

Ejercicios Adicionales a las Prácticas 5 a 7

1. Dada $T \in \mathcal{L}(V)$ definida por $T(v_1) = 7v_1 - 4v_2$ y $T(v_2) = 2v_1 + v_2$, con $B = \{v_1; v_2\}$ una base de V , se pide:
 - (a) encontrar, si existe, una base C de V tal que la representación matricial de T en esa base sea diagonal.
 - (b) Calcular $[T^k]_B$ para $k \geq 1$.
2. (a) Defina una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T \neq \pm I$, $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$ sea invariante por T y $(T(x), T(y)) = (x, y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^3$.
 (b) Hallar $[T]_E$ con E la base canónica de \mathbb{R}^3 .
3. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_2)$ con $[T]_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a & 1 & a \end{bmatrix}$ y $B = \{1+t; 1-t; t^2\}$. (a) Determinar para qué valores de a resulta diagonalizable T .
 (b) Para $a = 2$, encontrar una base B' de \mathcal{P}_2 tal que la representación matricial de $S = T^3 - T + 2I$ sea diagonal. Hallar $[S]_{B'}$.
4. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_2)$ definida por $T(p) = t^3 p''(t) - 6\alpha p'(t) - 2tp(t)$, ($\alpha \in \mathbb{R}$).
 (a) Demostrar que existe una base B de \mathcal{P}_2 compuesta por autovectores de T si y sólo si $\alpha > 0$.
 (b) Para $\alpha = 1$, encuentre una base B de \mathcal{P}_2 tal que $[T]_B$ sea diagonal.
5. (a) Definir $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tal que: T sea diagonalizable, $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ y \mathcal{S}^\perp sean invariantes por T y $\det([T]_B) = -4$ y traza($[T]_B$) = 3 para toda base B de \mathbb{R}^3 .
 (b) Demuestre que si $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ es diagonalizable y 0 no es autovalor de A , entonces A es inversible y $B = \alpha A^n + \beta (A^{-1})^n$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$ es diagonalizable.
6. (a) Sea $C = B(A^3 - A)B^{-1}$, con $B \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ inversible y $A = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Calcule los autovalores de C y determine si C es diagonalizable.
 (b) Considere la matriz C de (a) con $B = I$ y calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} C^n v$ para $v \in \mathbb{R}^3$.
7. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2 \times 2})$ definida por $T(A) = A + A^T$.
 (a) Encontrar, si existe, una base B de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ en la cual $[T]_B$ sea diagonal.
 (b) Demostrar que para $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2^{n-1}} T^n = T$.
8. (a) Encontrar $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ simétrica e indefinida tal que $A^2 + 3A = 4I$ y que $[1 \ 1 \ 2]^T$ sea un autovector de A .
 (b) Demostrar que $Q(x) = x^T A x$, con A la matriz hallada en (a) verifica $-4\|x\|^2 \leq Q(x) \leq \|x\|^2 \forall x \in \mathbb{R}^3$.
9. Considere la ecuación $6A^2 + \alpha I = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, ($\alpha \in \mathbb{R}$). (a) Demuestre que si $A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ verifica la ecuación, entonces A es diagonalizable. (b) Determine para qué valores de α la ecuación admite una solución $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ simétrica y definida negativa y, para cada uno de esos valores, halle una solución en esas condiciones.

10. (a) Encontrar $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ simétrica tal que $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 = 0\}$ sea el autoespacio asociado al menor autovalor de A , $\det(A) = 2$ y $B = A^3 - A^2 + A - I$ no sea invertible.
 (b) Considere la forma cuadrática $Q(x) = x^T A x$ con A la matriz hallada en (a). Calcule $\max_{\|x\|_2=1} Q(x)$, $\min_{\|x\|_2=1} Q(x)$ y halle los x en los que se alcanza cada extremo.
11. (a) Hallar $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ simétrica e indefinida tal que $\max_{\|x\|_2=1} x^T A x = 3$, $Ax \in \mathcal{S}$ para todo $x \in \mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 = 0\}$ y 6 sea autovalor de $A^2 + A$.
 (b) Demuestre que si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es simétrica y $x^T(A^2 - 4I)x < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ con $x \neq 0$, entonces todos los autovalores de A se encuentran en el intervalo $(-2, 2)$.
12. (a) La energía cinética de un cuerpo rígido que rota con velocidad angular ω ($\omega \in \mathbb{R}^3$) viene dada por la expresión $E(\omega) = \frac{1}{2}(\omega^T M \omega)$, donde M es una matriz simétrica y definida positiva denominada tensor de inercia. Suponiendo $M = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ y que el cuerpo rota con velocidad angular unitaria ($\|\omega\|_2 = 1$), se pide hallar el valor mínimo de E , y las velocidades para las cuales se alcanza tal extremo.
 (b) Suponga que $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es una forma cuadrática tal que $Q([1 \ 1 \ 1]^T) = 3$ y $Q([1 \ 1 \ 0]) = -4$. Si λ_M y λ_m son, respectivamente, el máximo y el mínimo autovalor de la matriz asociada a Q , determinar cuánto pueden valer como mínimo λ_M y como máximo λ_m .
13. (a) Demostrar que en \mathbb{R}^2 , $\|x\| = \sqrt{2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2}$ es una norma inducida por un producto interno.
 (b) Para la norma $\|\cdot\|$ del punto (a), hallar $\max_{\|x\|_2=1} \|x\|$, $\min_{\|x\|_2=1} \|x\|$ y graficar la bola unitaria.
14. (a) Encuentre los puntos de la curva $6x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2 = 1$ más cercanos al origen.
 (b) Demuestre que si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es simétrica y definida positiva entonces existe $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétrica y definida positiva tal que $A = B^T B$.
15. (a) Encuentre los puntos de la curva

$$2x_1^2 + 6x_2^2 - 2\sqrt{5}x_1x_2 = 1$$

de norma Euclídea máxima.

(b) Demuestre las siguientes afirmaciones:

i) Si A es antisimétrica ($A = -A^T$) entonces A^2 es simétrica y semidefinida negativa.

ii) Si A es simétrica y definida positiva y B es semejante ortogonalmente a A , entonces B también es simétrica y definida positiva.

16. (a) Encontrar, entre todos los rectángulos de vértices $\pm(x_1, x_2)$, $\pm(x_1, -x_2)$ con $\frac{x_1^2}{9} + \frac{x_2^2}{4} = 1$, el de área máxima.
 (b) Sea $(x, y)_G = x^T G y$ con $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ un producto interno en \mathbb{R}^n . Demostrar que existe una matriz simétrica y definida positiva $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que $(x, y)_G = (Ax, Ay)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, con (\cdot, \cdot) el producto interno canónico de \mathbb{R}^n .

17. (a) Dada $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ determinar el rango de A , sus valores singulares y la matriz de proyección sobre $\text{Nul}(A^T)$. (Sugerencia: obtenga una DVS de A sin calcular A .)

(b) Dada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ decidir si son ciertas las siguientes afirmaciones:

i) El producto de los valores singulares de A es el determinante de A .

ii) Si todos los valores singulares de A valen 1 entonces A es ortogonal.

18. (a) Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, con $T(x) = [x_1 + x_2 + x_3 \quad x_1 - x_2 + x_3]^T$. Dado $b = [1 \ 2]^T$, hallar entre los $x \in \mathbb{R}^3$ que minimizan $\|T(x) - b\|_2$, el de longitud mínima.
 (b) Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Demostrar las siguientes afirmaciones: i) si las columnas de A son ortonormales entonces los valores singulares de A son todos iguales a 1; ii) Si las filas de A son ortonormales, entonces los valores singulares **no nulos** de A son iguales a 1. (Sugerencia: trabaje con A^T).
19. (a) Sea $A = U\Sigma V^T$ con $\Sigma \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ diagonal, $\Sigma_{11} = 2$, $\Sigma_{22} = 1$ y $\Sigma_{33} = 0$, U y V ortogonales y tales que la última columna de V es $[1/\sqrt{2} \ 0 \ 1/\sqrt{2}]^T$ y la última columna de U es $[1/\sqrt{5} \ 2/\sqrt{5} \ 0]^T$. Hallar las matrices de proyección a los subespacios $\text{col}(A)$ y $\text{nul}(A)$ y calcular $\max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2$.
 (b) Decidir, justificando la respuesta, si las siguientes afirmaciones son ciertas:
 i) Si B es ortogonal A y AB tienen los mismos valores singulares.
 ii) Si A y B tienen los mismos autovalores, entonces A y B tienen los mismos valores singulares.
20. (a) Sabiendo que $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$,
 i) encontrar los valores singulares de A ; ii) hallar la solución por cuadrados mínimos de longitud mínima de $Ax = b$ con $b = [1 \ 1 \ 2]^T$.
 (b) Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa, justificando la respuesta:
 i) Para $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $AA^+ = P_{\text{col}(A)}$ y $A^+A = P_{\text{Nul}(A)^\perp}$, siendo A^+ la pseudoinversa de Moore-Penrose de A .
 ii) Si A es inversible, su inversa es igual a A^+ .
21. (a) Sean $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T(x) = [x_1 + x_2 \quad 2x_1 + 2x_2 \quad x_1 + x_2]^T$ y $b = [4 \ 2 \ 4]^T$. Halle de entre todos los $x \in \mathbb{R}^2$ que minimizan $\|b - T(x)\|_2$ el de norma Euclídea mínima.
 (b) Suponga que $A = U\Sigma V^T$ es una descomposición en valores singulares de $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. i) Demuestre que las columnas de U son autovectores de AA^T y que los autovalores no nulos de AA^T coinciden con los autovalores no nulos de $A^T A$; ii) deduzca de i) que los valores singulares no nulos de A y de A^T coinciden y que $\max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = \max_{\|z\|_2=1} \|A^T z\|_2$.
22. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ definida por $T(x) = [x_2 \quad x_1 + x_2 \quad x_1]^T$. (a) Hallar bases ortonormales de \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 de modo tal que la representación matricial de T en esas bases tenga ceros fuera de la diagonal principal.
 (b) Demostrar que $1 \leq \|T(x)\|_2 \leq \sqrt{3}$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$ con $\|x\|_2 = 1$.
23. (a) Sea $A = BP^T$ con $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ y $P \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ortogonal. Calcular los valores singulares de A y hallar bases ortonormales de $\text{col}(A)^\perp$ y $\text{Nul}(A)$.
 (b) Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Encontrar la relación entre $\det(A)$ y el producto de los valores singulares de A .
24. (a) Demostrar que si $\|\cdot\|_a$ y $\|\cdot\|_b$ son dos normas en un espacio vectorial V entonces $\|\cdot\|_c$, definida por $\|v\|_c = \|v\|_a + \|v\|_b \ \forall v \in V$, es norma en V .
 (b) Demuestre que $\|x\| = \max\{|x_1|, |x_2|\} + \sqrt{x_1^2 + 4x_2^2}$ es norma en \mathbb{R}^2 . (Sugerencia: use a)).
25. (a) Encontrar los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para los cuales $\|x\| = |x_1 - \alpha x_2| + |\alpha x_1 - x_2|$ es norma en \mathbb{R}^2 .
 (b) Sea $\|x\| = \sqrt{2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2}$. Demuestre que $\|\cdot\|$ es norma en \mathbb{R}^2 y grafique la bola unitaria.
26. (a) Dadas $\|\cdot\|_a$ y $\|\cdot\|_b$ normas en un espacio vectorial V , demostrar que $\|x\| = \alpha\|x\|_a + \beta\|x\|_b$ es una norma en V si $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ y α y β no son simultáneamente nulos.
 (b) Demostrar que $\|[x_1 \ x_2]^T\| = 3 \max\{|x_1|, |x_2|\} + 5\sqrt{3x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2}$ es una norma en \mathbb{R}^2 .

27. (a) Demostrar que si $T \in \mathcal{L}(V, W)$ es inyectiva y $\|\cdot\|_W$ es norma en W entonces $\|\cdot\|_V$, definida por $\|v\|_V = \|T(v)\|_W$, es norma en V .
 (b) Demostrar que $\|p\| = |p(1)| + |p(0)| + |p(-1)|$ es norma en \mathcal{P}_2 pero no en \mathcal{P}_3 . (Sugerencia: use (a)).
28. (a) Encontrar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales $\|x\| = |3x_1 + x_2 + x_3| + |kx_1 + (1+k)x_2 - x_3| + |x_1 + x_3|$ es norma en \mathbb{R}^3 .
 (b) Sea $B = \{v_1; \dots; v_n\}$ una base de un espacio vectorial real V y sea $\|\cdot\|$ una norma en \mathbb{R}^n . Demostrar que $\|v\|_B = \|[v]_B\|$ es norma en V .
29. (a) Sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$, $T(p) = (1-t)(p+p')$. Mostrar que $\|p\|_a = |g(0)| + |g(1)| + 2|g(-1)|$ con $g = T(p)$, define una norma en \mathcal{P}_1 .
 (b) Demostrar que en \mathcal{P}_1 , la norma $\|p\|_b = \max\{|g(0)|, |g(1)|, |g(-1)|\}$, con $g = T(p)$, es equivalente a la norma $\|\cdot\|_a$.