Práctica 1 - Espacios Vectoriales

1. Demuestre que $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) con la suma y el producto por un escalar usuales.

2. ¿ Es $\mathbb{C}^n$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con la suma y el producto por un escalar usuales?

3. Compruebe que el conjunto de matrices de orden $p \times q$ a coeficientes reales (complejos) $\mathbb{R}^{p\times q}$ ($\mathbb{C}^{p\times q}$) es un espacio vectorial real (complejo) con la suma y el producto por un escalar usuales.

4. Probar que el conjunto de polinomios a coeficientes reales $\mathcal{P}$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con la suma y el producto por un escalar usuales.

5. Probar que el conjunto de funciones continuas a valores reales definidas en el intervalo $[a, b]$, que denotamos $\mathcal{C}[a, b]$, es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con la suma y el producto por un escalar usuales.

6. Suponga que $A \in \mathbb{R}^{p\times q}$ y que $b \in \mathbb{R}^p$. ¿Qué condición debe cumplir b para que el conjunto $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^q : Ax = b\}$ sea un subespacio de $\mathbb{R}^q$?

7. Empleando la respuesta al ejercicio anterior determine cuales de los siguientes conjuntos son subespacios de los espacios que se indican.

   a) $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^3 :\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \ \wedge\ x_2 - x_1 = 0\}$.

   b) $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n :\ x_1 = x_2 = \cdots = x_r = 0\}$.

   c) $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^4 :\ x_1 + x_2 = 0 \ \wedge\ x_1 - 2x_3 + x_4 = 1\}$.

8. Demuestre que $\mathcal{P}_n$, el conjunto formado por el polinomio nulo y por los polinomios de grado menor o igual a n, es un subespacio de $\mathcal{P}$.

9. Determine cuales de los siguientes conjuntos son subespacios de los espacios vectoriales que se indican.

   a) $\mathcal{S} = \{v \in \mathbb{R}^3 :\ v = [1 + r\ \ r\ \ 4r]^T,\ r \in \mathbb{R}\}$.

   b) $\mathcal{S} = \{v \in \mathbb{R}^2 :\ v = [r\ \ 2r]^T, r \geq 0\}$.

   c) $\mathcal{S} = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} :\ A \text{ es singular}\}$.

   d) $\mathcal{S} = \{p \in \mathcal{P}_3 :\ p(1) = p(2)\}$.

   e) $\mathcal{S} = \{f \in \mathcal{C}[0, 1] :\ f(0) = f(1) = 0\}$.

   f) $\mathcal{S} = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) :\ [f(x)]^2 = f(x)\}$.

10. Sean $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ subespacios de un espacio vectorial ¿ Qué condición debe cumplirse para que $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ también sea subespacio?

11. Determine si $\mathbb{R}^3$ está generado por los vectores $v_1 = [1 \;\; -1 \;\; 2]^T$, $v_2 = [-1 \;\; 0 \;\; 3]^T$, $v_3 = [0 \;\; -1 \;\; 5]^T$ y $v_4 = [3 \;\; -2 \;\; 2]^T$.

12. Encuentre los valores de $k \in \mathbb{R}$ para que los vectores $[1 \;\; k \;\; 0]^T$, $[1 \;\; k-1 \;\; k]^T$ y $[2 \;\; 2k-1 \;\; k^2+k+1]^T$ sean linealmente dependientes en $\mathbb{R}^3$.

13. Determinar cuales de los siguientes conjuntos son linealmente independientes en el espacio vectorial que se indica.

    a) $\{[1 \;\; i]^T, [i \;\; -1]^T\}$ en $\mathbb{C}^2$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial y como $\mathbb{C}$-espacio vectorial.
    b) $\{2,\, 3+t,\, 2-t^2\}$ en $\mathcal{P}$.
    c) $\{1,\, 2+2t,\, 1-t+t^2,\, 2-t^2\}$ en $\mathcal{P}$.
    d) $\{\operatorname{sen}(x),\ \cos(x)\}$ en $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.
    e) $\{\operatorname{sen}^2(x),\ \cos^2(x), 1\}$ en $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.

14. ¿ Cuál es la dimensión de cada uno de los espacios vectoriales mencionados en los ejercicios 1 a 5? ¿ Qué dimensión tiene $\mathcal{P}_n$?

15. Probar que si V es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión n entonces V es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión $2n$.

16. Encuentre bases para los siguientes subespacios:

    a) $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^4 :\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \ \wedge 2x_1 - x_2 + x_4 = 0\}$.
    b) $\mathcal{S} = \{p \in \mathcal{P}_3 :\ p(0) = p(1)\}$.
    c) $\mathcal{S} = \{p \in \mathcal{P}_4 :\ \int_0^1 p(t)dt = 0\}$.
    d) $\mathcal{S} = \{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} :\ A = A^T\}$.

    En cada caso, extienda la base del subespacio que obtuvo a una base del espacio vectorial correspondiente.

17. Encuentre una base del subespacio generado por las matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

18. Para cada una de las siguientes matrices A, halle bases de los subespacios fundamentales: $\operatorname{Col}(A)$, $\operatorname{Nul}(A)$, $\operatorname{Fil}(A)$ y $\operatorname{Nul}(A^T)$. Compare sus dimensiones. Calcule $\operatorname{rango}(A)$ y $\operatorname{rango}(A^T)$.

$$\text{i) } A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 9 & -7 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 5 & -6 & 10 & 7 \end{bmatrix}, \ \text{ii) } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \ \text{iii) } A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

19. Sea $A \in K^{n\times m}$ ($K = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$), $A = [u_1\ u_2 \cdots u_m]$ con u_i la i-ésima columna de A. Deducir, a partir del hecho que

$$Ax = x_1u_1 + x_2u_2 \cdots + x_mu_m, \quad \text{si } x = [x_1 \cdots x_m]^T,$$

lo siguiente:

(a) $b \in \text{Col(A)}$ si y sólo si existe x tal que $Ax = b$.

(b) La ecuación$Ax = b$ tiene a lo sumo una solución si y sólo si las columnas de A son linealmente independientes.

(c) La ecuación $Ax = b$ tiene a lo sumo una solución si y sólo si $\text{rango}(A) = m$.

(d) La ecuación $Ax = 0$ admite solución no trivial si y sólo si las columnas de A son linealmente dependientes.

(e) La ecuación $Ax = b$ tiene solución para todo b si y sólo si $\text{rango}(A) = n$.

(f) La ecuación $Ax = b$ tiene solución si y sólo si A y la matriz ampliada $\tilde{A} = [A\ b]$ tienen igual rango.

20. Sean $A \in K^{n\times m}$ ($K = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$), $A = [u_1\ u_2 \cdots u_m]$ con u_i la i-ésima columna de A y $B \in K^{r\times n}$. Explicar, a partir del hecho que

$$BA = [Bu_1\ \ Bu_2 \cdots Bu_m],$$

por qué $\text{Col}(BA) \subseteq \text{Col}(B)$. Dar ejemplos no triviales ($A \neq I, 0,\ B \neq I, 0$) en los cuales se cumpla la inclusión estricta y otros en donde valga la igualdad.

21. Dados los subespacios de $\mathbb{R}^4$, $\mathcal{S}_1 = \text{gen}\{[1\ \ 1\ \ 2\ \ 0]^T, [2\ \ 0\ \ 3\ \ -1]^T\}$ y $\mathcal{S}_2 = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$, hallar bases de $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ y de $\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2$.

22. Sean $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ subespacios de un espacio vectorial V de dimensión finita ¿ Qué relación existe entre las dimensiones de $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ y $\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2$?

23. Demuestre que $\mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_2 = \mathbb{R}^{3\times 3}$ con $\mathcal{S}_1 = \{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} :\ A = A^T\}$ y $\mathcal{S}_2 = \{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} : A = -A^T\}$. ¿ Es cierta la igualdad precedente en $\mathbb{R}^{n\times n}$?

24. i) Determinar si la suma de los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^5$,

$$\mathcal{S}_1 = \text{gen}\{[1\ 1\ 2\ 0\ 1]^T, [2\ 0\ 3\ 0\ 1]^T\},\ \mathcal{S}_2 = \text{gen}\{[-1\ 1\ -2\ 1\ 1]^T\},\ \mathcal{S}_3 = \text{gen}\{[0\ 1\ 0\ 1\ 1]^T\},$$

es directa y hallar una base del mismo.
ii) Idem anterior pero con

$$\mathcal{S}_1 = \text{gen}\{[1\ 1\ 2\ 0\ 1]^T, [2\ 0\ 3\ 0\ -1]^T\},\ \mathcal{S}_2 = \text{gen}\{[-1\ 0\ -2\ 1\ 1]^T\},\ \mathcal{S}_3 = \text{gen}\{[1\ 1\ 1\ 2\ 2]^T\}.$$

25. Suponga que $\{v_1, v_2\}$, $\{v_3, v_4, v_5\}$ y $\{v_6, v_7\}$ son, respectivamente, bases de los subespacios $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ y $\mathcal{S}_3$ de un espacio vectorial V. Demuestre que $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_7\}$ genera $\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2 + \mathcal{S}_3$ y que la suma resulta directa si y sólo si B resulta base. Generalize.

26. Encuentre las coordenadas de v en la base ordenada B en cada uno de los siguientes casos:

   a) $v = [1\ \ 2\ \ 3]^T$ y $B = \{[1\ \ 1\ \ 0]^T; [1\ \ 0\ \ 1]^T; [0\ \ 1\ \ 1]^T\}$.

   b) $v = a + bt + ct^2$ y $B = \{1 + t + t^2;\ 1 + t;\ 1\}$.

27. Sea $B = \{v_1; v_2; \ldots; v_n\}$ una base ordenada del K-espacio vectorial ($K = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) V y sea $c_B : V \to K^n$ la aplicación que asigna a cada $v \in V$ su correspondiente vector de coordenadas en la base B, $c_B(v) \in K^n$.

   a) Demuestre lo siguiente:

      1) $c_B(v + v') = c_B(v) + c_B(v')$ y $c_B(\alpha v) = \alpha c_B(v)$ para todo $v, v' \in V$ y para todo $\alpha \in K$.

      2) c_B es biyectiva.

      3) $\{u_1, \ldots, u_r\}$ es l.i. en V si y sólo si $\{c_B(u_1), \ldots, c_B(u_r)\}$ es l.i. en $\mathbb{R}^n$.

   b) Hallar la expresión de c_B^{-1}.

28. Resolver los ejercicios 16 y 17 trabajando en coordenadas respecto de una base B a elección.

29. Sean $E = \{e_1; \ldots; e_n\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$ y $B = \{v_1; \ldots; v_n\}$ una base ordenada de $\mathbb{R}^n$. ¿ Cuál es la expresión de la matriz de cambio de coordenadas de la base B a la base E, C_{BE}?

30. Supongamos que B, B' y B'' son tres bases ordenadas del espacio vectorial V. ¿Cómo puede obtenerse $C_{BB''}$ a partir de $C_{BB'}$ y $C_{B'B''}$?

31. Hallar la matriz de cambio de bases $C_{BB'}$ en los siguientes casos

   a) $B = \{[1\ 2\ 3]^T; [1\ 0\ 1]^T; [3\ 4\ 6]^T\}$ y $B' = \{[1\ -1\ 0]^T; [1\ -2\ 3]; [1\ 1\ 0]^T\}$.

   b) $B = \{1;\ t - 1;\ (t - 1)^2\}$ y $B' = \{1;\ t - 2;\ (t - 2)^2\}$.

Adicionales Práctica 1 - Wronskiano

1. Halle el wronskiano de los siguientes conjuntos de funciones y con su auxilio, cuando sea posible, determine si son linealmente independientes.
   (a) $1, x, \dots, x^n$.
   (b) $x, \frac{1}{x}$
   (c) $e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}$, $(\alpha \in \mathbb{R})$.
   (d) e^x, xe^x, e^{-x}.
   (e) $\operatorname{sen} x, \operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{4})$.
   (f) $\arccos(x), \operatorname{arcsen}(x)$.
   (g) $1, \operatorname{sen}^2 x, \cos 2x$.
   (h) $\operatorname{sen} x, \cos\ x, \cos(x + \frac{\pi}{3})$.
   (i) $e^{-3x}\operatorname{sen} 2x, e^{-3x}\cos\ 2x$.
   (j) $\operatorname{senh}(\alpha x), \cosh(\alpha x)$, $(\alpha \in \mathbb{R})$.

2. Hallar el wronskiano de las funciones $1, e^x, e^{x^2-1}, \cos x, e^{x-1}$.

3. Probar que el conjunto de funciones $\{x^2, x|x|\}$ es linealmente independiente a pesar de que su wronskiano es idénticamente nulo.

4. Suponga que f_1 y f_2 son funciones derivables en un intervalo abierto $\mathcal{I}$. Sean $g_1 = c_{11}f_1 + c_{21}f_2$ y $g_2 = c_{12}f_1 + c_{22}f_2$ con $c_{ij} \in \mathbb{R}$. Pruebe que

$$W(g_1, g_2)(x) = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} W(f_1, f_2)(x) \quad \forall x \in \mathcal{I}.$$

   Generalice al caso en que se tienen funciones $f_1, \dots, f_n$, que son $n-1$ veces derivables en $\mathcal{I}$ y funciones $g_1, \dots, g_n$ que son combinaciones lineales de las funciones f_i.

Práctica 2 - Producto Interno

1. Encuentre el ángulo entre los vectores de $\mathbb{R}^3$

$$u = [1 \ \ 2 \ \ -1]^T \quad \text{y} \quad v = [2 \ \ 1 \ \ -3]^T,$$

considerando primero el producto interno canónico $(u, v) = u^T v$ y luego el producto interno (compruébelo) $(u, v) = 3u_1v_1 + 2u_2v_2 + u_3v_3$.

2. Encuentre todos los vectores de $\mathbb{R}^3$ que son ortogonales a $w = [1 \ \ 2 \ \ -1]^T$ con el producto interno canónico. ¿Qué clase de conjunto forman?

3. (a) Sea V un espacio vectorial con producto interno, y sea $w \in V$. Demuestre que el conjunto V_0, compuesto por los vectores de V que son ortogonales a w, es un subespacio de V.
   (b) Demuestre que en el caso en que $V = \mathbb{R}^n$ (ó $\mathbb{C}^n$), $w \neq 0$ y el producto interno es el canónico, V_0 es un subespacio de dimensión $n - 1$.

4. (a) Encontrar las condiciones que deben cumplir los coeficientes a_{11}, a_{12}, a_{21} y a_{22} para que la expresión

$$(u, v) = a_{11}u_1v_1 + a_{12}u_1v_2 + a_{21}u_2v_1 + a_{22}u_2v_2 \tag{1}$$

   defina un producto interno en $\mathbb{R}^2$.
   (b) Compruebe que la expresión (1) puede escribirse en forma compacta $(u, v) = u^T A v$ con $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. ¿Cómo pueden expresarse las condiciones que halló en el punto anterior en términos de la matriz A?

5. Sea V un espacio vectorial con producto interno y sea $\|\cdot\|$ la norma inducida. Probar lo siguiente:
   (a) $|\|u\| - \|v\|| \leq \|u - v\|$ para todo u y v en V.
   (b) Si u y v son ortogonales entonces $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ (Pitágoras). Mostrar que vale la recíproca si el espacio vectorial es real.
   (c) $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$ $\forall u, v$. (Esta identidad es conocida como la ley del paralelogramo.)
   (d) Si V es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial,

$$(u, v) = \frac{1}{4}(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2) \quad \forall u, v.$$

   (Fórmula de polarización).

(e) Si V es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial,

$$(u, v) = \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2) - \frac{i}{4}(\|u+iv\|^2 - \|u-iv\|^2) \quad \forall u, v.$$

(Fórmula de polarización).

6. Sea B una base ordenada de un espacio vectorial real (o complejo) V de dimensión n, y sea c_B el isomorfismo de coordenadas.

   (a) Sea $(\cdot, \cdot)$ un producto interno en $\mathbb{R}^n$ (o en $\mathbb{C}^n$), y sea

   $$(u, v)_V = (c_B(u), c_B(v)) \quad \forall u, v \in V.$$

   Demuestre que $(\cdot, \cdot)_V$ es un producto interno en V.

   (b) Demuestre que si $(\cdot, \cdot)_V$ es un producto interno en V, entonces

   $$(u, v) = (c_B^{-1}(u), c_B^{-1}(v))_V \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^n \ (\mathbb{C}^n)$$

   es un producto interno en $\mathbb{R}^n$ (o en $\mathbb{C}^n$).

   (c) Explique en palabras que significan (a) y (b).

7. Demuestre que en $\mathcal{P}_2$,

   $$(a_0 + a_1 t + a_2 t^2, b_0 + b_1 t + b_2 t^2) = a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2$$

   define un producto interno tal que la base $B = \{1;\ t;\ t^2\}$ es ortonormal.

8. (a) Demuestre que

   $$(f, g) = \int_0^1 f(t) g(t)\, dt$$

   es un producto interno en $\mathcal{C}[0, 1]$. Escriba la desigualdad de Schwarz para este caso.

   (b) Demuestre que el producto interno definido en el punto anterior, induce un producto interno en $\mathcal{P}_n$; generalice este resultado para subespacios V_0 de espacios vectoriales V que tienen un producto interno.

   (c) Calcule el ángulo entre t y $t^2 - t + 1$. Halle $a \in \mathbb{R}$ para que $f \perp g$, siendo $f(t) = t^2 + at$ y $g(t) = t - 1$.

9. Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con producto interno y $B = \{v_1; v_2; v_3\}$ una base ordenada de V.

   (a) Demuestre que $(u, v) = c_B(u)^T G c_B(v)$ con

   $$G = \begin{bmatrix} (v_1, v_1) & (v_1, v_2) & (v_1, v_3) \\ (v_2, v_1) & (v_2, v_2) & (v_2, v_3) \\ (v_3, v_1) & (v_3, v_2) & (v_3, v_3) \end{bmatrix}.$$

A la matriz G se la denomina matriz del producto interno en la base ordenada B. Note que G es simétrica, es decir, $G = G^T$, y definida positiva, es decir, $x^T Gx > 0$ para cualquier $x \in \mathbb{R}^3$ distinto de cero.
¿Qué forma adquiere G si la base B es ortogonal? ¿y si la base es ortonormal?
Recíprocamente, pruebe que dada una matriz G simétrica y definida positiva, $(u, v) = c_B(u)^T G c_B(v)$ es un producto interno en V.

(b) Generalice el punto anterior al caso en que la base B está compuesta por r vectores, es decir, al caso en que V sea de dimensión r.

(c) ¿De qué forma son todos los posibles productos internos en $\mathbb{R}^n$?

(d) Considere $V = \mathcal{P}_2$, $B = \{1;\ t;\ t^2\}$ y el producto interno definido en el ejercicio 8. Halle la matriz G y por medio de ella calcule $(t, t^2 - t + 1)$.

(e) Modificando adecuadamente los enunciados, pruebe (a) y (b) en el caso en que V sea un espacio vectorial complejo.

(f) Halle la matriz G en el caso en que $V = \mathbb{C}^3$, $B = \{[1\ \ i\ \ 0]^T; [1\ \ 1\ \ 1]^T; [i\ \ 0\ \ 0]^T\}$ y el producto interno es el canónico ($(u, v) = u^H v$).

10. Suponga que $(\cdot, \cdot)$ es un producto interno en $\mathbb{R}^3$ tal que $B = \{[1\ 1\ -1]^T; [0\ 1\ 1]^T; [-1\ 1\ 0]^T\}$ es una base ortonormal.

    (a) Calcule (v_1, v_2) con $v_1 = [1\ \ -1\ 1]^T$ y $v_2 = [-1\ 2\ 2]^T$.

    (b) Halle la matriz del producto interno en la base canónica.

11. Pruebe que una matriz G definida positiva es inversible. (Sugerencia: pruebe que la ecuación $Gx = 0$ tiene solución única.)
Deduzca de lo anterior que la matriz de un producto interno en una base ordenada es siempre inversible.

12. Sea $\{v_1, \cdots, v_r\}$ un conjunto ortogonal del espacio vectorial V. Demuestre que

$$\|\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r\|^2 = |\alpha_1|^2 \|v_1\|^2 + \cdots + |\alpha_r|^2 \|v_r\|^2.$$

13. Compruebe que $B = \{1; t - \frac{1}{2}; t^2 - t + \frac{1}{6}\}$ es una base ortogonal de $\mathcal{P}_3$ con el producto interno definido en el ejercicio 8. Halle las coordenadas de $p = t^2 - 1$ en la base B y luego calcule a partir de éstas la norma de p.

14. Sean $u = [1\ \ 1\ \ 1]^T$ y $v = [1\ \ 2\ \ -1]^T$. Escriba u como la suma de dos vectores, uno paralelo a v y otro ortogonal a v. (Considere el producto interno canónico).

15. Halle el punto de $\mathcal{S}$ más cercano a $v \in V$ y calcule $d(v, S)$ en cada uno de los siguientes casos:

    (a) $\mathcal{S} = \text{gen}\{[1\ \ 1\ \ 1]^T, [1\ -1\ \ 0]^T\}$, $v = [1\ \ 0\ \ 0]^T$ y el producto interno es el estándar de $\mathbb{R}^3$.

(b) $\mathcal{S} = \text{gen}\{[i \ \ -1 \ \ 1+i]^T\}$, $v = [a \ \ b \ \ c]^T$ y el producto interno es el estándar de $\mathbb{C}^3$.

(c) $\mathcal{S} = \text{gen}\{1, t - \frac{1}{2}\}$, $v = t^2 + t + 1$ y el producto interno es el definido en el ejercicio 8.

16. Sea $P_{\mathcal{S}}$ la proyección ortogonal sobre el subespacio $\mathcal{S}$ del espacio vectorial V. Demuestre lo siguiente:

    (a) $P_{\mathcal{S}} v = v$ para todo $v \in \mathcal{S}$.

    (b) $\|v\|^2 = \|P_{\mathcal{S}} v\|^2 + \|v - P_{\mathcal{S}} v\|^2$ para todo $v \in V$.

    (c) $\|P_{\mathcal{S}} v\| \leq \|v\|$ para todo $v \in V$ (¿en qué caso se cumple la igualdad?).

    (d) Si $w \in \mathcal{S}$ y $(v - w) \perp \mathcal{S}$, entonces $w = P_{\mathcal{S}} v$.

    (e) Todo $v \in V$ se puede escribir $v = v_1 + v_2$ con $v_1 \in \mathcal{S}$ y $v_2 \perp \mathcal{S}$. ¿Es única la descomposición?

17. Mediante el procedimiento de Gram-Schmidt halle una base ortogonal del subespacio $\mathcal{S}$ generado por los siguientes vectores de $\mathbb{R}^4$:

$$[1 \ \ 2 \ \ 2 \ \ 1]^T, \quad [1 \ \ 1 \ \ -1 \ \ -1]^T, \quad [2 \ \ -1 \ \ -1 \ \ 2]^T,$$

    y luego calcule $P_{\mathcal{S}} w$ para $w = [1 \ \ 1 \ \ 0 \ \ 0]^T$.

18. Hallar una base ortonormal de $\mathcal{P}_2$ con el producto interno definido en el ejercicio 8, a partir de la base canónica $\{1, \ t, \ t^2\}$.

19. Calcule la proyección ortogonal de $u = [1 \ \ 1 \ \ 0]$ al subespacio generado por $v_1 = [1 \ \ -1 \ \ 0]^T$ y $v_2 = [1 \ \ 0 \ \ 1]^T$ sin ortogonalizar el conjunto $\{v_1, v_2\}$. (Sugerencia: emplee (d) del ejercicio 16.)

20. Sean V un espacio vectorial con producto interno y $\mathcal{S} = \text{gen}\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$. Probar que $w \in \mathcal{S}^\perp$ si y sólo si $(w, v_1) = (w, v_2) = \cdots = (w, v_r) = 0$.

21. Hallar $\mathcal{S}^\perp$ en los siguientes casos:

    (a) $\mathcal{S} = \text{gen}\{[1 \ \ -1 \ \ 1 \ \ 0]^T, \ [1 \ \ -1 \ \ 0 \ \ 0]^T\}$ y el producto interno es el canónico de $\mathbb{R}^4$.

    (b) $\mathcal{S}$ como en el punto anterior, pero $(u, v) = 2u_1v_1 + u_2v_2 + 3u_3v_3 + u_4v_4$.

    (c) $\mathcal{S}$ es el subespacio de $\mathbb{C}^3$ generado por $[1 \ \ 0 \ \ 1+i]^T$ y $[2 \ \ 1 \ \ i]^T$ y el producto interno es el canónico.

22. (a) Sean $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n : \ Ax = 0\}$. Demuestre que $\mathcal{S}^\perp$ está generado por las filas de la matriz A si se considera el producto interno canónico. ¿Qué relación puede establecer entre $\dim(\mathcal{S})$, $\dim(\mathcal{S}^\perp)$ y el rango de la matriz A? Si reemplaza $\mathbb{R}$ por $\mathbb{C}$ ¿quiénes generan $\mathcal{S}^\perp$?

(b) Halle bases de los complementos ortogonales de los siguientes subespacios:

i. $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$.

ii. $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = x_2 = \ldots = x_r = 0\}$.

iii. $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{C}^4 : x_1 - ix_2 + (1-i)x_3 = 0 \ \wedge \ (2+i)x_2 + x_4 = 0\}$.

(c) Describa el subespacio $\mathcal{S}$ del ejercicio 15 (a) por medio de ecuaciones lineales. ¿ Cuál es el número mínimo de ecuaciones que se necesitan? Justifique su respuesta.

23. Sea $\mathcal{S}$ un subespacio de un espacio vectorial V de dimensión finita dotado de un producto interno. Demostrar que $P_{\mathcal{S}^\perp} v = v - P_{\mathcal{S}} v$ para todo $v \in V$.
¿ Cómo emplearía la relación entre $P_{\mathcal{S}}$ y $P_{\mathcal{S}^\perp}$ para calcular la proyección a $\mathcal{S}$, en el caso en que $\mathcal{S}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ (ó de $\mathbb{C}^n$) descripto por ecuaciones lineales y el producto interno es el estándar?

24. Sea V un espacio vectorial con producto interno y sean $B = \{v_1, \ldots, v_p\}$ y $B' = \{w_1, \ldots, w_q\}$ bases ortogonales de los subespacios $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}^\perp$ respectivamente. Explique porqué $\{v_1, \ldots, v_p, w_1, \ldots, w_q\}$ es una base ortogonal de V.

25. Considere $V = \mathcal{P}_n$ con $n \geq 2$ y el producto interno $(f, g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$. Dado el subespacio $\mathcal{S} = \{p \in V : \ \int_0^1 p(t)(1+t)dt = 0 \ \wedge \ \int_0^1 p(t)(1-t)dt = 0\}$ se pide:

(a) Hallar una base ortogonal de $\mathcal{S}^\perp$.

(b) Hallar la proyección ortogonal de $g(t) = t^2$ sobre $\mathcal{S}^\perp$.

(c) Hallar el elemento de $\mathcal{S}$ que mejor aproxima a g y calcular $d(g, \mathcal{S})$.

26. Considere en $\mathbb{R}^3$ el producto interno canónico y el subespacio $\mathcal{S} = \text{gen}\{[1\ 1\ 0]^T, [1\ 1\ -1]^T\}$. Encuentre todos los v tales que $P_{\mathcal{S}}(v) = [2\ 2\ -1]^T$ y $\|v\| = 5$.

En los siguientes ejercicios considere el producto interno canónico de $\mathbb{R}^n$.

27. (a) Sean $w \in \mathbb{R}^n$, $w \neq 0$, y $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n : \ w^T x = 0\}$. Demuestre que $d(v, \mathcal{S}) = |w^T v| / \|w\|$ y que $P_{\mathcal{S}} v = v - \frac{w^T v}{w^T w} w$.

(b) Sea $\mathcal{W} = \{x \in \mathbb{R}^n : \ w^T x = b\}$ con w como en el punto anterior y $b \in \mathbb{R}$ no necesariamente nulo.

i. Demuestre que si $w_0 \in \mathcal{W}$, entonces $d(v, \mathcal{W}) = d(v - w_0, \mathcal{S})$, siendo $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n : \ w^T x = 0\}$. Interprete la igualdad geométricamente.

ii. Demostrar que $d(v, \mathcal{W}) = |w^T v - b| / \|w\|$.

28. Sean w y $\mathcal{S}$ como en (a) del ejercicio anterior. Para cada $v \in \mathbb{R}^n$ sea $T(v) = v - 2\frac{w^T v}{w^T w}$.

(a) Considere $w = [1\ -1]^T$ y $v = [1\ 2]^T$. Grafique juntos $\mathcal{S}$, v y $T(v)$.

(b) Compruebe que $T(v) = P_{\mathcal{S}} v - P_{\mathcal{S}^\perp} v$.

(c) Describa geométricamente la transformación T.

(d) Demuestre que para todo $v \in \mathbb{R}^n$, $T(v) = Hv$, siendo $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matriz $H = I - \frac{2}{w^T w} w w^T$. ($H$ es la matriz de Householder asociada al vector w).

(e) Demostrar que H es simétrica, no singular y que $H^{-1} = H = H^T$.

(f) Demostrar que las columnas de la matriz H forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$.

29. Hallar el simétrico de v respecto del hiperplano $\mathcal{S}$ en cada uno de los siguientes casos:

(a) $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^3 :\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$ y $v = [a\ b\ c]^T$.

(b) $\mathcal{S} = \text{gen}\{[-2\ \ 1\ 0\ \ 0]^T, [-1\ \ 0\ \ 1\ \ 0]^T, [0\ \ 0\ \ 0\ \ -1]^T\}$ y $v = [1\ \ 1\ \ 0\ \ 1]^T$.

30. Encuentre una matriz de Householder H tal que $H[1\ \ 1\ \ -1]^T = [\sqrt{3}\ \ 0\ \ 0]^T$.

Práctica 3 - Descomposición QR-Cuadrados Mínimos

Nota: considere en todos los ejercicios el producto interno canónico.

1. Suponga que las columnas de $Q \in \mathbb{R}^{n\times m}$ ($\mathbb{C}^{n\times m}$) son ortogonales dos a dos. ¿Qué puede decir acerca de Q^TQ (Q^HQ)?

2. Se dice que $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ($\mathbb{C}^{n\times n}$) es una matriz de proyección si $P^T = P$ ($P^H = P$) y $P^2 = P$. Demuestre que si P es una matriz de proyección, entonces para cada $v \in \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$), Pv es la proyección ortogonal de v sobre el subespacio $\mathrm{col}(P)$, siendo $\mathrm{col}(P)$ el subespacio generado por las columnas de P.

3. Sea $w \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|w\| = 1$. Compruebe que $P = ww^T$ es una matriz de proyección. ¿Cuál es el rango de P? ¿sobre qué subespacio proyecta?

4. Demuestre que P es una matriz de proyección si y sólo si $I_n - P$ es una matriz de proyección. ¿Sobre qué subespacio proyecta $I_n - P$?

5. ¿Verdadero o falso?

   (a) Si las columnas de la matriz Q generan el subespacio $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ entonces QQ^T es la matriz de proyección sobre $\mathcal{S}$.

   (b) Si las columnas de la matriz Q generan el subespacio $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ y son ortogonales, entonces QQ^T es la matriz de proyección sobre $\mathcal{S}$.

   (c) Si las columnas de la matriz Q son una base ortonormal del subespacio $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ entonces QQ^T es la matriz de proyección sobre $\mathcal{S}$.

   (d) Si las matrices P y P' proyectan sobre el mismo subespacio entonces $P = P'$.

   (e) Si $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz de proyección y $P \neq I_n$, entonces el rango de P es a lo sumo $n-1$.

   (f) Si P es una matriz de proyección y existe P^{-1}, entonces $P = I_n$.

6. Encuentre la matriz P de proyección sobre el subespacio $\mathcal{S}$ en cada uno de los siguientes casos:

   (a) $\mathcal{S} = \mathrm{gen}\{[1\ \ 2\ \ 2]^T,\ [-2\ \ 2\ \ -1]^T\}$.

   (b) $\mathcal{S}^\perp = \mathrm{gen}\{[1\ \ 1\ \ 3]^T,\ [-1\ \ 1\ \ -1]^T\}$.

   (c) $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^4 :\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$.

7. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Encuentre la matriz de proyección a $\mathrm{col}(A)$ sabiendo que $\mathrm{rango}(A) = 2$ y que para cierta matriz $B \in \mathbb{R}^{3\times 2}$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

8. Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$. Encuentre la matriz de proyección a $\text{col}(A)$ sabiendo que $\text{rango}(A) = 3$ y que $x^T A = 0$ si $x^T = [1\ \ 1\ \ 1\ \ 1]$.

9. Demuestre que si $P \in K^{n\times n}$ ($K = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) es una matriz de proyección de rango k entonces $I_n - P$ tiene rango $n-k$.

10. Considere la matriz

$$P = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 5/6 & -1/6 \\ 1/3 & -1/6 & 5/6 \end{bmatrix}.$$

i) Compruebe que es una matriz de proyección.
ii) Encuentre una matriz de columnas ortonormales $Q \in \mathbb{R}^{3\times k}$ con $k = \text{rango}(P)$, tal que $P = QQ^T$.

11. Encontrar la descomposición QR, tanto no normalizada como normalizada de las siguientes matrices:
a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

12. Suponga que A es una matriz real $n \times m$ tal que $A = Q_0 R_0$, con $Q_0 \in \mathbb{R}^{n\times m}$ de columnas ortogonales, y $R_0 \in \mathbb{R}^{m\times m}$ triangular superior y con unos en la diagonal principal. Demuestre que las columnas de Q_0 forman un conjunto generador ortogonal de $\text{col}(A)$, y que las primeras i columnas de Q_0 generan el espacio generado por las primeras i columnas de A.
Nota: resuelva el ejercicio sin suponer que Q_0 y R_0 son las que se obtienen aplicando el método de ortogonalización de Gram-Schmidt a las columnas de A.

13. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ de rango k tal que $A = QR$ con Q y R tales que $Q \in \mathbb{R}^{n\times k}$ tiene columnas ortonormales, y $R \in \mathbb{R}^{k\times m}$ es triangular superior y de rango k. Demuestre que las columnas de Q forman una base ortonormal de $\text{col}(A)$, y que $P = QQ^T$ es la matriz de proyección sobre $\text{col}(A)$.
Sugerencia: demuestre primero que si A y B son matrices tales que $A = BC$ para cierta matriz C, entonces cada columna de A es combinación lineal de las columnas de B, en otras palabras, $\text{col}(A) \subset \text{col}(B)$.
Nota: resuelva el ejercicio sin suponer que Q y R son las que se obtienen aplicando el método de ortogonalización de Gram-Schmidt a las columnas de A.

14. Explique por qué

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = QR,$$

con $Q = I_3$ y $R = A$ no es una descomposición QR normalizada de A. ¿Es posible obtener una descomposición QR normalizada de A a partir de las columnas de Q?

15. Encontrar una descomposición QR normalizada de la matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_{n-1} \\ 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_{n-1} \end{bmatrix}.$$

16. Encontrar, resolviendo las ecuaciones normales, todas las soluciones por cuadrados mínimos de la ecuación $Ax = b$:

    (a)

    $$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

    (b)

    $$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

17. Sean

    $$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 11 \\ -9 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad v = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

    Calcule Au y Av, y compárelos con b. ¿Podría ser u la solución por cuadrados mínimos de $Ax = b$? (Conteste sin calcular las soluciones por cuadrados mínimos.)

18. En cada caso, resuelva por cuadrados mínimos la ecuación $Ax = b$ utilizando una descomposición QR normalizada de la matriz A:

    (a)

    $$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

    (b)

    $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

19. Califique cada afirmación como verdadera o falsa. Justifique cada respuesta.

   (a) El problema general de cuadrados mínimos consiste en encontrar los $x \in \mathbb{R}^n$ que hacen mínima la distancia entre Ax y b.

   (b) Una solución por cuadrados mínimos de $Ax = b$ es un vector $\hat{x}$ tal que $A\hat{x} = \hat{b}$, siendo $\hat{b}$ la proyección ortogonal de b sobre el espacio columna de A.

   (c) Una solución por cuadrados mínimos de $Ax = b$ es un vector $\hat{x}$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $\|b - Ax\| \leq \|b - A\hat{x}\|$.

   (d) La ecuación $A^T Ax = A^T b$ siempre tiene solución.

   (e) La ecuación $A^T Ax = A^T b$ siempre tiene solución única.

   (f) Si las columnas de A son linealmente independientes, entonces la solución por cuadrados mínimos de $Ax = b$ es única.

   (g) Si b pertenece a $\text{col}(A)$, entonces toda solución de $Ax = b$ es una solución por cuadrados mínimos.

20. Suponga que $x = [1 \;\; 2 \;\; -1]^T$ es una solución por cuadrados mínimos de la ecuación $Ax = b$ con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

   i) Encuentre todas las soluciones por cuadrados mínimos de tal ecuación.
   ii) Sabiendo que $\|b\| = 3$, halle los posibles valores de b .

21. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$

   (a) Demuestre que $\text{Nul}(A) = \text{Nul}(A^T A)$. (Sugerencia: demuestre primero que $x^T A^T Ax = 0 \Leftrightarrow Ax = 0$.)

   (b) Demuestre a partir del punto anterior que $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^T A)$. (Sugerencia: emplee la relación que existe entre el rango de una matriz B, la dimensión de $\text{Nul}(B)$ y el número de columnas de B.)

   (c) Demuestre que $A^T A$ es inversible si y sólo si $\text{rango}(A) = m$, es decir, si y sólo si las columnas de A son linealmente independientes.

   (d) Demuestre que el problema de cuadrados mínimos $Ax = b$ tiene solución única si y sólo si las columnas de A son linealmente independientes, y que en tal caso la única solución es $\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b$ (a la matriz $A^\sharp = (A^T A)^{-1} A^T$ se la denomina matriz pseudoinversa de A). Compruebe además que $A^\sharp A = I_n$.

22. Calcular, si existe, $A^\sharp$ para cada matriz A del ejercicio 16.

23. Sea $B = \{u_1, \ldots, u_m\} \subset \mathbb{R}^n$ una base del subespacio $\mathcal{S}$ y sea $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ la matriz que tiene por i-ésima columna a u_i. Demuestre que $P = A(A^T A)^{-1} A^T = AA^\sharp$ es la matriz de proyección sobre $\mathcal{S}$.

Empleando este resultado, halle la matriz de proyección sobre el subespacio $\mathcal{S}$ del ejercicio 6 (a).

24. Hallar la recta que ajusta mejor a los siguientes puntos y graficar en cada caso:

    (a) $(0,1)$, $(1,1)$, $(2,2)$ y $(3,2)$.

    (b) $(1,1)$, $(1,2)$ y $(1,-1)$.

25. Demostrar que dados los puntos $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, la recta que mejor se ajusta a ellos es única si y sólo si por lo menos dos de los puntos tienen abscisas diferentes.

26. La siguiente tabla muestra, para algunos instantes t, la posición medida $p(t)$ de un móvil que se desplaza en linea recta.

t (seg.)	1	2	3	4	5
p (m.)	5.07	10.43	15.94	21.63	27.49

    (a) Suponiendo que la velocidad del móvil es constante, halle la función de posición $p(t)$ que ajusta mejor a los datos y estime la velocidad.

    (b) Suponiendo ahora que la aceleración del móvil es constante, encuentre la función $p(t)$ que ajusta mejor a los datos y estime la aceleración.

    (c) Si tuviera que elegir entre la hipótesis efectuada en (a) y la hipótesis efectuada en (b), ¿por cuál se inclinaría? ¿por qué?

27. Dados los puntos $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, denominemos: $\sum x = \sum_{i=1}^n x_i$, $\sum x^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$, $\sum y = \sum_{i=1}^n y_i$, $\sum xy = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. Demuestre que la recta $y = \alpha + \beta x$ es la que mejor ajusta a los puntos dados si y sólo si α y β verifican

$$\begin{aligned} n\alpha + \beta \sum x &= \sum y \\ \alpha \sum x + \beta \sum x^2 &= \sum xy. \end{aligned}$$

i) Encuentre fórmulas para α y β.
ii) Compruebe que la recta que mejor ajusta a los puntos dados siempre pasa por el punto $P = \left(\frac{\sum x}{n}, \frac{\sum y}{n}\right)$.

Práctica 4 - Transformaciones Lineales

1. Determine cuáles de las siguientes son transformaciones lineales:

   (a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $T([x_1\ x_2]^T) = x_1 + 2x_2$.

   (b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T([x_1\ x_2]^T) = [1 + x_2\ \ x_1]^T$.

   (c) $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $T(z) = \overline{z}$, considerando a $\mathbb{C}$ primero como $\mathbb{C}$-espacio vectorial y luego como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

   (d) $T : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$, $T(A) = tr(A)$.

2. Sean V y W espacios vectoriales. Demostrar que $T : V \to W$ es una transformación lineal si y sólo si

$$T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in K \text{ y } \forall v_1, v_2 \in V,$$

   siendo $K = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, según corresponda.

3. Demostrar que cada una de las siguientes transformaciones son lineales.

   (a) $T : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$, $T(v) = Av$, siendo $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$.

   (b) $T : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$, $T(p) = (t^2 + 1)p$.

   (c) $T_f : \mathcal{C}[a, b] \to \mathcal{C}[a, b]$, definida por $T_f(g) = fg$, con $f \in \mathcal{C}[a, b]$.

   (d) $T : \mathcal{C}[0, 1] \to \mathbb{R}$, $T(f) = \int_0^1 f(t)dt$.

   (e) $T : \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathbb{R})$, $T(f) = f'' - f$. ($\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ es el espacio de funciones dos veces derivables con continuidad.)

   (f) $T : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{k\times l}$, $T(X) = AXB$, con $A \in \mathbb{C}^{k\times n}$ y $B \in \mathbb{C}^{n\times l}$.

4. Sean V, W y Z espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo de escalares.

   (a) Demuestre que la transformación identidad $I : V \to V$, $I(v) = v$, es una transformación lineal.

   (b) Demuestre que la transformación nula $\mathcal{O}$ de V en W, definida como $\mathcal{O}(v) = 0$ para todo $v \in V$, es una transformación lineal.

   (c) Demuestre que para λ escalar, la transformación $T_\lambda : V \to V$ con $T_\lambda(v) = \lambda v$, es lineal.

   (d) Demuestre que si $T : V \to W$ y $S : W \to Z$ son transformaciones lineales entonces la composición de ellas, es decir, $S \circ T : V \to Z$, también es una transformación lineal.

5. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por $T(x) = Ax$. Para cada uno de los siguientes casos, describa geométricamente la transformación y halle la imagen del cuadrado de vértices: $[0\ \ 0]^T$, $[1\ \ 0]^T$, $[1\ \ 1]^T$ y $[0\ \ 1]^T$.

i) $A = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ $(k \in \mathbb{R})$ ii) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ iii) $A = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $(k \in \mathbb{R})$
iv) $A = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\operatorname{sen}(\alpha) \\ \operatorname{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ v) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ vi) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

6. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por $T(x) = Ax$. Describa geométricamente la transformación si A es cada una de las siguientes matrices:

i) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ iii) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
iv) $\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\operatorname{sen}(\alpha) & 0 \\ \operatorname{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ v) $\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\operatorname{sen}(\alpha) & 0 \\ \operatorname{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.

7. Encuentre núcleo e imagen de las siguientes transformaciones lineales:

   (a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(v) = Av$ con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

   (b) $T : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$, $T(A) = XAY$ con $X = [1\ \ 2]$ e $Y = [1\ \ -1]^T$.

   (c) $T : \mathcal{P} \to \mathbb{R}^2$, $T(p) = [p(0)\ p'(0)]^T$.

   (d) $T : \mathcal{C}[0,1] \to \mathcal{C}[0,1]$, $T(f)(t) = (1 + t^2)f(t)$.

   (e) $T : \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathbb{R})$, $T(p) = p''$.

8. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno, sea $\mathcal{S}$ un subespacio de V y sea $P_{\mathcal{S}} : V \to V$ la aplicación que asigna a $v \in V$ su proyección ortogonal sobre $\mathcal{S}$. Demuestre que $P_{\mathcal{S}}$ es una transformación lineal. ¿ Quiénes son $\operatorname{Nu}(P_{\mathcal{S}})$ e $\operatorname{Im}(P_{\mathcal{S}})$?

9. Sea $T : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$, con $T(v) = Av$ y $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$. Demuestre que $\operatorname{Im}(T)$ coincide con $\operatorname{col}(A)$, el espacio columna de A, y que $\operatorname{Nu}(T)$ coincide con $\operatorname{Nul}(A)$. Deduzca a partir de esto último que si A tiene rango k, entonces $\dim(\operatorname{Nu}(T)) = m - k$.

10. Encuentre bases para $\operatorname{Nu}(T)$ e $\operatorname{Im}(T)$, en cada uno de los siguientes casos:

(a) T de $\mathbb{R}^5$ en $\mathbb{R}^4$ definida por $T(v) = Av$ con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & -3 \\ 3 & 6 & 4 & -1 & 2 \\ 4 & 8 & 5 & 1 & -1 \\ -2 & -4 & -3 & 3 & -5 \end{bmatrix}.$$

(b) $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$, $T([z_1\ z_2\ z_3]^T) = [iz_1 + z_2 + z_3\ \ -2z_1 + 2iz_2 + 2iz_3]^T$, considerando a $\mathbb{C}^3$ y a $\mathbb{C}^2$ primero como $\mathbb{C}$-espacios vectoriales y luego como $\mathbb{R}$-espacios vectoriales.

11. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal y sean $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}'$ subespacios de V y W respectivamente. Demuestre lo siguiente:

   (a) $T(\mathcal{S})$ es subespacio de W.

   (b) $T^{-1}(\mathcal{S}') = \{v \in V/\ T(v) \in \mathcal{S}'\}$ es subespacio de V.

   (c) Si $\mathcal{S} = \text{gen}\{v_1, \ldots, v_r\}$ entonces $T(\mathcal{S}) = \text{gen}\{T(v_1), \ldots, T(v_r)\}$.

12. Encuentre bases para $\text{Nu}(T)$ e $\text{Im}(T)$ en cada uno de los siguientes casos:

   (a) $T : \mathcal{P}_3 \to \mathbb{R}^2$, $T(p) = [p(0)\ \ p(1)]^T$.

   (b) $T : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^3$, $T(p) = [p(t_0)\ \ p'(t_0)\ \ p''(t_0)]^T$, con $t_0 \in \mathbb{R}$.

   (c) $T : R^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$, $T(X) = AX - XA$, con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

13. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Determinar cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas, justificando la respuesta.

   (a) Si $\{v_1, \ldots, v_r\}$ es l.d. entonces $\{T(v_1), \ldots, T(v_r)\}$ es l.d.

   (b) Si $\{T(v_1), \ldots, T(v_r)\}$ es l.d. entonces $\{v_1, \ldots, v_r\}$ es l.d.

   (c) Si $\{v_1, \ldots, v_r\}$ es l.i. entonces $\{T(v_1), \ldots, T(v_r)\}$ es l.i.

   (d) Si $\{T(v_1), \ldots, T(v_r)\}$ es l.i. entonces $\{v_1, \ldots, v_r\}$ es l.i.

   (e) Si $\text{Nu}(T) = \{0\}$ entonces $\{v_1, \ldots, v_r\}$ es l.i. si y sólo si $\{T(v_1), \ldots, T(v_r)\}$ es l.i.

   (f) Si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de V y $\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ es l.i. entonces $\text{Nu}(T) = \{0\}$.

14. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Decidir si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas, justificando la respuesta.

   (a) Si $\text{Nu}(T) = \{0\}$, la ecuación $T(v) = w$ tiene a lo sumo una solución.

(b) La ecuación $T(v) = w$ siempre tiene solución si $\mathrm{Nu}(T) = \{0\}$.

(c) $\mathrm{Im}(T) = W$ y $\mathrm{Nu}(T) = \{0\}$ si y sólo si la ecuación $T(v) = w$ tiene solución única para cada $w \in W$.

(d) La transformación T es inversible si y sólo si $\mathrm{Im}(T) = W$ y $\mathrm{Nu}(T) = \{0\}$.

(e) Si $V = W$, $\mathrm{Nu}(T) = \{0\}$ si y sólo si $\mathrm{Im}(T) = V$.

(f) Si $\dim(V) = \dim(W) = n$, $\mathrm{Nu}(T) = \{0\}$ si y sólo si $\mathrm{Im}(T) = W$.

(g) Si $\dim(V) = \dim(W) = n$ entonces T es inyectiva si y sólo si T es sobreyectiva.

(h) Si $\dim(V) > \dim(W)$, T no puede ser inyectiva.

(i) Si $\dim(V) < \dim(W)$, T no puede ser sobreyectiva.

(j) Si V es de dimensión finita y T es biyectiva, W es de dimensión finita y $\dim(V) = \dim(W)$.

15. Sean $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$ y $B \in \mathbb{C}^{k\times n}$. Demuestre lo siguiente:

(a) $\mathrm{col}(BA) \subseteq \mathrm{col}(B)$.

(b) $\mathrm{col}(BA) = \mathrm{col}(B)$ si $\mathrm{rango}(A) = n$.

(c) $\mathrm{Nul}(A) \subseteq \mathrm{Nul}(BA)$.

(d) $\mathrm{Nul}(A) = \mathrm{Nul}(BA)$ si $\mathrm{rango}(B) = n$.

(e) $\mathrm{rango}(BA) \leq \min(\mathrm{rango}(B), \mathrm{rango}(A))$.

(f) Si $\mathrm{rango}(A) = n$ entonces $\mathrm{rango}(BA) = \mathrm{rango}(B)$.

(g) Si $\mathrm{rango}(B) = n$ entonces $\mathrm{rango}(BA) = \mathrm{rango}(A)$.

Sugerencia: considere las transformaciones lineales $T(v) = Av$ y $S(u) = Bu$ y tenga en cuenta la primer parte del ejercicio 9.

16. Considere la transformación lineal $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ definida por $T(v) = Av$ con $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Demuestre que las siguientes proposiciones son equivalentes:

(a) T es inversible.

(b) Existe A^{-1}.

(c) El sistema de ecuaciones lineal homogéneo $Ax = 0$ tiene solución única.

(d) El sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$ tiene solución para cada $b \in \mathbb{C}^n$.

(e) $\det(A) \neq 0$.

17. Encuentre la inversa de la transformación $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T([x_1\ x_2\ x_3]^T) = [x_1 - x_2 + x_3\ \ 2x_1\ \ x_1 + x_2]^T$.

18. Encuentre la inversa de la transformación definida en el ejercicio 7d.

19. Encuentre la inversa de la transformación definida en el ejercicio 12b.

20. Suponga que $T : V \to W$ y $S : W \to Z$ son transformaciones lineales inversibles. Demuestre que $S \circ T$ es inversible y que $(S \circ T)^{-1} = T^{-1} \circ S^{-1}$.

21. Se dice que una transformación lineal $T : V \to W$ es un isomorfismo si T es biyectiva, es decir, si existe T^{-1}. Por otra parte, se dice que V es isomorfo a W si existe un isomorfismo T de V en W.

    (a) Probar que V es isomorfo a sí mismo.

    (b) Probar que si V es isomorfo a W entonces W es isomorfo a V.

    (c) Probar que si V es isomorfo a W y W es isomorfo a Z entonces V es isomorfo a Z.

    (d) Sea V un espacio vectorial sobre K ($K = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) y sea $B = \{v_1; \ldots; v_n\}$ una base ordenada de V. Demuestre que la transformación $c_B : V \to K^n$ que asigna a cada $v \in V$ su correspondiente vector de coordenadas en la base B, $c_B(v) \in K^n$, es un isomorfismo (vea el ejercicio 20 del T.P. 1).

    (e) Demuestre que si V y W son de dimensión finita, entonces V es isomorfo a W si y sólo si la dimensión de V es igual a la dimensión de W.

22. Sea $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_3$ tal que para cada $p \in \mathcal{P}_2$, $T(p) = tp + \{p - p(0)\}/t$. Encuentre $[T]_{BC}$, la representación matricial de T respecto de las bases ordenadas: $B = \{1; 1+t; 1+t+t^2\}$ y $C = \{1; 1-t; 1+2t+t^2; 1-3t+3t^2-t^3\}$.
    Calcule luego $T(-2+3t-t^2)$ de dos formas distintas.

23. Sea $T : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$, $T(p) = p'$. Halle la representación matricial de T respecto de la base canónica de $\mathcal{P}_n$.

24. Halle la representación matricial de la transformación T del ejercicio 7b, respecto de las correspondientes bases canónicas.

25. Sean $T : V \to W$ y $S : W \to Z$ transformaciones lineales y sean B, C y D bases ordenadas de V, W y Z, respectivamente. Pruebe que

$$[S \circ T]_{BD} = [S]_{CD}[T]_{BC}.$$

26. Suponga que A representa a la transformación lineal $T : V \to V$ respecto de una base ordenada B. Demuestre que A^k representa a T^k, para $k \in IN$, respecto de B.

27. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal, sean B y C bases ordenadas de V y W respectivamente, y sea A la representación matricial de T respecto de las bases B y C. Demuestre lo siguiente:

    (a) $v \in \mathrm{Nu}(T)$ si y sólo si $c_B(v) \in \mathrm{Nul}(A)$.

    (b) $w \in \mathrm{Im}(T)$ si y sólo si $c_C(w) \in \mathrm{col}(A)$.

(c) T es inversible si y sólo si A no es singular. Además, A^{-1} es la representación matricial de T^{-1} respecto de las bases C y B.

28. Sea V un espacio vectorial con $B = \{v_1; v_2; v_3\}$ una base. Sea $T : V \to V$ una transformación lineal tal que

$$[T]_B = \begin{bmatrix} r & -1 & r \\ 1 & r & 1 \\ r & -1 & 2r \end{bmatrix}$$

(a) Suponiendo que V es un espacio vectorial real, hallar los valores de $r \in \mathbb{R}$ para que T no sea sobreyectiva.

(b) Idem (a) pero suponiendo que V es un espacio vectorial complejo y que $r \in \mathbb{C}$.

(c) Para los valores hallados en (b), estudiar si $v = -v_1 + iv_2 + (i-1)v_3$ pertenece a la imagen de T. En caso afirmativo, hallar todos los $u \in V$ tales que $T(u) = v$.

29. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}_2$ tal que para ciertos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $T([1\ 1\ 1]^T) = 2\beta + \alpha t$, $T([0\ -1\ 1]^T) = \alpha t + \beta t^2$ y $T([0\ \ 0\ \ 1]^T) = \beta + (\alpha - 1)t$.

(a) Hallar α y β para que T no sea inyectiva.

(b) Hallar bases de $\mathrm{Nu}(T)$ y de $\mathrm{Im}(T)$ en función de α y β.

(c) Hallar la imagen del subespacio $\mathcal{U} = \{x \in \mathbb{R}^3 :\ x_1 + x_3 = x_2 + x_3 = 0\}$, según los valores de α y β.

30. Halle la representación matricial, respecto de la base canónica, de la transformación lineal $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ que verifica: $T([1 + i\ 1 - i]^T) = [1\ i]^T$ y $T([1\ i]^T) = [-1\ 0]^T$.

31. Halle la representación matricial, respecto de la base canónica, de la transformación $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que satisface lo siguiente: $T(v) = 2v$ si $v \in \mathcal{S}$ y $T(v) = -v$ si $v \in \mathcal{S}^\perp$, siendo $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^3 :\ x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$. (Considere el producto interno canónico de $\mathbb{R}^3$.)

32. Sean $B = \{v_1; v_2; v_3\}$ una base ordenada de V y $C = \{w_1; w_2; w_3; w_4\}$ una base ordenada de W. Considere la transformación lineal $T : V \to W$ que satisface: $T(v_1) = w_1 + w_2 + w_3 - w_4$, $T(v_2) = w_1 - w_2 + 2w_3 + 3w_4$ y $T(v_3) = 2w_1 + 3w_3 + 2w_4$.

(a) Encuentre bases para $\mathrm{Nu}(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$.

(b) Halle todos los $v \in V$ tales que $T(v) = 2w_2 - w_3 - w_4$.

(c) Encuentre la representación matricial de T respecto de las bases $B' = \{v_1; 2v_2 + v_3; v_2 + v_3\}$ y $C' = \{w_1; w_2; w_3 + w_4; w_3 - w_4\}$ (¿ Por qué B' y C' son bases?).

33. Sea $B = \{v_1; v_2; v_3\}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ considerando el p.i. canónico. Encuentre la matriz de la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ respecto de la base B en cada uno de los siguientes casos:

(a) T es la reflexión respecto del plano $\mathcal{S} = \text{gen}\{v_1; v_2\}$;

(b) T es la reflexión respecto de la recta $\mathcal{S} = \text{gen}\{v_3\}$;

(c) T es la rotación alrededor del eje $\mathcal{S} = \text{gen}\{v_3\}$ en un ángulo α, considerando que el sentido de rotación positivo es de v_1 hacia v_2.

34. Halle la representación matricial respecto de la base canónica de la transformación $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que es la reflexión respecto de la recta $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^3 : \; x_1 + x_2 + x_3 = 0, \; x_1 - x_2 - 2x_3 = 0\}$.

35. Halle la representación matricial respecto de la base canónica de la transformación $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que es la reflexión respecto del plano $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^3 : \; x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$, de dos formas distintas: i) mediante una matriz de Householder, ii) empleando el ejercicio 33.

36. Halle la representación matricial respecto de la base canónica de la transformación $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, que es una rotación de 45° en sentido antihorario alrededor del eje $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^3 : \; x_1 + x_2 + x_3 = 0, \; x_1 - x_2 + 2x_3 = 0\}$.

37. Encuentre una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T \neq \pm I$, tal que $d(x, \mathcal{S}) = d(T(x), \mathcal{S}) \; \forall x \in \mathbb{R}^3$, si $\mathcal{S} = \text{gen}\{[1 \;\; 1 \;\; 1]^T\}$. (Considere el p.i. canónico.)

38. Sean V y W K-espacios vectoriales ($K = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) de dimensiones m y n respectivamente. Sea $T : V \to W$ lineal. Demuestre lo siguiente: si B_1 y B_2 son bases ordenadas de V y C_1 y C_2 son bases ordenadas de W, entonces $\text{rango}[T]_{B_1 C_1} = \text{rango}[T]_{B_2 C_2}$.

39. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $T(x) = Ax$ con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & -3 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Encuentre un par de bases ordenadas B y B' tales que

$$[T]_{BB'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

¿ Existen bases ordenadas B y B' tales que

$$[T]_{BB'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}?$$

¿ Por qué?

40. Considere las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 6 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

(a) Encuentre matrices inversibles U_1 y V_1 tales que

$$U_1 A V_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Idem (a) pero con B en lugar de A.

(c) Encuentre matrices inversibles C y D tales que $CAD = B$.

41. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x) = Ax$ con

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Encuentre bases B y C de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$, respectivamente, tales que

$$[T]_{BC} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

42. Si V y W son espacios vectoriales sobre K ($K = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$), denotamos $\mathcal{L}(V, W)$ al conjunto de todas las transformaciones lineales de V en W.
Considere en $\mathcal{L}(V, W)$ las siguientes operaciones:
(Suma) Dados T y $S \in \mathcal{L}(V, W)$, $T + S$ es la transformación definida de la siguiente manera: $(T + S)(v) = T(v) + S(v)$ $\forall v \in V$.
(Producto por un escalar) Dado $T \in \mathcal{L}(V, S)$ y $\alpha \in K$, definimos αT mediante: $(\alpha T)(v) = \alpha T(v)$ $\forall v \in V$.

(a) Demuestre que con las operaciones definidas, $\mathcal{L}(V, W)$ es un espacio vectorial sobre K.

(b) Suponga que $\dim(V) = n$, $\dim(W) = m$ y que B y C son bases ordenadas de V y W respectivamente. Pruebe que la aplicación que asigna a cada $T \in \mathcal{L}(V, W)$ su representación matricial respecto de las bases B y C, $[T]_{BC} \in K^{m \times n}$, es un isomorfismo. ¿Cuál es la dimensión de $\mathcal{L}(V, W)$? Exhiba una base de $\mathcal{L}(V, W)$.

Práctica 4 (2da Parte)- Ecuaciones Diferenciales Lineales

1. Hallar $\mathrm{Re}(f)$, $\mathrm{Im}(f)$, f' y $\int_a^b f(t)\,dt$ en cada caso.
   a) $f(t) = (2+i)t + (1-i)\operatorname{sen} t$,   b) $f(t) = (1+3it)^3$,   c) $f(t) = \frac{1}{1+it}$.

2. Suponiendo que $f, g : \mathcal{I} \to \mathbb{C}$, con $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ un intervalo, son derivables en $t \in \mathcal{I}$, probar que valen las reglas de derivación:

   a) $(cf + dg)'(t) = cf'(t) + dg'(t) \quad (c, d \in \mathbb{C})$;
   b) $(fg)'(t) = f'(t)g(t) + f(t)g'(t)$.
   c) $\left(\frac{f}{g}\right)'(t) = \frac{f'(t)g(t) - f(t)g'(t)}{g^2(t)}$ si $g(t) \neq 0$.
   d) $(f^n)'(t) = nf^{n-1}(t)f'(t)$ para todo $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ ($f(t) \neq 0$ si $n < 0$).

3. Se dice que $F : \mathcal{I} \to \mathbb{C}$, con $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ un intervalo, es una primitiva de $f : \mathcal{I} \to \mathbb{C}$ si $F'(t) = f(t)$ para todo $t \in \mathcal{I}$. Pruebe lo siguiente.

   a) Dos primitivas de f difieren en una constante compleja.
   b) Si F es una primitiva de f y f es continua, entonces $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$. (Regla de Barrow.)

4. Para $z \in \mathbb{C}$, con $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, se define $e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$. Probar que vale lo siguiente:

   a) $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$ para todo $z, z' \in \mathbb{C}$;
   b) $e^z = 1$ si y sólo si $z = 2k\pi i$ con $k \in \mathbb{Z}$;
   c) $|e^z| = e^x$, con lo cual $|e^{it}| = 1$ si $t \in \mathbb{R}$;
   d) para todo $z \in \mathbb{C}$, $e^z \neq 0$ y $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$;
   e) $e^z = e^{z+2k\pi i}$ si y sólo si k es entero.
   f) $\cos t = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}$ y $\operatorname{sen} t = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$ $(t \in \mathbb{R})$.

   Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $e^z = 1,\ -1,\ i,\ -i$. Hallar los z tales que $e^z \in \mathbb{R}$ y los z tales que $e^z \in i\mathbb{R}$.

5. Sea $P : \mathcal{I} \to \mathbb{C}$, derivable en $t \in \mathcal{I}$. Probar que $\left(e^{P(t)}\right)' = P'(t)e^{P(t)}$. (En particular $\left(e^{ct}\right)' = ce^{ct}$ para toda constante $c \in \mathbb{C}$.)

6. Calcular empleando la regla de Barrow la integral $\int_0^\pi e^{(2+i)t}\,dt$ y, a partir de ella, obtener los valores de $\int_0^\pi e^{2t} \operatorname{sen} t\,dt$ y $\int_0^\pi e^{2t} \cos t\,dt$.

7. Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones:
   i) $y' - 2y = 0$;   ii) $y' = y + (1+i)x$;   iii) $y' + 2xy = y$;   iv) $ty' + y = 3t^3 - 1$ $(t > 0)$.

8. Resolver los siguientes problemas a valores iniciales:
   i)$xy' = (1+x)y$; $y(1) = 3$ ii) $y' + y = \operatorname{sen} x$; $y(0) = 0$ iii) $(x+1)y' + x^2 y = e^{-x/2}$; $y(0) = 1$.

9. Halle la solución general de las siguientes ecuaciones resolviendo la ecuación homogénea y hallando una solución particular por el método de los coeficientes indeterminados:
i) $y' - 2y = 1 - x$; ii) $y' - y = (1 + x)e^x$; iii) $y' + y = 2e^t$; iv) $y' = iy + te^{it}$;
v) $y' + iy = 3\cos 2x$; vi) $2y' + 6y = e^x \cos x$.

10. Hallar bases de los espacios de soluciones de las siguientes ecuaciones. (En todos los casos la base debe estar formada por funciones reales.)
a) $y'' + 3y' + 2y = 0$ b) $2y'' - 18y = 0$ c) $y'' - 8y' + 16y = 0$ d) $y'' + 9y = 0$
e) $2y'' + 2y' + 2y = 0$ f) $y'' - k^2 y = 0$, $k \in \mathbb{R}$ g) $2y'' + 10y' + 25y = 0$
h) $y'' + 2y' + (\omega^2 + 1)y = 0$ $(\omega \geq 0)$.

11. Encuentre la solución general de las siguientes ecuaciones empleando el método de coeficientes indeterminados para hallar una solución particular:
a) $y'' + y' = 3x^2$ b) $y'' + 6y' + 9y = 18\cos\, 3x$ c) $y'' - 4y = e^{2x}$
d) $y'' - y' - 2y = e^x + x$ e) $y'' + y = \cos \omega x$, $(\omega > 0)$ f) $y'' - \omega^2 y = A \operatorname{sen} \omega_0 t$, $(\omega,\ \omega_0 > 0)$.

12. Resolver los siguientes problemas a valores iniciales.
a) $y'' - y' = 3e^{2x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -2$
b) $y'' - y' - 2y = 10 \operatorname{sen}\, x$, $y(\frac{1}{2}\pi) = -3$, $y'(\frac{1}{2}\pi) = -1$
c) $y'' + 4y' + 4y = 9\cosh\, x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

13. Resolver los siguientes problemas con valores de frontera:
a) $y'' - 9y = 0$, $y(-4) = y(4) = \cosh 12$ b) $y'' - 2y' = 0$, $y(0) = -1$, $y(0{,}5) = e - 2$ c) $y'' + y = 0$, $y(0) = 0$, $y(\pi) = 1$ d) $y'' + 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y(\pi) = 1$.
Teniendo en cuenta los resultados obtenidos: ¿un problema con valores de frontera siempre tiene solución?, ¿si tiene al menos una solución, ésta es única?

14. Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones mediante el método de variación de parámetros:
i) $y'' - 2y' + y = x^{3/2} e^x$ ii) $y'' - y = 2e^x/(1 - e^x) + e^{2x}$.

Problemas opcionales

1. Suponga que el ritmo al que se enfría un cuerpo caliente es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la del ambiente que lo rodea. Un cuerpo se calienta a 100 C y se expone a una temperatura ambiente de 10 C. Luego de 30 minutos su temperatura es de 50 C. ¿Cuánto deberá esperarse para que la temperatura llegue a los 15 C?

2. Si la resistencia del aire que actúa sobre un cuerpo de masa m en caída libre ejerce una fuerza proporcional a la velocidad del mismo pero de sentido contrario $(= -kv)$, la ecuación de movimiento es
$$v' = g - (k/m)v.$$
Supongamos $v(0) = 0$, hallar $\lim_{t \to +\infty} v(t)$.

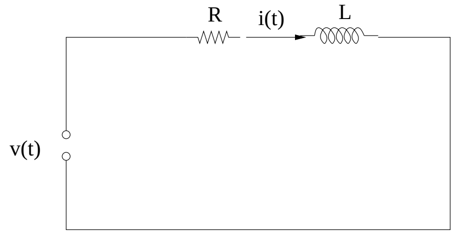

Figura 1:

3. Considere el siguiente circuito RL:

   a) Suponiendo $V(t) = V_0$ e $i(0) = i_0$, calcular $i(t)$ para $t > 0$. ¿Qué sucede con $i(t)$ a medida que t aumenta?

   b) Idem (a) pero con $V(t) = V_0 \operatorname{sen} \omega_0 t$.

4. Considere el siguiente circuito RC:

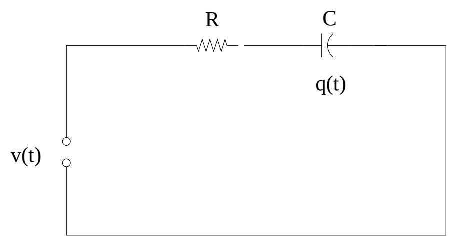

Figura 2:

   a) Suponiendo $V(t) = V_0$ y $q(0) = q_0$, calcular $q(t)$ e $i(t)$ para $t > 0$. ¿Qué sucede con $q(t)$ e $i(t)$ a medida que t aumenta?.

   b) Idem (a) pero con $V(t) = V_0 \operatorname{sen} \omega_0 t$.

5. La ecuación $y' + \alpha(x)y = \beta(x)y^k$ con $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0, 1$, se denomina *ecuación de Bernoulli.*

   a) Demostrar que mediante el cambio de variable $z = y^{1-k}$, la ecuación se transforma en la ecuación lineal
   $$z' + (1-k)\alpha(x)z = (1-k)\beta(x).$$

   b) Resolver las ecuaciones:
   a) $xy' + y = x^4y^3$ b) $xy^2y' + y^3 = x \cos x$.

6. Si $y = y(t)$ denota el número de habitantes de una población en función del tiempo, se denomina tasa de crecimiento de la población a la función y'/y.
   a) Graficar $y(t)$ en el caso en que la tasa de crecimiento sea constante.
   b) Supongamos que una población tiene tasa de crecimiento constante. En un instante determinado la cantidad de individuos es de 1000 mientras que seis meses después es de 1010. ¿Cuántos individuos habrá después de 10 años?.
   c) Estudiar las poblaciones cuyas tasas de crecimiento son de la forma $r - cy$ con $r > 0$, $c > 0$ e $y(0) = y_0 > 0$. Calcular $\lim_{t\to+\infty} y(t)$.

7. Considere el siguiente sistema mecánico compuesto por un cuerpo de masa m sometido a una fuerza $f(t)$ y un resorte cuya constante elástica es k. Denomine $x(t)$ al desplazamiento

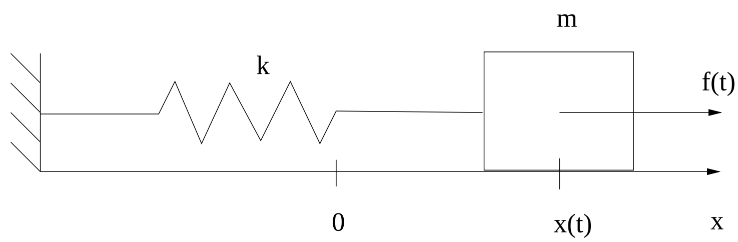

Figura 3:

de la masa respecto de la posición de equilibrio en el instante t. Suponiendo $f(t) \equiv 0$, demuestre lo siguiente:
(i) $x(t) = A\cos\omega_0 t + B \operatorname{sen}\omega_0 t$, con $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, $A = x(0)$ y $B = x'(0)/\omega_0$. Con lo cual el cuerpo oscila con una frecuencia de $\omega_0/2\pi$ ciclos por segundo.
(ii) Si se considera $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ y $\varphi = \tan^{-1}(A/B)$, entonces $x(t) = C\operatorname{sen}(\omega_0 t + \varphi)$. Por lo tanto C es la amplitud de la oscilación y φ es el ángulo de fase.

8. Considere un sistema mecánico como el del problema anterior (con $f(t) \equiv 0$) pero ahora sumergido en un medio viscoso. Entonces, además de la fuerza elástica producto de la interacción del resorte con el cuerpo, deberá considerarse una fuerza de rozamiento F, producto de la interacción del cuerpo con el medio, que puede suponerse proporcional a la velocidad del cuerpo pero de sentido contrario a ésta, en otras palabras, $F(t) = -cx'(t)$ con c una constante positiva (c es la constante de amortiguación).
Demuestre lo siguiente:
(i) Si $c^2 > 4mk$, $x(t) = c_1 e^{-(\alpha-\beta)t} + c_2 e^{-(\alpha+\beta)t}$, con $\alpha = c/2m$, $\beta = \sqrt{c^2 - 4mk}/2m$, (observe que $0 < \alpha < \beta$). Este caso se denomina sobreamortiguado debido a que no hay oscilaciones.
(ii) Si $c^2 = 4mk$, $x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-\alpha t}$. Este caso se denomina de amortiguamiento crítico.
(iii) Si $c^2 < 4mk$, $x(t) = e^{-\alpha t}(A\cos\omega^* t + B\operatorname{sen}\omega^* t)$ con $\omega^* = \sqrt{4mk - c^2}/2m$. También $x(t) = C\operatorname{sen}(\omega^* t + \varphi)e^{-\alpha t}$ con $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ y $\varphi = \tan^{-1}(A/B)$. En este caso se producen oscilaciones amortiguadas de frecuencia $\omega^*/2\pi$, y se denomina subamortiguado.

9. Considere el sistema masa-resorte del problema 7, suponiendo que sobre el cuerpo se aplica una fuerza $f(t) = F_0 \operatorname{sen}\omega t$. Demuestre lo siguiente:

   a) Si $\omega^2 \neq \omega_0^2 = k/m$,
   $$x(t) = A(\omega)\operatorname{sen}\omega t + c_1 \operatorname{sen}\omega_0 t + c_2 \cos\omega_0 t$$
   con $A(\omega) = F_0[m(\omega_0^2 - \omega^2)]^{-1}$ y c_1 y c_2 constantes arbitrarias.

   b) Si $\omega^2 = \omega_0^2$, entonces
   $$x(t) = -\frac{F_0}{2m\omega_0} t\cos(\omega_0 t) + c_1 \operatorname{sen}\omega_0 t + c_2 \cos\omega_0 t$$
   con c_1 y c_2 constantes arbitrarias. Observe que en este caso la amplitud de la oscilación no es acotada (resonancia).

10. Considere el sistema masa-resorte amortiguado del problema 8 y suponga que sobre el cuerpo se aplica una fuerza $f(t) = F_0 \operatorname{sen} \omega t$.

    a) Demuestre que
    $$x(t) = A(\omega) \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) + x_h(t)$$
    con $A(\omega) = F_0/\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 c^2}$, $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{\omega c}{m(\omega^2 - \omega_0^2)}\right)$ y $x_h(t)$ una solución arbitraria de la ecuación homogénea $mx'' + cx' + kx = 0$.

    b) Demostrar que $\lim_{t \to +\infty} [x(t) - A(\omega) \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) = 0]$, con lo cual, para $t >> 1$, $x(t) \approx A(\omega) \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$, independientemente de las condiciones iniciales.

    c) Hallar el valor de ω que maximiza la amplitud $A(\omega)$.

    d) Encontrar el potencial electroestático $v(r)$ entre dos esferas concéntricas de radios $r_1 = 4$ cm y $r_2 = 8$ cm, sabiendo que el potencial de la esfera interna es de 110 volts y el de la externa es de 0 volts. (Sugerencia: $v(r)$ satisface la ecuación diferencial $rv'' + 2v' = 0$)

11. La ecuación $x^2y'' + axy' + by = 0$ con a y b constantes y $x > 0$ ($x < 0$), se denomina *ecuación de Euler-Cauchy.*

    a) Demostrar que mediante el cambio de variable $x = e^t$ ($x = -e^t$), la ecuación se transforma en la ecuación lineal a coeficientes constantes
    $$\frac{d^2y}{dt^2} + (a-1)\frac{dy}{dt} + by = 0.$$

    b) Resolver en $(0, +\infty)$ las siguientes ecuaciones de Euler-Cauchy:
    a) $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0$ b) $x^2y'' + 3xy' + y = 0$ c) $x^2y'' + xy' + y = 0$
    d) $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$

Ejercicios adicionales a las guías 1 a 4

Producto interno

1. Se ha definido en $\mathbb{R}^2$ un producto interno tal que $(v_1, v_1) = 1$, $(v_1, v_2) = 0$ y $(v_2, v_2) = 2$, con $v_1 = [1\ \ 1]^T$ y $v_2 = [1\ \ 2]^T$. Se pide:
(a) hallar (x, y) con $x = [x_1\ x_2]^T$, $y = [y_1\ y_2]^T$.
(b) Descomponer $v = [2\ \ 2]^T$ como suma de un vector paralelo a $u = [1\ \ 0]^T$ y otro ortogonal (según el p.i. definido) a u.

2. Sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y sea $(\cdot, \cdot)$ un producto interno en $\mathbb{R}^3$ tal que $\|e_1\| = \|e_2\| = 1$, $\|e_3\| = \sqrt{2}$, $(e_1, e_2) = 0$ y $u = 2e_2 - e_3$ es ortogonal a e_1 y a e_3. Halle (x, y) para x, $y \in \mathbb{R}^3$ y calcule la proyección ortogonal de $v = [1\ 1\ 2]$ sobre el subespacio $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^3 :\ x_1 = 0\}$.

3. Sea $B = \{v_1; v_2; v_3\}$ una base de un $\mathbb{R}$-espacio vectorial V. Hallar los valores de α para los cuales existe un producto interno en V que verifica:
$$\|v_1\| = \|v_2\| = \|v_3\| = 2,\ (v_1, v_3) = 0,\ (v_1 + v_2, v_1 + v_3) = 4 + \alpha \ \text{ y } (v_1 - v_2, v_1 - v_3) = 4 - \alpha.$$
Considere $\alpha = 1$ y halle una base ortogonal de $\mathcal{S}^\perp$ siendo $\mathcal{S} = \text{gen}\{v_1 + v_3\}$.

4. Demuestre que $(p, q) = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(-1)q(-1)$ es producto interno en $\mathcal{P}_2$ pero no en $\mathcal{P}_3$. Halle los valores de α y β para que $p = \alpha t + \beta(t^2 + 1)$ se encuentre lo más cerca posible de $q = t^2$.

5. Demostrar que para $\alpha > 1$, $(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + \alpha x_2y_2$ es producto interno en $\mathbb{R}^2$. ¿Cúal propiedad de producto interno no se cumple si $\alpha = 1$?.
Considere $\alpha = 2$ y halle los v de $\mathbb{R}^2$ tales que su proyección ortogonal a $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^2 :\ x_1 - x_2 = 0\}$ sea $u = [1\ 1]^T$ y $d(v, \mathcal{S}) = 1$.

6. Sea $\{e_1, e_2\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^2$. Demuestre que no existe un producto interno en $\mathbb{R}^2$ tal que $\|e_1\| = 1$, $\|e_2\| = 2$ y $(e_1, e_2) = 2$.

7. Considere en $\mathbb{R}^{2\times 2}$ el producto interno $(M, N) = m_{11}n_{11} + m_{12}n_{12} + m_{21}n_{21} + m_{22}n_{22}$. Demuestre que si $\mathcal{S} = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : A = A^T\}$ entonces $\mathcal{S}^\perp = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : A^T = -A\}$.(Sugerencia: halle primero una base de $\mathcal{S}$).

8. Considere en $\mathcal{C}([-\pi, \pi])$ el producto interno $(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} fg\, dx$. Hallar los valores de α, β y γ que minimizan el valor de la integral
$$\int_{-\pi}^{\pi} [|x| - \alpha - \beta \cos x - \gamma \operatorname{sen} x]^2\, dx.$$

9. Sabiendo que $u = [2\ \ 2\ \ 2]^T$ es el elemento del subespacio $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ más cercano a $v = [1\ \ 2\ \ 3]^T$.
a) Hallar los posibles subespacios $\mathcal{S}$.
b) Hallar una base ortonormal de $\mathcal{S}$ sabiendo que $\dim(\mathcal{S}) = 2$.

Matrices de proyección, QR, cuadrados mínimos

10. Comprobar que $P = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 5/6 & -1/6 \\ 1/3 & -1/6 & 5/6 \end{bmatrix}$ es una matriz de proyección y hallar $Q \in \mathbb{R}^{3\times k}$, con k a determinar, tal que las columnas de Q sean ortonormales y $P = QQ^T$.

11. Dadas $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ y $B \in \mathbb{R}^{n\times k}$ demostrar que $\mathrm{col}(A) \perp \mathrm{col}(B)$ si y sólo si $A^T B = 0$. (Nota: considere el p.i. canónico de $\mathbb{R}^n$).

12. Encuentre $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $[1 \ -1 \ 0]A = 0$ y A admita una descomposición QR normalizada $A = QR$ con $R = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & \sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3} & 2\sqrt{3} \end{bmatrix}$. ¿Es única?.
Para la matriz A hallada, encuentre la matriz de proyección sobre $(\mathrm{col}(A))^{\perp}$.

13. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ una matriz de rango m y $A = QR$ una descomposición QR normalizada de A. ¿Qué dimensión y qué rango tiene R?. Deducir que $A^T A = R^T R$ y que $A^T A$ es inversible.

14. Sabiendo que $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{bmatrix}$ y $b = [\sqrt{2} \ \sqrt{3} \ \sqrt{2}]^T$, hallar la matriz de proyección a $\mathrm{col}(A)$ y todos los $x \in \mathbb{R}^3$ que minimicen $\|Ax - b\|$.

15. Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & r & 1+r \\ 1 & r & 1+r \end{bmatrix}$, hallar los valores de r para que A admita una descomposición QR normalizada tal que $\mathrm{rango}(QQ^T) = 1$. Encontrar la matriz de proyección a $\mathrm{col}(A)$ para cada valor de r hallado.

16. Sea $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz de proyección. Demuestre que si $P = QR$ es una descomposición QR normalizada de P entonces $Q = R^T$.

17. Sean $P_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $P_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, matrices de proyección. Demostrar que si $P_1 P_2 = 0$, entonces $P_2 P_1 = 0$ y $P_1 + P_2$ es matriz de proyección. Hallar la relación entre los rangos de P_1, P_2 y $P_1 + P_2$.

18. Dada $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, demuestre que $\mathrm{Nul}(A^T) = \mathrm{col}(A)^{\perp}$ y de allí deduzca que $\mathrm{Nul}(A)^{\perp} = \mathrm{col}(A^T)$. (Considere el p.i. canónico.)

19. Suponga que $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ $(m \geq n)$ y que $\mathrm{Nul}(A)$ tiene dimensión $m-n$. Demuestre que si $A = QR$ es una descomposición QR normalizada entonces Q es inversible.

20. Sean $P_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $P_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrices de proyección. Demostrar que $\mathrm{col}(P_1) \subseteq \mathrm{col}(P_2)$ si y sólo si $P_2 P_1 = P_1$.

21. Suponiendo que $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ tiene rango m y $b \in \mathbb{R}^n$, explicar por qué $\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b$ minimiza $\|Ax - b\|$.

22. Determine, justificando su respuesta, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:
(a) Si $\hat{x}$ es una solución por cuadrados mínimos de la ecuación $Ax = b$ entonces $\|A\hat{x}\| \leq \|b\|$.
(b) $\hat{x} = 0$ es una solución por cuadrados mínimos de la ecuación $Ax = b$ si y sólo si b es ortogonal a $\mathrm{col}(A)$.

23. Explicar, sin resolver la ecuación, por qué $u = [1 \ 0]^T$ no puede ser la solución por cuadrados mínimos de $Ax = b$ con $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ y $b = [1 \ 1 \ 0]^T$.

24. Sabiendo que $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ admite una descomposición QR normalizada $A = QR$ con $Q = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & 1 \\ \gamma & 0 \end{bmatrix}$ y que para cierto $b \in \mathbb{R}^3$ la solución $\hat{x}$ por cuadrados mínimos de la ecuación $Ax = b$ verifica $b - A\hat{x} = [1\ 0\ -1]^T$, hallar los posibles valores de α, β y γ.

25. Sabiendo que $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ admite una descomposición QR normalizada con $Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$, hallar bases ortonormales de $\mathrm{col}(A)$ y $\mathrm{Nul}(A^T)$ y las matrices de proyección a esos subespacios.

Transformaciones lineales

26. Defina una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tal que $T(x) = 2x$ si $x \in \mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^3 :\ x_1 - x_3 = 0\}$ y $d(x, \mathcal{S}) = d(T(x), \mathcal{S})$ para todo $x \in \mathbb{R}^3$. Halle la representación matricial de T en la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

27. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_2)$ tal que $[T]_{BC} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ con $B = \{1; 1+t; t+t^2\}$ y $C = \{1; t-t^2; t^2\}$.
(a) Hallar bases de $\mathrm{Nu}(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$ y determinar si existe $p \in \mathcal{P}_2$ tal que $T(p) = t^2$.
(b) Determinar, justificando, si existen bases B' y C' de $\mathcal{P}_2$ tales que $[T]_{B'C'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. En caso de existir hallar tales bases.

28. Sea $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f = c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3\}$ con $f_1(t) = 1 + t + 2t^2$, $f_2(t) = 1 + \alpha t + 2t^2$ y $f_3(t) = 1 + 2t + \alpha t^2$. Se pide:
(a) Determinar todos los valores de α para los que está bien definida $T \in \mathcal{L}(V, \mathbb{R}^3)$ tal que $T(f_1) = [1\ 1\ 1]^T$, $T(f_2) = [1\ -1\ 1]^T$, $T(f_3) = [2\ 0\ 2]^T$. Para esos valores de α hallar bases de $\mathrm{Nu}(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$.
(b) Para la transformación lineal T de (a) con $\alpha = 3$, decidir para qué valores de λ existirán bases B de V y B' de $\mathbb{R}^3$ tales que $[T]_{BB'} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & \lambda+2 & \lambda-1 \end{bmatrix}$. En caso de existir halle tales bases.

29. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathcal{P}_2)$ tal que $[T]_{EB} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ \lambda^2 & 4\lambda+3 & 1 \end{bmatrix}$ con E la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y $B = \{1; t+1; t^2+t\}$. Se pide:
i) Hallar los valores de λ para que T sea inversible.
ii) Para $\lambda = -1$, justificar que T es biyectiva, explicar cómo se obtiene $[T^{-1}]_{E'E}$ a partir de $[T]_{EB}$ (con E' la base canónica de $\mathcal{P}_2$) y calcular $T^{-1}(p)$ para $p = t^2 + 4t + 3$.
iii) Hallar los valores de λ para que existan al menos dos $x \in \mathbb{R}^3$ distintos tales que $T(x) = t^2 - t - 1$.

30. Sean $B = \{v_1; v_2; v_3\}$ y $C = \{w_1; w_2; w_3\}$ bases de los espacios vectoriales V y W respectivamente.
(a) Justificar la existencia de una única transformación lineal $T : V \to W$ que verifica $T(2v_1 + v_2) = w_1 - w_2 + w_3$, $T(v_1 - v_2) = w_1 + 2w_2 + w_3$ y $T(v_1 + v_3) = 2w_1 + w_2 + 2w_3$ y encontrar

bases de $\mathrm{Nu}(T)$ y de $\mathrm{Im}(T)$.
(b) Encontrar bases D de V y E de W tales que $[T]_{DE}$ tenga tantas columnas y filas nulas como sea posible.

31. Sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$ y $(\cdot,\cdot)_W$ un producto interno en W. Demostrar que $(x, y)_V = (T(x), T(y))_W$, es un producto interno en V si y sólo si T es inyectiva.

32. Demostrar que $(x, y) = x^T A^T A y$ con $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ es producto interno en $\mathbb{R}^2$. (Sugerencia: use el ejercicio anterior).

33. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_2, \mathbb{R}^{2\times 2})$ definida por $T(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) = a_0 B + a_1 BA + a_2 BA^2$ con $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ inversible y $A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{bmatrix}$.
(a) Hallar los valores de α para los cuales $\dim(\mathrm{Nu}(T)) = 1$.
(b) Considerando $B = I$, $\alpha = -1$ y el producto interno en $\mathbb{R}^{2\times 2}$, $(M, N) = m_{11}n_{11} + m_{12}n_{12} + m_{21}n_{21} + m_{22}n_{22}$, expresar $C = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ como $C = C_1 + C_2$, con $C_1 \in \mathrm{Im}(T)$ y $C_2 \perp \mathrm{Im}(T)$.

34. Sabiendo que $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ es la reflexión respecto de cierto plano $\mathcal{S}$ y que $T([1\ 1\ \ 1]^T) = [-1\ -1\ -1]^T$ se pide:
(a) Determinar el plano $\mathcal{S}$ y hallar la representación matricial de T en una base ortogonal $B = \{v_1; v_2; v_3\}$ tal que $v_1 = [1\ 1\ \ 1]^T$.
(b) Demostrar que $T^n = Id$ si n es par y $T^n = T$ si n es impar.

35. Sean $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} :\ f(x) = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2)e^x\}$ y $T \in \mathcal{L}(V, \mathcal{P}_2)$ definida por $T(f) = (f' - f)e^{-x}$.
(a) Demuestre que $\dim(V) = 3$ y halle bases de $\mathrm{Nu}(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$.
(b) Halle los $f \in V$ que minimizan $\|p - T(f)\|$ con $p(x) = x^2 + x$, considerando en $\mathcal{P}_2$ el producto interno $(p, g) = \int_{-1}^{1} p(x)g(x)dx$.

36. Definir $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de modo tal que $T(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}$ siendo

$$\mathcal{S} = \mathrm{gen}\{[1\ -1\ 1]^T; [1\ 0\ -1]^T\},$$

$P_{\mathcal{S}^\perp}(x) = P_{\mathcal{S}^\perp}(T(x))$ y $\dim(\mathrm{Nu}(T)) = 1$. Encontrar $[T^2]_E$ con E la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

37. Considere la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(x) = Ax$ con $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Hallar todos los $b \in \mathbb{R}^3$ que cumplan simultáneamente: i) $\|b\| = 5$, ii) $d(T(x), b)$ es mínima para $\hat{x} = [2\ \ 1]^T$. (Considere el p.i. canónico.)

38. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, V)$ tal que para la base canónica E de $\mathbb{R}^3$ y $B = \{v_1; v_2; v_3\}$ una base de V, $[T]_{EB} = A$ es triangular superior y $a_{11} = -1$, $a_{12} = 1$, $a_{13} = 2$, $a_{22} = 2$, $a_{23} = 0$ y $a_{33} = -1$.
Justificar la existencia de T^{-1} y demostrar que $(x, y) = (T^{-1}(x))^T T^{-1}(y)$ es un producto interno en V. Hallar la proyección ortogonal de $v_1 + v_2 + v_3$ sobre $\mathrm{gen}\{v_1 + v_2\}$.

Práctica 5 - Autovalores y Autovectores - Diagonalización de Matrices y Transformaciones Lineales

1. Encuentre los autovalores y autovectores de cada una de las siguientes matrices, considerando primero que el cuerpo de escalares es $\mathbb{R}$ y luego que es $\mathbb{C}$.

$$\text{i)} \begin{bmatrix} 12 & -4 \\ -8 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{ii)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{iii)} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{iv)} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{v)} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & -4 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \end{bmatrix}$$

2. Demuestre lo siguiente:
i) A de $n \times n$ es singular si y sólo si $\lambda = 0$ es autovalor.
ii) Si rango$(A) = k < n$, $\lambda = 0$ es un autovalor de A de multiplicidad geométrica $n - k$.

3. Sabiendo que $[1 \quad -2 \ \ 0]^T$ es un autovector de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -6 \\ 2 & -1 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

encuentre los autovalores de A, sus multiplicidades algebraicas y geométricas y tantos autovectores linealmente independientes como sea posible.

4. Encuentre los autovalores de A, sus multiplicidades algebraicas y geométricas y tantos autovectores linealmente independientes como sea posible, siendo

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 0 \\ 1 & -1 & 6 \end{bmatrix}.$$

5. Demuestre que los autovalores de una matriz T triangular (inferior o superior) son los elementos de la diagonal. Encuentre los autovectores asociados a cada autovalor para el caso en que $T_{ii} \neq T_{jj}$ si $i \neq j$.

6. Suponga que A de $n \times n$ admite la partición en bloques

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

con A_{11} de $k \times k$, A_{12} de $k \times (n-k)$ y A_{22} de $(n-k) \times (n-k)$.

(a) Demuestre que el polinomio característico de A es el producto de los polinomios caracteristicos de A_{11} y A_{22}.

(b) Demuestre que λ es autovalor de A si y sólo si λ es autovalor de A_{11} ó A_{22}.

(c) Si $A_{12} = 0$ ¿ qué relación puede establecer entre los autovectores de A_{11} y A_{22} y los autovectores de A?

7. Encuentre los autovalores de A, sus multiplicidades algebraicas y geométricas y tantos autovectores linealmente independientes como sea posible, siendo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -6 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

8. Generalize el ejercicio 6 al caso en que

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_{kk} \end{bmatrix},$$

con $A_{11}, \dots, A_{kk}$ matrices cuadradas.

9. Demuestre que la multiplicidad geométrica μ del autovalor λ de A es menor o igual que la multiplicidad algebraica m del mismo autovalor, de la siguiente forma:

(a) Demuestre que existe una matriz no singular P tal que sus primeras μ columnas son una base para el autoespacio asociado al autovalor λ.

(b) Demuestre que para tal P, la matriz $A' = P^{-1}AP$ es de la forma

$$A' = \begin{bmatrix} \lambda I_\mu & B \\ 0 & C \end{bmatrix}.$$

(c) Demuestre que el polinomio característico de A coincide con el polinomio característico de A'.

(d) Deduzca a partir del punto anterior que el polinomio característico de A es de la forma $p(t) = (t - \lambda)^\mu q(t)$ y que por lo tanto $\mu \leq m$.

10. Encuentre para cada $k \in \mathbb{C}$ los autovalores de A, sus multiplicidades algebraicas y geométricas y tantos autovectores linealmente independientes como sea posible, siendo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & k & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

11. ¿ Cuántos autovalores diferentes de cero tiene como máximo una matriz A de $n \times n$ si rango$(A) = k < n$?

12. Encuentre los autovalores y autovectores de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

sin hallar el polinomio característico.

13. Demuestre que si λ es autovalor de A entonces:

    (a) $r\lambda$ es autovalor de rA.

    (b) λ^k es autovalor de A^k si k es un entero positivo.

    (c) Si A es inversible, λ^{-1} es autovalor de A^{-1}.

    (d) $\lambda + r$ es autovalor de $A + rI$.

14. Encuentre los autovalores y autovectores de la matriz $n \times n$

$$\begin{bmatrix} 1+r & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+r & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+r & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+r \end{bmatrix}.$$

Sugerencia: encuentre primero los autovalores y autovectores para el caso particular $r = 0$.

15. (a) Demuestre que el polinomio característico de A coincide con el de A^T y que por lo tanto A y A^T tienen los mismos autovalores.

    (b) Demuestre que la dimensión del autoespacio asociado al autovalor λ de la matriz A coincide con la dimensión del autoespacio asociado al mismo autovalor de la matriz A^T, y que por lo tanto la multiplicidad geométrica de λ como autovalor de A coincide con la multiplicidad geométrica de λ como autovalor de A^T.

    (c) ¿ Qué relación puede establecerse entre el polinomio característico de A y el de A^H?, ¿ y entre las dimensiones de los autoespacios de A y los de A^H?

16. Si $p(t) = a_k t^k + a_{k-1} t^{k-1} + \cdots + a_1 t + a_0$ y A es una matriz $n \times n$, definimos $p(A) = a_k A^k + a_{k-1} A^{k-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I$. Demuestre que si λ es autovalor de A estonces $p(\lambda)$ es autovalor de $p(A)$.

17. Demuestre que si $p(t) = q(t)r(t)$ con $q(t)$ y $r(t)$ polinomios entonces $p(A) = q(A)r(A)$.

18. Siga los pasos de la demostración del siguiente resultado:
Sean $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y $p(t) = a_k t^k + \cdots + a_0$ con $a_k \neq 0$. Entonces para cada autovalor λ de $p(A)$ existe un autovalor ν de A tal que $p(\nu) = \lambda$;
y justifique las afirmaciones señaladas.
Demostración: Supongamos que λ es un autovalor de $p(A)$ y consideremos el polinomio $q(t) = p(t) - \lambda$.
(*) Entonces la matriz $q(A)$ es singular.
Por otra parte, por el Teorema fundamental del álgebra $q(t) = a_k(t - \nu_1) \cdots (t - \nu_k)$ siendo $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k$ las raíces de $q(t)$ contadas con su multiplicidad.
(*) Entonces $q(A) = a_k(A - \nu_1 I) \ldots (A - \nu_k I)$.
(*) Como $q(A)$ es singular, para algún i^*, $(A - \nu_{i^*} I)$ es singular.
(*) Por lo tanto ν_{i^*} es un autovalor de A.
(*) Como ν_{i^*} es raíz de $q(t)$, $p(\nu_{i^*}) = \lambda$ y finaliza la demostración.

19. Halle los autovalores de $A^3 + 2A^2 - 3A + I$ siendo A la matriz del ejercicio 4.

20. ¿ Para qué valores de $r \in \mathbb{R}$ resulta inversible la matriz $A^3 + rA^2 - I$, si A es la matriz del ejercicio 3?

21. Si A es tal que $A^2 = A$ ¿ Cuáles son sus posibles autovalores?

22. Encuentre una factorización $A = P\Lambda P^{-1}$ con Λ diagonal para las siguientes matrices A:
i) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ii) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ iii) $A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -3i & -1 \end{bmatrix}$.

23. Idem ejercicio anterior pero con la matriz A del ejercicio 1 iii).

24. Determine si la matriz
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$
puede diagonalizarse; si es así hágalo, si no explique por qué no es posible.

25. Determine si las matrices de los ejercicios que a continuación se enumeran admiten una factorización $A = P\Lambda P^{-1}$ con Λ diagonal. Si tal factorización existe halle una, si no existe explique por qué.
a) 3. b) 1.iv c) 1.v d) 4.

26. Sea A la matriz dependiente del parámetro real α:
$$A = \begin{bmatrix} 2\alpha + 4 & 1 - \alpha & -2\alpha - \alpha^2 \\ 0 & 4 - \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 4 - \alpha^2 \end{bmatrix}.$$
(a) Obtener los valores de α para los que A es diagonalizable.
(b) Diagonalizar A para $\alpha = 1$ y para $\alpha = 2$.

27. ¿ Verdadero o falso?

    (a) Si la matriz A de $n \times n$ posee n autovalores distintos entonces A es diagonalizable.

    (b) Si $A = P\Lambda P^{-1} = S\Lambda S^{-1}$ con Λ diagonal, entonces $S = T$.

    (c) Si A es diagonalizable entonces $p(A)$ es diagonalizable cualquiera sea el polinomio $p(t)$.

    (d) Si $p(A)$, con $p(t)$ un polinomio no constante, es diagonalizable entonces A es diagonalizable.

    (e) Si la matriz $n \times n$ $p(A)$, con $p(t)$ un polinomio, posee n autovalores diferentes, entonces A es diagonalizable.

28. Suponga que $A \in K^{n\times n}$ ($K = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) es una matriz tal que $A^2 = A$ y demuestre lo siguiente:

    (a) Si $x \in \mathrm{col}(A)$ entonces $Ax = x$.

    (b) $\mathrm{col}(A) \oplus \mathrm{Nul}(A) = K^n$.

    (c) Existe una base de K^n compuesta por autovectores de A.

    (d) Existe $P \in K^{n\times n}$ inversible tal que $A = P\Lambda P^{-1}$ con $\Lambda = \mathrm{diag}(\overbrace{1,\dots,1}^{k}, 0, \dots, 0)$ y $k = \mathrm{rango}(A)$.

    (e) Si además $A^T = A$ y $K = \mathbb{R}$ ó $A^H = A$ y $K = \mathbb{C}$, entonces existe una base ortonormal de K^n compuesta por autovectores de A.

29. Suponga que $T \in \mathcal{L}(V)$ y V es de dimensión finita. Determine, justificando, cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas.

    (a) Si B y C son bases de V entonces $[T]_B$ tiene los mismos autovectores que $[T]_C$.

    (b) Si B y C son bases de V entonces $[T]_B$ tiene los mismos autovalores que $[T]_C$.

    (c) Existe una base de V compuesta por autovectores de T si y sólo $[T]_B$ es diagonalizable para cualquier base B de V.

    (d) Si T tiene n autovalores distintos entonces existe una base B tal que $[T]_B$ es diagonal.

30. Para cada una de las siguientes transformaciones lineales encuentre los autovalores, sus multiplicidades algebraicas y geométricas y bases para los autoespacios asociados a cada autovalor. Si es posible encuentre una base ordenada tal que la representación matricial de la transformación respecto de ella sea una matriz diagonal. Si tal base no existe explique por qué.

    (a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x) = [x_1 + x_2 - x_3 \;\; x_1 + x_2 + x_3 \;\; -x_1 + x_2 + x_3]^T$.

    (b) $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$, $T(a + bt + ct^2) = 2a + ct + (-b - c)t^2$.

(c) $T : V \to V$ tal que en la base $B = \{v_1; v_2\}$

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

considerando primero que V es un espacio vectorial real y luego que es un espacio vectorial complejo.

(d) $T : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$, $T(p) = p'' - p$.

31. Sea $T : V \to V$ una transformación lineal que, respecto de una base $B = \{v_1; v_2; v_3\}$ tiene asociada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1+\alpha & -\alpha & \alpha \\ 2+\alpha & -\alpha & \alpha - 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

(a) Obtener los autovalores de T, comprobando que no dependen de α.

(b) Obtener los autoespacios asociados a cada autovalor y estudiar si T es diagonalizable.

(c) Cuando T sea diagonalizable encuentre una base ordenada B tal que $[T]_B$ sea diagonal.

32. Suponga que $T \in \mathcal{L}(V)$, con V de dimensión finita, es tal que $T^2 = I$.

(a) Encuentre los posibles autovalores de T.

(b) Demuestre que si $\mathcal{S}_1 = \{v \in V : T(v) = v\}$ y $\mathcal{S}_2 = \{v \in V : T(v) = -v\}$, $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 = \{0\}$ y $\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2 = V$. (Sugerencia: escriba $v = v_1 + v_2$ con $v_1 = (v + T(v))/2$ y $v_2 = (v - T(v))/2$.)

(c) Demuestre que T es diagonalizable.

(d) Si $\dim(V) = 5$ y $\det[T]_B = -1$ para alguna base B de V, ¿ cuáles son las posibles dimensiones de $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$?

33. Considere la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definida de la siguiente manera: $T(v) = v - 3\frac{uu^T}{u^Tu}v$ con $u = [1 \;\; -1 \;\; 2]$. Encuentre los autovalores T. Analice si $[T]_B$ es diagonalizable para cualquier base B de $\mathbb{R}^3$.

34. Resuelva el ejercicio anterior con $u \in \mathbb{R}^3$ un vector no nulo arbitrario.

35. Halle una matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que: $\mathcal{S} = \text{gen}\{[1 \;\; -1 \;\; 0]^T\}$ sea invariante por A, $\lambda = 2$ sea autovalor y $\mathcal{S}^\perp$ sea el autoespacio asociado a ese autovalor, y $\det(A) = 12$.

36. Sea V un espacio vectorial real de dimensión 3 y sea $B = \{v_1; v_2; v_3\}$ una base de V. Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ tal que: i) Si $v = 6v_1 + 2v_2 + 5v_3$ entonces $T(v) = v$, ii) $\mathcal{S} = \{v \in V : [2 \;\; 11 \;\; -7]c_B(v) = 0\}$ es el autoespacio asociado a uno de los autovalores de T, y iii) la traza de $[T]_B$ es igual a 5.
Se pide:
a) Hallar los autovalores de T. b) Hallar $[T]_B$.

37. Demuestre que las matrices A y B no son semejantes si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

38. Compruebe que las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2.5 & 1.5 \\ 1.5 & 2.5 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

son semejantes. Halle $S \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ inversible tal que $A = SBS^{-1}$.

39. Encuentre A^k para $k \in \mathbb{N}$ si:

a) A=$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ b) A=$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

40. Hallar una matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $A^2 = B$ con

$$B = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 3 \\ 3 & 4 & -3 \\ -3 & -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

¿ Es única?

41. Hallar $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $A^2 - 3A + 2I = B$, con

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix},$$

y $\det(A) = -2$.

42. Determine los posibles valores de $\lim_{k\to+\infty} A^k v$, siendo A la matriz del ejercicio 39 b). (Sugerencia: estudie primero el caso en que v es autovector de A.

43. Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -2 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

encontrar un subespacio $\mathcal{S}$ invariante por A tal que $\lim_{k\to\infty} Av = 0$ para cada $v \in \mathcal{S}$.

44. Demuestre que para una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, el conjunto $\mathcal{S} = \{z \in \mathbb{C}^n : \lim_{k\to+\infty} A^k z = 0\}$ es un subespacio de $\mathbb{C}^n$, invariante por A. ¿ Si A es diagonalizable qué subespacio resulta $\mathcal{S}$?

45. Demuestre que si $p(t)$ es el polinomio característico de A y A es diagonalizable, entonces $p(A) = 0$. (Este resultado, conocido como el Teorema de Cayley-Hamilton, vale en general, es decir sin necesidad de suponer que A es diagonalizable.)

Práctica 5 (2da Parte)- Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

1. Hallar la solución general del sistema $X' = AX$, con A:

   i) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ii) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ iii) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -6 \\ 2 & -1 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

2. Resolver los problemas a valores iniciales:

   a) $X' = AX$, $X(0) = [1\ \ -2]^T$, con $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

   b) $X' = AX$, $X(0) = [1\ \ -2\ 1]^T$, con A la matriz del Ejercicio 1.iii.

3. Hallar bases de soluciones reales de los sistemas:

   i) $X' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} X$ ii) $X' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} X$.

4. Resolver el problema a valores iniciales

   $X' = AX$, $X(0) = [1\ \ 0]^T$, con $A = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$.

5. Hallar la solución general de los siguientes sistemas lineales no homogéneos:

   a) $\begin{cases} y_1' &= 2y_1 - y_2 + e^t \\ y_2' &= -y_1 + 2y_2 - e^{2t} \end{cases}$

   b) $Y' + AY = F(x)$, con $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ y $F(x) = [x\ \ -x]^T$.

   Sugerencia: haga un cambio de variables adecuado.

6. La solución general de un sistema lineal homogéneo $X' = AX$ en $\mathbb{R}^2$ es

   $$X = \begin{bmatrix} c_1e^{-t} + 5c_2e^{3t} \\ 2c_1e^{-t} + c_2e^{3t} \end{bmatrix}$$

   Hallar A.

7. Considere la ecuación lineal homogénea de 2do orden:

   $$y'' + ay' + by = 0 \tag{1}$$

   y el sistema de ecuaciones en $\mathbb{R}^2$

   $$Y' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix} Y, \quad \text{con} \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

   Pruebe lo siguiente:

   a) Si $Y = [y_1\ y_2]^T$ es solución de (2) entonces $y = y_1$ es solución de (1).

   b) Si y es solución de (1) entonces $Y = [y_1\ y_2]^T$ con $y_1 = y$, $y_2 = y'$, es solución de (2).

   c) El polinomio característico de A coincide con el polinomio característico de (1).

8. Encontrar la solución general de $X' = AX$ con A:

   i) $\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ ii) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ iii) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -4 \end{bmatrix}$ iv) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

Práctica 6 - Diagonalización de Matrices Hermíticas - Formas Cuadráticas - Descomposición en Valores Singulares

Nota: en todos los ejercicios, salvo que se indique lo contrario, $(\cdot,\cdot)$ representa el producto interno canónico en $\mathbb{R}^n$ ó $\mathbb{C}^n$.

1. Encontrar números a, b y c de manera tal que:

   1) $P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & a \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} & b \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} & c \end{bmatrix}$ sea ortogonal. 2) $U = \begin{bmatrix} \frac{1+i}{2} & a \\ \frac{1-i}{2} & b \end{bmatrix}$ sea unitaria.

2. Determine cuáles de las matrices de los ejercicios 5 y 6 del T.P. 4 son ortogonales.

3. Demuestre que las matrices de Householder son ortogonales (ver ejercicio 28 (d) del T.P. 2).

4. Demuestre las siguientes propiedades de las matrices unitarias:

   (a) U es unitaria $\Leftrightarrow$ U^H es unitaria $\Leftrightarrow$ U^T es unitaria.

   (b) Si U y V son unitarias entonces UV es unitaria.

5. Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la trasformación lineal definida por $T(x) = Px$ con $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal. Demuestre lo siguiente:

   (a) $(T(x), T(x')) = (x, x')$ para todo $x, x' \in \mathbb{R}^n$. En particular $\|T(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

   (b) $x \perp x'$ si y sólo si $T(x) \perp T(x')$.

   (c) $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ si y sólo si $\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ es base ortonormal de $\mathbb{R}^n$.

   (d) Si $\mathcal{S}$ es un subespacio invariante por T, entonces $T(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$ y $T(\mathcal{S}^\perp) = \mathcal{S}^\perp$.

6. Idem ejercicio 5 pero con $\mathbb{C}^n$ en lugar de $\mathbb{R}^n$ y $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitaria en lugar de $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal.

7. Suponga que $B_1 = \{v_1; \ldots; v_n\}$ y $B_2 = \{u_1; \ldots; u_n\}$ son bases ortonormales de $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$). Demuestre que la matriz de cambio de base $C_{B_1B_2}$ es una matriz ortogonal (resp. unitaria). (Sugerencia: demuéstrelo primero para el caso en que B_2 es la base canónica. Otra alternativa es emplear el ejercicio 9 del T.P. 2).

8. Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal tal que para cierta base ortonormal B, $[T]_B$ es ortogonal. Demuestre que:

(a) $[T]_{B'}$ es ortogonal para cualquier otra base ortonormal B'.

(b) Valen (a)-(d) del ejercicio 5.

9. Halle $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, $T \neq \pm I$, tal que $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$ sea invariante por T y, además, $\|T(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in \mathbb{R}^3$.

10. Explique por qué las rotaciones y las simetrías preservan los ángulos entre vectores y las longitudes de éstos.

11. Halle los autovalores y autovectores de la matriz ortogonal del ejercicio 1. Calcule el módulo de cada autovalor y el producto interno entre dos autovectores correspondientes a dos autovalores diferentes.

12. Demuestre que los autovalores de una matriz unitaria son de módulo uno y que autovectores correspondientes a distintos autovalores son ortogonales.

13. Diagonalice ortogonalmente cada una de las siguientes matrices simétricas, es decir, exprese cada una de ellas en la forma $P\Lambda P^T$, con P ortogonal y Λ diagonal:

$$\text{i)} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{ii)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{iii)} \begin{bmatrix} -2 & -36 & 0 \\ -36 & -23 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{iv)} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

14. Diagonalice unitariamente cada una de las siguientes matrices Hermíticas, es decir, exprese cada una de ellas en la forma $U\Lambda U^H$, con U unitaria y Λ diagonal:

$$\text{i)} \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ii)} \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

15. Compruebe que las siguientes matrices puede ser diagonalizadas unitariamente, aún sin ser Hermíticas:

$$\text{i)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ii)} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

16. Califique cada una de las siguientes afirmaciones como verdadera o falsa:

(a) Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es diagonalizable ortogonalmente entonces A es simétrica.

(b) Una matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tiene n autovalores reales distintos.

(c) Las multiplicidad algebraica y geométrica de cada autovalor de una matriz simétrica coinciden.

(d) Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es diagonalizable unitariamente entonces A es Hermítica.

(e) Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es diagonalizable unitariamente y sus autovalores son reales entonces A es Hermítica.

(f) Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es diagonalizable unitariamente entonces A^k también es diagonalizable unitariamente.

(g) Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es diagonalizable unitariamente entonces su inversa, en caso de existir, también es diagonalizable unitariamente.

17. Demuestre con un ejemplo que el producto de matrices Hermíticas no es necesariamente una matriz Hermítica.

18. Suponga que $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es simétrica y que $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Demuestre que B^TAB, B^TB y BB^T son simétricas.

19. Se dice que una matriz $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es antisimétrica si $C^T = -C$.

    (a) Encuentre los autovalores y autovectores de la matriz antisimétrica
$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$
    y compruebe que sus autovalores son imaginarios puros y que es diagonalizable unitariamente.

    (b) Considere $A = iC$ y compruebe que A es Hermítica. Explique por qué a partir de esto último se deduce que los autovalores de C son imaginarios puros y que C es diagonalizable unitariamente.

    (c) Demuestre que si $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es antisimétrica entonces $A = iC$ es Hermítica.

    (d) Deduzca del punto anterior que una matriz real antisimétrica tiene autovalores imaginarios puros o nulos, que autovectores correspondientes a autovalores distintos son ortogonales y que es diagonalizable unitariamente.

    (e) Demuestre que una matriz $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ antisimétrica es singular si n es impar.

20. Halle $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ simétrica tal que $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 2$ sean sus autovalores y $\mathcal{S}_{\lambda_1} = \text{gen}\{[1\ 1\ 1]^T\}$.

21. Halle una matriz Hermítica $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ tal que $B = A^3 - A^2 + A - I$ sea singular, $\lambda = 2$ sea autovalor doble y $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{C}^3 : x_1 - ix_2 + x_3 = 0\}$ sea invariante por A. ¿ Es única A?; si no lo es encuentre dos diferentes.

22. Encuentre la matriz de cada una de las siguientes formas cuadráticas en $\mathbb{R}^2$.
    a) $10x_1^2 - 6x_1x_2 - 3x_2^2$ b) $5x_1^2 + 3x_1x_2$ c) x_1x_2.

23. Encuentre la matriz de cada una de las siguientes formas cuadráticas en $\mathbb{R}^3$.
    a) $4x_1x_2+6x_1x_3-8x_2x_3$ b) $8x_1^2+7x_2^2-3x_3^2-6x_1x_2+4x_1x_3-2x_2x_3$ c) $x_1^2-x_1x_3+x_3^2$.

24. Clasifique cada una de las siguientes formas cuadráticas en $\mathbb{R}^2$ y efectúe un cambio de variables $x = Py$ que transforme la forma cuadrática en una sin término de producto cruzado. Escriba la nueva forma cuadrática. Grafique los conjuntos de nivel.
    a) $x_1^2+10x_1x_2+x_2^2$ b) $3x_1^2-4x_1x_2+6x_2^2$ c) $x_1^2+2x_1x_2+x_2^2$ d) $-4x_1^2+4x_1x_2-3x_2^2$.

25. Clasifique cada una de las siguientes formas cuadráticas en $\mathbb{R}^3$ y efectúe un cambio de variables $x = Py$ que transforme la forma cuadrática en una sin término de producto cruzado. Escriba la nueva forma cuadrática.
a) $5x_1^2 + 6x_2^2 + 7x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3$
b) $3x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$
c) $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$.

26. Dada la forma cuadrática $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = -\frac{4}{5}x_1^2 + \frac{6}{5}x_1x_2 + \frac{4}{5}x_2^2$, demuestre que $-\|x\|_2^2 \leq Q(x) \leq \|x\|_2^2$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$.

27. El siguiente ejercicio muestra cómo clasificar una forma cuadrática $Q(x) = x^T Ax$, donde $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, sin encontrar los autovalores de A. Demostrar:

   (a) Q es definida positiva si y sólo si $a_{11} > 0$ y $\det(A) > 0$.

   (b) Q es definida negativa si y sólo si $a_{11} < 0$ y $\det(A) > 0$.

   (c) Q es indefinida si y sólo si $\det(A) < 0$.

   (Sugerencia: Tenga en cuenta que si λ_1 y λ_2 son los autovalores de A, entonces $\text{traza}(A) = \lambda_1 + \lambda_2$ y $\det(A) = \lambda_1\lambda_2$).

28. Demuestre que la expresión $(x, y) = x^H Qy$ con $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ Hermítica define un producto interno en $\mathbb{C}^n$ si y sólo si Q es definida positiva.

29. Determine cuáles de las siguientes expresiones determinan productos internos en $\mathbb{R}^2$ ó $\mathbb{R}^3$.
a) $x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2$ b) $x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2$
c) $7x_1y_1 - 4x_1y_2 + 4x_1y_3 - 4x_2y_1 + 5x_2y_2 + 4x_3y_1 + 9x_3y_3$.
Para los que resulten productos internos, graficar la bola unitaria.

30. Compruebe que $(x, y) = 2\overline{x_1}y_1 + i\overline{x_1}y_2 - i\overline{x_2}y_1 + \overline{x_2}y_2 + \overline{x_3}y_3$ es un producto interno en $\mathbb{C}^3$.

31. Demuestre que si $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, entonces $G = B^T B$ es semidefinida positiva. Encuentre la condición que debe cumplir B para que G resulte definida positiva. (A G se la denomina matriz de *Gram* de B.)

32. Encuentre el máximo y el mínimo de la formas cuadráticas de los ejercicios 24 y 25, sujetos a la restricción $x^T x = 1$.

33. Dada la forma cuadrática $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = -2x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2 - 10x_3^2$, determinar los valores máximo y mínimo de $Q(x)$ sujeto a la restricción $x_1^2 + x_2^2 + 9x_3^2 = 9$, y los valores de x para los cuales se alcanzan esos extremos.(Sugerencia: considere un cambio de variable que transforme la restricción dada en una de la forma $x^T x = 1$.)

34. Encuentre el máximo y el mínimo de la forma cuadrática $Q(x) = x_1^2 + x_2^2$ sujeto a la restricción $2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 = 4$. Halle los x para los cuales se alcanza el extremo.

35. Encuentre los puntos de la curva

$$2x_1^2 + 6x_2^2 - 2\sqrt{5}x_1x_2 = 1$$

más cercanos al origen de dos formas diferentes:

(a) Minimizando $\|x\|$ con x sujeto a una restricción adecuada.

(b) Haciendo un cambio de variables adecuado y resolviendo el problema en las nuevas variables.

36. Encuentre una descomposición en valores singulares (DVS) de cada una de las siguientes matrices

a) $\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$.

37. Considere la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x) = Ax$ con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Encuentre de entre todos los vectores de norma 1, uno tal que $\|T(x)\|$ sea máxima y otro tal que $\|T(x)\|$ sea mínima. ¿ Qué relación encuentra entre lo que obtuvo y los valores singulares de A?

38. Suponga que $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ y $A = U\Sigma V^T$ es una DVS de A. Justifique cada respuesta.

(a) Suponga que A es cuadrada e inversible. Encuentre una DVS de A^{-1}.

(b) Demuestre que si A es cuadrada, $|\det(A)|$ es igual al producto de los valores singulares de A.

(c) Demuestre que las columnas de V son autovectores de A^TA y que las columnas de U son autovectores de AA^T.

(d) Demuestre que los valores singulares no nulos de A coinciden con los valores singulares no nulos de A^T y de allí deduzca que el rango de A y de A^T coinciden.

(e) Demuestre que si A es $n \times n$ y definida positiva, entonces los valores singulares y los autovalores de A coinciden.

(f) Halle una DVS de $G = A^TA$ y demuestre que: i) los rangos de A y de G coinciden, ii) G es inversible si y sólo si el rango de A es m. (Compare con el ejercicio 21 del T.P. 3).

(g) Demuestre que si P es ortogonal PA y A (AP y A) tienen los mismos valores singulares.

39. A partir de las descomposiciones en valores singulares halladas en el ejercicio 36 encuentre descomposiciones en valores singulares de la inversa de la matriz del punto c. y de la transpuesta de la matriz del punto e.

40. Halle la pseudoinversa de A, con A la matriz del ejercicio 36 e. y encuentre la solución por cuadrados mínimos de norma mínima de la ecuación $Ax = b$, con $b = [1 \ -1]^T$.

41. Demuestre que en el caso en que $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ tiene rango m, la pseudoinversa de A definida a partir de una DVS de A y la seudoinversa definida en el ejercicio 21 d. del T.P. 3, coinciden.

42. Compruebe que $A = U\Sigma V^T$ con

$$U = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}$$

es una descomposición en valores singulares de A y, a partir de ella, calcule rango(A), las matrices de proyección a col(A) y Nul(A) y la seudoinversa de Moore-Penrose. Encuentre los $x \in \mathbb{R}^3$ unitarios que maximizan $\|Ax\|$.

43. Sabiendo que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix},$$

obtener una DVS de A sin calcular previamente A y, a partir de ella, hallar una DVS de A^T y calcular las matrices de proyección a col$(\mathrm{A}^{\mathrm{T}})$ y Nul(A^T) y la seudoinversa de Moore-Penrose de A^T.

44. Decidir si son verdaderas las siguientes afirmaciones

    (a) Si A y B son matrices semejantes ortogonalmente entonces A y B tienen los mismos valores singulares.

    (b) Si $A \in \mathbb{R}^n$ y $B \in \mathbb{R}^n$ tienen los mismos autovalores, entonces A y B tienen los mismos valores singulares.

    (c) Si $A \in \mathbb{R}^n$ es simétrica, entonces los valores singulares de A son iguales a los autovalores de A.

    (d) Si $A \in \mathbb{R}^n$ es simétrica, entonces los valores singulares de A son iguales a los módulos de los autovalores de A.

45. Sea $A \in \mathbb{R}^n$ y sean σ_m y σ_M el mínimo y el máximo valor singular de A respectivamente. Demuestre que si λ es un autovalor real de A entonces $\sigma_m \leq |\lambda| \leq \sigma_M$. (Sugerencia: considere el producto v^TAv con v un autovector unitario de A.)

Práctica 7 - Normas de Vectores, Transformaciones Lineales y Matrices

1. Para cada uno de los siguientes vectores x, calcule $\|x\|_1$ y $\|x\|_\infty$:
   $[2\ \ -5]^T$, $[2i\ \ 0\ \ -3i]^T$, $[2\ \ -5\ \ 5]^T$, $[i\ \ -i\ \ 1\ \ -1]^T$.

2. Grafique la circunferencia unitaria $S_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ \|x\| = 1\}$ considerando las normas 1, 2 e ∞.

3. Hallar los puntos de $S = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 = 0\}$ que se encuentran más cerca de $[1\ \ 1]^T$, considerando las normas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$.

4. Demuestre que $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ son normas.

5. Compruebe que las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ en $\mathbb{R}^2$ no verifican la identidad del paralelogramo (vea el ejercicio 5 (c) del T.P. 2) y por lo tanto no son inducidas por un producto interno. ¿Es cierta esta afirmación en $\mathbb{R}^n$?

6. Suponga que $\|\cdot\|$ es una norma en $\mathbb{R}^n$ y que $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es inversible. Demuestre que si define $\|x\|_A = \|Ax\|$, $\|\cdot\|_A$ es una norma.

7. Empleando el ejercicio 6 compruebe que las siguientes son normas:
   a) $\|x\| = \sqrt{(2x_1 + x_2)^2 + (x_1 - x_2)^2}\ \ x \in \mathbb{R}^2$, (b) $\|x\| = \max(2|x_1|, |3x_1 - 2x_2|)$ $x \in \mathbb{R}^2$, (c) $\|x\| = |x_1 + x_2 - x_3| + |x_1 - 2x_2| + |3x_1 + x_2 - x_3|\ \ x \in \mathbb{R}^3$.

8. Para la siguientes sucesiones de vectores $\mathbf{x}_n$, encuentre el límite $\mathbf{x}_\infty$ en las normas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$.
   (a) $\mathbf{x}_n = \begin{bmatrix} \frac{2n+3}{n+1} \\ \frac{n-2}{n^2+2} \\ \frac{\operatorname{sen}(n)}{n} \end{bmatrix}$ (b) $\mathbf{x}_n = \begin{bmatrix} e^{-n} \\ \frac{n+1}{n+2} \\ \frac{(-1)^n(n+1)}{n} \end{bmatrix}$ (c) $\mathbf{x}_n = \begin{bmatrix} e^{-n} + n \\ \frac{n+1}{n^2+2} \\ \frac{(-1)^n(n+1)}{n^2} \end{bmatrix}$

9. (a) Sea V un espacio vectorial con norma $\|\cdot\|$. Demuestre que
   $$|\|u\| - \|v\|| \leq \|u - v\| \quad \text{para todo } u \text{ y } v \text{ en } V.$$
   (b) Empleando el punto anterior demuestre que si u_n converge a u_∞ entonces $\lim_{n\to\infty} \|u_n\| = \|u_\infty\|$. ¿ Vale la recíproca?

10. Demuestre que cada una de las siguientes son normas en $\mathcal{P}_2$
    (a) $\|p\| = \max_{t\in[0,1]} |p(t)|$.
    (b) $\|p\| = \max\{|p(0)|, |p(1/2)|, |p(1)|\}$.

Calcule $\|1+t+t^2\|$ en cada una de esas normas.

11. Sea B una base ordenada del $\mathbb{R}$-espacio vectorial V de dimensión n, y sea c_B el isomorfismo de coordenadas.

    (a) Suponga que $\|\cdot\|$ es una norma en $\mathbb{R}^n$. Demuestre que $\|\cdot\|_V$, definida mediante $\|v\|_V = \|c_B(v)\|$, es una norma en V.

    (b) Suponga que $\|\cdot\|_V$ es una norma en V. Demuestre que $\|\cdot\|$ es una norma en $\mathbb{R}^n$ si se define $\|u\| = \|c_B^{-1}(u)\|_V$. (Recuerde que $c_B^{-1}(u)$ es el único $v \in V$ tal que $c_B(v) = u$.)

12. Sea $V = \mathcal{P}_2$ y sea $B = \{1; 1+t; t+t^2\}$ una base ordenada de V. Encuentre para cada una de las normas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$ en $\mathbb{R}^3$, una fórmula para la norma $\|a+bt+ct^2\|_V$ en V que se definió en (a) del ejercicio 11.

13. Sean V y B como en el ejercicio anterior, y sea $\|\cdot\|_V$ la norma definida por

$$\|p\|_V = \left\{\int_0^1 p(t)^2 dt\right\}^{1/2}.$$

    Encuentre una fórmula para la norma $\|[a \quad b \quad c]^T\|$ en $\mathbb{R}^3$ que se definió en (b) del ejercicio 11.

14. Sea $\|\cdot\| : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $\|x\| = \max\{|2x_1|, |3x_2|\}$. Demuestre que $\|\cdot\|$ es una norma y grafique la bola unitaria. Pruebe que tal norma es equivalente a las normas 1, ∞ y 2.

15. Idem anterior pero en $\mathbb{R}^3$ con $\|x\| = 2|x_1| + 3|x_2| + |x_3|$.

16. Determinar si las normas de los dos ejercicios anteriores son normas inducidas por un p.i.

17. Demuestre que $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2}$ es una norma en $\mathbb{R}^2$. Grafique la bola unitaria y pruebe que tal norma es equivalente a la norma 2 (Sugerencia: encuentre un p.i. tal que $\|\cdot\|$ sea la norma inducida.)

18. Demostrar que $\|[x_1 \quad x_2]^T\| = \sqrt{4x_1^2 + 2ax_1x_2 + 4x_2^2}$ es norma en $\mathbb{R}^2$ si y sólo si $-4 < a < 4$.

19. (a) Sea $T : V \to W$ una transformación lineal inyectiva y $\|\cdot\|_W$ una norma en W. Pruebe que si se define $\|v\|_V$ mediante $\|v\|_V = \|T(v)\|_W$, $\|\cdot\|_V$ es norma en V.

    (b) Use el punto anterior para demostrar que las siguientes expresiones definen normas en $\mathcal{P}_2$ (es decir, identifique W, la transformación T y la norma $\|\cdot\|_W$)
    i) $\|p\| = |p(0)| + |p(1)| + |p(2)|$, ii) $\|p\| = \max\{|p(0)|, |p(-1)|, |p(1)|\}$,
    iii) $\|p\| = \int_0^1 t|p(t)|dt$.

Ejercicios Adicionales a las Prácticas 5 a 7

1. Dada $T \in \mathcal{L}(V)$ definida por $T(v_1) = 7v_1 - 4v_2$ y $T(v_2) = 2v_1 + v_2$, con $B = \{v_1; v_2\}$ una base de V, se pide:
(a) encontrar, si existe, una base C de V tal que la representación matricial de T en esa base sea diagonal.
(b) Calcular $[T^k]_B$ para $k \geq 1$.

2. (a) Defina una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T \neq \pm I$, $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$ sea invariante por T y $(T(x), T(y)) = (x, y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^3$.
(b) Hallar $[T]_E$ con E la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

3. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_2)$ con $[T]_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a & 1 & a \end{bmatrix}$ y $B = \{1 + t; 1 - t; t^2\}$. (a) Determinar para qué valores de a resulta diagonalizable T.
(b) Para $a = 2$, encontrar una base B' de $\mathcal{P}_2$ tal que la representación matricial de $S = T^3 - T + 2I$ sea diagonal. Hallar $[S]_{B'}$.

4. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_2)$ definida por $T(p) = t^3p''(t) - 6\alpha p'(t) - 2tp(t)$, $(\alpha \in \mathbb{R})$.
(a) Demostrar que existe una base B de $\mathcal{P}_2$ compuesta por autovectores de T si y sólo si $\alpha > 0$.
(b) Para $\alpha = 1$, encuentre una base B de $\mathcal{P}_2$ tal que $[T]_B$ sea diagonal.

5. (a) Definir $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tal que: T sea diagonalizable, $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ y $\mathcal{S}^\perp$ sean invariantes por T y $\det([T]_B) = -4$ y $\text{traza}([T]_B) = 3$ para toda base B de $\mathbb{R}^3$.
(b) Demuestre que si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es diagonalizable y 0 no es autovalor de A, entonces A es inversible y $B = \alpha A^n + \beta(A^{-1})^n$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$ es diagonalizable.

6. (a) Sea $C = B(A^3 - A)B^{-1}$, con $B \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ inversible y $A = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Calcule los autovalores de C y determine si C es diagonalizable.
(b) Considere la matriz C de (a) con $B = I$ y calcule $\lim_{n\to\infty} C^n v$ para $v \in \mathbb{R}^3$.

7. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2\times 2})$ definida por $T(A) = A + A^T$.
(a) Encontrar, si existe, una base B de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ en la cual $[T]_B$ sea diagonal.
(b) Demostrar que para $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2^{n-1}}T^n = T$.

8. (a) Encontrar $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ simétrica e indefinida tal que $A^2 + 3A = 4I$ y que $[1\ 1\ 2]^T$ sea un autovector de A.
(b) Demostrar que $Q(x) = x^TAx$, con A la matriz hallada en (a) verifica $-4\|x\|^2 \leq Q(x) \leq \|x\|^2$ $\forall x \in \mathbb{R}^3$.

9. Considere la ecuación $6A^2 + \alpha I = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $(\alpha \in \mathbb{R})$. (a) Demuestre que si $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ verifica la ecuación, entonces A es diagonalizable. (b) Determine para qué valores de α la ecuación admite una solución $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ simétrica y definida negativa y, para cada uno de esos valores, halle una solución en esas condiciones.

10. (a) Encontrar $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ simétrica tal que $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 = 0\}$ sea el autoespacio asociado al menor autovalor de A, $\det(A) = 2$ y $B = A^3 - A^2 + A - I$ no sea inversible.
(b) Considere la forma cuadrática $Q(x) = x^T Ax$ con A la matriz hallada en (a). Calcule $\max_{\|x\|_2=1} Q(x)$, $\min_{\|x\|_2=1} Q(x)$ y halle los x en los que se alcanza cada extremo.

11. (a) Hallar $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ simétrica e indefinida tal que $\max_{\|x\|_2=1} x^T Ax = 3$, $Ax \in \mathcal{S}$ para todo $x \in \mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 + x_2 = 0\}$ y 6 sea autovalor de $A^2 + A$.
(b) Demuestre que si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es simétrica y $x^T(A^2 - 4I)x < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ con $x \neq 0$, entonces todos los autovalores de A se encuentran en el intervalo $(-2, 2)$.

12. (a) La energía cinética de un cuerpo rígido que rota con velocidad angular ω ($\omega \in \mathbb{R}^3$) viene dada por la expresión $E(\omega) = \frac{1}{2}(\omega^T M\omega)$, donde M es una matriz simétrica y definida positiva denominada tensor de inercia. Suponiendo $M = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ y que el cuerpo rota con velocidad angular unitaria ($\|w\|_2 = 1$), se pide hallar el valor mínimo de E, y las velocidades para las cuales se alcanza tal extremo.
(b) Suponga que $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es una forma cuadrática tal que $Q([1\ 1\ 1]^T) = 3$ y $Q([1\ 1\ 0]) = -4$. Si λ_M y λ_m son, respectivamente, el máximo y el mínimo autovalor de la matriz asociada a Q, determinar cuánto pueden valer como mínimo λ_M y como máximo λ_m.

13. (a) Demostrar que en $\mathbb{R}^2$, $\|x\| = \sqrt{2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2}$ es una norma inducida por un producto interno.
(b) Para la norma $\|\cdot\|$ del punto (a), hallar $\max_{\|x\|_2=1} \|x\|$, $\min_{\|x\|_2=1} \|x\|$ y graficar la bola unitaria.

14. (a) Encuentre los puntos de la curva $6x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2 = 1$ más cercanos al origen.
(b) Demuestre que si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es simétrica y definida positiva entonces existe $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica y definida positiva tal que $A = B^T B$.

15. (a)Encuentre los puntos de la curva

$$2x_1^2 + 6x_2^2 - 2\sqrt{5}x_1x_2 = 1$$

de norma Euclídea máxima.
(b) Demuestre las siguientes afirmaciones:
i) Si A es antisimétrica ($A = -A^T$) entonces A^2 es simétrica y semidefinida negativa.
ii) Si A es simétrica y definida positiva y B es semejante ortogonalmente a A, entonces B también es simétrica y definida positiva.

16. (a) Encontrar, entre todos los rectángulos de vértices $\pm(x_1, x_2)$, $\pm(x_1, -x_2)$ con $\frac{x_1^2}{9} + \frac{x_2^2}{4} = 1$, el de área máxima.
(b) Sea $(x, y)_G = x^T Gy$ con $G \in \mathbb{R}^{n\times n}$ un producto interno en $\mathbb{R}^n$. Demostrar que existe una matriz simétrica y definida positiva $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $(x, y)_G = (Ax, Ay)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, con $(\cdot, \cdot)$ el producto interno canónico de $\mathbb{R}^n$.

17. (a) Dada $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ determinar el rango de A, sus valores singulares y la matriz de proyección sobre $\mathrm{Nul}\left(\mathrm{A^T}\right)$. (Sugerencia: obtenga una DVS de A sin calcular A.)
(b) Dada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ decidir si son ciertas las siguientes afirmaciones:
i) El producto de los valores singulares de A es el determinante de A.
ii) Si todos los valores singulares de A valen 1 entonces A es ortogonal.

18. (a) Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, con $T(x) = [x_1 + x_2 + x_3 \;\; x_1 - x_2 + x_3]^T$. Dado $b = [1 \; 2]^T$, hallar entre los $x \in \mathbb{R}^3$ que minimizan $\|T(x) - b\|_2$, el de longitud mínima.
(b) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Demostrar las siguientes afirmaciones: i) si las columnas de A son ortonormales entonces los valores singulares de A son todor iguales a 1; ii) Si las filas de A son ortonormales, entonces los valores singulares **no nulos** de A son iguales a 1. (Sugerencia: trabaje con A^T).

19. (a) Sea $A = U\Sigma V^T$ con $\Sigma \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ diagonal, $\Sigma_{11} = 2$, $\Sigma_{22} = 1$ y $\Sigma_{33} = 0$, U y V ortogonales y tales que la última columna de V es $[1/\sqrt{2} \;\; 0 \;\; 1/\sqrt{2}]^T$ y la última columna de U es $[1/\sqrt{5} \;\; 2/\sqrt{5} \;\; 0]^T$. Hallar las matrices de proyección a los subespacios $\mathrm{col}(A)$ y $\mathrm{nul}(A)$ y calcular $\max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2$.
(b) Decidir, justificando la respuesta, si las siguientes afirmaciones son ciertas:
i) Si B es ortogonal A y AB tienen los mismos valores singulares.
ii) Si A y B tienen los mismos autovalores, entonces A y B tienen los mismos valores singulares.

20. (a) Sabiendo que $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$,
i) encontrar los valores singulares de A; ii) hallar la solución por cuadrados mínimos de longitud mínima de $Ax = b$ con $b = [1 \; 1 \; 2]^T$.
(b) Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa, justificando la respuesta:
i) Para $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $AA^+ = P_{\mathrm{col}(A)}$ y $A^+A = P_{\mathrm{Nul}(A)^\perp}$, siendo A^+ la seudoinversa de Moore-Penrose de A.
ii) Si A es inversible, su inversa es igual a A^+.

21. (a) Sean $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x) = [x_1 + x_2 \;\; 2x_1 + 2x_2 \;\; x_1 + x_2]^T$ y $b = [4 \; 2 \; 4]^T$. Halle de entre todos los $x \in \mathbb{R}^3$ que minimizan $\|b - T(x)\|_2$ el de norma Euclídea mínima.
(b) Suponga que $A = U\Sigma V^T$ es una descomposición en valores singulares de $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. i) Demuestre que las columnas de U son autovectores de AA^T y que los autovalores no nulos de AA^T coinciden con los autovalores no nulos de A^TA; ii) deduzca de i) que los valores singulares no nulos de A y de A^T coinciden y que $\max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = \max_{\|z\|_2=1} \|A^Tz\|_2$.

22. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ definida por $T(x) = [x_2 \;\; x_1 + x_2 \;\; x_1]^T$. (a) Hallar bases ortonormales de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ de modo tal que la representación matricial de T en esas bases tenga ceros fuera de la diagonal principal.
(b) Demostrar que $1 \le \|T(x)\|_2 \le \sqrt{3}$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$ con $\|x\|_2 = 1$.

23. (a) Sea $A = BP^T$ con $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ y $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ortogonal. Calcular los valores singulares de A y hallar bases ortonormales de $\mathrm{col}(A)^\perp$ y $\mathrm{Nul}(A)$.
(b) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Encontrar la relación entre $\det(A)$ y el producto de los valores singulares de A.

24. (a) Demostrar que si $\|\cdot\|_a$ y $\|\cdot\|_b$ son dos normas en un espacio vectorial V entonces $\|\cdot\|_c$, definida por $\|v\|_c = \|v\|_a + \|v\|_b \; \forall v \in V$, es norma en V.
(b) Demuestre que $\|x\| = \max\{|x_1|, |x_2|\} + \sqrt{x_1^2 + 4x_2^2}$ es norma en $\mathbb{R}^2$. (Sugerencia: use a)).

25. (a) Encontrar los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para los cuales $\|x\| = |x_1 - \alpha x_2| + |\alpha x_1 - x_2|$ es norma en $\mathbb{R}^2$.
(b) Sea $\|x\| = \sqrt{2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2}$. Demuestre que $\|\cdot\|$ es norma en $\mathbb{R}^2$ y grafique la bola unitaria.

26. (a) Dadas $\|\cdot\|_a$ y $\|\cdot\|_b$ normas en un espacio vectorial V, demostrar que $\|x\| = \alpha\|x\|_a + \beta\|x\|_b$ es una norma en V si $\alpha \ge 0$, $\beta \ge 0$ y α y β no son simultáneamente nulos.
(b) Demostrar que $\|[x_1 \;\; x_2]^T\| = 3\max\{|x_1|, |x_2|\} + 5\sqrt{3x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2}$ es una norma en $\mathbb{R}^2$.

27. (a) Demostrar que si $T \in \mathcal{L}(V, W)$ es inyectiva y $\|\cdot\|_W$ es norma en W entonces $\|\cdot\|_V$, definida por $\|v\|_V = \|T(v)\|_W$, es norma en V.
(b) Demostrar que $\|p\| = |p(1)| + |p(0)| + |p(-1)|$ es norma en $\mathcal{P}_2$ pero no en $\mathcal{P}_3$.(Sugerencia: use (a)).

28. (a) Encontrar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales $\|x\| = |3x_1 + x_2 + x_3| + |kx_1 + (1+k)x_2 - x_3| + |x_1 + x_3|$ es norma en $\mathbb{R}^3$.
(b) Sea $B = \{v_1; \ldots; v_n\}$ una base de un espacio vectorial real V y sea $\|\cdot\|$ una norma en $\mathbb{R}^n$. Demostrar que $\|v\|_B = \|[v]_B\|$ es norma en V.

29. (a) Sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$, $T(p) = (1-t)(p + p')$. Mostrar que $\|p\|_a = |g(0)| + |g(1)| + 2|g(-1)|$ con $g = T(p)$, define una norma en $\mathcal{P}_1$.
(b) Demostrar que en $\mathcal{P}_1$, la norma $\|p\|_b = \text{máx}\{|g(0)|, |g(1)|, |g(-1)|\}$, con $g = T(p)$, es equivalente a la norma $\|\cdot\|_a$.