Álgebra II - Curso de verano 2017
Primer parcial - 2° Recuperatorio 1-3-2017

Apellido y nombres:.. **Padrón:** ....

Condición de aprobación: deben resolverse correctamente por lo menos tres ejercicios, justificando todas las respuestas.

1) Sean los subespacios: $S = \{ A \in R^{2x2} : AB = BA \}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,
$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in R^{2x2} : a = 0 , c + d = 0 \right\}$.

Definir si es posible, una transformación lineal $T: R^{2x2} \to R^{2x2}$ tal que:
$Im(T) = S + W$ y $Nu(T) = S \cap W$.

---

2) Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ hallar todos los $b \in R^3$ que verifican:

$\|p_{Nul(A^t)}(b)\| = 1$ y $\left\|A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - b\right\| \leq \|Ax - b\|$ para todo $x \in R^2$

---

3) Dada la transformación lineal $T: P_1 \to P_1$, $T(p) = (1 + 6x)p' - 6p$
a) Hallar bases de $Nu(T)$ e $Im(T)$.
b) Obtener si es posible, bases B_1 y B_2 de P_1 tales que $[T]_{B_1 B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

---

4) Sabiendo que para cierto producto interno definido en $\Re^3$ la base. $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ es ortonormal, calcular $d([\,4\ 0\ 0\,]^T, S)$ siendo $S = gen\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

---

5) Hallar una matriz $A \in R^{3x3}$ que verifique las siguientes condiciones:

i) $Nul(A - I) = gen\{ [1\ 2\ 1]^T \}$, ii) $rg(A + I) = 2$, iii) $[1\ 0\ 0]^T \in Nul(A^3 - 8I)$.

1) Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$: $AB = BA \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ c+d & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}$ $\quad b = 0$, $a = a$, $c+d = a$

$\Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a-c \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad S = \text{gen}\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{m_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{m_2} \right\}$

$A \in W \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & -c \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad W = \text{gen}\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{m_3}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$

m_1, m_2, m_3 son l.i $\Rightarrow$ Son una base de $S + W$

$\Rightarrow S+W = \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ $\quad S \cap W = \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$

↳ Una posible T considerando la base $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; $T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

---

2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es s.c.m. de $Ax = b \Rightarrow A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = P_{\text{Col}A}\, b$

$\Rightarrow b = (2\ 1\ 0)^t + P_{\text{Col}A^\perp}\, b$ $\quad$ Donde $\text{Col}A^\perp = \text{Nul}A^t = \text{gen}\{(-1\ 2\ 1)^t\}$

$\Rightarrow b = (2\ 1\ 0)^t + \alpha(-1\ 2\ 1)^t$ donde

$\|\alpha(-1\ 2\ 1)^t\|^2 = 1 \Rightarrow |\alpha|^2 \cdot 6 = 1 \Rightarrow \alpha = \pm 1/\sqrt{6}$

$\therefore\ b = (2\ 1\ 0)^t \pm \frac{1}{\sqrt{6}}(-1\ 2\ 1)^t$

---

3) Sea $p(x) = ax + b \Rightarrow T(p) = (1+6x)a - 6(ax+b) = a - 6b$

$\therefore \boxed{\text{Im}\,T = \text{gen}\{1\}}$ $\quad T(p) = 0 \Leftrightarrow a - 6b = 0 \Leftrightarrow a = 6b \Leftrightarrow p = 6bx + b = b(6x+1)$

$\boxed{\text{Nu}\,T = \text{gen}\{6x+1\}}$ ↳ a) base de $\text{Im}\,T$: $\{1\}$; base de $\text{Nu}\,T$: $\{6x+1\}$

b) Sean $B_1 = \{p_1, p_2\}$; $B_2 = \{q_1, q_2\} \Rightarrow T(p_1) = q_1 - q_2 \wedge T(p_2) = 0$

$\Rightarrow p_2 \in \text{Nu}\,T$. Propongo $\boxed{p_2 = 6x+1} \wedge \boxed{p_1 = 1}$

Como $T(1) = -6$ propongo $\boxed{q_1 = x - 6 \wedge q_2 = x}$

4) $d[(4\,0\,0)^t, S] = \|P_{S^\perp}(4\,0\,0)^t\| = \|(4\,0\,0)^t - P_S(4\,0\,0)^t\|$

$S^\perp = \text{gen}\{v\}$ donde $(v, (2\,2\,1)^t) = 0 \wedge (v, (0\,0\,1)^t) = 0$

Sean $B = \{\underbrace{(1\,1\,1)^t}_{b_1}, \underbrace{(1\,1\,0)^t}_{b_2}, \underbrace{(1\,0\,0)^t}_{b_3}\} \wedge v = \alpha b_1 + \beta b_2 + \gamma b_3$

Entonces

$(v, (2\,2\,1)^t) = 0 \Leftrightarrow (\alpha b_1 + \beta b_2 + \gamma b_3 ; b_1 + b_2) = 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 0$

$(v, (0\,0\,1)^t) = 0 \Leftrightarrow (\alpha b_1 + \beta b_2 + \gamma b_3 ; b_1 - b_2) = 0 \Leftrightarrow \alpha - \beta = 0$

$\Big\}\ \alpha = \beta = 0 \quad (\gamma \in \mathbb{R})$

$\therefore S^\perp = \text{gen}\{b_3\} \Rightarrow (4\,0\,0)^t \in S^\perp \Rightarrow \boxed{d[(4\,0\,0)^t, S] = 4}$

---

5) $(A - I)\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow A\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \Rightarrow S_1 = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$

$rg(A + I) = 2 \Rightarrow \exists \lambda$ autovalor de A / $\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$ es autovalor.

$A^3 - 8I$ es singular $\Rightarrow \exists \lambda$ autovalor de A / $\lambda^3 - 8 = 0 \Rightarrow \lambda^3 = 8 \Rightarrow$ $\lambda = 2$ autovalor.

(si hubiera autovalores complejos serían conjugados y fallaría $\lambda = \pm 1$ autovalor)

Con $S_2 = \text{gen}\{(1\,0\,0)^t\}$

Propongo

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\1 & 2 & 0\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}}_{P}\underbrace{\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}}_{D}\underbrace{\begin{pmatrix}0 & 1 & -2\\0 & 0 & 1\\1 & 0 & -1\end{pmatrix}}_{P^{-1}} = \begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\0 & -1 & 4\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$