Práctica 7 - Normas de Vectores, Transformaciones Lineales y Matrices

1. Para cada uno de los siguientes vectores x, calcule $\|x\|_1$ y $\|x\|_\infty$:
   $[2\ \ -5]^T$, $[2i\ \ 0\ \ -3i]^T$, $[2\ \ -5\ \ 5]^T$, $[i\ \ -i\ \ 1\ \ -1]^T$.

2. Grafique la circunferencia unitaria $S_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ \|x\| = 1\}$ considerando las normas 1, 2 e ∞.

3. Hallar los puntos de $S = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 = 0\}$ que se encuentran más cerca de $[1\ \ 1]^T$, considerando las normas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$.

4. Demuestre que $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ son normas.

5. Compruebe que las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ en $\mathbb{R}^2$ no verifican la identidad del paralelogramo (vea el ejercicio 5 (c) del T.P. 2) y por lo tanto no son inducidas por un producto interno. ¿Es cierta esta afirmación en $\mathbb{R}^n$?

6. Suponga que $\|\cdot\|$ es una norma en $\mathbb{R}^n$ y que $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es inversible. Demuestre que si define $\|x\|_A = \|Ax\|$, $\|\cdot\|_A$ es una norma.

7. Empleando el ejercicio 6 compruebe que las siguientes son normas:
   a) $\|x\| = \sqrt{(2x_1+x_2)^2 + (x_1-x_2)^2}\ \ x \in \mathbb{R}^2$, (b) $\|x\| = \max(2|x_1|, |3x_1 - 2x_2|)$ $x \in \mathbb{R}^2$, (c) $\|x\| = |x_1 + x_2 - x_3| + |x_1 - 2x_2| + |3x_1 + x_2 - x_3|\ \ x \in \mathbb{R}^3$.

8. Para la siguientes sucesiones de vectores $\mathbf{x}_n$, encuentre el límite $\mathbf{x}_\infty$ en las normas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$.
   (a) $\mathbf{x}_n = \begin{bmatrix} \frac{2n+3}{n+1} \\ \frac{n-2}{n^2+2} \\ \frac{\operatorname{sen}(n)}{n} \end{bmatrix}$ (b) $\mathbf{x}_n = \begin{bmatrix} e^{-n} \\ \frac{n+1}{n+2} \\ \frac{(-1)^n(n+1)}{n} \end{bmatrix}$ (c) $\mathbf{x}_n = \begin{bmatrix} e^{-n}+n \\ \frac{n+1}{n^2+2} \\ \frac{(-1)^n(n+1)}{n^2} \end{bmatrix}$

9. (a) Sea V un espacio vectorial con norma $\|\cdot\|$. Demuestre que
   $$|\|u\| - \|v\|| \leq \|u - v\| \quad \text{para todo } u \text{ y } v \text{ en } V.$$
   (b) Empleando el punto anterior demuestre que si u_n converge a u_∞ entonces $\lim_{n\to\infty} \|u_n\| = \|u_\infty\|$. ¿ Vale la recíproca?

10. Demuestre que cada una de las siguientes son normas en $\mathcal{P}_2$
    (a) $\|p\| = \max_{t\in[0,1]} |p(t)|$.
    (b) $\|p\| = \max\{|p(0)|, |p(1/2)|, |p(1)|\}$.

Calcule $\|1+t+t^2\|$ en cada una de esas normas.

11. Sea B una base ordenada del $\mathbb{R}$-espacio vectorial V de dimensión n, y sea c_B el isomorfismo de coordenadas.

    (a) Suponga que $\|\cdot\|$ es una norma en $\mathbb{R}^n$. Demuestre que $\|\cdot\|_V$, definida mediante $\|v\|_V = \|c_B(v)\|$, es una norma en V.

    (b) Suponga que $\|\cdot\|_V$ es una norma en V. Demuestre que $\|\cdot\|$ es una norma en $\mathbb{R}^n$ si se define $\|u\| = \|c_B^{-1}(u)\|_V$. (Recuerde que $c_B^{-1}(u)$ es el único $v \in V$ tal que $c_B(v) = u$.)

12. Sea $V = \mathcal{P}_2$ y sea $B = \{1; 1+t; t+t^2\}$ una base ordenada de V. Encuentre para cada una de las normas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$ en $\mathbb{R}^3$, una fórmula para la norma $\|a+bt+ct^2\|_V$ en V que se definió en (a) del ejercicio 11.

13. Sean V y B como en el ejercicio anterior, y sea $\|\cdot\|_V$ la norma definida por

$$\|p\|_V = \left\{\int_0^1 p(t)^2 dt\right\}^{1/2}.$$

    Encuentre una fórmula para la norma $\|[a \;\; b \;\; c]^T\|$ en $\mathbb{R}^3$ que se definió en (b) del ejercicio 11.

14. Sea $\|\cdot\| : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $\|x\| = \max\{|2x_1|, |3x_2|\}$. Demuestre que $\|\cdot\|$ es una norma y grafique la bola unitaria. Pruebe que tal norma es equivalente a las normas 1, ∞ y 2.

15. Idem anterior pero en $\mathbb{R}^3$ con $\|x\| = 2|x_1| + 3|x_2| + |x_3|$.

16. Determinar si las normas de los dos ejercicios anteriores son normas inducidas por un p.i.

17. Demuestre que $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2}$ es una norma en $\mathbb{R}^2$. Grafique la bola unitaria y pruebe que tal norma es equivalente a la norma 2 (Sugerencia: encuentre un p.i. tal que $\|\cdot\|$ sea la norma inducida.)

18. Demostrar que $\|[x_1 \quad x_2]^T\| = \sqrt{4x_1^2 + 2ax_1x_2 + 4x_2^2}$ es norma en $\mathbb{R}^2$ si y sólo si $-4 < a < 4$.

19. (a) Sea $T : V \to W$ una transformación lineal inyectiva y $\|\cdot\|_W$ una norma en W. Pruebe que si se define $\|v\|_V$ mediante $\|v\|_V = \|T(v)\|_W$, $\|\cdot\|_V$ es norma en V.

    (b) Use el punto anterior para demostrar que las siguientes expresiones definen normas en $\mathcal{P}_2$ (es decir, identifique W, la transformación T y la norma $\|\cdot\|_W$)
    i) $\|p\| = |p(0)| + |p(1)| + |p(2)|$, ii) $\|p\| = \max\{|p(0)|, |p(-1)|, |p(1)|\}$,
    iii) $\|p\| = \int_0^1 t|p(t)|dt$.