

Práctica 4 (2da Parte)- Ecuaciones Diferenciales Lineales

- Hallar $\operatorname{Re}(f)$, $\operatorname{Im}(f)$, f' y $\int_a^b f(t) dt$ en cada caso.
 - $f(t) = (2+i)t + (1-i)\operatorname{sen} t$,
 - $f(t) = (1+3it)^3$,
 - $f(t) = \frac{1}{1+it}$.
 - Suponiendo que $f, g : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{C}$, con $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ un intervalo, son derivables en $t \in \mathcal{I}$, probar que valen las reglas de derivación:
 - $(cf + dg)'(t) = cf'(t) + dg'(t) \quad (c, d \in \mathbb{C})$;
 - $(fg)'(t) = f'(t)g(t) + f(t)g'(t)$.
 - $\left(\frac{f}{g}\right)'(t) = \frac{f'(t)g(t) - f(t)g'(t)}{g^2(t)}$ si $g(t) \neq 0$.
 - $(f^n)'(t) = nf^{n-1}(t)f'(t)$ para todo $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ ($f(t) \neq 0$ si $n < 0$).
 - Se dice que $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{C}$, con $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ un intervalo, es una primitiva de $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{C}$ si $F'(t) = f(t)$ para todo $t \in \mathcal{I}$. Pruebe lo siguiente.
 - Dos primitivas de f difieren en una constante compleja.
 - Si F es una primitiva de f y f es continua, entonces $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$. (Regla de Barrow.)
 - Para $z \in \mathbb{C}$, con $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, se define $e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$. Probar que vale lo siguiente:
 - $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$ para todo $z, z' \in \mathbb{C}$;
 - $e^z = 1$ si y sólo si $z = 2k\pi i$ con $k \in \mathbb{Z}$;
 - $|e^z| = e^x$, con lo cual $|e^{it}| = 1$ si $t \in \mathbb{R}$;
 - para todo $z \in \mathbb{C}$, $e^z \neq 0$ y $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$;
 - $e^z = e^{z+2k\pi i}$ si y sólo si k es entero.
 - $\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$ y $\operatorname{sen} t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$ ($t \in \mathbb{R}$).
- Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $e^z = 1, -1, i, -i$. Hallar los z tales que $e^z \in \mathbb{R}$ y los z tales que $e^z \in i\mathbb{R}$.
- Sea $P : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{C}$, derivable en $t \in \mathcal{I}$. Probar que $(e^{P(t)})' = P'(t)e^{P(t)}$. (En particular $(e^{ct})' = ce^{ct}$ para toda constante $c \in \mathbb{C}$.)
 - Calcular empleando la regla de Barrow la integral $\int_0^\pi e^{(2+i)t} dt$ y, a partir de ella, obtener los valores de $\int_0^\pi e^{2t} \operatorname{sen} t dt$ y $\int_0^\pi e^{2t} \cos t dt$.
 - Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones:
 - $y' - 2y = 0$;
 - $y' = y + (1+i)x$;
 - $y' + 2xy = y$;
 - $ty' + y = 3t^3 - 1$ ($t > 0$).
 - Resolver los siguientes problemas a valores iniciales:
 - $xy' = (1+x)y$; $y(1) = 3$
 - $y' + y = \operatorname{sen} x$; $y(0) = 0$
 - $(x+1)y' + x^2y = e^{-x/2}$; $y(0) = 1$.

9. Halle la solución general de las siguientes ecuaciones resolviendo la ecuación homogénea y hallando una solución particular por el método de los coeficientes indeterminados:
 i) $y' - 2y = 1 - x$; ii) $y' - y = (1 + x)e^x$; iii) $y' + y = 2e^t$; iv) $y' = iy + te^{it}$;
 v) $y' + iy = 3 \cos 2x$; vi) $2y' + 6y = e^x \cos x$.
10. Hallar bases de los espacios de soluciones de las siguientes ecuaciones. (En todos los casos la base debe estar formada por funciones reales.)
 a) $y'' + 3y' + 2y = 0$ b) $2y'' - 18y = 0$ c) $y'' - 8y' + 16y = 0$ d) $y'' + 9y = 0$
 e) $2y'' + 2y' + 2y = 0$ f) $y'' - k^2y = 0, k \in \mathbb{R}$ g) $2y'' + 10y' + 25y = 0$
 h) $y'' + 2y' + (\omega^2 + 1)y = 0 (\omega \geq 0)$.
11. Encuentre la solución general de las siguientes ecuaciones empleando el método de coeficientes indeterminados para hallar una solución particular:
 a) $y'' + y' = 3x^2$ b) $y'' + 6y' + 9y = 18 \cos 3x$ c) $y'' - 4y = e^{2x}$
 d) $y'' - y' - 2y = e^x + x$ e) $y'' + y = \cos \omega x, (\omega > 0)$ f) $y'' - \omega^2 y = A \sin \omega_0 t, (\omega, \omega_0 > 0)$.
12. Resolver los siguientes problemas a valores iniciales.
 a) $y'' - y' = 3e^{2x}, y(0) = 0, y'(0) = -2$
 b) $y'' - y' - 2y = 10 \sin x, y(\frac{1}{2}\pi) = -3, y'(\frac{1}{2}\pi) = -1$
 c) $y'' + 4y' + 4y = 9 \cosh x, y(0) = 0, y'(0) = 0$.
13. Resolver los siguientes problemas con valores de frontera:
 a) $y'' - 9y = 0, y(-4) = y(4) = \cosh 12$ b) $y'' - 2y' = 0, y(0) = -1, y(0,5) = e - 2$ c) $y'' + y = 0, y(0) = 0, y(\pi) = 1$ d) $y'' + 4y = 0, y(0) = 1, y(\pi) = 1$.
 Teniendo en cuenta los resultados obtenidos: ¿un problema con valores de frontera siempre tiene solución?, ¿si tiene al menos una solución, ésta es única?
14. Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones mediante el método de variación de parámetros:
 i) $y'' - 2y' + y = x^{3/2}e^x$ ii) $y'' - y = 2e^x/(1 - e^x) + e^{2x}$.

Problemas opcionales

- Suponga que el ritmo al que se enfría un cuerpo caliente es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la del ambiente que lo rodea. Un cuerpo se calienta a 100 C y se expone a una temperatura ambiente de 10 C. Luego de 30 minutos su temperatura es de 50 C. ¿Cuánto deberá esperarse para que la temperatura llegue a los 15 C?
- Si la resistencia del aire que actúa sobre un cuerpo de masa m en caída libre ejerce una fuerza proporcional a la velocidad del mismo pero de sentido contrario ($= -kv$), la ecuación de movimiento es

$$v' = g - (k/m)v.$$

Supongamos $v(0) = 0$, hallar $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t)$.

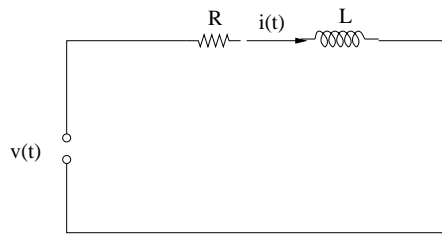


Figura 1:

3. Considere el siguiente circuito RL:

- a) Suponiendo $V(t) = V_0$ e $i(0) = i_0$, calcular $i(t)$ para $t > 0$. ¿Qué sucede con $i(t)$ a medida que t aumenta?
- b) Idem (a) pero con $V(t) = V_0 \sin \omega_0 t$.

4. Considere el siguiente circuito RC:

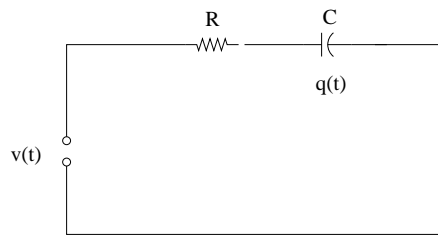


Figura 2:

- a) Suponiendo $V(t) = V_0$ y $q(0) = q_0$, calcular $q(t)$ e $i(t)$ para $t > 0$. ¿Qué sucede con $q(t)$ e $i(t)$ a medida que t aumenta?.
- b) Idem (a) pero con $V(t) = V_0 \sin \omega_0 t$.

5. La ecuación $y' + \alpha(x)y = \beta(x)y^k$ con $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0, 1$, se denomina *ecuación de Bernoulli*.

- a) Demostrar que mediante el cambio de variable $z = y^{1-k}$, la ecuación se transforma en la ecuación lineal

$$z' + (1 - k)\alpha(x)z = (1 - k)\beta(x).$$

- b) Resolver las ecuaciones:

- a) $xy' + y = x^4y^3$ b) $xy^2y' + y^3 = x \cos x$.

6. Si $y = y(t)$ denota el número de habitantes de una población en función del tiempo, se denomina tasa de crecimiento de la población a la función y'/y .

- a) Graficar $y(t)$ en el caso en que la tasa de crecimiento sea constante.
- b) Supongamos que una población tiene tasa de crecimiento constante. En un instante determinado la cantidad de individuos es de 1000 mientras que seis meses después es de 1010. ¿Cuántos individuos habrá después de 10 años?.
- c) Estudiar las poblaciones cuyas tasas de crecimiento son de la forma $r - cy$ con $r > 0$, $c > 0$ e $y(0) = y_0 > 0$. Calcular $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$.

7. Considere el siguiente sistema mecánico compuesto por un cuerpo de masa m sometido a una fuerza $f(t)$ y un resorte cuya constante elástica es k . Denomine $x(t)$ al desplazamiento

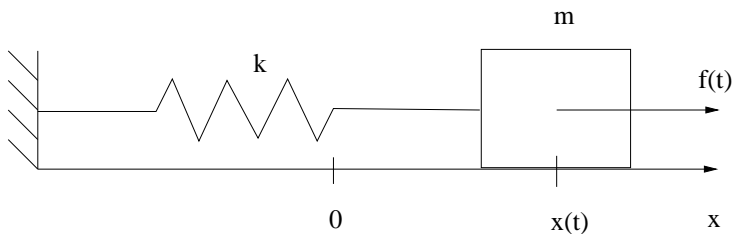


Figura 3:

de la masa respecto de la posición de equilibrio en el instante t . Suponiendo $f(t) \equiv 0$, demuestre lo siguiente:

- (i) $x(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$, con $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, $A = x(0)$ y $B = x'(0)/\omega_0$. Con lo cual el cuerpo oscila con una frecuencia de $\omega_0/2\pi$ ciclos por segundo.
(ii) Si se considera $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ y $\varphi = \tan^{-1}(A/B)$, entonces $x(t) = C \sin(\omega_0 t + \varphi)$. Por lo tanto C es la amplitud de la oscilación y φ es el ángulo de fase.

8. Considere un sistema mecánico como el del problema anterior (con $f(t) \equiv 0$) pero ahora sumergido en un medio viscoso. Entonces, además de la fuerza elástica producto de la interacción del resorte con el cuerpo, deberá considerarse una fuerza de rozamiento F , producto de la interacción del cuerpo con el medio, que puede suponerse proporcional a la velocidad del cuerpo pero de sentido contrario a ésta, en otras palabras, $F(t) = -cx'(t)$ con c una constante positiva (c es la constante de amortiguación).

Demuestre lo siguiente:

- (i) Si $c^2 > 4mk$, $x(t) = c_1 e^{-(\alpha-\beta)t} + c_2 e^{-(\alpha+\beta)t}$, con $\alpha = c/2m$, $\beta = \sqrt{c^2 - 4mk}/2m$, (observe que $0 < \alpha < \beta$). Este caso se denomina sobreamortiguado debido a que no hay oscilaciones.
(ii) Si $c^2 = 4mk$, $x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-\alpha t}$. Este caso se denomina de amortiguamiento crítico.
(iii) Si $c^2 < 4mk$, $x(t) = e^{-\alpha t}(A \cos \omega^* t + B \sin \omega^* t)$ con $\omega^* = \sqrt{4mk - c^2}/2m$. También $x(t) = C \sin(\omega^* t + \varphi)e^{-\alpha t}$ con $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ y $\varphi = \tan^{-1}(A/B)$. En este caso se producen oscilaciones amortiguadas de frecuencia $\omega^*/2\pi$, y se denomina subamortiguado.

9. Considere el sistema masa-resorte del problema 7, suponiendo que sobre el cuerpo se aplica una fuerza $f(t) = F_0 \sin \omega t$. Demuestre lo siguiente:

- a) Si $\omega^2 \neq \omega_0^2 = k/m$,

$$x(t) = A(\omega) \sin \omega t + c_1 \sin \omega_0 t + c_2 \cos \omega_0 t$$

con $A(\omega) = F_0[m(\omega_0^2 - \omega^2)]^{-1}$ y c_1 y c_2 constantes arbitrarias.

- b) Si $\omega^2 = \omega_0^2$, entonces

$$x(t) = -\frac{F_0}{2m\omega_0} t \cos(\omega_0 t) + c_1 \sin \omega_0 t + c_2 \cos \omega_0 t$$

con c_1 y c_2 constantes arbitrarias. Observe que en este caso la amplitud de la oscilación no es acotada (resonancia).

10. Considere el sistema masa-resorte amortiguado del problema 8 y suponga que sobre el cuerpo se aplica una fuerza $f(t) = F_0 \text{sen } \omega t$.

a) Demuestre que

$$x(t) = A(\omega) \text{sen}(\omega t + \varphi) + x_h(t)$$

con $A(\omega) = F_0 / \sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 c^2}$, $\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{\omega c}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \right)$ y $x_h(t)$ una solución arbitraria de la ecuación homogénea $m x'' + c x' + k x = 0$.

b) Demostrar que $\lim_{t \rightarrow +\infty} [x(t) - A(\omega) \text{sen}(\omega t + \varphi)] = 0$, con lo cual, para $t \gg 1$, $x(t) \approx A(\omega) \text{sen}(\omega t + \varphi)$, independientemente de las condiciones iniciales.

c) Hallar el valor de ω que maximiza la amplitud $A(\omega)$.

d) Encontrar el potencial electrostático $v(r)$ entre dos esferas concéntricas de radios $r_1 = 4$ cm y $r_2 = 8$ cm, sabiendo que el potencial de la esfera interna es de 110 volts y el de la externa es de 0 volts. (Sugerencia: $v(r)$ satisface la ecuación diferencial $r v'' + 2 v' = 0$)

11. La ecuación $x^2 y'' + a x y' + b y = 0$ con a y b constantes y $x > 0$ ($x < 0$), se denomina *ecuación de Euler-Cauchy*.

a) Demostrar que mediante el cambio de variable $x = e^t$ ($x = -e^t$), la ecuación se transforma en la ecuación lineal a coeficientes constantes

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + (a - 1) \frac{dy}{dt} + b y = 0.$$

b) Resolver en $(0, +\infty)$ las siguientes ecuaciones de Euler-Cauchy:

a) $x^2 y'' + 2 x y' - 6 y = 0$ b) $x^2 y'' + 3 x y' + y = 0$ c) $x^2 y'' + x y' + y = 0$

d) $x^2 y'' - 2 x y' + 2 y = 0$