Práctica 5 (2da Parte)- Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

1. Hallar la solución general del sistema $X' = AX$, con A:
   i) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ii) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ iii) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -6 \\ 2 & -1 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

2. Resolver los problemas a valores iniciales:

   a) $X' = AX$, $X(0) = [1 \ -2]^T$, con $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

   b) $X' = AX$, $X(0) = [1 \ -2 \ 1]^T$, con A la matriz del Ejercicio 1.iii.

3. Hallar bases de soluciones reales de los sistemas:
   i) $X' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} X$ ii) $X' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} X$.

4. Resolver el problema a valores iniciales
   $X' = AX$, $X(0) = [1 \ 0]^T$, con $A = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$.

5. Hallar la solución general de los siguientes sistemas lineales no homogéneos:

   a) $\begin{cases} y_1' &= 2y_1 - y_2 + e^t \\ y_2' &= -y_1 + 2y_2 - e^{2t} \end{cases}$

   b) $Y' + AY = F(x)$, con $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ y $F(x) = [x \ \ -x]^T$.

   Sugerencia: haga un cambio de variables adecuado.

6. La solución general de un sistema lineal homogéneo $X' = AX$ en $\mathbb{R}^2$ es

   $$X = \begin{bmatrix} c_1e^{-t} + 5c_2e^{3t} \\ 2c_1e^{-t} + c_2e^{3t} \end{bmatrix}$$

   Hallar A.

7. Considere la ecuación lineal homogénea de 2do orden:

   $$y'' + ay' + by = 0 \tag{1}$$

   y el sistema de ecuaciones en $\mathbb{R}^2$

   $$Y' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix} Y, \quad \text{con} \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

   Pruebe lo siguiente:

   a) Si $Y = [y_1 \ y_2]^T$ es solución de (2) entonces $y = y_1$ es solución de (1).

   b) Si y es solución de (1) entonces $Y = [y_1 \ y_2]^T$ con $y_1 = y$, $y_2 = y'$, es solución de (2).

   c) El polinomio característico de A coincide con el polinomio característico de (1).

8. Encontrar la solución general de $X' = AX$ con A:
   i) $\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ ii) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ iii) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -4 \end{bmatrix}$ iv) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$