Práctica 5 - Autovalores y Autovectores - Diagonalización de Matrices y Transformaciones Lineales

1. Encuentre los autovalores y autovectores de cada una de las siguientes matrices, considerando primero que el cuerpo de escalares es $\mathbb{R}$ y luego que es $\mathbb{C}$.

$$\text{i)} \begin{bmatrix} 12 & -4 \\ -8 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{ii)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{iii)} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{iv)} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{v)} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & -4 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \end{bmatrix}$$

2. Demuestre lo siguiente:
i) A de $n \times n$ es singular si y sólo si $\lambda = 0$ es autovalor.
ii) Si rango$(A) = k < n$, $\lambda = 0$ es un autovalor de A de multiplicidad geométrica $n - k$.

3. Sabiendo que $[1 \quad -2 \ \ 0]^T$ es un autovector de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -6 \\ 2 & -1 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

encuentre los autovalores de A, sus multiplicidades algebraicas y geométricas y tantos autovectores linealmente independientes como sea posible.

4. Encuentre los autovalores de A, sus multiplicidades algebraicas y geométricas y tantos autovectores linealmente independientes como sea posible, siendo

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 0 \\ 1 & -1 & 6 \end{bmatrix}.$$

5. Demuestre que los autovalores de una matriz T triangular (inferior o superior) son los elementos de la diagonal. Encuentre los autovectores asociados a cada autovalor para el caso en que $T_{ii} \neq T_{jj}$ si $i \neq j$.

6. Suponga que A de $n \times n$ admite la partición en bloques

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

con A_{11} de $k \times k$, A_{12} de $k \times (n-k)$ y A_{22} de $(n-k) \times (n-k)$.

(a) Demuestre que el polinomio característico de A es el producto de los polinomios caracteristicos de A_{11} y A_{22}.

(b) Demuestre que λ es autovalor de A si y sólo si λ es autovalor de A_{11} ó A_{22}.

(c) Si $A_{12} = 0$ ¿ qué relación puede establecer entre los autovectores de A_{11} y A_{22} y los autovectores de A?

7. Encuentre los autovalores de A, sus multiplicidades algebraicas y geométricas y tantos autovectores linealmente independientes como sea posible, siendo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -6 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

8. Generalize el ejercicio 6 al caso en que

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_{kk} \end{bmatrix},$$

con $A_{11}, \dots, A_{kk}$ matrices cuadradas.

9. Demuestre que la multiplicidad geométrica μ del autovalor λ de A es menor o igual que la multiplicidad algebraica m del mismo autovalor, de la siguiente forma:

(a) Demuestre que existe una matriz no singular P tal que sus primeras μ columnas son una base para el autoespacio asociado al autovalor λ.

(b) Demuestre que para tal P, la matriz $A' = P^{-1}AP$ es de la forma

$$A' = \begin{bmatrix} \lambda I_\mu & B \\ 0 & C \end{bmatrix}.$$

(c) Demuestre que el polinomio característico de A coincide con el polinomio característico de A'.

(d) Deduzca a partir del punto anterior que el polinomio característico de A es de la forma $p(t) = (t - \lambda)^\mu q(t)$ y que por lo tanto $\mu \leq m$.

10. Encuentre para cada $k \in \mathbb{C}$ los autovalores de A, sus multiplicidades algebraicas y geométricas y tantos autovectores linealmente independientes como sea posible, siendo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & k & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

11. ¿ Cuántos autovalores diferentes de cero tiene como máximo una matriz A de $n \times n$ si rango$(A) = k < n$?

12. Encuentre los autovalores y autovectores de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

sin hallar el polinomio característico.

13. Demuestre que si λ es autovalor de A entonces:

    (a) $r\lambda$ es autovalor de rA.

    (b) λ^k es autovalor de A^k si k es un entero positivo.

    (c) Si A es inversible, λ^{-1} es autovalor de A^{-1}.

    (d) $\lambda + r$ es autovalor de $A + rI$.

14. Encuentre los autovalores y autovectores de la matriz $n \times n$

$$\begin{bmatrix} 1+r & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+r & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+r & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+r \end{bmatrix}.$$

Sugerencia: encuentre primero los autovalores y autovectores para el caso particular $r = 0$.

15. (a) Demuestre que el polinomio característico de A coincide con el de A^T y que por lo tanto A y A^T tienen los mismos autovalores.

    (b) Demuestre que la dimensión del autoespacio asociado al autovalor λ de la matriz A coincide con la dimensión del autoespacio asociado al mismo autovalor de la matriz A^T, y que por lo tanto la multiplicidad geométrica de λ como autovalor de A coincide con la multiplicidad geométrica de λ como autovalor de A^T.

    (c) ¿ Qué relación puede establecerse entre el polinomio característico de A y el de A^H?, ¿ y entre las dimensiones de los autoespacios de A y los de A^H?

16. Si $p(t) = a_k t^k + a_{k-1} t^{k-1} + \cdots + a_1 t + a_0$ y A es una matriz $n \times n$, definimos $p(A) = a_k A^k + a_{k-1} A^{k-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I$. Demuestre que si λ es autovalor de A estonces $p(\lambda)$ es autovalor de $p(A)$.

17. Demuestre que si $p(t) = q(t)r(t)$ con $q(t)$ y $r(t)$ polinomios entonces $p(A) = q(A)r(A)$.

18. Siga los pasos de la demostración del siguiente resultado:
Sean $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y $p(t) = a_k t^k + \cdots + a_0$ con $a_k \neq 0$. Entonces para cada autovalor λ de $p(A)$ existe un autovalor ν de A tal que $p(\nu) = \lambda$;
y justifique las afirmaciones señaladas.
Demostración: Supongamos que λ es un autovalor de $p(A)$ y consideremos el polinomio $q(t) = p(t) - \lambda$.
(*) Entonces la matriz $q(A)$ es singular.
Por otra parte, por el Teorema fundamental del álgebra $q(t) = a_k(t - \nu_1)\cdots(t - \nu_k)$ siendo $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k$ las raíces de $q(t)$ contadas con su multiplicidad.
(*) Entonces $q(A) = a_k(A - \nu_1 I)\ldots(A - \nu_k I)$.
(*) Como $q(A)$ es singular, para algún i^*, $(A - \nu_{i^*} I)$ es singular.
(*) Por lo tanto ν_{i^*} es un autovalor de A.
(*) Como ν_{i^*} es raíz de $q(t)$, $p(\nu_{i^*}) = \lambda$ y finaliza la demostración.

19. Halle los autovalores de $A^3 + 2A^2 - 3A + I$ siendo A la matriz del ejercicio 4.

20. ¿ Para qué valores de $r \in \mathrm{R}$ resulta inversible la matriz $A^3 + rA^2 - I$, si A es la matriz del ejercicio 3?

21. Si A es tal que $A^2 = A$ ¿ Cuáles son sus posibles autovalores?

22. Encuentre una factorización $A = P\Lambda P^{-1}$ con Λ diagonal para las siguientes matrices A:
i) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ii) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ iii) $A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -3i & -1 \end{bmatrix}$.

23. Idem ejercicio anterior pero con la matriz A del ejercicio 1 iii).

24. Determine si la matriz
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$
puede diagonalizarse; si es así hágalo, si no explique por qué no es posible.

25. Determine si las matrices de los ejercicios que a continuación se enumeran admiten una factorización $A = P\Lambda P^{-1}$ con Λ diagonal. Si tal factorización existe halle una, si no existe explique por qué.
a) 3. b) 1.iv c) 1.v d) 4.

26. Sea A la matriz dependiente del parámetro real α:
$$A = \begin{bmatrix} 2\alpha + 4 & 1 - \alpha & -2\alpha - \alpha^2 \\ 0 & 4 - \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 4 - \alpha^2 \end{bmatrix}.$$
(a) Obtener los valores de α para los que A es diagonalizable.
(b) Diagonalizar A para $\alpha = 1$ y para $\alpha = 2$.

27. ¿ Verdadero o falso?

    (a) Si la matriz A de $n \times n$ posee n autovalores distintos entonces A es diagonalizable.

    (b) Si $A = P\Lambda P^{-1} = S\Lambda S^{-1}$ con Λ diagonal, entonces $S = T$.

    (c) Si A es diagonalizable entonces $p(A)$ es diagonalizable cualquiera sea el polinomio $p(t)$.

    (d) Si $p(A)$, con $p(t)$ un polinomio no constante, es diagonalizable entonces A es diagonalizable.

    (e) Si la matriz $n \times n$ $p(A)$, con $p(t)$ un polinomio, posee n autovalores diferentes, entonces A es diagonalizable.

28. Suponga que $A \in K^{n\times n}$ ($K = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) es una matriz tal que $A^2 = A$ y demuestre lo siguiente:

    (a) Si $x \in \mathrm{col}(A)$ entonces $Ax = x$.

    (b) $\mathrm{col}(A) \oplus \mathrm{Nul}(A) = K^n$.

    (c) Existe una base de K^n compuesta por autovectores de A.

    (d) Existe $P \in K^{n\times n}$ inversible tal que $A = P\Lambda P^{-1}$ con $\Lambda = \mathrm{diag}(\overbrace{1,\ldots,1}^{k}, 0, \ldots, 0)$ y $k = \mathrm{rango}(A)$.

    (e) Si además $A^T = A$ y $K = \mathbb{R}$ ó $A^H = A$ y $K = \mathbb{C}$, entonces existe una base ortonormal de K^n compuesta por autovectores de A.

29. Suponga que $T \in \mathcal{L}(V)$ y V es de dimensión finita. Determine, justificando, cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas.

    (a) Si B y C son bases de V entonces $[T]_B$ tiene los mismos autovectores que $[T]_C$.

    (b) Si B y C son bases de V entonces $[T]_B$ tiene los mismos autovalores que $[T]_C$.

    (c) Existe una base de V compuesta por autovectores de T si y sólo $[T]_B$ es diagonalizable para cualquier base B de V.

    (d) Si T tiene n autovalores distintos entonces existe una base B tal que $[T]_B$ es diagonal.

30. Para cada una de las siguientes transformaciones lineales encuentre los autovalores, sus multiplicidades algebraicas y geométricas y bases para los autoespacios asociados a cada autovalor. Si es posible encuentre una base ordenada tal que la representación matricial de la transformación respecto de ella sea una matriz diagonal. Si tal base no existe explique por qué.

    (a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x) = [x_1 + x_2 - x_3 \;\; x_1 + x_2 + x_3 \;\; -x_1 + x_2 + x_3]^T$.

    (b) $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$, $T(a + bt + ct^2) = 2a + ct + (-b - c)t^2$.

(c) $T : V \to V$ tal que en la base $B = \{v_1; v_2\}$

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

considerando primero que V es un espacio vectorial real y luego que es un espacio vectorial complejo.

(d) $T : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$, $T(p) = p'' - p$.

31. Sea $T : V \to V$ una transformación lineal que, respecto de una base $B = \{v_1; v_2; v_3\}$ tiene asociada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1+\alpha & -\alpha & \alpha \\ 2+\alpha & -\alpha & \alpha - 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

(a) Obtener los autovalores de T, comprobando que no dependen de α.

(b) Obtener los autoespacios asociados a cada autovalor y estudiar si T es diagonalizable.

(c) Cuando T sea diagonalizable encuentre una base ordenada B tal que $[T]_B$ sea diagonal.

32. Suponga que $T \in \mathcal{L}(V)$, con V de dimensión finita, es tal que $T^2 = I$.

(a) Encuentre los posibles autovalores de T.

(b) Demuestre que si $\mathcal{S}_1 = \{v \in V : \ T(v) = v\}$ y $\mathcal{S}_2 = \{v \in V : \ T(v) = -v\}$, $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 = \{0\}$ y $\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2 = V$. (Sugerencia: escriba $v = v_1 + v_2$ con $v_1 = (v + T(v))/2$ y $v_2 = (v - T(v))/2$.)

(c) Demuestre que T es diagonalizable.

(d) Si $\dim(V) = 5$ y $\det[T]_B = -1$ para alguna base B de V, ¿ cuáles son las posibles dimensiones de $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$?

33. Considere la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definida de la siguiente manera: $T(v) = v - 3\frac{uu^T}{u^Tu}v$ con $u = [1 \ \ -1 \ \ 2]$. Encuentre los autovalores T. Analice si $[T]_B$ es diagonalizable para cualquier base B de $\mathbb{R}^3$.

34. Resuelva el ejercicio anterior con $u \in \mathbb{R}^3$ un vector no nulo arbitrario.

35. Halle una matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que: $\mathcal{S} = \text{gen}\{[1 \ \ -1 \ \ 0]^T\}$ sea invariante por A, $\lambda = 2$ sea autovalor y $\mathcal{S}^\perp$ sea el autoespacio asociado a ese autovalor, y $\det(A) = 12$.

36. Sea V un espacio vectorial real de dimensión 3 y sea $B = \{v_1; v_2; v_3\}$ una base de V. Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ tal que: i) Si $v = 6v_1 + 2v_2 + 5v_3$ entonces $T(v) = v$, ii) $\mathcal{S} = \{v \in V : \ [2 \ \ 11 \ \ -7]c_B(v) = 0\}$ es el autoespacio asociado a uno de los autovalores de T, y iii) la traza de $[T]_B$ es igual a 5.
Se pide:
a) Hallar los autovalores de T. b) Hallar $[T]_B$.

37. Demuestre que las matrices A y B no son semejantes si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

38. Compruebe que las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2.5 & 1.5 \\ 1.5 & 2.5 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

son semejantes. Halle $S \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ inversible tal que $A = SBS^{-1}$.

39. Encuentre A^k para $k \in \mathbb{N}$ si:

a) $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ b) $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

40. Hallar una matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $A^2 = B$ con

$$B = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 3 \\ 3 & 4 & -3 \\ -3 & -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

¿ Es única?

41. Hallar $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $A^2 - 3A + 2I = B$, con

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix},$$

y $\det(A) = -2$.

42. Determine los posibles valores de $\lim_{k\to+\infty} A^k v$, siendo A la matriz del ejercicio 39 b). (Sugerencia: estudie primero el caso en que v es autovector de A.

43. Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -2 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

encontrar un subespacio $\mathcal{S}$ invariante por A tal que $\lim_{k\to\infty} Av = 0$ para cada $v \in \mathcal{S}$.

44. Demuestre que para una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, el conjunto $\mathcal{S} = \{z \in \mathbb{C}^n : \lim_{k\to+\infty} A^k z = 0\}$ es un subespacio de $\mathbb{C}^n$, invariante por A. ¿ Si A es diagonalizable qué subespacio resulta $\mathcal{S}$?

45. Demuestre que si $p(t)$ es el polinomio característico de A y A es diagonalizable, entonces $p(A) = 0$. (Este resultado, conocido como el Teorema de Cayley-Hamilton, vale en general, es decir sin necesidad de suponer que A es diagonalizable.)