Ejercicios adicionales a las guías 1 a 4

Producto interno

1. Se ha definido en $\mathbb{R}^2$ un producto interno tal que $(v_1, v_1) = 1$, $(v_1, v_2) = 0$ y $(v_2, v_2) = 2$, con $v_1 = [1\ \ 1]^T$ y $v_2 = [1\ \ 2]^T$. Se pide:
(a) hallar (x, y) con $x = [x_1\ x_2]^T$, $y = [y_1\ y_2]^T$.
(b) Descomponer $v = [2\ \ 2]^T$ como suma de un vector paralelo a $u = [1\ \ 0]^T$ y otro ortogonal (según el p.i. definido) a u.

2. Sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y sea $(\cdot, \cdot)$ un producto interno en $\mathbb{R}^3$ tal que $\|e_1\| = \|e_2\| = 1$, $\|e_3\| = \sqrt{2}$, $(e_1, e_2) = 0$ y $u = 2e_2 - e_3$ es ortogonal a e_1 y a e_3. Halle (x, y) para x, $y \in \mathbb{R}^3$ y calcule la proyección ortogonal de $v = [1\ 1\ 2]$ sobre el subespacio $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^3 :\ x_1 = 0\}$.

3. Sea $B = \{v_1; v_2; v_3\}$ una base de un $\mathbb{R}$-espacio vectorial V. Hallar los valores de α para los cuales existe un producto interno en V que verifica:
$$\|v_1\| = \|v_2\| = \|v_3\| = 2,\ (v_1, v_3) = 0,\ (v_1 + v_2, v_1 + v_3) = 4 + \alpha\ \text{ y } (v_1 - v_2, v_1 - v_3) = 4 - \alpha.$$
Considere $\alpha = 1$ y halle una base ortogonal de $\mathcal{S}^\perp$ siendo $\mathcal{S} = \text{gen}\{v_1 + v_3\}$.

4. Demuestre que $(p, q) = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(-1)q(-1)$ es producto interno en $\mathcal{P}_2$ pero no en $\mathcal{P}_3$. Halle los valores de α y β para que $p = \alpha t + \beta(t^2 + 1)$ se encuentre lo más cerca posible de $q = t^2$.

5. Demostrar que para $\alpha > 1$, $(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + \alpha x_2y_2$ es producto interno en $\mathbb{R}^2$. ¿Cúal propiedad de producto interno no se cumple si $\alpha = 1$?.
Considere $\alpha = 2$ y halle los v de $\mathbb{R}^2$ tales que su proyección ortogonal a $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^2 :\ x_1 - x_2 = 0\}$ sea $u = [1\ 1]^T$ y $d(v, \mathcal{S}) = 1$.

6. Sea $\{e_1, e_2\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^2$. Demuestre que no existe un producto interno en $\mathbb{R}^2$ tal que $\|e_1\| = 1$, $\|e_2\| = 2$ y $(e_1, e_2) = 2$.

7. Considere en $\mathbb{R}^{2\times 2}$ el producto interno $(M, N) = m_{11}n_{11} + m_{12}n_{12} + m_{21}n_{21} + m_{22}n_{22}$. Demuestre que si $\mathcal{S} = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : A = A^T\}$ entonces $\mathcal{S}^\perp = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : A^T = -A\}$.(Sugerencia: halle primero una base de $\mathcal{S}$).

8. Considere en $\mathcal{C}([-\pi, \pi])$ el producto interno $(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} fg\, dx$. Hallar los valores de α, β y γ que minimizan el valor de la integral
$$\int_{-\pi}^{\pi} [|x| - \alpha - \beta \cos x - \gamma \operatorname{sen} x]^2\, dx.$$

9. Sabiendo que $u = [2\ \ 2\ \ 2]^T$ es el elemento del subespacio $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ más cercano a $v = [1\ \ 2\ \ 3]^T$.
a) Hallar los posibles subespacios $\mathcal{S}$.
b) Hallar una base ortonormal de $\mathcal{S}$ sabiendo que $\dim(\mathcal{S}) = 2$.

Matrices de proyección, QR, cuadrados mínimos

10. Comprobar que $P = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 5/6 & -1/6 \\ 1/3 & -1/6 & 5/6 \end{bmatrix}$ es una matriz de proyección y hallar $Q \in \mathbb{R}^{3\times k}$, con k a determinar, tal que las columnas de Q sean ortonormales y $P = QQ^T$.

11. Dadas $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ y $B \in \mathbb{R}^{n\times k}$ demostrar que $\mathrm{col}(A) \perp \mathrm{col}(B)$ si y sólo si $A^T B = 0$. (Nota: considere el p.i. canónico de $\mathbb{R}^n$).

12. Encuentre $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $[1 \ -1 \ 0]A = 0$ y A admita una descomposición QR normalizada $A = QR$ con $R = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & \sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3} & 2\sqrt{3} \end{bmatrix}$. ¿Es única?.
Para la matriz A hallada, encuentre la matriz de proyección sobre $(\mathrm{col}(A))^{\perp}$.

13. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ una matriz de rango m y $A = QR$ una descomposición QR normalizada de A. ¿Qué dimensión y qué rango tiene R?. Deducir que $A^T A = R^T R$ y que $A^T A$ es inversible.

14. Sabiendo que $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{bmatrix}$ y $b = [\sqrt{2} \ \sqrt{3} \ \sqrt{2}]^T$, hallar la matriz de proyección a $\mathrm{col}(A)$ y todos los $x \in \mathbb{R}^3$ que minimicen $\|Ax - b\|$.

15. Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & r & 1+r \\ 1 & r & 1+r \end{bmatrix}$, hallar los valores de r para que A admita una descomposición QR normalizada tal que $\mathrm{rango}(QQ^T) = 1$. Encontrar la matriz de proyección a $\mathrm{col}(A)$ para cada valor de r hallado.

16. Sea $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz de proyección. Demuestre que si $P = QR$ es una descomposición QR normalizada de P entonces $Q = R^T$.

17. Sean $P_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $P_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, matrices de proyección. Demostrar que si $P_1 P_2 = 0$, entonces $P_2 P_1 = 0$ y $P_1 + P_2$ es matriz de proyección. Hallar la relación entre los rangos de P_1, P_2 y $P_1 + P_2$.

18. Dada $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, demuestre que $\mathrm{Nul}(A^T) = \mathrm{col}(A)^{\perp}$ y de allí deduzca que $\mathrm{Nul}(A)^{\perp} = \mathrm{col}(A^T)$. (Considere el p.i. canónico.)

19. Suponga que $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ $(m \geq n)$ y que $\mathrm{Nul}(A)$ tiene dimensión $m-n$. Demuestre que si $A = QR$ es una descomposición QR normalizada entonces Q es inversible.

20. Sean $P_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $P_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrices de proyección. Demostrar que $\mathrm{col}(P_1) \subseteq \mathrm{col}(P_2)$ si y sólo si $P_2 P_1 = P_1$.

21. Suponiendo que $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ tiene rango m y $b \in \mathbb{R}^n$, explicar por qué $\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b$ minimiza $\|Ax - b\|$.

22. Determine, justificando su respuesta, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:
(a) Si $\hat{x}$ es una solución por cuadrados mínimos de la ecuación $Ax = b$ entonces $\|A\hat{x}\| \leq \|b\|$.
(b) $\hat{x} = 0$ es una solución por cuadrados mínimos de la ecuación $Ax = b$ si y sólo si b es ortogonal a $\mathrm{col}(A)$.

23. Explicar, sin resolver la ecuación, por qué $u = [1 \ 0]^T$ no puede ser la solución por cuadrados mínimos de $Ax = b$ con $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ y $b = [1 \ 1 \ 0]^T$.

24. Sabiendo que $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ admite una descomposición QR normalizada $A = QR$ con $Q = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & 1 \\ \gamma & 0 \end{bmatrix}$ y que para cierto $b \in \mathbb{R}^3$ la solución $\hat{x}$ por cuadrados mínimos de la ecuación $Ax = b$ verifica $b - A\hat{x} = [1\ 0\ -1]^T$, hallar los posibles valores de α, β y γ.

25. Sabiendo que $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ admite una descomposición QR normalizada con $Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$, hallar bases ortonormales de $\text{col}(A)$ y $\text{Nul}(A^T)$ y las matrices de proyección a esos subespacios.

Transformaciones lineales

26. Defina una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tal que $T(x) = 2x$ si $x \in \mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^3 :\ x_1 - x_3 = 0\}$ y $d(x, \mathcal{S}) = d(T(x), \mathcal{S})$ para todo $x \in \mathbb{R}^3$. Halle la representación matricial de T en la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

27. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_2)$ tal que $[T]_{BC} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ con $B = \{1; 1+t; t+t^2\}$ y $C = \{1; t-t^2; t^2\}$.
(a) Hallar bases de $\text{Nu}(T)$ e $\text{Im}(T)$ y determinar si existe $p \in \mathcal{P}_2$ tal que $T(p) = t^2$.
(b) Determinar, justificando, si existen bases B' y C' de $\mathcal{P}_2$ tales que $[T]_{B'C'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. En caso de existir hallar tales bases.

28. Sea $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f = c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3\}$ con $f_1(t) = 1 + t + 2t^2$, $f_2(t) = 1 + \alpha t + 2t^2$ y $f_3(t) = 1 + 2t + \alpha t^2$. Se pide:
(a) Determinar todos los valores de α para los que está bien definida $T \in \mathcal{L}(V, \mathbb{R}^3)$ tal que $T(f_1) = [1\ 1\ 1]^T$, $T(f_2) = [1\ -1\ 1]^T$, $T(f_3) = [2\ 0\ 2]^T$. Para esos valores de α hallar bases de $\text{Nu}(T)$ e $\text{Im}(T)$.
(b) Para la transformación lineal T de (a) con $\alpha = 3$, decidir para qué valores de λ existirán bases B de V y B' de $\mathbb{R}^3$ tales que $[T]_{BB'} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & \lambda+2 & \lambda-1 \end{bmatrix}$. En caso de existir halle tales bases.

29. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathcal{P}_2)$ tal que $[T]_{EB} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ \lambda^2 & 4\lambda+3 & 1 \end{bmatrix}$ con E la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y $B = \{1; t+1; t^2+t\}$. Se pide:
i) Hallar los valores de λ para que T sea inversible.
ii) Para $\lambda = -1$, justificar que T es biyectiva, explicar cómo se obtiene $[T^{-1}]_{E'E}$ a partir de $[T]_{EB}$ (con E' la base canónica de $\mathcal{P}_2$) y calcular $T^{-1}(p)$ para $p = t^2 + 4t + 3$.
iii) Hallar los valores de λ para que existan al menos dos $x \in \mathbb{R}^3$ distintos tales que $T(x) = t^2 - t - 1$.

30. Sean $B = \{v_1; v_2; v_3\}$ y $C = \{w_1; w_2; w_3\}$ bases de los espacios vectoriales V y W respectivamente.
(a) Justificar la existencia de una única transformación lineal $T : V \to W$ que verifica $T(2v_1 + v_2) = w_1 - w_2 + w_3$, $T(v_1 - v_2) = w_1 + 2w_2 + w_3$ y $T(v_1 + v_3) = 2w_1 + w_2 + 2w_3$ y encontrar

bases de $\mathrm{Nu}(T)$ y de $\mathrm{Im}(T)$.
(b) Encontrar bases D de V y E de W tales que $[T]_{DE}$ tenga tantas columnas y filas nulas como sea posible.

31. Sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$ y $(\cdot, \cdot)_W$ un producto interno en W. Demostrar que $(x, y)_V = (T(x), T(y))_W$, es un producto interno en V si y sólo si T es inyectiva.

32. Demostrar que $(x, y) = x^T A^T A y$ con $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ es producto interno en $\mathbb{R}^2$. (Sugerencia: use el ejercicio anterior).

33. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_2, \mathbb{R}^{2\times 2})$ definida por $T(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) = a_0 B + a_1 BA + a_2 BA^2$ con $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ inversible y $A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{bmatrix}$.
(a) Hallar los valores de α para los cuales $\dim(\mathrm{Nu}(T)) = 1$.
(b) Considerando $B = I$, $\alpha = -1$ y el producto interno en $\mathbb{R}^{2\times 2}$, $(M, N) = m_{11}n_{11} + m_{12}n_{12} + m_{21}n_{21} + m_{22}n_{22}$, expresar $C = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ como $C = C_1 + C_2$, con $C_1 \in \mathrm{Im}(T)$ y $C_2 \perp \mathrm{Im}(T)$.

34. Sabiendo que $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ es la reflexión respecto de cierto plano $\mathcal{S}$ y que $T([1\ 1\ \ 1]^T) = [-1\ -1\ -1]^T$ se pide:
(a) Determinar el plano $\mathcal{S}$ y hallar la representación matricial de T en una base ortogonal $B = \{v_1; v_2; v_3\}$ tal que $v_1 = [1\ 1\ \ 1]^T$.
(b) Demostrar que $T^n = Id$ si n es par y $T^n = T$ si n es impar.

35. Sean $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} :\ f(x) = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2)e^x\}$ y $T \in \mathcal{L}(V, \mathcal{P}_2)$ definida por $T(f) = (f' - f)e^{-x}$.
(a) Demuestre que $\dim(V) = 3$ y halle bases de $\mathrm{Nu}(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$.
(b) Halle los $f \in V$ que minimizan $\|p - T(f)\|$ con $p(x) = x^2 + x$, considerando en $\mathcal{P}_2$ el producto interno $(p, g) = \int_{-1}^{1} p(x)g(x)dx$.

36. Definir $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de modo tal que $T(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}$ siendo

$$\mathcal{S} = \mathrm{gen}\{[1\ -1\ 1]^T; [1\ 0\ -1]^T\},$$

$P_{\mathcal{S}^\perp}(x) = P_{\mathcal{S}^\perp}(T(x))$ y $\dim(\mathrm{Nu}(T)) = 1$. Encontrar $[T^2]_E$ con E la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

37. Considere la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(x) = Ax$ con $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Hallar todos los $b \in \mathbb{R}^3$ que cumplan simultáneamente: i) $\|b\| = 5$, ii) $d(T(x), b)$ es mínima para $\hat{x} = [2\ \ 1]^T$. (Considere el p.i. canónico.)

38. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, V)$ tal que para la base canónica E de $\mathbb{R}^3$ y $B = \{v_1; v_2; v_3\}$ una base de V, $[T]_{EB} = A$ es triangular superior y $a_{11} = -1$, $a_{12} = 1$, $a_{13} = 2$, $a_{22} = 2$, $a_{23} = 0$ y $a_{33} = -1$. Justificar la existencia de T^{-1} y demostrar que $(x, y) = (T^{-1}(x))^T T^{-1}(y)$ es un producto interno en V. Hallar la proyección ortogonal de $v_1 + v_2 + v_3$ sobre $\mathrm{gen}\{v_1 + v_2\}$.