

6 CONDUCCIÓN DE FLUJO TURBULENTO EN TUBERÍAS

6.1 Análisis de flujo turbulento:

Ya vimos que a partir de la “ecuación general de la energía” ordenada convenientemente para flujo compresible, nos daba:

$$W_{eje} = \left(\frac{p_a - p_i}{\rho} \right) + \left(\frac{V_2^2 - V_1^2}{2} \right) + g(z_2 - z_1) + (e_{i2} - e_{i1} - q) \quad 6.1.1$$

donde W_{eje} y q eran las cantidades de trabajo y calor respectivamente, intercambiadas por unidad de masa, o sea: $W_{eje} = dW_{eje}/dm$ y $q = dQ/dm$.

Si consideramos solamente el flujo en tubería horizontal de diámetro constante, sin extracción de trabajo, la expresión anterior se reduce a:

$$\left(\frac{p_1 - p_2}{\rho} \right) = \frac{\Delta p}{\rho} = (e_{i2} - e_{i1} - q) = h_L \quad 6.1.2$$

la cantidad h_L es denominada pérdida de carga, y a veces puede expresarse en función de una altura piezométrica indicada en metros como $g \cdot h_f = h_L \rightarrow h_f = h_L/g$.

Es evidente que el resultado de la ecuación (6.1.2) para tubería horizontal debe ser válido tanto para flujos laminares $Re < 2.300$, como para flujos definidamente turbulentos $Re > 4.000$.

Por otra parte sabemos que el flujo turbulento en cañería depende de los siguientes parámetros:

- a- Diámetro de la tubería “ D ”
- b- Longitud de la tubería entre las mediciones de presión “ L ”
- c- Coeficiente de viscosidad “ μ ”
- d- Velocidad media del flujo en la sección recta “ $\bar{V} = Q/A$ ”
- e- Densidad “ ρ ”
- f- Rugosidad media de la tubería “ e ” (es la altura media de las crestas o los valles respecto del diámetro tomado como línea central).

Es decir que los cambios de presión a lo largo de una tubería con flujo turbulento va a depender de ellos en la forma funcional siguiente:

$$p = p(D, L, \mu, \bar{V}, \rho, e)$$

Si aplicamos a esta relación funcional los resultados del teorema π de Buckingham, vemos que $n = 7$ y $r = 3$, o sea: $n - r = 4$; y habrá por tanto cuatro grupos adimensionales vinculados. Haciendo el trabajo de encontrarlos, veríamos que éstas relaciones son en función del número de Euler:

$$(E_U = \frac{F}{\rho V^2 D^2} = \frac{\Delta P}{\rho V^2})$$

$$\frac{\Delta P}{\rho V^2} = g \left(\frac{\rho \bar{V} D}{\mu}; \frac{L}{D}; \frac{e}{D} \right)$$

$$\text{O bien: } E_U = g \left(Re; \frac{L}{D}; \frac{e}{D} \right)$$

Como es lógico que Δp sea directamente proporcional a la longitud de la tubería, e inversamente proporcional a su diámetro; el grupo (L/D) puede formar parte de una constante de proporcionalidad, y salir fuera de la función, o sea:

$$\frac{\Delta p}{\rho V^2} = \frac{L}{D} h\left(\frac{\rho \bar{V} D}{\mu}; \frac{e}{D}\right)$$

Porque la única relación funcional es de proporcionalidad. Expresión que también podemos escribir en función de una nueva relación funcional k de la siguiente manera:

$$h_L = \frac{\Delta p}{\rho} = \frac{1}{2} \bar{V}^2 \frac{L}{D} k\left(\frac{\rho \bar{V} D}{\mu}; \frac{e}{D}\right) \quad 6.1.3$$

En la práctica, a esta función desconocida $k(\text{Re}; \frac{e}{D})$ se la llama “coeficiente de fricción”, y se la representa con la letra “ f ”, con lo cual podemos escribir finalmente:

$$h_L = \frac{1}{2} \bar{V}^2 \frac{L}{D} f \quad 6.1.4$$

Para flujo laminar, habíamos obtenido como expresión de caudal para tubería cilíndrica:

$$Q = \frac{\pi D^4}{128 \mu} \frac{\Delta P}{L}$$

por tanto, despejando Δp :

$$\Delta p = \frac{128 \mu L Q}{\pi D^4} \quad \rightarrow \quad \frac{\Delta p}{\rho} = \frac{128 \mu L Q}{\pi D^4 \rho}$$

igualando a la expresión general (6.1.4) quedaría:

$$h_L = \frac{\Delta p}{\rho} = \frac{128 \mu L Q}{\pi D^4 \rho} = \frac{1}{2} \bar{V}^2 \frac{L}{D} f \quad \text{y como } Q = \bar{V} \cdot \frac{\pi D^2}{4}$$

queda:

$$\frac{128 \mu L \bar{V} D^2 \pi}{4 \pi D^4 \rho} = \frac{\bar{V}^2 L f}{2 D} \quad \rightarrow \quad f = \frac{64}{\text{Re}} \quad 6.1.4 \text{ b}$$

O sea que para flujo laminar, podemos utilizar la expresión (6.1.4) con $f = 64/\text{Re}$, siendo el flujo laminar un caso particular de flujo general. Por otra parte, vemos que f solamente depende para flujo laminar de Re , y no de la rugosidad, como ya habíamos expresado.

Al coeficiente f se lo llama coeficiente o factor de fricción y también, coeficiente de resistencia de

Darey -Weisbach. La teoría indica que la expresión de f para flujo laminar, en función de Re tiene la forma de una hipérbola equilátera, ($y = k/x$) la cual resulta una “línea recta” sobre un papel logarítmico en el rango de $n^\circ \text{Re}$ laminares.

Para el resto del rango del $n^\circ \text{Re}$, y tomando como parámetros los índices de rugosidad “ e/D ”, se confeccionan las curvas “Nikuradse” en las que se grafica $n^\circ \text{Re}$ en abscisa; “ f ” o factor de fricción en ordenadas con “ e/D ” como parámetro de rugosidad, por ejemplo $e/D = 1/120$ significa que si el diámetro es 120 mm la variación media del radio de la tubería es 1 mm.

Las curvas Nikuradse se dan en la gráfica siguiente,

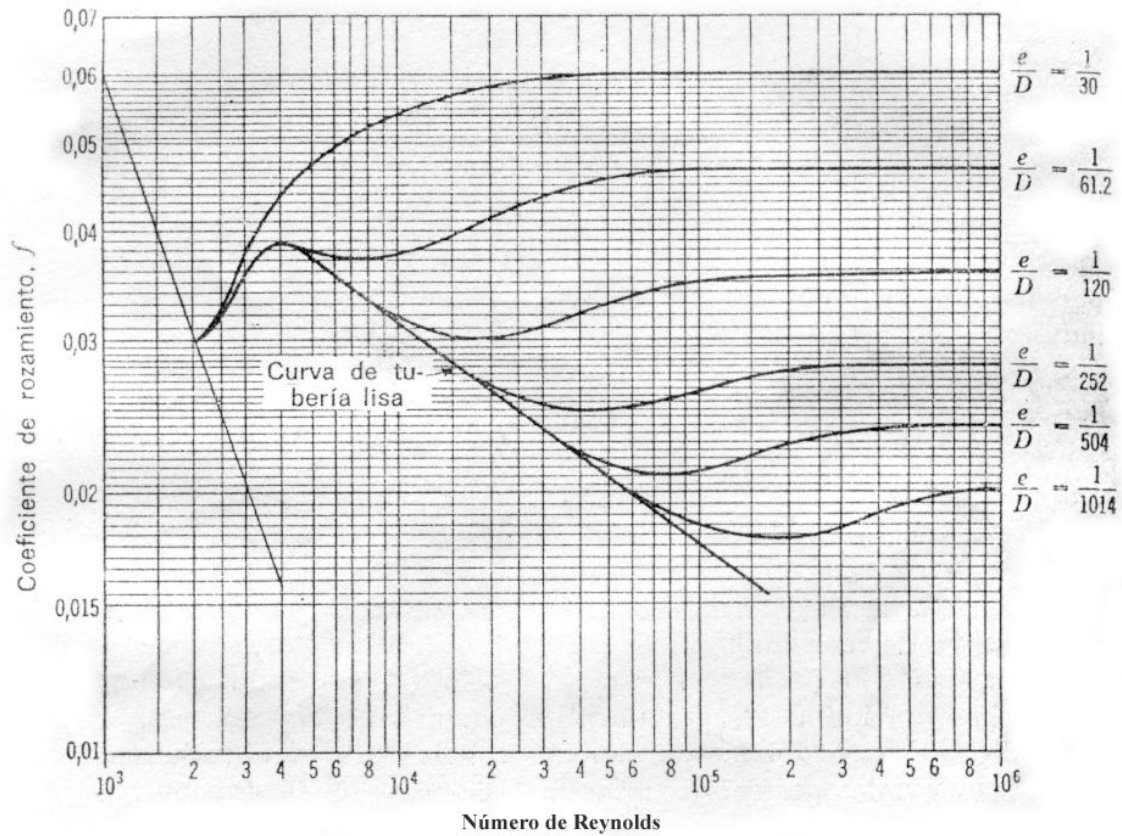


Fig.6.1.1

Se observará que para $Re > 2.300$ todas las curvas de rugosidad son asintóticas con la “curva de tubería lisa”, y cada curva se aparta para Re altos a valores asintóticos horizontales donde ya la fricción no aumenta más a pesar de incrementar Re , estas zonas rectas son zonas de diseño para tubería rugosa.

6.2. Distribución de velocidades y tensión de corte para flujo turbulento en tuberías:

Los estudios experimentales sobre distribución de velocidades en tubería cilíndrica han demostrado que el patrón de velocidades del perfil turbulento viene dado por la siguiente fórmula:

$$\frac{V}{V_{mx}} = \left(\frac{y}{D/2}\right)^{1/7} \tag{6.2.1}$$

El patrón es aproximadamente válido para Re comprendidas entre 4.000 y 3.240.000, y se mide desde la periferia interior de la tubería hacia el centro, como se indica en la figura siguiente:

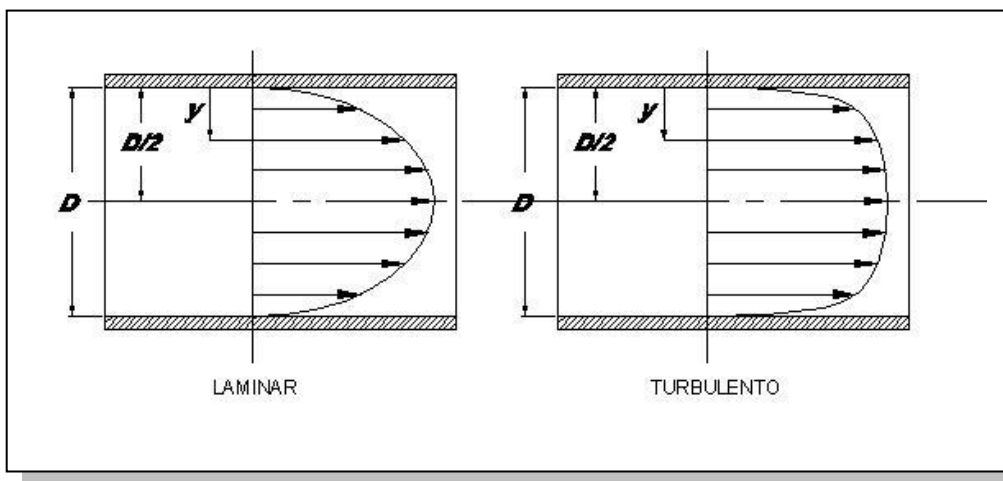


Fig.6.1.2

La distribución turbulenta es más pareja en la distribución de velocidades, disminuyendo el valor de la componente al aproximarnos a la periferia. Además deben tomarse en cuenta la discusión sobre promedios de velocidades en flujo turbulento permanente del párrafo 5.1.

Asimismo, para tuberías lisas con $n^\circ Re$ hasta 3.10^6 , ha de aplicarse la fórmula de Blassius para el cálculo de la tensión constante en la pared.

$$\tau_c = 0,0225\rho\bar{V}^2\left(\frac{\mathcal{G}}{R\bar{V}}\right)^{1/4} \quad 6.2.2$$

Siendo $\mathcal{G} = \mu/\rho$ la viscosidad cinemática, siendo R el radio interior de la tubería

Cabe destacar que la velocidad media \bar{V} se calcula por los métodos ya explicados, por ejemplo practicando un estrechamiento en la tubería a través de un tubo venturi, primero se calcula el caudal Q y luego la velocidad media con $\bar{V} = Q/A$; con la \bar{V} obtenida se calcula el $n^\circ Re$:

$$Re = \frac{\rho\bar{V}D}{\mu},$$

aquí la rayita sobre el símbolo de la velocidad, no indica un vector, sino un **valor medio**; luego, en la fórmula (6.2.1) si bien V y V_{mx} son desconocidas pero conociendo \bar{V} y a través de la función pueden determinarse V y V_{mx} ; luego con la fórmula (6.2.2) puede calcularse a partir de los datos la tensión de corte τ_c .

Conociendo el material o la rugosidad relativa (e/D) puede obtenerse de los diagramas el valor f , y con éste, calcular el valor:

$$h_L = \left(\frac{\Delta p}{\rho}\right) = \frac{1}{2}\bar{V}^2\left(\frac{L}{D}\right)f \quad \text{expresado en: } \left(\frac{m^2}{seg^2}\right) \quad \text{o bien: } \left(\frac{N \cdot m}{kg}\right)$$

y la pérdida de energía mecánica o pérdida de altura piezométrica:

$$hf = \left(\frac{\Delta p}{\rho g}\right) = \left(\frac{\Delta p}{\gamma}\right) = \frac{1}{2g}\bar{V}^2\left(\frac{L}{D}\right)f \quad \text{expresado en } \frac{kgm}{kg} \quad \text{o en m.}$$

6.3. Diagrama de Moody:

Los diagramas de Nikuradse se han desarrollado para condiciones de rugosidad artificiales, en las que se pegaba arena de distintas granulometría a superficies interiores de tubos de vidrio, se presenta la cuestión de saber en qué grado se aproxima esto a las condiciones de las tuberías reales.

El prof. Moody ha efectuado un estudio extenso en tuberías comerciales para modificar el diagrama Nikuradse y aproximarlo más a las condiciones reales. Los diagramas Moody se dan por lo general separados en 2 gráficos, se dan al final de este módulo.

En el primero se obtiene la rugosidad relativa " e/D " entrando con el diámetro de la tubería (diámetro interior) hasta las rectas parametrizadas por tipo de material.

Con el dato obtenido de " e/D " se entra en el segundo diagrama, de las curvas de Moody modificadas, se entra ubicando el $n^\circ Re$ de operación en abscisas hasta la curva correspondiente parametrizada de rugosidad " e/D "

hallada antes y, finalmente, se saca el valor del factor de fricción f de la tubería, con el cual se calcula el valor de la pérdida de carga.

4. Pérdidas menores en accesorios:

En el desarrollo de tuberías pueden aparecer accesorios tales como empalmes, codos, válvulas, curvas, etc. Esto obliga a tomar en cuenta las pérdidas en éstos artefactos. Estas pérdidas se calculan a través de resultados experimentales y se obtiene en tablas para el tipo de accesorios definidos por el valor “ k ”, llamado “pérdida menor de accesorio”. El resultado es de la forma:

$$h_L = k \frac{\bar{V}^2}{2} \quad \text{o bien:}$$

$$hf = k \frac{\bar{V}^2}{2g}$$

No se hace diferencia entre flujo laminar o turbulento, y la velocidad \bar{V} se establece como la velocidad media aguas arriba o aguas abajo del accesorio.

6.5. Pérdida por ensanchamiento brusco de tubería:

Un ensanchamiento brusco se indica en la figura siguiente, el flujo se estagniza en la zona sombreada, dando lugar a pérdidas por formación de remolinos en la misma:

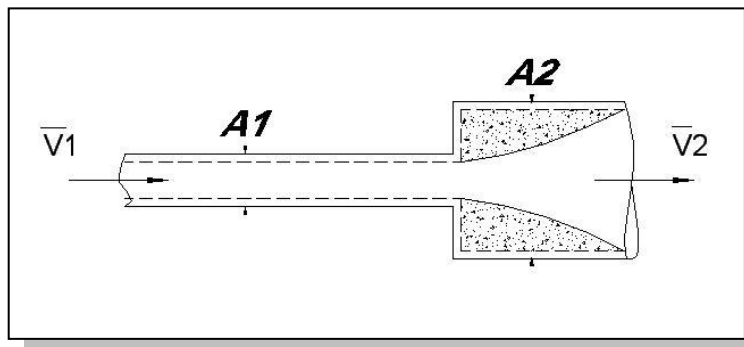


Fig.6.5.1

Puede demostrarse analíticamente que la pérdida por el ensanchamiento viene dado por:

$$h_L = \frac{\bar{V}_2^2}{2} \left(1 - \frac{A_2}{A_1}\right)^2 \quad \text{o bien:}$$

$$hf = \frac{\bar{V}_2^2}{2g} \left(1 - \frac{A_2}{A_1}\right)^2$$

6.6. Pautas para la resolución de problemas con tuberías:

Para la resolución de problemas donde se pide la obtención general de pérdida en tuberías y accesorios, debemos tomar en cuenta nuevamente la ecuación general de Bernuolli, que incluye pérdidas de energía:

$$-W_{je} = \left(\frac{p_2 - p_1}{\rho}\right) + \left(\frac{V_2^2 - V_1^2}{2}\right) + g(z_2 - z_1) + (\rho_{i2} - \rho_{i1} - q) \quad 6.6.1$$

O bien:

$$-W_{eje} = \left(\frac{p_2 - p_1}{\rho} \right) + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) + h_L \quad 6.6.1b$$

La unidad de h_L es $\frac{m^2}{seg^2} = \frac{m^2}{seg^2} \frac{kg}{kg} = \left(\frac{N \cdot m}{kg} \right)$ o sea es una pérdida específica de energía. Si en la expresión (6.6.1b) dividimos m.a.m. por “g”, la aceleración de la gravedad, nos queda:

$$-\frac{W_{eje}}{g} = \left(\frac{p_2 - p_1}{\gamma} \right) + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} + (z_2 - z_1) + h_f$$

donde h_f es la altura de pérdida piezométrica $h_f = \frac{h_1}{g}$ y se expresa en $\left(\frac{m^2}{seg^2} \cdot \frac{seg^2}{m} \right) = m$. La altura piezométrica permite trabajar como si el problema fuese de conducción de fluido ideal, pero considerando que en la tubería haya un desnivel adicional de h_f metros.

Problema Propuesto 1:

Determinar la pérdida de energía del flujo de 8.000 lit/min de un aceite de viscosidad cinemática $\mathcal{G} = 1 \cdot 10^{-5} m^2 / seg$ a través de una tubería de fundición de 300 m. de longitud y de diámetro int. $D=200mm$

a) Determinamos la velocidad media a partir del caudal dado .

$$Q = \bar{V} \cdot A \quad \rightarrow \quad \bar{V} = Q / A = \frac{8m^3}{min} \cdot \frac{1 min}{60seg} / \frac{\pi \phi^2}{4} =$$

$$\bar{V} = \frac{8}{60 \cdot \frac{3,14 \cdot 0,2^2}{4}} = 4,23 \frac{m}{seg}$$

b) Cálculo de n° Re:

$$Re = \frac{\rho \bar{V} D}{\mu} = \frac{\bar{V} D}{\mathcal{G}} = \frac{4,23 \cdot 0,2}{1 \cdot 10^{-5}} = 84.600$$

Del diagrama de Moody, entrando con $D = 20cm = 200mm$, hasta la recta del material de la tubería: “fundición”, sacamos para $e/D = 0,0013$.

Luego en la segunda gráfica de Moody, entrando con el valor de $Re=84.000$, interpolando con la curva $e/D=0,0013$, obtenemos $f = 0,024$.

c) Calculamos la pérdida de carga:

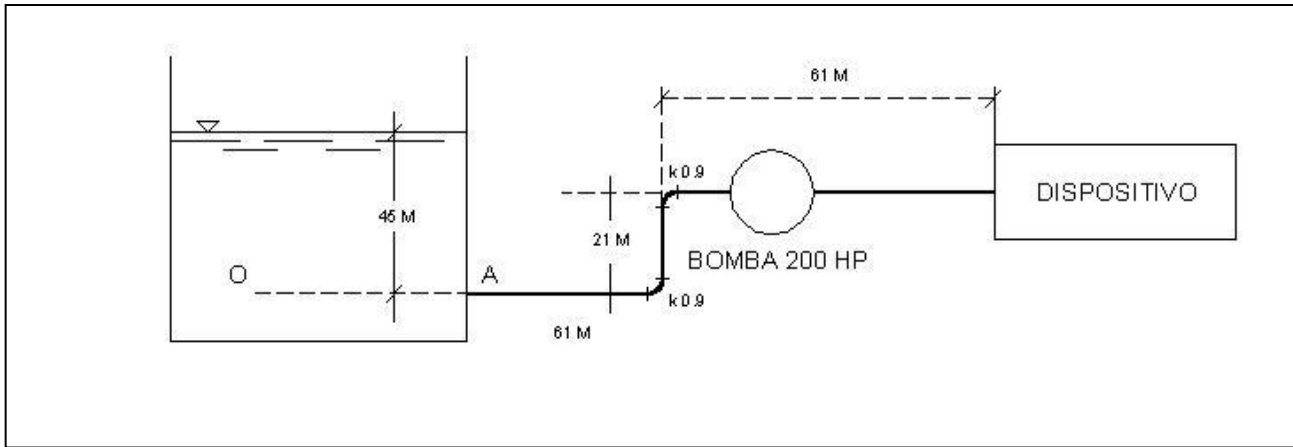
$$h_L = \frac{1}{2} \bar{V}^2 \left(\frac{L}{D} \right) f = \frac{4,23^2}{2} \cdot \frac{300}{0,2} \cdot 0,024 = 322 \frac{m^2}{seg^2} = 322 \frac{N \cdot m}{kg}$$

O bien la pérdida expresada en altura piezométrica:

$$h_f = \frac{h_1}{g} = \frac{322}{9,81} = 32,82 \frac{m^2}{seg^2} \cdot \frac{seg^2}{m} = 32,82m$$

Problema propuesto 2:

Se bombea agua desde un depósito a un dispositivo a través de un sistema de tuberías, como se indica en la figura siguiente, la bomba desarrolla 200 HP sobre el flujo. La tubería es de acero de 20.3 cm de diámetro interior, con 2 codos a 90°, de $k = 0,9$. La boca de entrada A abocinada tiene un coeficiente de pérdidas $k = 0,05$. ¿De qué presión se dispondrá a la entrada del dispositivo si se mantiene un flujo de 283 lit/seg?



Resolución:

Se elige como volumen de control uno que abarca toda la tubería interior y la bomba desde la entrada redondeada hasta el dispositivo.

a) Aplicamos la ecuación general de Bernuolli:

$$\frac{V_A^2}{2} + \frac{P_A}{\rho} + gz_A = \frac{V_B^2}{2} + \frac{P_B}{\rho} + gz_B + W_{je} + h_{l_r} + h_{l_A}$$

Siendo h_{l_r} la pérdida de carga en tubería, y h_{l_A} la pérdida de carga en accesorios.

Sobre la línea de corriente \overline{DA} podemos escribir la ecuación de Bernuolli para obtener la presión a la entrada P_A .

$$\frac{P_0}{\rho} + \frac{V_0^2}{2} + z_0 = \frac{P_A}{\rho} + \frac{V_A^2}{2} + z_A \quad \rightarrow \quad \frac{P_0}{\rho} = \left(\frac{P_{at}}{\rho} + g h_0 \right) = \frac{V_A^2}{2} + \frac{P_a}{\rho}$$

y la presión manométrica en A sería:

$$[p_0 = p_{at} + \rho gh]$$

$$\frac{P_{MoNA}}{\rho} = \left(\frac{P_a - p_{at}}{\rho} \right) = g h_0 - \frac{V_A^2}{2} = 9,81 \frac{m}{seg^2} \cdot 45,75m - \frac{V_A^2}{2} =$$

Para la estimación de la presión manométrica en A, o sea P_A , requerimos el valor de V_A . Éste lo podemos calcular conociendo el caudal:

$$Q = 283 \text{ lit / seg} = V_A^A \rightarrow V_A = Q / A$$

Operando queda:

$$V_A = \frac{283 \frac{dm^3}{seg} \cdot 10^{-3} \frac{m^3}{dm^3}}{\frac{\pi \cdot (0,203m)^2}{4} m^2} = 8,76 \frac{m}{seg}$$

Entonces, reemplazando:

$$\frac{(P_{MON})_A}{\rho} = 9,81 \cdot 45,75 - \frac{8,76}{2} = 410,4 \frac{m^2}{seg^2} = 410,4 \frac{N \cdot m}{kg} = 410,4 \frac{kgF \cdot m}{UTM}$$

b) Calculamos el n° Re:

$$\text{Para el agua } \vartheta = 0,0113 \cdot 10^{-4} \frac{m^2}{seg} :$$

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu} = \frac{V \cdot D}{\vartheta} = \frac{8,76 \cdot 0,203}{0,0113 \cdot 10^{-4}} = 1,57 \cdot 10^6$$

Este valor obtenido, nos indica que estamos en flujo turbulento

c) Pérdida de carga de tubería:

Como dato del problema sabemos que se trata de tubería lisa de acero, entonces:

$$h_{L_T} = \frac{1}{2} \bar{V}^2 \left(\frac{L}{D} f \right) \quad \text{con } f = 0,0147 \text{ extraído del diagrama de Moody, entonces:}$$

$$h_{L_T} = 0,0147 \cdot \frac{8,76^2}{2} \left(\frac{143}{0,203} \right) = 393,25 \frac{N \cdot m}{kg}$$

d) Pérdidas en accesorios:

$$h_{L_A} = \left(\sum k_A \right) \frac{V_A^2}{2} = (0,05 + 0,9 + 0,9) \frac{8,73^2}{2} = 70,49 \frac{N \cdot m}{kg}$$

e) Trabajo mecánico cedido por la bomba al fluido:

Podemos expresar el trabajo mecánico por unidad de masa en función de la potencia de la siguiente manera:

$$W_{ejes} = \frac{dW}{dm} = \frac{Pot}{\rho \cdot Q} = \frac{200HP \cdot 750(Watt / HP)}{10^3 \frac{kg}{m^3} \cdot 0,283 \frac{m^3}{seg}} = \frac{150.000 Joule}{10^3 \cdot 0,283 kg} \rightarrow W_{ejes} = 530 \frac{N \cdot m}{Kg}$$

f) Reemplazando valores en la ecuación del tópico a), despejamos P_B , la presión a la entrada del dispositivo.

$$-W_{eje} = \left(\frac{P_B - P_A}{C} \right) + g(Z_B - Z_A) + h_{L_T} + h_{L_A} \quad \text{tomando en cuenta que: } q = 0 \quad V_A = V_B$$

En nuestro caso, respecto a la fórmula general:

W_e es cedido al volumen de control y no extraído, por lo tanto, debe entrar con signo (-). Además, el balance de energías internas es:

$$(e_{i_B} - e_{i_A}) = h_{L_T} + h_{L_A},$$

entonces queda:

$$\frac{P_B}{\rho} = \frac{P_A}{\rho} - g(Z_B - Z_A) - h_{L_T} - h_{L_A} - (-W_e)$$

Reemplazando valores tenemos:

$$\frac{P_B}{\rho} = 410,4 - 9,81(21) - 70,49 - 393,25 + 530 = 270,5 \frac{N \cdot m}{kg}$$

$$P_B = 270 \cdot 5 \cdot \frac{N \cdot m}{kg} \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3} = 270 \cdot 500 \frac{N}{m^2}$$

$$P_B = 270 \cdot 500 \cdot \frac{N}{m^2} \cdot \frac{1}{9,81} \frac{kgF}{N} \cdot \frac{1}{10^4} \frac{m^2}{cm^2} = 2,75 \frac{kgF}{cm^2} = 2,75BAR$$

Nota:

Como las bombas se definen por su potencia nominal en (HP), y por su presión de salida y caudal entregado de acuerdo a:

$$P(HP) = \frac{\text{presión}(BAR) \cdot \text{caudal}(l.p.m)}{450}$$

en este caso sería:

$$P(HP) = \frac{2,75(BAR) \cdot (283 \frac{lit}{seg} \cdot 60 \frac{seg}{min})}{450} = 103HP$$

Esto significa que si fuera flujo ideal sin pérdidas, solamente serían necesaria *103HP* para lograr la presión y el caudal definidos por el problema. Como son necesarios 200 HP, hay $200 - 103 = 97HP$ perdidos en resistencia del fluido.

Diagramas de Moody.

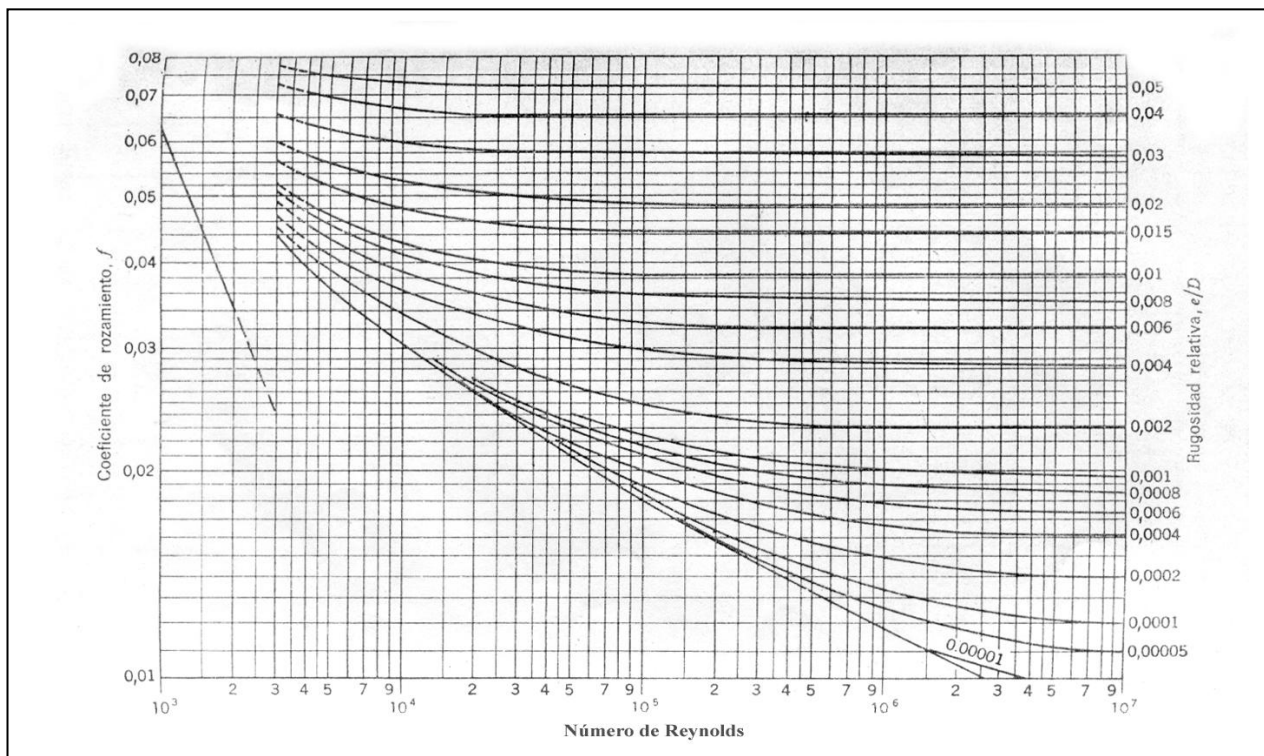


Diagrama 1.

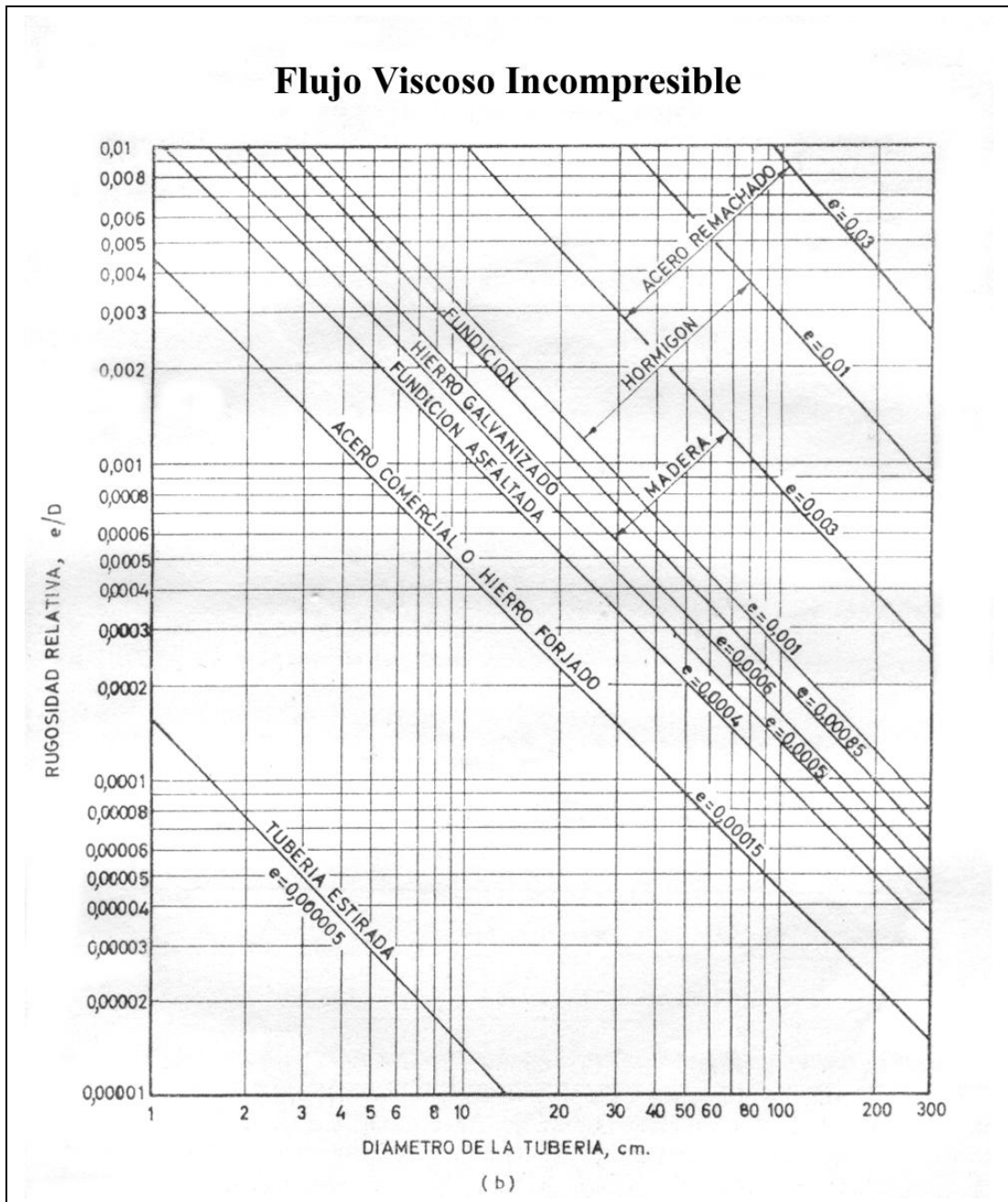


Diagrama 2.

Bibliografía complementaria para consulta:

FRANK M. WHITE, Mecánica de Fluidos, Ed. Mc Graw Hill

WILLIAM F. HUGES, Dinámica de los fluidos, Ed Mc Graw Hill

ROBERT FOX – ALAN MAC DONALD, Introducción a la Mecánica de Fluidos, 4ta Edición, Mc Graw Hill

IRWIN SHAMES, Mecánica de Fluidos, 6ta Ed. Editorial Mc Graw Hill

RONALD GILES, Mecánica de los fluidos e Hidráulica, Ed. Mc Graw Hill

STREETER Y WEELER, Mecánica de los fluidos, Ed. Mc Graw Hill