<u>ALGEBRA II</u>. <u>FIUBA</u>
Primer cuatrimestre de 2006

<u>Sugerencias para la resolución de los ejercicios adicionales al trabajo práctico Nº 1(Wronskiano)</u>
(por Ada Cammilleri)

Recordemos la definición de wronskiano:
Sean $f_1, f_2, \ldots, f_n$ funciones definidas en un intervalo $I \subset R$, a valores en C, con derivada hasta el orden $(n-1)$ continua en I. Se define, para cada $x \in I$, una nueva función llamada wronskiano de $f_1, f_2, \ldots, f_n$, notada $W(\ f_1, f_2, \ldots, f_n)$, así:

$$W(\ f_1, f_2, \ldots, f_n)\ (x) = \det\begin{pmatrix} f_1\ (x) & f_2(x) & \ldots & f_n(x) \\ f_1^{'}(x) & f_2^{'}(x) & \ldots & f_n^{'}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \ldots & f_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

En las condiciones de esta definición, vale lo siguiente:
<u>Proposición</u> (*): si existe un $x_0 \in I$ tal que $W(\ f_1, f_2, \ldots, f_n)\,(x_0) \neq 0$ entonces las funciones $f_1, f_2, \ldots, f_n$ son l.i.

Vale, como contrarrecíproco de la proposición (*), que si un conjunto de funciones es l.d. entonces su wronskiano se hace idénticamente nulo.

1. a) *W = n! (n-1)! (n-2)! ….3!.2!.1!.0!* (recordemos que se define *0!=1*, y para un número natural *k*, *k! = k.(k-1).(k-2)…..3.2.1*). Aquí, *W* es no nulo para todo $x \in R$; luego las funciones dadas son l.i.

b) $W = \dfrac{-2}{x} \neq 0$ para todo $x \in R$, siendo $x \neq 0$; luego las funciones dadas son l.i.

c) $W = e^{2ax} \neq 0$ para todo $x \in R$; luego las funciones dadas son l.i.

d) Basta evaluar, por ejemplo, el wronskiano en $x = 0$ (da 4), para concluir que las funciones dadas son l.i.

e) Basta evaluar, por ejemplo, el wronskiano en $x = 0$ (da $\dfrac{-1}{\sqrt{2}}$), para concluir que las funciones dadas son l.i.

f) Basta evaluar, por ejemplo, el wronskiano en $x = 0$ (da $\dfrac{\pi}{2}$), para concluir que las funciones dadas son l.i.

g) Como el wronskiano da idénticamente nulo, este resultado no nos da un criterio para determinar si las funciones dadas son l.i. o l.d.. Recordando que $\cos(2x) = 1 - 2sen^2(x)$, concluimos que son l.d.

h) El wronskiano da idénticamente nulo; por lo tanto, todavía no sabemos si las funciones dadas son l.i .o l.d.. Observando que $\cos(x + \frac{\pi}{3})$ es una combinación lineal de $\{\cos x, senx\}$, concluimos que las funciones dadas resultan ser l.d.

i) Basta evaluar, por ejemplo, el wronskiano en $x = 0$ para concluir que las funciones dadas son l.i.

j) Recordemos que se definen las funciones seno hiperbólico y coseno hiperbólico así: $senh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ (verificando en particular, $senh'(x) = \cosh(x), \cosh'(x) = senh(x)$.) El wronskiano, evaluado en $x = 0$ da $(-\alpha)$ con lo cual las funciones dadas son l.i. en el caso $\alpha \neq 0$. En el caso $\alpha = 0$ son trivialmente l.d. (pues pasan a ser las constantes 0 y 1)

2. Observando que las funciones dadas son l.d. (pues $e^{x-1} = \frac{1}{e}e^x$) concluimos que el wronskiano es idénticamente nulo para todo $x \in R$.

3. Consideremos $f_1, f_2 : R \to R$ tal que $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = x|x|$. Observando que la derivada primera de ambas funciones es continua en R, el cálculo del wronskiano da idénticamente nulo para todo $x \in R$. (Tener en cuenta que $f_2'(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ -2x & x < 0 \end{cases}$).
Es fácil comprobar que $\{f_1, f_2\}$ es un conjunto l.i. en el espacio de las funciones definidas de R en C con derivada primera continua en R. (ya que si $\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) = 0$, entonces en particular, $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ (al evaluar en $x = 1$) y $-\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ (al evaluar en $x = -1$). Por lo tanto $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$)

Este ejercicio muestra que la recíproca de la proposición (*) es *falsa*, y no se puede deducir la *dependencia* lineal de un conjunto de funciones del hecho de que su wronskiano sea idénticamente nulo en el intervalo donde está definido.

4. Veamos dos formas de obtener el resultado que se pide probar.
Consideremos en primer lugar que, dado que $g_1 = c_{11}f_1 + c_{12}f_2$ y $g_2 = c_{21}f_1 + c_{22}f_2$ entonces $g_1' = c_{11}f_1' + c_{12}f_2'$ y $g_2' = c_{21}f_1' + c_{22}f_2'$. Estas relaciones pueden ser escritas "matricialmente" así: $\begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ g_1' & g_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{pmatrix}$.

Luego, recordando que el determinante de un producto de matrices es el producto de los determinantes de ambas matrices (*det(AB)=det(A).det(B)*, en forma genérica), se concluye que $det\begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ g_1^{'} & g_2^{'} \end{pmatrix} = \quad det\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} . \, det\begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1^{'} & f_2^{'} \end{pmatrix}$,

con lo cual $\quad W(g_1, g_2) = det\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} W(f_1, f_2)$.

Veamos ahora otra forma. De acuerdo con la definición, $W(g_1, g_2) = g_1 g_2^{'} - g_2 g_1^{'}$. Reemplazando aquí las expresiones correspondientes de g_1, g_2 y sus derivadas, y sacando $c_{11}c_{22}$ y $c_{12}c_{21}$, ambos factor común de ($f_1 f_2^{'} - f_2 f_1^{'}$), se llega a la relación pedida.

Para generalizar, siendo $\begin{cases} g_1 = c_{11}f_1 + \ldots + c_{1n}f_n \\ g_2 = c_{21}f_1 + \ldots + c_{2n}f_n \\ \ldots \\ g_n = c_{n1}f_1 + \ldots + c_{nn}f_n \end{cases}$, resulta

$W(g_1, \ldots, g_n)(x) = \det C.W(f_1, \ldots f_n)(x)$ siendo C la matriz de tamaño nxn tal que $(C)_{ij} = c_{ij}$.