Adicionales Práctica 1 - Wronskiano

1. Halle el wronskiano de los siguientes conjuntos de funciones y con su auxilio, cuando sea posible, determine si son linealmente independientes.

   (a) $1, x, \dots, x^n$.

   (b) $x, \frac{1}{x}$

   (c) $e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}$, $(\alpha \in \mathbb{R})$.

   (d) e^x, xe^x, e^{-x}.

   (e) $\operatorname{sen} x, \operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{4})$.

   (f) $\arccos(x), \operatorname{arcsen}(x)$.

   (g) $1, \operatorname{sen}^2 x, \cos 2x$.

   (h) $\operatorname{sen} x, \cos\ x, \cos(x + \frac{\pi}{3})$.

   (i) $e^{-3x}\operatorname{sen} 2x, e^{-3x}\cos\ 2x$.

   (j) $\operatorname{senh}(\alpha x), \cosh(\alpha x)$, $(\alpha \in \mathbb{R})$.

2. Hallar el wronskiano de las funciones $1, e^x, e^{x^2-1}, \cos x, e^{x-1}$.

3. Probar que el conjunto de funciones $\{x^2, x|x|\}$ es linealmente independiente a pesar de que su wronskiano es idénticamente nulo.

4. Suponga que f_1 y f_2 son funciones derivables en un intervalo abierto $\mathcal{I}$. Sean $g_1 = c_{11}f_1 + c_{21}f_2$ y $g_2 = c_{12}f_1 + c_{22}f_2$ con $c_{ij} \in \mathbb{R}$. Pruebe que

$$W(g_1, g_2)(x) = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} W(f_1, f_2)(x) \quad \forall x \in \mathcal{I}.$$

   Generalice al caso en que se tienen funciones $f_1, \dots, f_n$, que son $n-1$ veces derivables en $\mathcal{I}$ y funciones $g_1, \dots, g_n$ que son combinaciones lineales de las funciones f_i.