Práctica 4 - Transformaciones Lineales

1. Determine cuáles de las siguientes son transformaciones lineales:

   (a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $T([x_1\ x_2]^T) = x_1 + 2x_2$.

   (b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T([x_1\ x_2]^T) = [1 + x_2\ \ x_1]^T$.

   (c) $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $T(z) = \overline{z}$, considerando a $\mathbb{C}$ primero como $\mathbb{C}$-espacio vectorial y luego como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

   (d) $T : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$, $T(A) = tr(A)$.

2. Sean V y W espacios vectoriales. Demostrar que $T : V \to W$ es una transformación lineal si y sólo si

$$T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in K \text{ y } \forall v_1, v_2 \in V,$$

   siendo $K = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, según corresponda.

3. Demostrar que cada una de las siguientes transformaciones son lineales.

   (a) $T : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$, $T(v) = Av$, siendo $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$.

   (b) $T : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$, $T(p) = (t^2 + 1)p$.

   (c) $T_f : \mathcal{C}[a, b] \to \mathcal{C}[a, b]$, definida por $T_f(g) = fg$, con $f \in \mathcal{C}[a, b]$.

   (d) $T : \mathcal{C}[0, 1] \to \mathbb{R}$, $T(f) = \int_0^1 f(t)dt$.

   (e) $T : \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathbb{R})$, $T(f) = f'' - f$. ($\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ es el espacio de funciones dos veces derivables con continuidad.)

   (f) $T : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{k\times l}$, $T(X) = AXB$, con $A \in \mathbb{C}^{k\times n}$ y $B \in \mathbb{C}^{n\times l}$.

4. Sean V, W y Z espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo de escalares.

   (a) Demuestre que la transformación identidad $I : V \to V$, $I(v) = v$, es una transformación lineal.

   (b) Demuestre que la transformación nula $\mathcal{O}$ de V en W, definida como $\mathcal{O}(v) = 0$ para todo $v \in V$, es una transformación lineal.

   (c) Demuestre que para λ escalar, la transformación $T_\lambda : V \to V$ con $T_\lambda(v) = \lambda v$, es lineal.

   (d) Demuestre que si $T : V \to W$ y $S : W \to Z$ son transformaciones lineales entonces la composición de ellas, es decir, $S \circ T : V \to Z$, también es una transformación lineal.

5. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por $T(x) = Ax$. Para cada uno de los siguientes casos, describa geométricamente la transformación y halle la imagen del cuadrado de vértices: $[0\ \ 0]^T$, $[1\ \ 0]^T$, $[1\ \ 1]^T$ y $[0\ \ 1]^T$.

i) $A = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ $(k \in \mathbb{R})$ ii) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ iii) $A = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $(k \in \mathbb{R})$

iv) $A = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\operatorname{sen}(\alpha) \\ \operatorname{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ v) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ vi) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

6. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por $T(x) = Ax$. Describa geométricamente la transformación si A es cada una de las siguientes matrices:

i) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ iii) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

iv) $\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\operatorname{sen}(\alpha) & 0 \\ \operatorname{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ v) $\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\operatorname{sen}(\alpha) & 0 \\ \operatorname{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.

7. Encuentre núcleo e imagen de las siguientes transformaciones lineales:

   (a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(v) = Av$ con
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

   (b) $T : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$, $T(A) = XAY$ con $X = [1\ \ 2]$ e $Y = [1\ \ -1]^T$.

   (c) $T : \mathcal{P} \to \mathbb{R}^2$, $T(p) = [p(0)\ p'(0)]^T$.

   (d) $T : \mathcal{C}[0,1] \to \mathcal{C}[0,1]$, $T(f)(t) = (1+t^2)f(t)$.

   (e) $T : \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathbb{R})$, $T(p) = p''$.

8. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno, sea $\mathcal{S}$ un subespacio de V y sea $P_{\mathcal{S}} : V \to V$ la aplicación que asigna a $v \in V$ su proyección ortogonal sobre $\mathcal{S}$. Demuestre que $P_{\mathcal{S}}$ es una transformación lineal. ¿ Quiénes son $\operatorname{Nu}(P_{\mathcal{S}})$ e $\operatorname{Im}(P_{\mathcal{S}})$?

9. Sea $T : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$, con $T(v) = Av$ y $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$. Demuestre que $\operatorname{Im}(T)$ coincide con $\operatorname{col}(A)$, el espacio columna de A, y que $\operatorname{Nu}(T)$ coincide con $\operatorname{Nul}(A)$. Deduzca a partir de esto último que si A tiene rango k, entonces $\dim(\operatorname{Nu}(T)) = m - k$.

10. Encuentre bases para $\operatorname{Nu}(T)$ e $\operatorname{Im}(T)$, en cada uno de los siguientes casos:

(a) T de $\mathbb{R}^5$ en $\mathbb{R}^4$ definida por $T(v) = Av$ con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & -3 \\ 3 & 6 & 4 & -1 & 2 \\ 4 & 8 & 5 & 1 & -1 \\ -2 & -4 & -3 & 3 & -5 \end{bmatrix}.$$

(b) $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$, $T([z_1\ z_2\ z_3]^T) = [iz_1 + z_2 + z_3 \ \ -2z_1 + 2iz_2 + 2iz_3]^T$, considerando a $\mathbb{C}^3$ y a $\mathbb{C}^2$ primero como $\mathbb{C}$-espacios vectoriales y luego como $\mathbb{R}$-espacios vectoriales.

11. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal y sean $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}'$ subespacios de V y W respectivamente. Demuestre lo siguiente:

    (a) $T(\mathcal{S})$ es subespacio de W.

    (b) $T^{-1}(\mathcal{S}') = \{v \in V/\ T(v) \in \mathcal{S}'\}$ es subespacio de V.

    (c) Si $\mathcal{S} = \text{gen}\{v_1, \ldots, v_r\}$ entonces $T(\mathcal{S}) = \text{gen}\{T(v_1), \ldots, T(v_r)\}$.

12. Encuentre bases para $\text{Nu}(T)$ e $\text{Im}(T)$ en cada uno de los siguientes casos:

    (a) $T : \mathcal{P}_3 \to \mathbb{R}^2$, $T(p) = [p(0)\ \ p(1)]^T$.

    (b) $T : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^3$, $T(p) = [p(t_0)\ \ p'(t_0)\ \ p''(t_0)]^T$, con $t_0 \in \mathbb{R}$.

    (c) $T : R^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$, $T(X) = AX - XA$, con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

13. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Determinar cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas, justificando la respuesta.

    (a) Si $\{v_1, \ldots, v_r\}$ es l.d. entonces $\{T(v_1), \ldots, T(v_r)\}$ es l.d.

    (b) Si $\{T(v_1), \ldots, T(v_r)\}$ es l.d. entonces $\{v_1, \ldots, v_r\}$ es l.d.

    (c) Si $\{v_1, \ldots, v_r\}$ es l.i. entonces $\{T(v_1), \ldots, T(v_r)\}$ es l.i.

    (d) Si $\{T(v_1), \ldots, T(v_r)\}$ es l.i. entonces $\{v_1, \ldots, v_r\}$ es l.i.

    (e) Si $\text{Nu}(T) = \{0\}$ entonces $\{v_1, \ldots, v_r\}$ es l.i. si y sólo si $\{T(v_1), \ldots, T(v_r)\}$ es l.i.

    (f) Si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de V y $\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ es l.i. entonces $\text{Nu}(T) = \{0\}$.

14. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Decidir si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas, justificando la respuesta.

    (a) Si $\text{Nu}(T) = \{0\}$, la ecuación $T(v) = w$ tiene a lo sumo una solución.

(b) La ecuación $T(v) = w$ siempre tiene solución si $\mathrm{Nu}(T) = \{0\}$.

(c) $\mathrm{Im}(T) = W$ y $\mathrm{Nu}(T) = \{0\}$ si y sólo si la ecuación $T(v) = w$ tiene solución única para cada $w \in W$.

(d) La transformación T es inversible si y sólo si $\mathrm{Im}(T) = W$ y $\mathrm{Nu}(T) = \{0\}$.

(e) Si $V = W$, $\mathrm{Nu}(T) = \{0\}$ si y sólo si $\mathrm{Im}(T) = V$.

(f) Si $\dim(V) = \dim(W) = n$, $\mathrm{Nu}(T) = \{0\}$ si y sólo si $\mathrm{Im}(T) = W$.

(g) Si $\dim(V) = \dim(W) = n$ entonces T es inyectiva si y sólo si T es sobreyectiva.

(h) Si $\dim(V) > \dim(W)$, T no puede ser inyectiva.

(i) Si $\dim(V) < \dim(W)$, T no puede ser sobreyectiva.

(j) Si V es de dimensión finita y T es biyectiva, W es de dimensión finita y $\dim(V) = \dim(W)$.

15. Sean $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$ y $B \in \mathbb{C}^{k\times n}$. Demuestre lo siguiente:

(a) $\mathrm{col}(BA) \subseteq \mathrm{col}(B)$.

(b) $\mathrm{col}(BA) = \mathrm{col}(B)$ si $\mathrm{rango}(A) = n$.

(c) $\mathrm{Nul}(A) \subseteq \mathrm{Nul}(BA)$.

(d) $\mathrm{Nul}(A) = \mathrm{Nul}(BA)$ si $\mathrm{rango}(B) = n$.

(e) $\mathrm{rango}(BA) \leq \min(\mathrm{rango}(B), \mathrm{rango}(A))$.

(f) Si $\mathrm{rango}(A) = n$ entonces $\mathrm{rango}(BA) = \mathrm{rango}(B)$.

(g) Si $\mathrm{rango}(B) = n$ entonces $\mathrm{rango}(BA) = \mathrm{rango}(A)$.

Sugerencia: considere las transformaciones lineales $T(v) = Av$ y $S(u) = Bu$ y tenga en cuenta la primer parte del ejercicio 9.

16. Considere la transformación lineal $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ definida por $T(v) = Av$ con $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Demuestre que las siguientes proposiciones son equivalentes:

(a) T es inversible.

(b) Existe A^{-1}.

(c) El sistema de ecuaciones lineal homogéneo $Ax = 0$ tiene solución única.

(d) El sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$ tiene solución para cada $b \in \mathbb{C}^n$.

(e) $\det(A) \neq 0$.

17. Encuentre la inversa de la transformación $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T([x_1\ x_2\ x_3]^T) = [x_1 - x_2 + x_3\ \ 2x_1\ \ x_1 + x_2]^T$.

18. Encuentre la inversa de la transformación definida en el ejercicio 7d.

19. Encuentre la inversa de la transformación definida en el ejercicio 12b.

20. Suponga que $T : V \to W$ y $S : W \to Z$ son transformaciones lineales inversibles. Demuestre que $S \circ T$ es inversible y que $(S \circ T)^{-1} = T^{-1} \circ S^{-1}$.

21. Se dice que una transformación lineal $T : V \to W$ es un isomorfismo si T es biyectiva, es decir, si existe T^{-1}. Por otra parte, se dice que V es isomorfo a W si existe un isomorfismo T de V en W.

    (a) Probar que V es isomorfo a sí mismo.

    (b) Probar que si V es isomorfo a W entonces W es isomorfo a V.

    (c) Probar que si V es isomorfo a W y W es isomorfo a Z entonces V es isomorfo a Z.

    (d) Sea V un espacio vectorial sobre K ($K = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) y sea $B = \{v_1; \ldots; v_n\}$ una base ordenada de V. Demuestre que la transformación $c_B : V \to K^n$ que asigna a cada $v \in V$ su correspondiente vector de coordenadas en la base B, $c_B(v) \in K^n$, es un isomorfismo (vea el ejercicio 20 del T.P. 1).

    (e) Demuestre que si V y W son de dimensión finita, entonces V es isomorfo a W si y sólo si la dimensión de V es igual a la dimensión de W.

22. Sea $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_3$ tal que para cada $p \in \mathcal{P}_2$, $T(p) = tp + \{p - p(0)\}/t$. Encuentre $[T]_{BC}$, la representación matricial de T respecto de las bases ordenadas: $B = \{1; 1+t; 1+t+t^2\}$ y $C = \{1; 1-t; 1+2t+t^2; 1-3t+3t^2-t^3\}$.
    Calcule luego $T(-2+3t-t^2)$ de dos formas distintas.

23. Sea $T : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$, $T(p) = p'$. Halle la representación matricial de T respecto de la base canónica de $\mathcal{P}_n$.

24. Halle la representación matricial de la transformación T del ejercicio 7b, respecto de las correspondientes bases canónicas.

25. Sean $T : V \to W$ y $S : W \to Z$ transformaciones lineales y sean B, C y D bases ordenadas de V, W y Z, respectivamente. Pruebe que

$$[S \circ T]_{BD} = [S]_{CD}[T]_{BC}.$$

26. Suponga que A representa a la transformación lineal $T : V \to V$ respecto de una base ordenada B. Demuestre que A^k representa a T^k, para $k \in IN$, respecto de B.

27. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal, sean B y C bases ordenadas de V y W respectivamente, y sea A la representación matricial de T respecto de las bases B y C. Demuestre lo siguiente:

    (a) $v \in \mathrm{Nu}(T)$ si y sólo si $c_B(v) \in \mathrm{Nul}(A)$.

    (b) $w \in \mathrm{Im}(T)$ si y sólo si $c_C(w) \in \mathrm{col}(A)$.

(c) T es inversible si y sólo si A no es singular. Además, A^{-1} es la representación matricial de T^{-1} respecto de las bases C y B.

28. Sea V un espacio vectorial con $B = \{v_1; v_2; v_3\}$ una base. Sea $T : V \to V$ una transformación lineal tal que

$$[T]_B = \begin{bmatrix} r & -1 & r \\ 1 & r & 1 \\ r & -1 & 2r \end{bmatrix}$$

(a) Suponiendo que V es un espacio vectorial real, hallar los valores de $r \in \mathbb{R}$ para que T no sea sobreyectiva.

(b) Idem (a) pero suponiendo que V es un espacio vectorial complejo y que $r \in \mathbb{C}$.

(c) Para los valores hallados en (b), estudiar si $v = -v_1 + iv_2 + (i-1)v_3$ pertenece a la imagen de T. En caso afirmativo, hallar todos los $u \in V$ tales que $T(u) = v$.

29. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}_2$ tal que para ciertos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $T([1\ 1\ 1]^T) = 2\beta + \alpha t$, $T([0\ -1\ 1]^T) = \alpha t + \beta t^2$ y $T([0\ \ 0\ \ 1]^T) = \beta + (\alpha - 1)t$.

(a) Hallar α y β para que T no sea inyectiva.

(b) Hallar bases de $\mathrm{Nu}(T)$ y de $\mathrm{Im}(T)$ en función de α y β.

(c) Hallar la imagen del subespacio $\mathcal{U} = \{x \in \mathbb{R}^3 :\ x_1 + x_3 = x_2 + x_3 = 0\}$, según los valores de α y β.

30. Halle la representación matricial, respecto de la base canónica, de la transformación lineal $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ que verifica: $T([1+i\ 1-i]^T) = [1\ i]^T$ y $T([1\ i]^T) = [-1\ 0]^T$.

31. Halle la representación matricial, respecto de la base canónica, de la transformación $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que satisface lo siguiente: $T(v) = 2v$ si $v \in \mathcal{S}$ y $T(v) = -v$ si $v \in \mathcal{S}^\perp$, siendo $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^3 :\ x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$. (Considere el producto interno canónico de $\mathbb{R}^3$.)

32. Sean $B = \{v_1; v_2; v_3\}$ una base ordenada de V y $C = \{w_1; w_2; w_3; w_4\}$ una base ordenada de W. Considere la transformación lineal $T : V \to W$ que satisface: $T(v_1) = w_1 + w_2 + w_3 - w_4$, $T(v_2) = w_1 - w_2 + 2w_3 + 3w_4$ y $T(v_3) = 2w_1 + 3w_3 + 2w_4$.

(a) Encuentre bases para $\mathrm{Nu}(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$.

(b) Halle todos los $v \in V$ tales que $T(v) = 2w_2 - w_3 - w_4$.

(c) Encuentre la representación matricial de T respecto de las bases $B' = \{v_1; 2v_2 + v_3; v_2 + v_3\}$ y $C' = \{w_1; w_2; w_3 + w_4; w_3 - w_4\}$ (¿ Por qué B' y C' son bases?).

33. Sea $B = \{v_1; v_2; v_3\}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ considerando el p.i. canónico. Encuentre la matriz de la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ respecto de la base B en cada uno de los siguientes casos:

(a) T es la reflexión respecto del plano $\mathcal{S} = \text{gen}\{v_1; v_2\}$;

(b) T es la reflexión respecto de la recta $\mathcal{S} = \text{gen}\{v_3\}$;

(c) T es la rotación alrededor del eje $\mathcal{S} = \text{gen}\{v_3\}$ en un ángulo α, considerando que el sentido de rotación positivo es de v_1 hacia v_2.

34. Halle la representación matricial respecto de la base canónica de la transformación $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que es la reflexión respecto de la recta $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 + x_2 + x_3 = 0,\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 0\}$.

35. Halle la representación matricial respecto de la base canónica de la transformación $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que es la reflexión respecto del plano $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$, de dos formas distintas: i) mediante una matriz de Householder, ii) empleando el ejercicio 33.

36. Halle la representación matricial respecto de la base canónica de la transformación $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, que es una rotación de 45° en sentido antihorario alrededor del eje $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 + x_2 + x_3 = 0,\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0\}$.

37. Encuentre una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T \neq \pm I$, tal que $d(x, \mathcal{S}) = d(T(x), \mathcal{S})$ $\forall x \in \mathbb{R}^3$, si $\mathcal{S} = \text{gen}\{[1\ \ 1\ \ 1]^T\}$. (Considere el p.i. canónico.)

38. Sean V y W K-espacios vectoriales ($K = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) de dimensiones m y n respectivamente. Sea $T : V \to W$ lineal. Demuestre lo siguiente: si B_1 y B_2 son bases ordenadas de V y C_1 y C_2 son bases ordenadas de W, entonces $\text{rango}[T]_{B_1 C_1} = \text{rango}[T]_{B_2 C_2}$.

39. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $T(x) = Ax$ con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & -3 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Encuentre un par de bases ordenadas B y B' tales que

$$[T]_{BB'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

¿ Existen bases ordenadas B y B' tales que

$$[T]_{BB'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}?$$

¿ Por qué?

40. Considere las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 6 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

(a) Encuentre matrices inversibles U_1 y V_1 tales que

$$U_1 A V_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Idem (a) pero con B en lugar de A.

(c) Encuentre matrices inversibles C y D tales que $CAD = B$.

41. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x) = Ax$ con

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Encuentre bases B y C de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$, respectivamente, tales que

$$[T]_{BC} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

42. Si V y W son espacios vectoriales sobre K ($K = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$), denotamos $\mathcal{L}(V, W)$ al conjunto de todas las transformaciones lineales de V en W.
Considere en $\mathcal{L}(V, W)$ las siguientes operaciones:
(Suma) Dados T y $S \in \mathcal{L}(V, W)$, $T + S$ es la transformación definida de la siguiente manera: $(T + S)(v) = T(v) + S(v)$ $\forall v \in V$.
(Producto por un escalar) Dado $T \in \mathcal{L}(V, S)$ y $\alpha \in K$, definimos αT mediante: $(\alpha T)(v) = \alpha T(v)$ $\forall v \in V$.

(a) Demuestre que con las operaciones definidas, $\mathcal{L}(V, W)$ es un espacio vectorial sobre K.

(b) Suponga que $\dim(V) = n$, $\dim(W) = m$ y que B y C son bases ordenadas de V y W respectivamente. Pruebe que la aplicación que asigna a cada $T \in \mathcal{L}(V, W)$ su representación matricial respecto de las bases B y C, $[T]_{BC} \in K^{m \times n}$, es un isomorfismo. ¿Cuál es la dimensión de $\mathcal{L}(V, W)$? Exhiba una base de $\mathcal{L}(V, W)$.