

## 7 CAPA LÍMITE.

### 7.1 Definición de la capa límite.

En 1904, el Dr. Ludwig Prandtl desarrolló y presentó poco después en las célebres conferencias de Gotingen el concepto de capa límite, el que permite la descripción de los flujos abiertos y cerrados, sobre objetos, como separados en dos zonas perfectamente diferenciadas, en una región próxima al objeto, e interior a la denominada capa límite, se produce un tipo de flujo dominado por la viscosidad, aún en los casos de fluidos de baja viscosidad como el aire, y otra zona exterior a ella con movimiento sin predominio de la viscosidad, con características próximas a un flujo ideal irrotacional o flujo potencial.

Para flujos con viscosidad pequeña, el efecto del rozamiento interno es apreciable sólo en una pequeña región próxima a los límites entre el fluido y el objeto, llamada “capa límite”. El comportamiento del fluido dentro de la capa límite se deduce para algunos casos simples, en forma exacta a partir de las ecuaciones generales de Navier Stokes y, fuera de ella, el flujo puede considerarse ideal. (estos desarrollos exactos dan lugar a las Soluciones de Blasius).

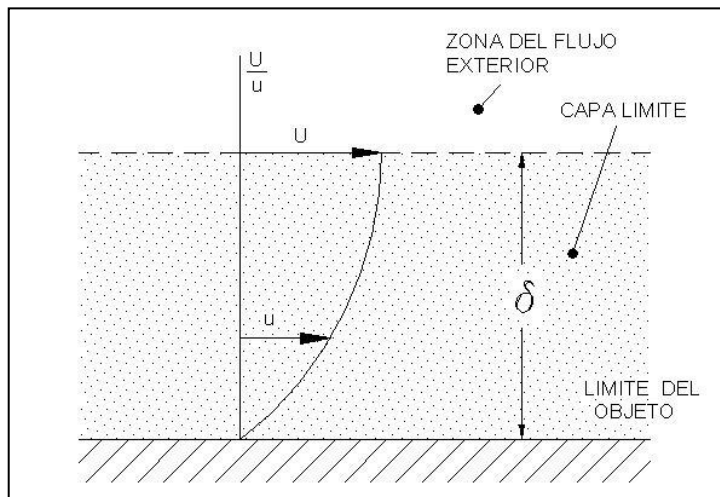
A través de la ecuación de cantidad de movimiento lineal, se puede encontrar valores aproximados de espesor de capa en función de la posición y la resistencia o arrastre producido debido a la presencia de la misma

### 7.2. Definición de espesor de la capa límite:

Desde el borde o límite de contacto de la pared del objeto hacia el exterior de un flujo desarrollado, hay una zona cuya velocidad está afectada por las tensiones de corte debidas a viscosidad, por la presencia de la pared, que hace que  $v = 0$ , sobre el contorno y, a partir de ahí, aparece un gradiente de velocidad que origina las tensiones de corte, de acuerdo a:

$$\tau = \mu \left( \frac{dV}{dy} \right) \quad 7.2.1$$

La zona afectada por las tensiones de corte se denomina “capa límite”. El perfil de velocidades típico de una capa límite viene dado de acuerdo a la figura siguiente:



Fi.7.2.1

En referencia a la figura:

$U$  = velocidad del flujo desarrollado

$u$  = velocidad en proximidad del objeto

$\delta$  = espesor de la capa límite

Por definición, el espesor  $\delta$  se define como espesor de la capa límite, donde  $\delta = \frac{U}{u} = 0,99$ , es decir, la posición  $\delta = 0,99$  determina aproximadamente dos zonas bien diferenciadas: la capa límite por debajo de la línea de puntos, y el flujo abierto o desarrollado por encima de la línea.

El flujo en la capa está también influenciado por el gradiente de presiones del flujo potencial ideal fuera de la capa, que aumenta la cantidad de movimiento si la velocidad aumenta y la presión disminuye corriente abajo, y recíprocamente, disminuye su cantidad de movimiento si la velocidad disminuye y la presión aumenta corriente abajo (gradiente de presiones adverso).

La curva de distribución de velocidad dada en la figura 7.2.1 es una aproximación teórica que hace concordar los resultados de los cálculos aproximadamente con los valores experimentales. De un punto a otro según  $x$  el espesor de la capa límite varía, pero la curva en los distintos puntos es de la misma familia (normalmente un polinomio cúbico) y responde a los mismos parámetros como veremos más adelante

En la figura siguiente se observa la variación de presión teórica para flujo ideal para una semi-esfera y la variación del gradiente de presión para flujo real.

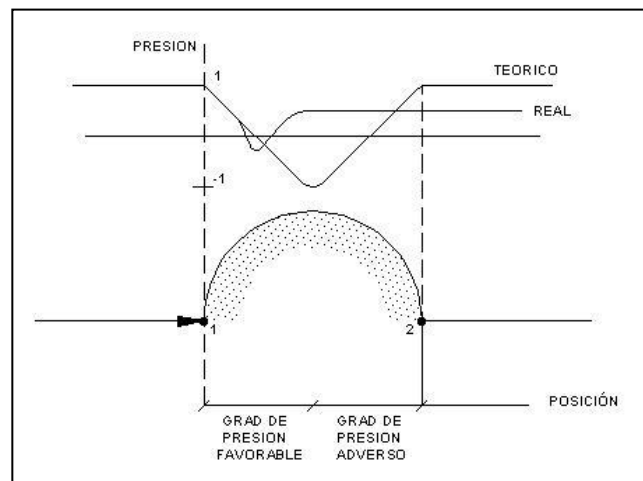


Fig.7.2.2

El flujo teórico y los valores de presión y velocidad de un flujo ideal sobre cuerpos como la esfera, se obtiene por las llamadas técnicas de cálculo de flujos axi-simétricos, aquí solamente damos el valor final de la función de presión adimensionalizada en función de la posición angular:

$$\frac{P - P_{at}}{\frac{1}{2} \mu U_o^2} = 1 - \frac{9}{4} \text{sen}^2 \theta \quad 7.2.2$$

es fácil ver que con  $\theta = 0^\circ$  y  $\theta = 180^\circ$  los valores adimensionalizados son 1, de donde, el valor de la presión en los puntos de estagnación es el valor conocido  $P = P_{atm} + \frac{1}{2} \rho U_o^2$ .

Si analizamos el valor de la fuerza neta horizontal o fuerza de arrastre que se produciría sobre la esfera embestida por un flujo ideal; como el diagrama de presiones teórico es simétrico en ambas caras, la resultante sería cero.

Este resultado se conoce como “paradoja de D’Alambert, es decir la esfera no presentaría ninguna resistencia al embate de un viento de velocidad  $U_o$ , por grande que este fuese, la explicación del arrastre que si aparece, se explica por la asimetría de la distribución de presiones real, en el cual el diagrama de presiones no se recupera totalmente como en el caso teórico, este fenómeno que describiremos más adelante se debe a la separación de la capa límite.

Si la superficie es plana, el fenómeno de desprendimiento no se produce, sin embargo, cuando la capa límite avanza a lo largo de la placa plana, la continua acción de las tensiones de corte tienden a frenar adicionales partículas del fluido hacia el exterior, lo que hace que el espesor de la misma aumente corriente abajo.

Para superficies planas y lisas, la capa límite comienza siendo laminar, o sea, las partículas se mueven en finas capas o láminas superpuestas; al aumentar el espesor se hace inestable y, finalmente, se transforma en turbulenta pero manteniendo una sub capa laminar.

Como la característica de todo flujo con gradiente de velocidad variable, es la rotacionalidad, aún dentro de la capa límite laminar puede suponerse que las partículas están rotando como bolitas una detrás de otra en fila india, pero manteniendo el movimiento en capas superpuestas, y el flujo bidimensional, después de la transición las partículas adoptan trazas independientes y variables pudiendo variar su posición en los tres ejes y aun retroceder formando rizos individuales o trayectorias aserradas diversas y entrecruzándose permanentemente unas con otras es decir en la transición y en la capa límite turbulenta el flujo ahora es 3D.

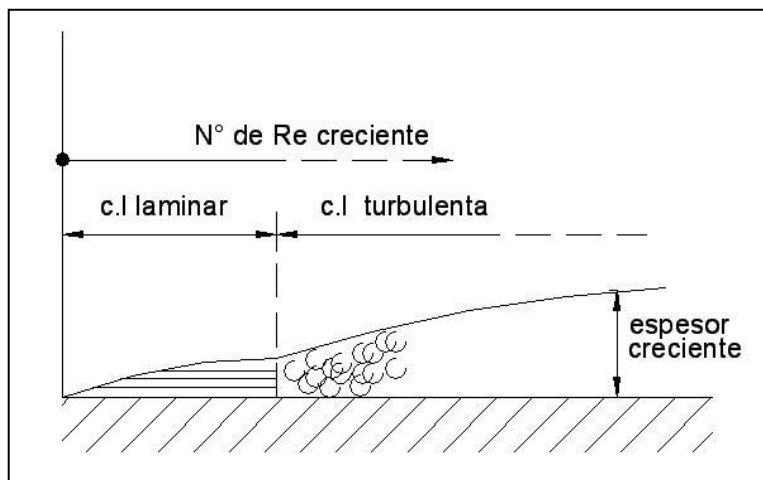


Fig.7.2.3

la transición no está dibujada en la figura de arriba, pero es una zona no muy larga, que tiende a fluctuar respecto de la vertical de transición en función de los fenómenos de transformación del patrón de flujo.

### 7.3- Aplicación de la teoría de cantidad de movimiento lineal a la capa límite:

La figura siguiente representa un volumen de control ABCD, tomado alrededor de una capa límite de placa plana que comprende el fluido por encima de la placa. La placa plana teórica tiene un borde afilado donde el flujo se estagna, y tiene extensión infinita en la dirección de  $x$  positivo.

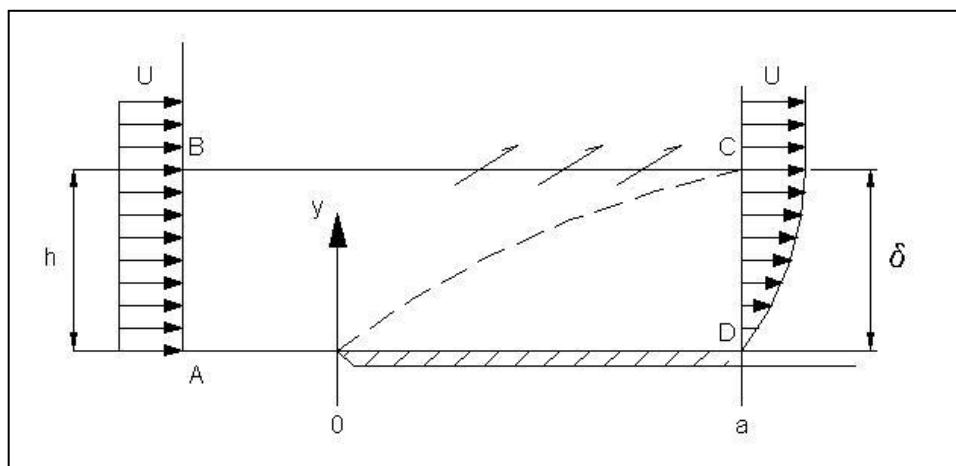


Fig.7.3.1

La placa se extiende desde 0 en la dirección  $x$  positiva, pero el volumen de control se toma de acuerdo a la figura desde una región de flujo libre hasta una posición genérica  $x = a$ .

En las figuras anteriores, los espesores de las capas límites dibujadas están muy agrandadas para fines didácticos, siendo los espesores reales de unas pocas décimas de milímetro.

Al aplicar la ecuación de cantidad de movimiento para movimiento permanente y despreciando las fuerzas másicas del volumen de control tendremos:

$$F_S = \int_{SC} \rho \vec{V} (\vec{V} \times d\vec{A}) \quad 7.3.1$$

La única fuerza que actúa sobre el fluido, es la debida a la resistencia o esfuerzo cortante de la placa ya que la presión es constante en toda la periferia del volumen de control.

La masa que atraviesa el segmento  $\overline{AB}$  por unidad de ancho de la placa es:

$$M_{AB} = \rho \int_0^h U dy$$

Análogamente, la masa que abandona el segmento del límite derecho del volumen de control  $\overline{CD}$  es:

$$M_{CD} = \rho \int_0^h u dy$$

Por consiguiente, la cantidad de masa que abandona el segmento superior  $\overline{BC}$  es:

$$M_{BC} = \rho \int_0^h (U - u) dy$$

Aplicando la ecuación de cantidad de movimiento [7.3.1], y llamando  $R$  a la resistencia:

$$-R = -\rho \int_0^h U^2 dy + \rho \int_0^h U(U - u) dy + \rho \int_0^h u^2 dy \quad 7.3.2$$

la primera integral es la cantidad de movimiento en dirección  $x$  que entra en  $\overline{AB}$ . La segunda es la cantidad de movimiento en dirección  $x$  que sale por  $\overline{BC}$ ; y la tercera es la cantidad de movimiento en dirección  $x$  que sale por  $\overline{CD}$ . Todas por unidad de tiempo, operando en [7.3.1] queda:

$$-R = -\rho \int_0^h u(U - u) dy \quad \rightarrow \quad R = \rho \int_0^h u(U - u) dy$$

La resistencia al avance  $D(x)$  sobre la placa, está dirigida en sentido indicado de modo que en general:

$$R(x) = D(x) = \rho \int_0^h u(U - u) dy$$

Aquí se aplica el concepto de relatividad del movimiento, es decir podemos considerar que la placa está quieta en una corriente libre que avanza desde la derecha con una velocidad  $U$ , o bien que la placa se mueve con la misma velocidad hacia la izquierda en una corriente quieta.

Como la resistencia puede expresarse como una tensión multiplicada por una área, queda:

$$R(x) = \int_0^a \tau_0 dx \cdot 1$$

(donde la hemos tomado por unidad de profundidad) entonces:

$$dR(x) = \tau_0 dx \rightarrow \tau_0 = \frac{dR(x)}{dx}$$

Reemplazando:

$$\tau_0 = \rho \frac{d}{dx} \int_0^h u(U-u) dy \quad 7.3.3$$

La distribución de velocidades para hacer la integración  $u = f(y)$  debe cumplir las condiciones de borde:

$$u=0 \text{ en } y=0; \quad u=U \text{ en } y=\delta; \quad \text{llamando } \eta = \frac{y}{\delta};$$

el perfil de velocidades puede expresarse como:

$$\frac{u}{U} = F(\eta)$$

Con el cambio de variable:  $\eta = \frac{y}{\delta}$  será:

$$\frac{u}{U} = F(\eta)$$

El profesor Prandtl supuso la aproximación teórica de la distribución de velocidad dentro de la capa, a través de una función de polinomio cúbico siguiente:

$F(\eta) = \frac{3}{2}\eta - \frac{1}{2}\eta^3 \quad \text{para } 0 \leq \eta \leq 1$ $F(\eta) = 1 \quad \text{para } \eta \geq 1$
--

Este funcional satisface las condiciones de contorno anteriormente indicadas. Entonces, a partir de:

$$\tau_0 = \rho \frac{d}{dx} \int_0^h u(U-u) dy$$

$$\text{como: } \eta = \frac{y}{\delta} \rightarrow d\eta = \frac{dy}{\delta}$$

$$\text{siendo además: } \frac{h}{\delta} = 0,99 \quad h = 0,99\delta$$

O bien:  $\delta d\eta = dy$ ; reemplazando, multiplicando y dividiendo por  $U^2$ , lo anterior queda:

$$-\tau_0 = \rho \frac{d}{dx} \int_0^h (u^2 - uU) dy \quad 7.3.5$$

$$\tau_0 = \rho \frac{d\delta}{dx} \int_0^1 \frac{uU^2}{U^2} (U-u) dy = \rho U^2 \frac{d\delta}{dx} \int_0^1 \left(1 - \frac{u}{U}\right) \frac{u}{U} dy$$

Reemplazando ahora la función

$$F(\eta) = \frac{u}{U} = \frac{3}{2}\eta - \frac{1}{2}\eta^3$$

queda:

$$\tau_0 = \rho U^2 \frac{d\delta}{dx} \int_0^1 \left(1 - \frac{3}{2}\eta + \frac{\eta^3}{2}\right) \left(\frac{3}{2}\eta - \frac{\eta^3}{2}\right) d\eta = 0,139\rho U^2 \frac{d\delta}{dx} \quad 7.3.6$$

En la pared es:

$$\text{Como } \frac{u}{U} = F(\eta) \rightarrow u = U F(\eta) \rightarrow \frac{du}{dy} = U \frac{dF(\eta)}{d\eta} \cdot \left(\frac{d\eta}{dy}\right)$$

$$\tau_0 = \mu \left(\frac{du}{dy}\right) \Big|_{y=0} = \mu \frac{U}{\delta} \frac{\partial F(\eta)}{\partial \eta} = \mu \frac{U}{\delta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{3}{2}\eta - \frac{\eta^3}{2}\right) = \frac{3}{2} \mu \frac{U}{\delta} \quad 7.3.7$$

Igualando las expresiones de  $\tau_0$  queda:

$$\frac{3}{2} \mu \frac{U}{\delta} = 0,139 \rho U^2 \frac{d\delta}{dx} \quad \rightarrow \quad \delta d\delta = 10,78 \frac{\mu dx}{\rho U}$$

Puesto que  $\delta$  es una función solamente de  $x$ , la integramos:

$$\frac{\delta^2}{2} = 10,78 \frac{\delta}{U} x + C \quad \text{con } \nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (\text{viscosidad. cinemática})$$

Para  $x = 0 \quad \delta = 0 \rightarrow C = 0$

Dividiendo m.a.m por  $x^2$

$$\frac{\delta}{x} = 4,65 \sqrt{\frac{\nu}{U x}} = \frac{4,65}{\sqrt{\text{Re}}} \quad 7.3.8$$

Que nos da el espesor de la capa límite en función de la posición, y la tensión sobre la placa reemplazando en [7.3.7]

$$\tau_0 = 0,322 \sqrt{\frac{\mu \rho U^3}{x}}$$

y la resistencia por unidad de ancho:

$$R = \int_0^l T_0 dx = 0,644 \sqrt{\mu \rho U^3 l}$$

Habitualmente, la resistencia se expresa en función del coeficiente de resistencia  $C_D$ , la presión dinámica de estancamiento  $\frac{\rho V^2}{2}$  y el área por unidad de ancho  $A = l \times 1$

$$R = C_D \frac{\rho U^2}{2} l \cdot 1 \quad \text{con: } C_D = \frac{1,328}{\sqrt{\text{Re}}} \quad \text{siendo: } \text{Re} = \frac{U l}{\nu} = \frac{\rho U l}{\mu}$$

Cuando el número Re alcanza un valor del orden de 500.000, la capa límite se hace turbulenta como se indica en la Fig. 7.4.1. El número crítico de Re depende también de la rugosidad de la placa y del borde de ataque de la placa.

#### 7.4- Capa límite turbulenta:

La ecuación de la cantidad de movimiento puede usarse para determinar el crecimiento de la capa límite turbulenta y la tensión de corte, de manera análoga a lo ya hecho para capa límite laminar, la base es usar la fórmula de distribución de velocidad para flujo turbulento dentro de tuberías, que era:

$$\left(\frac{u}{u_{mx}}\right) = \left(\frac{y}{r_0}\right)^{1/7} \quad \text{con: } r_0 = D/2$$

y ensayar la fórmula para  $F = \frac{u}{U} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} = \eta^{1/7}$

El cálculo de  $\tau_0$  da:

$$\tau_0 = \rho U^2 \frac{d\delta}{dx} \int_0^1 (1-\eta^{1/7})\eta^{1/7} dy = \frac{7}{72} \rho l^2 \frac{d\delta}{dx} \quad 7.4.1$$

Y el valor empírico de la tensión en la pared:

$$\tau_0 = 0,0228 \rho V^2 \left(\frac{V}{U\delta}\right)^{1/4} \quad 7.4.2$$

Igualando [7.4.1] y [7.4.2]:

$$\delta^{1/4} d\delta = 0,234 \left(\frac{V}{U}\right)^{1/4} dx$$

Integrando suponiendo condiciones de flujo turbulento para toda la placa, o sea condiciones iniciales  $x = 0 \quad \delta = 0$  surge la distribución:

$$\delta^{1/4} = 0,292 \left(\frac{V}{U}\right)^{1/4} x \rightarrow \delta = \frac{0,37x}{Re^{1/5}} \quad \text{con} \quad Re = \left(\frac{Ux}{\nu}\right) \quad 7.4.3$$

Y para la resistencia, a partir de igualar [7.4.1] y [7.4.2]: surge:

$$\tau_0 = 0,029 \rho V^2 \left(\frac{V}{Ux}\right)^{1/5} \quad 7.4.4$$

Y la resistencia al movimiento de la placa es:

$$R = \int_0^l \tau_0 dx = 0,036 \rho V^2 l \left(\frac{V}{Ul}\right)^{1/5} = 0,036 \frac{\rho U^2 l}{Re^{1/5}} \quad 5 \cdot 10^5 < Re < 10^7 \quad 7.4.5$$

Y en función del coeficiente de Resistencia  $C_D$  queda:

$$C_D = 0,072 Re^{-1/5} \quad R = C_D \frac{\rho V^2}{2} l \cdot 1 \quad 7.4.6$$

Las leyes de resistencia para placas vistas con las ecuaciones anteriores, dan lugar a la gráfica siguiente de  $C_D$  en función de  $Re$  tanto para capa límite laminar como turbulenta, y el valor de  $Re$  de transición.

Fig.7.4.1

Una particularidad de la figura anterior, es la superposición de los rangos Laminar – Transición – Turbulento, esto es debido a que los regimenes pueden comenzar antes o después dependiendo de la manera de realizar el experimento, la isolación a la vibración, la baja rugosidad por ejemplo pueden extender el rango laminar y recíprocamente, hacer comenzar antes el turbulento.

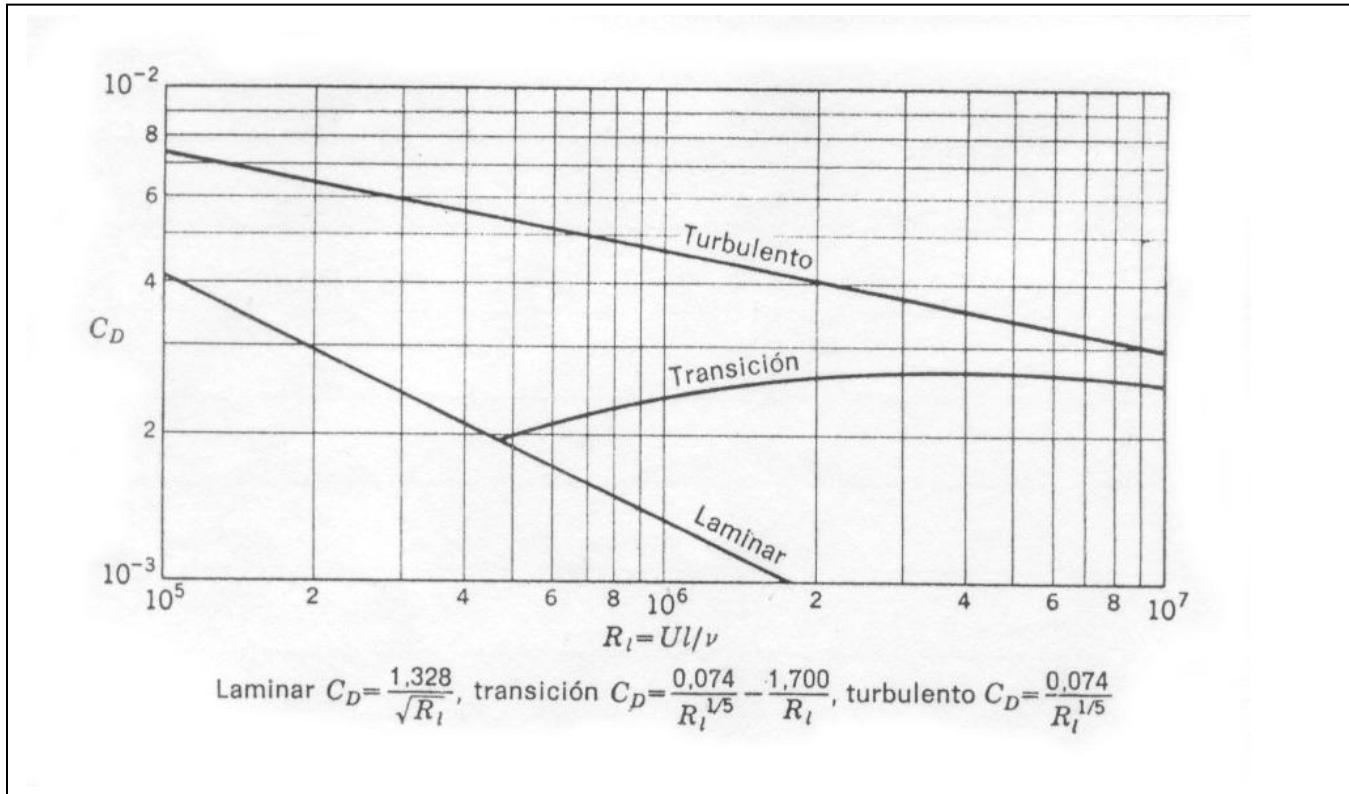
**Ejemplo 1:** Una placa plana lisa de 4m de ancho y 40 m de largo, es remolcada en agua en reposo a 20°C con una viscosidad de 8 m/seg. Determinar la resistencia sobre un lado de la placa.

**Resolución:**

En agua a 20°C la viscosidad es  $\mu = 1 \text{ cpoise} = 0.01/98 \frac{\text{kg} \cdot \text{seg}}{\text{m}^2}$

$$\rho = \frac{\gamma}{g} = \frac{10^3 \text{ UTM}}{9.8 \text{ m}^3}$$

Para la placa entera:



$$Re = \frac{\rho U l}{\mu} = \frac{8 \cdot 40 \cdot 10^3 / 9.8}{0.01 / 98} = 3.2 \cdot 10^8$$

o sea queda definido en flujo turbulento, por lo cual se aplican las fórmulas:

$$C_D = \frac{0.455}{(\log Re)^{2.58}} \quad 10^6 < Re < 10^9$$

$$R = C_D \frac{\rho U^2}{2} A = \text{operando} = 943 \text{ Kgf}$$

Si el número crítico de  $Re$  es  $5 \cdot 10^5$ , el ancho a la que se presenta la transición es:

$$\frac{l_0 \cdot 8 \cdot 10^3 / 9.8}{0.01 / 98} = 5 \cdot 10^5 \rightarrow l_0 = 0.062 \text{ m}$$

**Ejemplo 2:** - En un experimento en túnel de viento con una esfera, se desea reproducir el fenómeno de separación de capa límite laminar. El túnel puede impulsar aire a velocidades variables hasta 200 m/s. Se pregunta cual debería ser el diámetro de la esfera, y qué fuerza de resistencia puede esperarse al verificarse el fenómeno de separación.

Datos de aplicación:

Densidad del aire a 15°C = 1,222 kg/m<sup>3</sup>

Viscosidad del aire a 15°C = 1,76 · 10<sup>-5</sup> N·seg/m<sup>2</sup>

Resolución 1:

Re en proa = 0

$$\text{Re en popa} = \frac{\rho U l}{\mu}$$

$$\rho = 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$\mu = 1.01 \cdot 10^{-3} \frac{\text{N} \cdot \text{seg}}{\text{m}^2} \quad (\text{viscosidad del agua a } 20^\circ\text{C})$$

a) Cálculo de la longitud de transición laminar-turbulento:

$$5 \cdot 10^5 = \frac{\rho U l_T}{\mu} \rightarrow l_T = 0,18 \text{ m}$$

b) Espesor de la capa límite laminar:

$$\delta_L = \frac{4.65}{\text{Re}^{1/2}} \cdot l_T \rightarrow \delta_L = 1.18 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

c) Cálculo de la longitud equivalente de la placa:Como en la transición:  $\delta_L = \delta_T$ 

$$\delta_L = \delta_T = \frac{0,37}{\text{Re}^{1/5}} \cdot l_{\text{Turb}} \rightarrow l_{\text{Turb}} = 0,044 \text{ m}$$

d) Longitud equivalente  $L = (l_{\text{TOTAL}} - l_{\text{TR}}) + l_{\text{TURB}} = (10 - 0,18) + 0,044 = 9.864 \text{ m}$ e) Resistencia al movimiento:

$$R = C_{D \text{ TURB}} \left( \frac{1}{2} \rho U^2 \right) S \frac{0,072}{13.8} (0,5 \cdot 10^3 \cdot 2.77^2) \cdot 38.73 \text{ m}^2 = 775 \text{ N} \cong 77 \text{ KgF}$$

f) Potencia necesaria:

$$P = F \cdot V = 775 \text{ N} \cdot 2.77 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 2146 \text{ Watts} \cong 2.86 \text{ HP}$$

g) Espesor de la capa límite en el borde de popa:

$$\delta_T = 0.37 \cdot \text{Re}^{-1/5} \cdot x = 0.37 \cdot \left( \frac{10^3 \cdot 2.77 \cdot 9.846}{1.01 \cdot 10^{-3}} \right)^{-1/5} \cdot 9.846$$

Resolución 2:La separación tiene lugar, según el gráfico Fig.6 a  $2.5 \cdot 10^5 \text{ Re}$ Suponiendo que regulamos la velocidad. del viento en 100 m/s  $\rightarrow$ 

$$\text{Re} = \frac{\rho V D}{\mu} = \frac{1.22 \cdot 100 \cdot D}{1.76 \cdot 10^{-5}} = 2.5 \cdot 10^5 \rightarrow D = 36 \text{ mm}$$

b) Fuerza existente:

$$R = C_D \left( \frac{1}{2} \rho U^2 \right) \cdot S =$$

de la tabla,  $C_D = 0,4$  para  $Re = 2,5 \cdot 10^5$ , entonces,

$$R = 0,4(0,5 \cdot 1,22 \cdot 100^2) \cdot \frac{\pi \cdot 0,036^2}{4} = 2,48N$$

c) Potencia. Instalada:

Si  $\phi = 100mm$  boquilla salida

$$P = \rho Q \cdot 0,5 \cdot \Delta U^2 = 1,22 \cdot \frac{\pi \cdot 0,1^2}{4} \cdot 200 \cdot 0,5 \cdot 200^2 = 51HP$$

Problema Propuesto:

Una barcaza de fondo plano de dimensiones  $4 \times 10$  m debe ser remolcada en agua a  $10$  km/h. Definir el perfil que tendrá la capa límite, el espesor estimado de la capa límite en el extremo de popa de la balsa, la fuerza neta horizontal que debe aplicarse, y la potencia que necesita el motor para la impulsión.

$$(\mu @ 20^\circ C = 1,01 \cdot 10^{-3} \frac{N \cdot seg}{m^2}; \quad \rho = 10^3 \frac{Kg}{m^3})$$

Fórmulas de aplicación:

$$\text{Espesor de la capa límite laminar: } \delta = \frac{4,62}{Re^{1/2}} \cdot x$$

$$\text{Coeficiente de resistencia de la capa límite turbulenta: } C_D = \frac{1,288}{Re^{1/2}}$$

$$\text{Espesor de la capa límite turbulenta: } \delta = \frac{0,37}{Re^{1/5}} \cdot x$$

$$\text{Coeficiente de resistencia de capa límite turbulenta: } C_D = 0,072 Re^{-1/5}$$

$$\text{Transición de corriente laminar a turbulenta: } Re = 5 \cdot 10^5$$


---

**Bibliografía complementaria para consulta:**

FRANK M. WHITE, Mecánica de Fluidos, Ed. Mc Graw Hill

WILLIAM F. HUGES, Dinámica de los fluidos, Ed Mc Graw Hill

ROBERT FOX – ALAN MAC DONALD, Introducción a la Mecánica de Fluidos, 4ta Edición, Mc Graw Hill

IRWIN SHAMES, Mecánica de Fluidos, 6ta Ed. Editorial Mc Graw Hill

RONALD GILES, Mecánica de los fluidos e Hidráulica, Ed. Mc Graw Hill

STREETER Y WEELER, Mecánica de los fluidos, Ed. Mc Graw Hill