Práctica 3 - Descomposición QR-Cuadrados Mínimos

Nota: considere en todos los ejercicios el producto interno canónico.

1. Suponga que las columnas de $Q \in \mathbb{R}^{n\times m}$ ($\mathbb{C}^{n\times m}$) son ortogonales dos a dos. ¿Qué puede decir acerca de Q^TQ (Q^HQ)?

2. Se dice que $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ($\mathbb{C}^{n\times n}$) es una matriz de proyección si $P^T = P$ ($P^H = P$) y $P^2 = P$. Demuestre que si P es una matriz de proyección, entonces para cada $v \in \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$), Pv es la proyección ortogonal de v sobre el subespacio $\mathrm{col}(P)$, siendo $\mathrm{col}(P)$ el subespacio generado por las columnas de P.

3. Sea $w \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|w\| = 1$. Compruebe que $P = ww^T$ es una matriz de proyección. ¿Cuál es el rango de P? ¿sobre qué subespacio proyecta?

4. Demuestre que P es una matriz de proyección si y sólo si $I_n - P$ es una matriz de proyección. ¿Sobre qué subespacio proyecta $I_n - P$?

5. ¿Verdadero o falso?

   (a) Si las columnas de la matriz Q generan el subespacio $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ entonces QQ^T es la matriz de proyección sobre $\mathcal{S}$.

   (b) Si las columnas de la matriz Q generan el subespacio $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ y son ortogonales, entonces QQ^T es la matriz de proyección sobre $\mathcal{S}$.

   (c) Si las columnas de la matriz Q son una base ortonormal del subespacio $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ entonces QQ^T es la matriz de proyección sobre $\mathcal{S}$.

   (d) Si las matrices P y P' proyectan sobre el mismo subespacio entonces $P = P'$.

   (e) Si $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz de proyección y $P \neq I_n$, entonces el rango de P es a lo sumo $n - 1$.

   (f) Si P es una matriz de proyección y existe P^{-1}, entonces $P = I_n$.

6. Encuentre la matriz P de proyección sobre el subespacio $\mathcal{S}$ en cada uno de los siguientes casos:

   (a) $\mathcal{S} = \mathrm{gen}\{[1\ \ 2\ \ 2]^T,\ [-2\ \ 2\ \ -1]^T\}$.

   (b) $\mathcal{S}^\perp = \mathrm{gen}\{[1\ \ 1\ \ 3]^T,\ [-1\ \ 1\ \ -1]^T\}$.

   (c) $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^4 :\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$.

7. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Encuentre la matriz de proyección a $\mathrm{col}(A)$ sabiendo que $\mathrm{rango}(A) = 2$ y que para cierta matriz $B \in \mathbb{R}^{3\times 2}$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

8. Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$. Encuentre la matriz de proyección a $\mathrm{col}(A)$ sabiendo que $\mathrm{rango}(A) = 3$ y que $x^T A = 0$ si $x^T = [1\ \ 1\ \ 1\ \ 1]$.

9. Demuestre que si $P \in K^{n\times n}$ ($K = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) es una matriz de proyección de rango k entonces $I_n - P$ tiene rango $n-k$.

10. Considere la matriz
$$P = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 5/6 & -1/6 \\ 1/3 & -1/6 & 5/6 \end{bmatrix}.$$
i) Compruebe que es una matriz de proyección.
ii) Encuentre una matriz de columnas ortonormales $Q \in \mathbb{R}^{3\times k}$ con $k = \mathrm{rango}(P)$, tal que $P = QQ^T$.

11. Encontrar la descomposición QR, tanto no normalizada como normalizada de las siguientes matrices:
a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

12. Suponga que A es una matriz real $n \times m$ tal que $A = Q_0 R_0$, con $Q_0 \in \mathbb{R}^{n\times m}$ de columnas ortogonales, y $R_0 \in \mathbb{R}^{m\times m}$ triangular superior y con unos en la diagonal principal. Demuestre que las columnas de Q_0 forman un conjunto generador ortogonal de $\mathrm{col}(A)$, y que las primeras i columnas de Q_0 generan el espacio generado por las primeras i columnas de A.
Nota: resuelva el ejercicio sin suponer que Q_0 y R_0 son las que se obtienen aplicando el método de ortogonalización de Gram-Schmidt a las columnas de A.

13. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ de rango k tal que $A = QR$ con Q y R tales que $Q \in \mathbb{R}^{n\times k}$ tiene columnas ortonormales, y $R \in \mathbb{R}^{k\times m}$ es triangular superior y de rango k. Demuestre que las columnas de Q forman una base ortonormal de $\mathrm{col}(A)$, y que $P = QQ^T$ es la matriz de proyección sobre $\mathrm{col}(A)$.
Sugerencia: demuestre primero que si A y B son matrices tales que $A = BC$ para cierta matriz C, entonces cada columna de A es combinación lineal de las columnas de B, en otras palabras, $\mathrm{col}(A) \subset \mathrm{col}(B)$.
Nota: resuelva el ejercicio sin suponer que Q y R son las que se obtienen aplicando el método de ortogonalización de Gram-Schmidt a las columnas de A.

14. Explique por qué
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = QR,$$
con $Q = I_3$ y $R = A$ no es una descomposición QR normalizada de A. ¿Es posible obtener una descomposición QR normalizada de A a partir de las columnas de Q?

15. Encontrar una descomposición QR normalizada de la matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_{n-1} \\ 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_{n-1} \end{bmatrix}.$$

16. Encontrar, resolviendo las ecuaciones normales, todas las soluciones por cuadrados mínimos de la ecuación $Ax = b$:

(a)

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(b)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

17. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 11 \\ -9 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad v = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Calcule Au y Av, y compárelos con b. ¿Podría ser u la solución por cuadrados mínimos de $Ax = b$? (Conteste sin calcular las soluciones por cuadrados mínimos.)

18. En cada caso, resuelva por cuadrados mínimos la ecuación $Ax = b$ utilizando una descomposición QR normalizada de la matriz A:

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

(b)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

19. Califique cada afirmación como verdadera o falsa. Justifique cada respuesta.

   (a) El problema general de cuadrados mínimos consiste en encontrar los $x \in \mathbb{R}^n$ que hacen mínima la distancia entre Ax y b.

   (b) Una solución por cuadrados mínimos de $Ax = b$ es un vector $\hat{x}$ tal que $A\hat{x} = \hat{b}$, siendo $\hat{b}$ la proyección ortogonal de b sobre el espacio columna de A.

   (c) Una solución por cuadrados mínimos de $Ax = b$ es un vector $\hat{x}$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $\|b - Ax\| \leq \|b - A\hat{x}\|$.

   (d) La ecuación $A^T Ax = A^T b$ siempre tiene solución.

   (e) La ecuación $A^T Ax = A^T b$ siempre tiene solución única.

   (f) Si las columnas de A son linealmente independientes, entonces la solución por cuadrados mínimos de $Ax = b$ es única.

   (g) Si b pertenece a $\text{col}(A)$, entonces toda solución de $Ax = b$ es una solución por cuadrados mínimos.

20. Suponga que $x = [1\ \ 2\ \ -1]^T$ es una solución por cuadrados mínimos de la ecuación $Ax = b$ con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

   i) Encuentre todas las soluciones por cuadrados mínimos de tal ecuación.
   ii) Sabiendo que $\|b\| = 3$, halle los posibles valores de b .

21. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$

   (a) Demuestre que $\text{Nul}(A) = \text{Nul}(A^T A)$. (Sugerencia: demuestre primero que $x^T A^T Ax = 0 \Leftrightarrow Ax = 0$.)

   (b) Demuestre a partir del punto anterior que $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^T A)$. (Sugerencia: emplee la relación que existe entre el rango de una matriz B, la dimensión de $\text{Nul}(B)$ y el número de columnas de B.)

   (c) Demuestre que $A^T A$ es inversible si y sólo si $\text{rango}(A) = m$, es decir, si y sólo si las columnas de A son linealmente independientes.

   (d) Demuestre que el problema de cuadrados mínimos $Ax = b$ tiene solución única si y sólo si las columnas de A son linealmente independientes, y que en tal caso la única solución es $\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b$ (a la matriz $A^\sharp = (A^T A)^{-1} A^T$ se la denomina matriz pseudoinversa de A). Compruebe además que $A^\sharp A = I_n$.

22. Calcular, si existe, $A^\sharp$ para cada matriz A del ejercicio 16.

23. Sea $B = \{u_1, \ldots, u_m\} \subset \mathbb{R}^n$ una base del subespacio $\mathcal{S}$ y sea $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ la matriz que tiene por i-ésima columna a u_i. Demuestre que $P = A(A^T A)^{-1} A^T = AA^\sharp$ es la matriz de proyección sobre $\mathcal{S}$.

Empleando este resultado, halle la matriz de proyección sobre el subespacio $\mathcal{S}$ del ejercicio 6 (a).

24. Hallar la recta que ajusta mejor a los siguientes puntos y graficar en cada caso:

    (a) $(0,1)$, $(1,1)$, $(2,2)$ y $(3,2)$.

    (b) $(1,1)$, $(1,2)$ y $(1,-1)$.

25. Demostrar que dados los puntos $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, la recta que mejor se ajusta a ellos es única si y sólo si por lo menos dos de los puntos tienen abscisas diferentes.

26. La siguiente tabla muestra, para algunos instantes t, la posición medida $p(t)$ de un móvil que se desplaza en linea recta.

t (seg.)	1	2	3	4	5
p (m.)	5.07	10.43	15.94	21.63	27.49

    (a) Suponiendo que la velocidad del móvil es constante, halle la función de posición $p(t)$ que ajusta mejor a los datos y estime la velocidad.

    (b) Suponiendo ahora que la aceleración del móvil es constante, encuentre la función $p(t)$ que ajusta mejor a los datos y estime la aceleración.

    (c) Si tuviera que elegir entre la hipótesis efectuada en (a) y la hipótesis efectuada en (b), ¿por cuál se inclinaría? ¿por qué?

27. Dados los puntos $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, denominemos: $\sum x = \sum_{i=1}^n x_i$, $\sum x^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$, $\sum y = \sum_{i=1}^n y_i$, $\sum xy = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. Demuestre que la recta $y = \alpha + \beta x$ es la que mejor ajusta a los puntos dados si y sólo si α y β verifican

$$\begin{aligned} n\alpha + \beta \sum x &= \sum y \\ \alpha \sum x + \beta \sum x^2 &= \sum xy. \end{aligned}$$

    i) Encuentre fórmulas para α y β.
    ii) Compruebe que la recta que mejor ajusta a los puntos dados siempre pasa por el punto $P = \left(\frac{\sum x}{n}, \frac{\sum y}{n}\right)$.