

## Tema 7. Expresiones del factor de fricción

1. Introducción
2. Factor de fricción en régimen laminar
3. Subcapa laminar. Comportamiento hidrodinámico de tuberías
4. Experiencias de Nikuradse
5. Valor del coeficiente de fricción según el régimen de funcionamiento
6. Variaciones con el uso de la rugosidad absoluta. Envejecimiento de tuberías

### 1. Introducción.

Recordamos que el factor de fricción o coeficiente de resistencia de Darcy-Weisbach ( $f$ ) es un parámetro adimensional que depende del número de Reynolds y de la rugosidad relativa.

$$f = f\left(R_e, \frac{K}{D}\right)$$

Decíamos que la influencia de ambos parámetros sobre  $f$  es cuantitativamente distinta según las características de la corriente.

En toda tubería recta que transporta un líquido a una temperatura determinada, existe una velocidad crítica ( $v_c$ ) por debajo de la cual el régimen es laminar. Este valor crítico que marca la transición entre los dos regímenes, el laminar y el turbulento, se corresponde con un  $Re = 2300$ , aunque en la práctica, entre 2000 y 4000 la situación es bastante imprecisa. Por lo tanto:

$Re < 2000$ : Régimen laminar.

$2000 < Re < 4000$ : Zona crítica o de transición.

$Re > 4000$ : Régimen turbulento.

## 2. Factor de fricción en régimen laminar.

El cálculo de  $f$  en este caso es sencillo, y se obtiene igualando la fórmula que proporciona el valor de la pérdida de carga continua para régimen laminar de Hagen-Poiseuille con la ecuación de Darcy-Weisbach:

$$h_c = \frac{32 \cdot \mu \cdot L \cdot v}{\gamma \cdot D^2} = f \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g}$$

$$\text{como } \gamma = \rho \cdot g \quad \rightarrow \quad h_c = \frac{32 \cdot \mu \cdot L \cdot v}{\rho \cdot g \cdot D^2} = f \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g}$$

$$\frac{32 \cdot \mu}{\rho \cdot D} = f \cdot \frac{v}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{32 \cdot v}{D} = f \cdot \frac{v}{2}$$

$$f = \frac{64 \cdot v}{v \cdot D} \quad [1]$$

$$\text{Al ser } Re = \frac{v \cdot D}{\nu} \quad \rightarrow \quad f = \frac{64}{Re}$$

Luego se demuestra que, en régimen laminar, el coeficiente de fricción de Darcy-Weisbach es independiente de la rugosidad relativa.

$$f = f(Re)$$

Sustituyendo la expresión [1] en la ecuación general de Darcy-Weisbach en función del caudal, quedaría:

$$h_c = 0.0826 \cdot f \cdot \frac{Q^2}{D^5} \cdot L = 0.0826 \cdot \frac{64 \cdot v}{v \cdot D} \cdot \frac{Q^2}{D^5} \cdot L \quad [2]$$

$$\text{Como } Q = v \cdot s = v \cdot \pi \cdot \frac{D^2}{4} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D^2}$$

Sustituyendo el valor de la velocidad en [2], simplificando y operando los términos constantes, se obtiene:

$$h_c = \frac{4.152 \cdot v}{D^4} \cdot Q \cdot L$$

Ecuación que indica una dependencia lineal entre el caudal y la pérdida de carga.

### 3. Subcapa laminar. Comportamiento hidrodinámico de tuberías.

Para el régimen turbulento, el estudio del coeficiente de fricción es más complicado. Fue iniciado por el investigador alemán Ludwig Prandtl (1875-1953), quien expuso en 1904 su *teoría de la capa límite*, teoría que revolucionó la aeronáutica.

Si un cuerpo se moviera en el vacío o en el seno de un fluido no viscoso ( $\mu = 0$ ), la resistencia sería nula, por lo que el desplazamiento del cuerpo no consumiría energía. Al ser el agua y el aire fluidos poco viscosos, puede parecer que ofrecerán poca resistencia al cuerpo (por ejemplo, un avión o un submarino), pero no es así: la resistencia es grande.

Prandtl descubrió que existe una capa próxima al contorno, a veces muy delgada, donde tiene lugar todo el gradiente de velocidades, ya que la velocidad debe reducirse desde su valor inicial hasta anularse en la pared. Fuera de esta capa, el líquido se comporta como no viscoso.

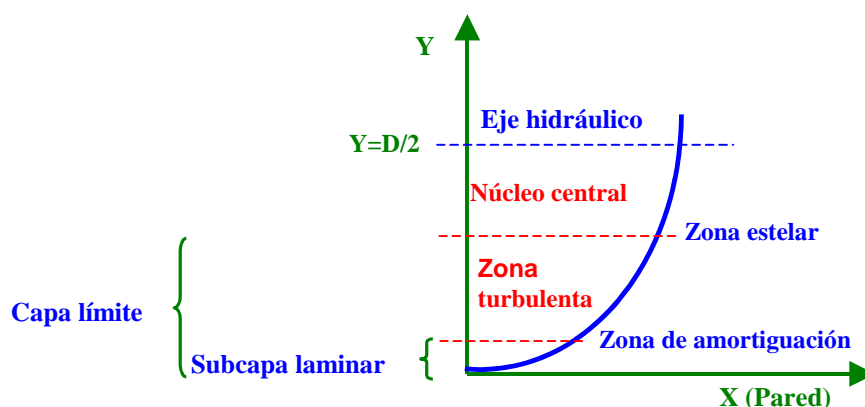
En definitiva, la teoría de Prandtl postula que el estudio del movimiento de un líquido de pequeña viscosidad como el agua, podría asimilarse al de un líquido perfecto salvo en las proximidades de las paredes del conducto, en la cual se concentran los fenómenos de rozamiento y turbulencias y que denominó *capa límite*.

Por lo tanto, puesto que  $\tau = \mu \cdot \frac{dv}{dy}$ , aunque la viscosidad ( $\mu$ ) sea pequeña, el término  $\frac{dv}{dy}$ , que representa el gradiente de velocidades, es muy grande, por lo que también lo será el esfuerzo cortante ( $\tau$ ) en la pared.

Se comprueba experimentalmente que, en contacto con las paredes de la tubería, siempre persiste una delgada capa en que la capa límite es laminar, denominada *subcapa laminar* o *capa viscosa*, ya que al ser nula la velocidad del fluido en contacto con las paredes, el  $R_e$  también debe disminuir hasta el valor cero. Por tanto, al ir separándonos de la pared el régimen es laminar hasta que  $R_e$  aumenta lo suficiente como para que el régimen sea turbulento.

El conocimiento de la subcapa laminar es esencial para establecer el valor del coeficiente de fricción  $f$  en régimen turbulento.

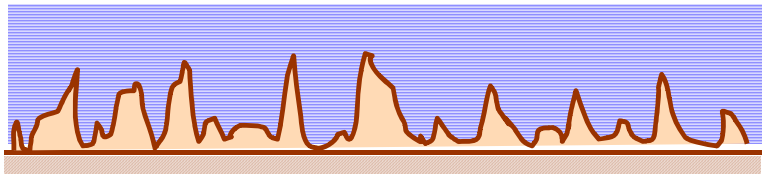
En definitiva, el flujo turbulento junto a un contorno sólido se puede dividir en tres zonas. Lejos del contorno, el flujo es ideal, prácticamente sin rozamientos. En las proximidades de la pared se desarrolla una zona (*capa límite*) sometida a esfuerzos cortantes, donde los fenómenos viscosos son importantes, ya que la velocidad sobre la pared ha de ser forzosamente nula. A pequeñísimas distancias de la pared persiste la *subcapa laminar*, que es una característica constante del movimiento desarrollado.



El espesor de la capa límite es función del  $R_e$ , y puede medir desde algunas micras a varios centímetros, e incluso metros, según el caso.

### Comportamiento hidrodinámico de las tuberías

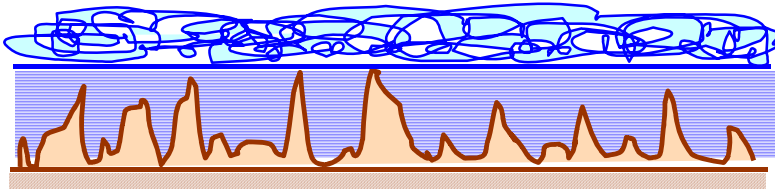
1. **Régimen laminar:** Hemos visto que  $f = \frac{64}{Re}$ , independiente de la rugosidad relativa, ya que no se forman turbulencias.



$$f = f(Re)$$

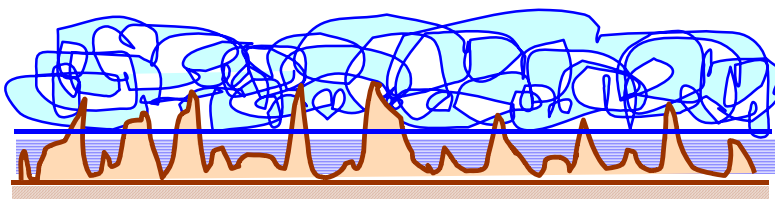
2. **Régimen turbulento:**

- a) *Flujo hidráulicamente liso (tubería hidráulicamente lisa):* La rugosidad ( $K$ ) queda cubierta por la subcapa laminar ( $\delta$ ). La rugosidad, por tanto, no influye en el valor de  $f$  puesto que ningún punto de la pared queda afectado por las turbulencias que producirían las rugosidades internas, comportándose la tubería como un material liso.



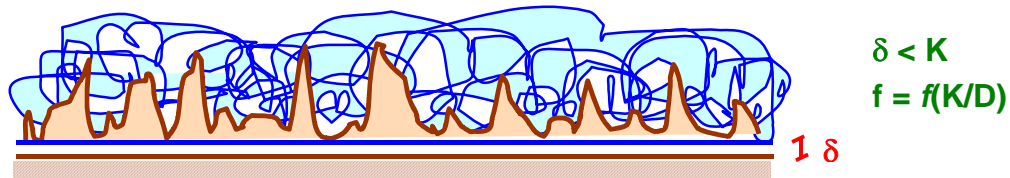
$$\delta > K$$
$$f = f(Re)$$

- b) *Flujo hidráulicamente semirrugoso o zona de transición:* El espesor de la subcapa laminar ( $\delta$ ) se aproxima al valor medio de rugosidad absoluta ( $K$ ), de manera que la rugosidad emerge de la subcapa laminar en unos puntos y en otros no, quedando sólo las rugosidades que emergen afectadas por la turbulencia. Es el caso más frecuente, y aquí el coeficiente de fricción depende tanto del número de Reynolds como de la rugosidad relativa.



$$\delta \approx K$$
$$f = f(Re, K/D)$$

- c) *Flujo hidráulicamente rugoso (tubería hidráulicamente rugosa)*: Si el espesor de la capa límite ( $\delta$ ) es menor que la rugosidad absoluta ( $K$ ), las irregularidades internas de la conducción rebasan la subcapa laminar, produciendo turbulencia completa. Cuanto mayor sea el número de Reynolds, más delgada será la subcapa laminar y más puntos de la pared sobresaldrán de ella. En este caso, las fuerzas de inercia son muy importantes y apenas influyen las fuerzas viscosas, por lo que el factor de fricción sólo depende de la rugosidad relativa y el número de Reynolds no tiene importancia en su determinación.



Cuantitativamente:

$\frac{\varepsilon}{\delta} < 0.10$  : Flujo hidráulicamente liso.

$0.10 \leq \frac{\varepsilon}{\delta} \leq 0.60$  : Flujo hidráulicamente semirrugoso o zona de transición.

$\frac{\varepsilon}{\delta} > 0.10$  : Flujo hidráulicamente rugoso.

En la práctica, se utilizan unas condiciones basadas en la proporcionalidad del número de Reynolds de la rugosidad y la relación  $\frac{K}{\delta}$ , ya que son más fáciles de establecer que las anteriores y se refieren a rugosidades absolutas irregulares, que es el caso real de las tuberías comerciales.

Si  $K \leq \frac{19.25 \cdot D}{(Re)_c^{7/8}}$  : Flujo hidráulicamente liso.

Si  $K \geq \frac{560 \cdot D}{(Re)_c} = \frac{560 \cdot D}{\frac{v \cdot D}{v}} = 560 \cdot \frac{v}{v}$  : Flujo hidráulicamente rugoso.

Si  $K$  está comprendido entre los dos valores anteriores, el flujo sería hidráulicamente semirrugoso.

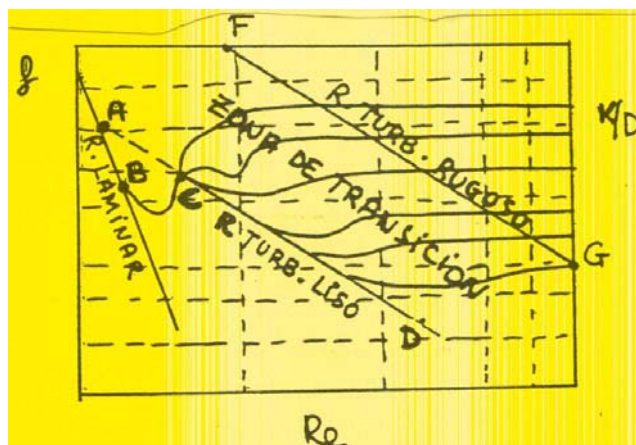
#### 4. Experiencias de Nikuradse. Valor del coeficiente de fricción según el régimen de funcionamiento.

Como ya comentamos al hablar de las rugosidades absoluta y relativa, Nikuradse, discípulo de Prandtl, experimentó con tubos de rugosidad artificial conocida, creada por él mismo pegando en el interior de un tubo liso (de vidrio) arenas tamizadas, es decir, de diámetro conocido, con lo que la rugosidad artificial de estos “tubos arenisca” era conocida.

Variando los caudales que circulaban por estos tubos obtuvo un diagrama en el que se relacionan los valores de  $K/D$  y  $Re$  con los hallados para  $f$ . También experimentó con tubos lisos.

Los resultados de estas experiencias aparecen representados en el diagrama logarítmico típico, conocido como *ábaco* o *diagrama de Moody*.

El diagrama de Moody (1944), permite determinar el valor del factor de fricción  $f$  a partir de  $Re$  y  $K/D$  de forma directa. Es una representación log – log del factor de fricción  $f$  frente al  $Re$ , tomando como parámetro  $K/D$ . Se distinguen cinco zonas, correspondientes a los distintos regímenes hidráulicos, correspondiendo al coeficiente de fricción  $f$  valores diferentes en en cada caso.



### Valores de f según el régimen de funcionamiento

- a)  $Re \leq 2000$ , *régimen laminar*, por lo que  $f = \frac{64}{Re}$ .

Tomando logaritmos:  $\log f = \log 64 - \log Re$

que es la ecuación de una recta (AB) conocida como *recta de Poiseuille*.

- b)  $2000 < Re < 4000$ , *zona crítica o inestable de transición al régimen turbulento*, definida por la curva BC.

- c)  $Re > 4000$ , *zona de régimen turbulento liso* que corresponde a la recta CD, llamada *recta de Von Karman* (1930), y cuya ecuación es:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \cdot \log \left( \frac{2.51}{Re \cdot \sqrt{f}} \right)$$

Aunque  $\sqrt{f}$  no aparece en forma explícita, es función del Re.

- d) *Zona de transición del régimen turbulento*, en la que  $f = f\left(Re, \frac{K}{D}\right)$ .

Para las tuberías comerciales en esta zona se utiliza la fórmula de White-Colebrook (1938):

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \cdot \log \left( \frac{2.51}{Re \cdot \sqrt{f}} + \frac{K/D}{3.71} \right)$$

- e) *Zona de flujo turbulento rugoso*, en la que se verifica la expresión:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \cdot \log \left( \frac{K/D}{3.71} \right) \quad (\text{Nikuradse, 1933})$$

en la que f es independiente de Re,  $f = f(K/D)$ . Gráficamente se observa esta independencia del número de Reynolds, ya que en esta zona las rectas son paralelas al eje Re (eje de abscisas).

La región de turbulencia completa (rugosa) limita con la de transición mediante la recta FG, denominada *curva de Moody*, de expresión:

$$\text{Re} \cdot \sqrt{f} \cdot \frac{K}{D} = 200$$

Dividiendo por  $\sqrt{8}$  se obtiene:  $\text{Re} \cdot \sqrt{\frac{f}{8}} \cdot \frac{K}{D} = \frac{200}{\sqrt{8}}$

De manera que  $(\text{Re})_r \approx 70$ . En la práctica, para  $(\text{Re})_r > 30$  se puede considerar el flujo como turbulento rugoso.

## 5. Variaciones con el uso de la rugosidad absoluta. Envejecimiento de tuberías.

Todos los materiales, con el paso del tiempo, disminuyen su capacidad de conducción del caudal debido a corrosiones, incrustaciones, sedimentaciones, formación de depósitos, etc. Experimentando con tuberías de fundición, Colebrook y White dedujeron que la rugosidad absoluta aumenta linealmente con el tiempo según la ecuación empírica:

$$K_t = K_0 + \alpha \cdot t$$

siendo:  $K_0$ : Rugosidad absoluta de la tubería nueva  
 $K_t$ : Rugosidad absoluta al cabo de  $t$  años de servicio  
 $\alpha$ : Índice de aumento anual de la rugosidad

Se ha demostrado que esta ecuación es también aplicable a otras clases de tuberías.

Según Colebrook, en conducciones metálicas no revestidas, al cabo de 30 años el caudal se reduciría en un 30% para aguas de pH = 8, en un 45% para pH = 7 y en un 85% para pH = 6.

En conducciones revestidas el envejecimiento es menor, y las tuberías de hormigón liso, fibrocemento y plástico carecen de envejecimiento aparente.

