.1

En la posición 1:

$$p_1 + \gamma h_1 = 1,5 \cdot 10^4 \frac{\text{KgF}}{\text{m}^2} + 800 \frac{\text{KgF}}{\text{m}^3} \cdot 5\text{m} = 19.000 \frac{\text{KgF}}{\text{m}^2}$$

En la posición 2:

$$p_2 + \gamma h_2 = 2 \cdot 10^4 \frac{\text{KgF}}{\text{m}^2} = 20.000 \frac{\text{KgF}}{\text{m}^2}$$

Como  $p_2 > p_1$  suponemos en principio que el flujo se mueve de 2 a 1.  
La expresión:

$$\frac{\Delta}{\Delta L} (p + \gamma h) = \frac{19.000 - 20.000}{\sqrt{5^2 + 8.66^2}} = \frac{-1.000}{10} = -100 \frac{\text{KgF}}{\text{m}^3}$$

que reemplazada en la expresión del caudal:

$$Q = \frac{\pi a^4}{8\mu} \frac{\Delta}{\Delta L} (p + \gamma h) = \frac{\pi D^4}{128\mu} \frac{\Delta}{\Delta L} (p + \gamma h) = \frac{3,14 \cdot 0,02^4}{128 \cdot 10,40/98} \cdot (-100) = -9,6 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^3}{\text{seg}}$$

En litros por minuto, el caudal será:

$$Q = 9,6 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^3}{\text{seg}} \cdot 10^3 \frac{\text{lit}}{\text{m}^3} \cdot 60 \frac{\text{seg}}{\text{min}} = -5,77 \frac{\text{l}}{\text{min}}$$

Como el caudal tiene signo negativo será hacia arriba.  
El n°  $Re$  será:

$$R = \frac{\bar{V} D \rho}{\mu} = \frac{0,306 \cdot 0,02 \cdot 800 \cdot 98}{9,81 \cdot 0,40} = 122,4 \ll 2.300$$

Este valor obtenido, significa que el régimen es laminar y las fórmulas están bien aplicadas, ahora, en la expresión anterior tomamos:

$$\bar{V} = Q / \frac{\pi D^2}{4} \quad \text{y} \quad \rho = \frac{\gamma}{g}$$

y el valor superficial de la tensión:

$$\tau = \frac{\gamma D j}{4} = \frac{\gamma D}{4} \frac{32\mu \bar{V}}{\gamma D^2} = \frac{8\mu \bar{V}}{D} = \frac{8 \cdot (0,40/98) \cdot 0,306}{0,02} \cong 0,5 \frac{\text{KgF}}{\text{m}^2}$$

Este es el valor de la tensión sobre la sección perimetral del tubo, es decir, si  $e$  es el espesor del tubo.

$$\tau = \frac{F}{2\pi a \cdot e}$$

### RESUMEN DE FÓRMULAS PARA FLUJO LAMINAR

#### **A.- Unidimensional:**

A1.- Placa oblicua a velocidad U, flujo en movimiento por gravedad:

$$u = \frac{U y}{a} - \frac{1}{2\mu} \left\{ \frac{\Delta}{\Delta l} (p + \gamma h) \right\} (ay - y^2)$$

$$\tau = \mu \left( \frac{du}{dy} \right) \Big|_{y=a}$$

A2.- Horizontal con gradiente presión según la longitud:

$$u = \frac{U y}{a} - \frac{1}{2\mu} \left( \frac{\Delta}{\Delta l} p \right) (ay - y^2)$$

A3.- Horizontal sin gradiente de presión:

$$u = \frac{U y}{a}$$

## B.-Flujo Bidimensional

B1.- Tubo inclinado y gradiente de presión:

Velocidad genérica:

$$u = \left( \frac{a^2 - r^2}{4\mu} \right) \frac{\Delta}{\Delta l} (p + \gamma h)$$

$$u_{mx} = \frac{a^2}{4\mu} \frac{\Delta}{\Delta l} (p + \gamma h)$$

Velocidad media:

$$\bar{V} = \frac{a^2}{8\mu} \frac{\Delta}{\Delta l} (p + \gamma h)$$

Caudal:

$$Q = \frac{\pi a^4}{8\mu} \frac{\Delta}{\Delta p} (p + \gamma h) = \frac{\pi D^4}{128\mu} \frac{\Delta}{\Delta l} (p + \gamma h)$$

b. Tubo horizontal:

$$\frac{dh}{dl} = 0 \rightarrow h = 0$$

velocidad genérica

$$u = \frac{a^2 - r^2}{4\mu} \left( \frac{\Delta p}{\Delta l} \right)$$

velocidad media

$$\bar{V} = \frac{a^2}{8\mu} \left( \frac{\Delta p}{\Delta l} \right) \bar{V} = \frac{a^2}{8\mu} \left( \frac{\Delta p}{\Delta l} \right)$$

caudal

$$Q = \frac{\pi a^4}{8\mu} \left( \frac{\Delta p}{\Delta l} \right) = \frac{\pi D^4}{128\mu} \left( \frac{\Delta p}{\Delta l} \right)$$

tensión superficial

$$\tau = \frac{\pi D^2}{4} \frac{\Delta p}{\pi D} = \frac{D \Delta p}{4}$$

**Bibliografía complementaria para consulta:**

FRANK M. WHITE, Mecánica de Fluidos, Ed. Mc Graw Hill

WILLIAM F. HUGES, Dinámica de los fluidos, Ed Mc Graw Hill

ROBERT FOX – ALAN MAC DONALD, Introducción a la Mecánica de Fluidos, 4ta Edición, Mc Graw Hill

IRWIN SHAMES, Mecánica de Fluidos, 6ta Ed. Editorial Mc Graw Hill

RONALD GILES, Mecánica de los fluidos e Hidráulica, Ed. Mc Graw Hill

STREETER Y WEELER, Mecánica de los fluidos, Ed. Mc Graw Hill