Práctica 2 - Producto Interno

1. Encuentre el ángulo entre los vectores de $\mathbb{R}^3$

$$u = [1 \;\; 2 \;\; -1]^T \quad \text{y} \quad v = [2 \;\; 1 \;\; -3]^T,$$

considerando primero el producto interno canónico $(u, v) = u^T v$ y luego el producto interno (compruébelo) $(u, v) = 3u_1v_1 + 2u_2v_2 + u_3v_3$.

2. Encuentre todos los vectores de $\mathbb{R}^3$ que son ortogonales a $w = [1 \;\; 2 \;\; -1]^T$ con el producto interno canónico. ¿Qué clase de conjunto forman?

3. (a) Sea V un espacio vectorial con producto interno, y sea $w \in V$. Demuestre que el conjunto V_0, compuesto por los vectores de V que son ortogonales a w, es un subespacio de V.

   (b) Demuestre que en el caso en que $V = \mathbb{R}^n$ (ó $\mathbb{C}^n$), $w \neq 0$ y el producto interno es el canónico, V_0 es un subespacio de dimensión $n-1$.

4. (a) Encontrar las condiciones que deben cumplir los coeficientes a_{11}, a_{12}, a_{21} y a_{22} para que la expresión

$$(u, v) = a_{11}u_1v_1 + a_{12}u_1v_2 + a_{21}u_2v_1 + a_{22}u_2v_2 \qquad (1)$$

   defina un producto interno en $\mathbb{R}^2$.

   (b) Compruebe que la expresión (1) puede escribirse en forma compacta $(u, v) = u^T A v$ con $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. ¿Cómo pueden expresarse las condiciones que halló en el punto anterior en términos de la matriz A?

5. Sea V un espacio vectorial con producto interno y sea $\|\cdot\|$ la norma inducida. Probar lo siguiente:

   (a) $|\|u\| - \|v\|| \leq \|u - v\|$ para todo u y v en V.

   (b) Si u y v son ortogonales entonces $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ (Pitágoras). Mostrar que vale la recíproca si el espacio vectorial es real.

   (c) $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$ $\forall u, v$. (Esta identidad es conocida como la ley del paralelogramo.)

   (d) Si V es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial,

$$(u, v) = \frac{1}{4}(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2) \quad \forall u, v.$$

   (Fórmula de polarización).

(e) Si V es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial,

$$(u,v) = \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2) - \frac{i}{4}(\|u+iv\|^2 - \|u-iv\|^2) \quad \forall u, v.$$

(Fórmula de polarización).

6. Sea B una base ordenada de un espacio vectorial real (o complejo) V de dimensión n, y sea c_B el isomorfismo de coordenadas.

   (a) Sea $(\cdot,\cdot)$ un producto interno en $\mathbb{R}^n$ (o en $\mathbb{C}^n$), y sea

   $$(u,v)_V = (c_B(u), c_B(v)) \quad \forall u, v \in V.$$

   Demuestre que $(\cdot,\cdot)_V$ es un producto interno en V.

   (b) Demuestre que si $(\cdot,\cdot)_V$ es un producto interno en V, entonces

   $$(u,v) = (c_B^{-1}(u), c_B^{-1}(v))_V \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^n \ (\mathbb{C}^n)$$

   es un producto interno en $\mathbb{R}^n$ (o en $\mathbb{C}^n$).

   (c) Explique en palabras que significan (a) y (b).

7. Demuestre que en $\mathcal{P}_2$,

   $$(a_0 + a_1 t + a_2 t^2, b_0 + b_1 t + b_2 t^2) = a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2$$

   define un producto interno tal que la base $B = \{1;\ t;\ t^2\}$ es ortonormal.

8. (a) Demuestre que

   $$(f,g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$$

   es un producto interno en $\mathcal{C}[0,1]$. Escriba la desigualdad de Schwarz para este caso.

   (b) Demuestre que el producto interno definido en el punto anterior, induce un producto interno en $\mathcal{P}_n$; generalice este resultado para subespacios V_0 de espacios vectoriales V que tienen un producto interno.

   (c) Calcule el ángulo entre t y $t^2 - t + 1$. Halle $a \in \mathbb{R}$ para que $f \perp g$, siendo $f(t) = t^2 + at$ y $g(t) = t - 1$.

9. Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con producto interno y $B = \{v_1; v_2; v_3\}$ una base ordenada de V.

   (a) Demuestre que $(u,v) = c_B(u)^T G c_B(v)$ con

   $$G = \begin{bmatrix} (v_1,v_1) & (v_1,v_2) & (v_1,v_3) \\ (v_2,v_1) & (v_2,v_2) & (v_2,v_3) \\ (v_3,v_1) & (v_3,v_2) & (v_3,v_3) \end{bmatrix}.$$

A la matriz G se la denomina matriz del producto interno en la base ordenada B. Note que G es simétrica, es decir, $G = G^T$, y definida positiva, es decir, $x^T G x > 0$ para cualquier $x \in \mathbb{R}^3$ distinto de cero.
¿Qué forma adquiere G si la base B es ortogonal? ¿y si la base es ortonormal?
Recíprocamente, pruebe que dada una matriz G simétrica y definida positiva, $(u, v) = c_B(u)^T G c_B(v)$ es un producto interno en V.

(b) Generalice el punto anterior al caso en que la base B está compuesta por r vectores, es decir, al caso en que V sea de dimensión r.

(c) ¿De qué forma son todos los posibles productos internos en $\mathbb{R}^n$?

(d) Considere $V = \mathcal{P}_2$, $B = \{1;\ t;\ t^2\}$ y el producto interno definido en el ejercicio 8. Halle la matriz G y por medio de ella calcule $(t, t^2 - t + 1)$.

(e) Modificando adecuadamente los enunciados, pruebe (a) y (b) en el caso en que V sea un espacio vectorial complejo.

(f) Halle la matriz G en el caso en que $V = \mathbb{C}^3$, $B = \{[1\ \ i\ \ 0]^T; [1\ \ 1\ \ 1]^T; [i\ \ 0\ \ 0]^T\}$ y el producto interno es el canónico ($(u, v) = u^H v$).

10. Suponga que $(\cdot, \cdot)$ es un producto interno en $\mathbb{R}^3$ tal que $B = \{[1\ 1\ {-1}]^T; [0\ 1\ 1]^T; [-1\ 1\ 0]^T\}$ es una base ortonormal.

    (a) Calcule (v_1, v_2) con $v_1 = [1\ \ -1\ 1]^T$ y $v_2 = [-1\ 2\ 2]^T$.

    (b) Halle la matriz del producto interno en la base canónica.

11. Pruebe que una matriz G definida positiva es inversible. (Sugerencia: pruebe que la ecuación $Gx = 0$ tiene solución única.)
Deduzca de lo anterior que la matriz de un producto interno en una base ordenada es siempre inversible.

12. Sea $\{v_1, \cdots, v_r\}$ un conjunto ortogonal del espacio vectorial V. Demuestre que

$$\|\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r\|^2 = |\alpha_1|^2 \|v_1\|^2 + \cdots + |\alpha_r|^2 \|v_r\|^2.$$

13. Compruebe que $B = \{1; t - \frac{1}{2}; t^2 - t + \frac{1}{6}\}$ es una base ortogonal de $\mathcal{P}_3$ con el producto interno definido en el ejercicio 8. Halle las coordenadas de $p = t^2 - 1$ en la base B y luego calcule a partir de éstas la norma de p.

14. Sean $u = [1\ \ 1\ \ 1]^T$ y $v = [1\ \ 2\ \ -1]^T$. Escriba u como la suma de dos vectores, uno paralelo a v y otro ortogonal a v. (Considere el producto interno canónico).

15. Halle el punto de $\mathcal{S}$ más cercano a $v \in V$ y calcule $d(v, S)$ en cada uno de los siguientes casos:

    (a) $\mathcal{S} = \text{gen}\{[1\ \ 1\ \ 1]^T, [1\ \ -1\ \ 0]^T\}$, $v = [1\ \ 0\ \ 0]^T$ y el producto interno es el estándar de $\mathbb{R}^3$.

(b) $\mathcal{S} = \text{gen}\{[i \ \ -1 \ \ 1+i]^T\}$, $v = [a \ \ b \ \ c]^T$ y el producto interno es el estándar de $\mathbb{C}^3$.

(c) $\mathcal{S} = \text{gen}\{1, t - \frac{1}{2}\}$, $v = t^2 + t + 1$ y el producto interno es el definido en el ejercicio 8.

16. Sea $P_{\mathcal{S}}$ la proyección ortogonal sobre el subespacio $\mathcal{S}$ del espacio vectorial V. Demuestre lo siguiente:

    (a) $P_{\mathcal{S}}v = v$ para todo $v \in \mathcal{S}$.

    (b) $\|v\|^2 = \|P_{\mathcal{S}}v\|^2 + \|v - P_{\mathcal{S}}v\|^2$ para todo $v \in V$.

    (c) $\|P_{\mathcal{S}}v\| \leq \|v\|$ para todo $v \in V$ (¿en qué caso se cumple la igualdad?).

    (d) Si $w \in \mathcal{S}$ y $(v - w) \perp \mathcal{S}$, entonces $w = P_{\mathcal{S}}v$.

    (e) Todo $v \in V$ se puede escribir $v = v_1 + v_2$ con $v_1 \in \mathcal{S}$ y $v_2 \perp \mathcal{S}$. ¿Es única la descomposición?

17. Mediante el procedimiento de Gram-Schmidt halle una base ortogonal del subespacio $\mathcal{S}$ generado por los siguientes vectores de $\mathbb{R}^4$:

$$[1 \ \ 2 \ \ 2 \ \ 1]^T, \quad [1 \ \ 1 \ \ -1 \ \ -1]^T, \quad [2 \ \ -1 \ \ -1 \ \ 2]^T,$$

    y luego calcule $P_{\mathcal{S}}w$ para $w = [1 \ \ 1 \ \ 0 \ \ 0]^T$.

18. Hallar una base ortonormal de $\mathcal{P}_2$ con el producto interno definido en el ejercicio 8, a partir de la base canónica $\{1, \ t, \ t^2\}$.

19. Calcule la proyección ortogonal de $u = [1 \ \ 1 \ \ 0]$ al subespacio generado por $v_1 = [1 \ \ -1 \ \ 0]^T$ y $v_2 = [1 \ \ 0 \ \ 1]^T$ sin ortogonalizar el conjunto $\{v_1, v_2\}$. (Sugerencia: emplee (d) del ejercicio 16.)

20. Sean V un espacio vectorial con producto interno y $\mathcal{S} = \text{gen}\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$. Probar que $w \in \mathcal{S}^{\perp}$ si y sólo si $(w, v_1) = (w, v_2) = \cdots = (w, v_r) = 0$.

21. Hallar $\mathcal{S}^{\perp}$ en los siguientes casos:

    (a) $\mathcal{S} = \text{gen}\{[1 \ \ -1 \ \ 1 \ \ 0]^T, \ [1 \ \ -1 \ \ 0 \ \ 0]^T\}$ y el producto interno es el canónico de $\mathbb{R}^4$.

    (b) $\mathcal{S}$ como en el punto anterior, pero $(u, v) = 2u_1v_1 + u_2v_2 + 3u_3v_3 + u_4v_4$.

    (c) $\mathcal{S}$ es el subespacio de $\mathbb{C}^3$ generado por $[1 \ \ 0 \ \ 1+i]^T$ y $[2 \ \ 1 \ \ i]^T$ y el producto interno es el canónico.

22. (a) Sean $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n : \ Ax = 0\}$. Demuestre que $\mathcal{S}^{\perp}$ está generado por las filas de la matriz A si se considera el producto interno canónico. ¿Qué relación puede establecer entre $\dim(\mathcal{S})$, $\dim(\mathcal{S}^{\perp})$ y el rango de la matriz A? Si reemplaza $\mathbb{R}$ por $\mathbb{C}$ ¿quiénes generan $\mathcal{S}^{\perp}$?

(b) Halle bases de los complementos ortogonales de los siguientes subespacios:

i. $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$.

ii. $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = x_2 = \ldots = x_r = 0\}$.

iii. $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{C}^4 : x_1 - ix_2 + (1-i)x_3 = 0 \ \wedge \ (2+i)x_2 + x_4 = 0\}$.

(c) Describa el subespacio $\mathcal{S}$ del ejercicio 15 (a) por medio de ecuaciones lineales. ¿ Cuál es el número mínimo de ecuaciones que se necesitan? Justifique su respuesta.

23. Sea $\mathcal{S}$ un subespacio de un espacio vectorial V de dimensión finita dotado de un producto interno. Demostrar que $P_{\mathcal{S}^\perp} v = v - P_{\mathcal{S}} v$ para todo $v \in V$.
¿ Cómo emplearía la relación entre $P_{\mathcal{S}}$ y $P_{\mathcal{S}^\perp}$ para calcular la proyección a $\mathcal{S}$, en el caso en que $\mathcal{S}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ (ó de $\mathbb{C}^n$) descripto por ecuaciones lineales y el producto interno es el estándar?

24. Sea V un espacio vectorial con producto interno y sean $B = \{v_1, \ldots, v_p\}$ y $B' = \{w_1, \ldots, w_q\}$ bases ortogonales de los subespacios $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}^\perp$ respectivamente. Explique porqué $\{v_1, \ldots, v_p, w_1, \ldots, w_q\}$ es una base ortogonal de V.

25. Considere $V = \mathcal{P}_n$ con $n \geq 2$ y el producto interno $(f,g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$. Dado el subespacio $\mathcal{S} = \{p \in V : \ \int_0^1 p(t)(1+t)dt = 0 \ \wedge \ \int_0^1 p(t)(1-t)dt = 0\}$ se pide:

(a) Hallar una base ortogonal de $\mathcal{S}^\perp$.

(b) Hallar la proyección ortogonal de $g(t) = t^2$ sobre $\mathcal{S}^\perp$.

(c) Hallar el elemento de $\mathcal{S}$ que mejor aproxima a g y calcular $d(g, \mathcal{S})$.

26. Considere en $\mathbb{R}^3$ el producto interno canónico y el subespacio $\mathcal{S} = \text{gen}\{[1\ 1\ 0]^T, [1\ 1\ -1]^T\}$. Encuentre todos los v tales que $P_{\mathcal{S}}(v) = [2\ 2\ -1]^T$ y $\|v\| = 5$.

En los siguientes ejercicios considere el producto interno canónico de $\mathbb{R}^n$.

27. (a) Sean $w \in \mathbb{R}^n$, $w \neq 0$, y $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n : \ w^T x = 0\}$. Demuestre que $d(v, \mathcal{S}) = |w^T v| / \|w\|$ y que $P_{\mathcal{S}} v = v - \frac{w^T v}{w^T w} w$.

(b) Sea $\mathcal{W} = \{x \in \mathbb{R}^n : \ w^T x = b\}$ con w como en el punto anterior y $b \in \mathbb{R}$ no necesariamente nulo.

i. Demuestre que si $w_0 \in \mathcal{W}$, entonces $d(v, \mathcal{W}) = d(v - w_0, \mathcal{S})$, siendo $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n : \ w^T x = 0\}$. Interprete la igualdad geométricamente.

ii. Demostrar que $d(v, \mathcal{W}) = |w^T v - b| / \|w\|$.

28. Sean w y $\mathcal{S}$ como en (a) del ejercicio anterior. Para cada $v \in \mathbb{R}^n$ sea $T(v) = v - 2\frac{w^T v}{w^T w}$.

(a) Considere $w = [1\ -1]^T$ y $v = [1\ \ 2]^T$. Grafique juntos $\mathcal{S}$, v y $T(v)$.

(b) Compruebe que $T(v) = P_{\mathcal{S}} v - P_{\mathcal{S}^\perp} v$.

(c) Describa geométricamente la transformación T.

(d) Demuestre que para todo $v \in \mathbb{R}^n$, $T(v) = Hv$, siendo $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matriz $H = I - \frac{2}{w^T w} w w^T$. ($H$ es la matriz de Householder asociada al vector w).

(e) Demostrar que H es simétrica, no singular y que $H^{-1} = H = H^T$.

(f) Demostrar que las columnas de la matriz H forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$.

29. Hallar el simétrico de v respecto del hiperplano $\mathcal{S}$ en cada uno de los siguientes casos:

    (a) $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$ y $v = [a\ b\ c]^T$.

    (b) $\mathcal{S} = \text{gen}\{[-2\ \ 1\ 0\ \ 0]^T, [-1\ \ 0\ \ 1\ \ 0]^T, [0\ \ 0\ \ 0\ \ -1]^T\}$ y $v = [1\ \ 1\ \ 0\ \ 1]^T$.

30. Encuentre una matriz de Householder H tal que $H[1\ \ 1\ \ -1]^T = [\sqrt{3}\ \ 0\ \ 0]^T$.