

### Sugerencias para la resolución de la Práctica 3: Producto interno

**1 (a)** Considere  $(v, u) = v^T Au = (v^T Au)^T$  y que  $A$  es simétrica.

Con la notación usual  $u = [u_1 \ u_2]^T$ , resulta  $(u, u) = u^T Au = u_1^2 + 4u_1u_2 + 5u_2^2 = (u_1 + 2u_2)^2 + u_2^2 \geq 0$  y además  $(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = [0 \ 0]^T$  (¿por qué?).

Las demás propiedades de producto interno son consecuencia directa de la definición dada (compruébelo).

**(b)**  $\|u\| = \sqrt{13}$

Llamando  $\alpha$  al ángulo formado por los vectores  $u$  y  $v$ :  $\cos \alpha = \frac{(u,v)}{\|u\|\|v\|} = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$

**(c)** Una posibilidad es  $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$  (¿qué propiedad del producto interno no verifica?)

**2** Tenga presente que las normas son las inducidas por el producto interno (i.e.  $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ ). La desigualdad triangular (i.e.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ) se prueba fácilmente usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz (i.e.  $|(x, y)| \leq \|x\|\|y\|$ ),

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\operatorname{Re}[(x, y)] \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|(x, y)| \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

**(a)** Por la desigualdad triangular,

$$\begin{aligned} \|u\| &= \|(u - v) + v\| \leq \|u - v\| + \|v\| \quad \text{y} \\ \|v\| &= \|(v - u) + u\| \leq \|v - u\| + \|u\|, \end{aligned}$$

dado que  $\|u - v\| = \|v - u\|$ ,

$$\begin{aligned} \|u\| - \|v\| &\leq \|u - v\| \quad \text{y} \\ \|v\| - \|u\| &\leq \|u - v\|, \end{aligned}$$

por lo tanto  $-\|u - v\| \leq \|u\| - \|v\| \leq \|u - v\|$ , que puede reescribirse como  $|\|u\| - \|v\|| \leq \|u - v\|$ .

**(b)** Observe que  $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\operatorname{Re}[(u, v)]$  de modo que  $(u, v) = 0$  implica  $\operatorname{Re}[(u, v)] = 0 \Rightarrow \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ . Sin embargo,  $\operatorname{Re}[(u, v)] = 0 \not\Rightarrow (u, v) = 0$  salvo que  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . Alcanza con un contraejemplo.

**(c)** (y siguientes) Basta con desarrollar  $\|u + \alpha v\|^2$  con  $\alpha \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} \|u + \alpha v\|^2 &= \|u\|^2 + \|\alpha v\|^2 + 2\operatorname{Re}[(u, \alpha v)] \\ &= \|u\|^2 + |\alpha|^2\|v\|^2 + 2\operatorname{Re}[\alpha(u, v)]. \end{aligned}$$

Para los puntos **(c)** y **(e)** considere  $\alpha = \pm 1$  y reemplace en las fórmulas dadas. En **(d)** y **(f)**, asumiendo  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , utilice  $\alpha = \pm i$ ,

$$\begin{aligned}\|u \pm iv\|^2 &= \|u\|^2 + |\pm i|^2 \|v\|^2 \pm 2\operatorname{Re}[i(u, v)] \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2 \mp 2\operatorname{Im}[(u, v)] ,\end{aligned}$$

en la segunda igualdad se usó que dado  $z = a + ib \in \mathbb{C}$  se tiene  $iz = ia - b$ , luego  $\operatorname{Re}(iz) = -b = -\operatorname{Im}(z)$ . De esta forma, usando este resultado y **(c)**,

$$\begin{aligned}\|u + iv\|^2 - \|u - iv\|^2 &= -4\operatorname{Im}[(u, v)] \\ \|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 &= 4\operatorname{Re}[(u, v)] ,\end{aligned}$$

obteniendo así,

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}[(u, v)] &= \frac{1}{4} (\|u - iv\|^2 - \|u + iv\|^2) \\ \operatorname{Re}[(u, v)] &= \frac{1}{4} (\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2) .\end{aligned}$$

Ahora escribiendo  $(u, v) = \operatorname{Re}[(u, v)] + i\operatorname{Im}[(u, v)]$  se desprende inmediatamente la solución de **(f)** y también de **(d)** pues  $z = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Re}(z) = 0$ .

**3 (a)**  $\alpha = \arccos(\frac{7}{\sqrt{6}\sqrt{14}})$  para el canónico,  $\alpha = \arccos(\frac{13}{\sqrt{12}\sqrt{23}})$  para el segundo producto interno.

**(b)** El conjunto de soluciones  $\{x \in \mathbb{R}^3 : (x, [1 \ 2 \ -1]^T)\}$  se trata simplemente de las soluciones de la ecuación homogénea  $1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 - 1 \cdot x_3 = 0$ . Compruebe que este conjunto es un subespacio de  $\mathbb{R}^3$ .

**(c)** 2

**(d)**  $\alpha = \arccos(\frac{0}{\sqrt{30}\sqrt{12}}) = \frac{\pi}{2}$ . Para  $\mathbb{R}^{n \times n}$  resulta  $(A, B) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{ij}$ , siendo  $a_{ij}$  y  $b_{ij}$  los coeficientes de las matrices  $A$  y  $B$  respectivamente.

**4 (a)** Hay que probar que cumple los axiomas del producto interno. Por ejemplo, para ver la linealidad se toman  $p(t) = p_0 + p_1t + p_2t^2 \in \mathcal{P}_2$ , de igual modo  $q, r \in \mathcal{P}_2$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$  y se escribe,

$$\begin{aligned}(p, \alpha q + r) &= p_0(\alpha q_0 + r_0) + p_1(\alpha q_1 + r_1) + p_2(\alpha q_2 + r_2) \\ &= (\alpha(p_0q_0 + p_1q_1 + p_2q_2)) + (p_0r_0 + p_1r_1 + p_2r_2) \\ &= \alpha(p, q) + (p, r) .\end{aligned}$$

También es posible ver una equivalencia con el producto canónico en  $\mathbb{R}^3$ . Comprobar que la base  $B$  dada es ortonormal.

**(b)**

$$(p_0 + p_1t + p_2t^2, t) = \int_{-1}^1 (p_0 + p_1t + p_2t^2)t dt = \frac{2}{3}p_1 = 0 ,$$

luego  $\{p \in \mathcal{P}_2 : (p(t), t) = 0\} = \{p \in \mathcal{P}_2 : p(t) = p_0 + p_2 t^2, \quad p_0, p_2 \in \mathbb{R}\}$ . Ahora sólo es necesario encontrar dos polinomios en este subespacio que sean ortogonales entre sí (por ejemplo, elegir  $p(t) = 1$  y despejar  $q(t) = q_0 + q_2 t^2$ ) y luego normalizarlos.

(c) Nuevamente, el punto álgido del ejercicio es probar  $(x, x) > 0$  si  $x \neq 0$ . Sea  $x \in \mathcal{C}[0, 1]$  una función distinta de la función nula, luego  $\exists t_0 \in [0, 1]$  tal que  $x(t_0) \neq 0$ , suponiendo, por comodidad, que  $x(t_0) > 0$ , como  $x$  es una función continua existen un intervalo  $(a, b) \subset [0, 1]$  que contiene a  $t_0$  (es decir  $0 \leq a < t_0 < b \leq 1$ ) y  $0 < \alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $x(t) > \alpha > 0 \quad \forall t \in (a, b)$ . Así,

$$\begin{aligned} (x, x) &= \int_0^1 x^2(t) dt \\ &= \int_0^a x^2(t) dt + \int_a^b x^2(t) dt + \int_b^1 x^2(t) dt \\ &> \int_0^a x^2(t) dt + \int_a^b \alpha^2 dt + \int_b^1 x^2(t) dt \\ &= \int_0^a x^2(t) dt + \alpha^2 \int_a^b 1 dt + \int_b^1 x^2(t) dt \\ &= \int_0^a x^2(t) dt + \alpha^2(b-a) + \int_b^1 x^2(t) dt \\ &> 0, \end{aligned}$$

pues la primera y tercera integrales son no-negativas y  $\alpha^2(b-a) > 0$ . La desigualdad de Cauchy-Schwarz queda,

$$\left| \int_0^1 x(t)y(t) dt \right| \leq \left( \int_0^1 x^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^1 y^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

(d)  $2\sqrt{\frac{2}{15}}$

5 Los lados  $BA$  y  $BC$  tienen igual longitud (para la norma inducida por el producto interno):

$$\overrightarrow{BA} = [-3 \ 0]^T \Rightarrow \|\overrightarrow{BA}\| = \sqrt{18} \quad \overrightarrow{BC} = [-3 \ 2]^T \Rightarrow \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{18}$$

y a la vez  $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{BC}$ .

6 El punto de  $\mathcal{S}$  más cercano a  $v \in V$  es la proyección ortogonal de  $v$  en  $S$ , esto es  $P_{\mathcal{S}}(v)$ .

(a) Como  $[1 \ 1 \ 1]^T \perp [1 \ -1 \ 0]^T$  es posible aplicar directamente la fórmula,

$$P_{\mathcal{S}}(v) = \frac{([1 \ 1 \ 1]^T, [1 \ -1 \ 0]^T)}{\|[1 \ 1 \ 1]^T\|^2} [1 \ 1 \ 1]^T + \frac{([1 \ -1 \ 0]^T, [1 \ 0 \ 0]^T)}{\|[1 \ -1 \ 0]^T\|^2} [1 \ -1 \ 0]^T = \frac{1}{6} [1 \ -1 \ 2]^T$$

$$d(v, \mathcal{S}) = d(v, P_{\mathcal{S}}(v)) = \|v - P_{\mathcal{S}}(v)\| = \sqrt{\frac{1}{6}}$$

(b)

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{S}}(v) &= \frac{([i \ -1 \ 1+i]^T, [a \ b \ c]^T)}{\|[i \ -1 \ 1+i]^T\|^2} [i \ -1 \ 1+i]^T \\ &= \frac{-ia - b + (1-i)c}{4} [i \ -1 \ 1+i]^T \\ &= \frac{1}{4} [a+c+i(c-b) \ b-c+i(a+c) \ a-b+2c-i(a+b)]^T \\ d(v, \mathcal{S}) &= \sqrt{(a+c)^2 + (c-b)^2 + (b-c)^2 + (a+c)^2 + (a-b+2c)^2 + (a+b)^2} \\ &= \sqrt{|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 - \frac{1}{4}|a-ib+(1+i)c|^2} \end{aligned}$$

Observe que escrito de esta forma resulta evidente que la raíz cuadrada se calcula sobre un número real no negativo, aún cuando  $a, b, c \in \mathbb{C}$

(c) Nuevamente  $1 \perp t - \frac{1}{2}$  por lo que es posible aplicar directamente la fórmula,

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{S}}(v) &= 2t + \frac{5}{6} \\ d(v, \mathcal{S}) &= \frac{\sqrt{5}}{30} \end{aligned}$$

(d) Una vez más,  $1 \perp t$  por lo que se aplica la fórmula sin necesidad de ortogonalizar los generadores de  $\mathcal{S}$ ,

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{S}}(v) &= 3te^{-1} + \frac{e - e^{-1}}{2} \\ d(v, \mathcal{S}) &= \sqrt{1 - 7e^{-2}} \end{aligned}$$

**7 (a)** Por definición  $P_{\mathcal{S}}(v)$  es el único vector de  $\mathcal{S}$  que minimiza la distancia a  $v$ , esto es

$$\|v - P_{\mathcal{S}}(v)\| \leq \|v - y\| \quad \forall y \in \mathcal{S}$$

Si  $v \in \mathcal{S}$  entonces cumple

$$0 = \|v - v\| \leq \|v - y\| \quad \forall y \in \mathcal{S}.$$

Luego,  $P_{\mathcal{S}}(v) = v$ .

(b)  $\|v\|^2 = \|(v - P_{\mathcal{S}}(v)) + P_{\mathcal{S}}(v)\|^2 = \|v - P_{\mathcal{S}}(v)\|^2 + \|P_{\mathcal{S}}(v)\|^2 + 2\text{Re}[(v - P_{\mathcal{S}}(v), P_{\mathcal{S}}(v))]$  usando que la definición en (a) es equivalente a encontrar  $P_{\mathcal{S}}(v) \in \mathcal{S}$  tal que  $v - P_{\mathcal{S}}(v) \in \mathcal{S}^{\perp}$  resulta  $(P_{\mathcal{S}}(v), v - P_{\mathcal{S}}(v)) = 0$  e inmediatamente se cumple la igualdad pedida.

(c) Del ejercicio anterior,  $\|v\|^2 = \|v - P_{\mathcal{S}}(v)\|^2 + \|P_{\mathcal{S}}(v)\|^2$  luego  $\|v\|^2 = \|P_{\mathcal{S}}(v)\|^2 \Leftrightarrow \|v - P_{\mathcal{S}}(v)\|^2 = 0 \Leftrightarrow P_{\mathcal{S}}(v) = v \Leftrightarrow v \in \mathcal{S}$ . En cualquier otro caso  $\|v - P_{\mathcal{S}}(v)\|^2 > 0$ , luego  $\|v\| \geq \|P_{\mathcal{S}}(v)\|$ .

(d)  $v = (v - P_{\mathcal{S}}(v)) + P_{\mathcal{S}}(v)$  donde  $v - P_{\mathcal{S}}(v) \in \mathcal{S}^{\perp}$  y  $P_{\mathcal{S}}(v) \in \mathcal{S}$ . Puesto que  $x \in \mathcal{S} \cap \mathcal{S}^{\perp} \Rightarrow (x, x) = \|x\|^2 = 0 \Rightarrow x = 0_V \Rightarrow \mathcal{S} \oplus \mathcal{S}^{\perp}$  por lo tanto esta descomposición de  $v$  es única.

**8** Considere una base ortogonal  $B = \{v_1, \dots, v_r\}$  del subespacio  $\mathcal{S}$ . Entonces  $T(v) = P_{\mathcal{S}}(v) = \frac{(v_1, v)}{(v_1, v_1)}v_1 + \dots + \frac{(v_r, v)}{(v_r, v_r)}v_r$ . Demuestre que la función así definida es una transformación lineal de  $V \rightarrow V$  (sugerencia: aplique las propiedades del producto interno).  $\text{Nu}(T) = \mathcal{S}^{\perp}$      $\text{Im}(T) = \mathcal{S}$ .

**9 (a)**  $[P]_E = \begin{bmatrix} \frac{1}{17} & \frac{4}{17} \\ \frac{4}{17} & \frac{16}{17} \end{bmatrix}$

(b) Tenga en cuenta que  $P_{\mathcal{S}}(v_1) = v_1$  y  $P_{\mathcal{S}}(v_2) = 0_V$ .

**10**  $L = \text{gen}\{v\} \Rightarrow (x, P_L(x)) = \left(x, \frac{(v, x)}{\|v\|^2}v\right) = \frac{(v, x)}{\|v\|^2}(v, x) = \frac{(v, x)^2}{\|v\|^2} \geq 0$ .

**11 (a)**  $v_1 = [1 \ 1 \ 1 \ -1]^T$      $v_2 = [2 \ -1 \ -1 \ 0]^T$      $v_3 = [1 \ 1 \ 1 \ 3]^T$

(b)  $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}1$      $v_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}t$      $v_3 = \sqrt{\frac{45}{8}}(t^2 - \frac{1}{3})$

(c)  $B_{\text{col}(A)} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}[1 \ 1 \ 1 \ 0]^T, \frac{1}{\sqrt{3}}[-1 \ 1 \ 0 \ 1]^T, \frac{1}{\sqrt{6}}[1 \ 1 \ -2 \ 0]^T \right\}$      $\text{Nul}(A) = \{0\}$

**12 (a)**  $(f, g + h) = 8$      $\|g + h\| = \sqrt{57}$

(b) Según la tabla  $f \perp g$ , luego se tiene una base ortogonal de  $\mathcal{S}$  y se puede fácilmente aplicar la fórmula de la proyección.

(c) Como  $f \perp g$  sólo falta encontrar  $\hat{h}$  tal que  $\hat{h} \perp f$ ,  $\hat{h} \perp g$  y  $\text{gen}\{f, g, \hat{h}\} = \text{gen}\{f, g, h\}$ . Aplicando el método de Gram-Schmidt y utilizando el resultado de (a) se obtiene  $\hat{h} = h - P_{\text{gen}\{f, g\}}(h) = h - P_{\mathcal{S}}(h)$ . (Observe qué sucede si se busca  $\hat{g} = g - P_{\text{gen}\{f\}}(g)$ ). Complete y normalice.

**13 (a)**  $[P]_E = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

(b)  $[P]_E = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(c)  $[P]_E = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 6 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

**14 (a)** Observe que los  $x \in \mathbb{R}^n$  tales que  $Ax = 0$  son todos aquellos que cumplen simultáneamente  $(\text{fil}_1 A)^T \cdot x = 0, (\text{fil}_2 A)^T \cdot x = 0, \dots, (\text{fil}_m A)^T \cdot x = 0$ . Considerando el producto interno canónico en  $\mathbb{R}^n$  se puede reescribir

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \text{Nul}(A) \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n : (\text{fil}_k A, x) = 0, \quad 1 \leq k \leq m\} \\ &= \text{gen} \{\text{fil}_1 A, \text{fil}_2 A, \dots, \text{fil}_m A\}^\perp \\ &= \text{fil}(A)^\perp. \end{aligned}$$

(b) Como  $\text{Nul}(A) = \text{fil}(A)^\perp$ ,  $n = \dim(\text{col}(A)) + \dim(\text{Nul}(A))$  y  $\mathbb{R}^n = \mathcal{S} \oplus \mathcal{S}^\perp$ .

(c) Note que en  $\mathbb{C}$  es  $(\text{fil}_k A)^T \cdot x = (\text{fil}_k A^*)^{*T} \cdot x = (\text{fil}_k A^*)^H \cdot x = (\text{fil}_k A^*, x)$ .

**15** Usando el ejercicio (14):

(a)  $\mathcal{S}^\perp = \text{gen} \{[2 \ 1 \ -1]^T\}$

(b)  $\mathcal{S}^\perp = \text{gen} \{e_1, e_2, \dots, e_r\}$

(c)  $\mathcal{S}^\perp = \text{gen} \{[1 \ i \ 1 + i \ 0]^T, [0 \ 2 - i \ 0 \ 1]^T\}$

**16** Sea  $\mathcal{S} = \text{gen} \{u\}$ .

(a) Es inmediato por fórmula de proyección.

(b)  $\|P_{\mathcal{S}}(x)\| = \left\| \frac{u^H \cdot x}{\|u\|^2} u \right\| = \|(u^H \cdot x)u\| = |u^H \cdot x| \|u\| = |u^H \cdot x|$

(c)  $P_{\mathcal{S}^\perp}(x) = x - P_{\mathcal{S}}(x) = x - \frac{u^H \cdot x}{\|u\|^2} u = x - (u^H \cdot x)u = (I - uu^H)x$ .

(d)  $Rx = (I - 2uu^H)x = x - 2P_{\mathcal{S}}(x) = (x - P_{\mathcal{S}}(x)) - P_{\mathcal{S}}(x) = P_{\mathcal{S}^\perp}(x) - P_{\mathcal{S}}(x)$  con lo cual, como

$$Rx = \begin{cases} x & x \in \mathcal{S}^\perp \\ -x & x \in \mathcal{S} \end{cases}.$$

$R$  es una reflexión respecto del plano perpendicular a  $u$ .

$$\begin{aligned} R^2 &= (I - 2uu^H)(I - 2uu^H) \\ &= I - 2uu^H - 2uu^H + 4uu^H uu^H \\ &= I - 4uu^H + 4u(u^H u)u^H \\ &= I - 4uu^H + 4u(1)u^H \\ &= I \end{aligned}$$

con lo cual  $R = R^{-1}$ .

$$\begin{aligned}
R^H &= (I - 2uu^H)^H \\
&= I - 2(uu^H)^H \\
&= I - 2(u^H)^H u^H \\
&= I - 2uu^H \\
&= R
\end{aligned}$$

por lo tanto  $R$  es hermitica.

Para evaluar  $PRx$  observe que  $PRx = P_{S^\perp}(P_{S^\perp}(x) - P_S(x))$ .

$$\mathbf{17} \text{ (a)} \quad Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{(b)} \quad Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 3\sqrt{2} & 9\sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{3} & 4\sqrt{3}/3 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

(c) Sea  $A_i$  la  $i$ -ésima columna de  $A$ , es decir  $A = [A_1 \ A_2 \ \dots \ A_n]$ .

$$\text{Resultan } Q = \begin{bmatrix} \frac{A_1}{\|A_1\|} & \frac{A_2}{\|A_2\|} & \dots & \frac{A_n}{\|A_n\|} \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} \|A_1\| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \|A_2\| & 0 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \|A_n\| \end{bmatrix}.$$

(d)  $Q$  es diagonal con  $q_{ii} = 1$  si  $a_{ii} > 0$  y  $q_{ii} = -1$  si  $a_{ii} < 0$ .  $R$  se obtiene a partir de  $A$  multiplicando la  $i$ -ésima fila de  $A$  por  $(-1)$  si  $a_{ii} < 0$ .

$$\mathbf{(e)} \quad Q = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{18} \text{ (a)} \quad \hat{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{(b)} \quad \hat{x} = \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7/3 \\ -1/3 \\ 8/3 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

**19** No.

$$\mathbf{20} \quad \hat{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

**21 (a)** V

(b) V

(c) F

(d) V

(e) F

(f) V

(g) V

**22 (a)** Si  $x \in \text{Nul}(A^H A)$  debe ser  $A^H Ax = 0 \Rightarrow x^H A^H Ax = \|Ax\|^2 = 0 \Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow x \in \text{Nul}(A)$ . Por otra parte, si  $x \in \text{Nul}(A) \Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow A^H Ax = 0 \Rightarrow x \in \text{Nul}(A^H A)$ .

(b) Dado que  $A$  y  $A^H A$  tienen el mismo número de columnas e igual espacio nulo, deben tener el mismo rango.

(c) Es consecuencia de (b).

(d) La ecuación normal  $A^H A \hat{x} = A^H b$  tiene solución única si, y solo si, las columnas de  $A^H A$  son l.i., y, por lo anterior, esto equivale a que las columnas de  $A$  sean l.i.. En tal caso, la solución es  $\hat{x} = (A^H A)^{-1} A^H b$ .

(e)  $A^\# = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 0 & 11 & 11 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$  para la matriz  $A$  de 18(a). No existe  $A^\#$  para la matriz de 18(b).

(f) Sea  $b \in \mathbb{R}^n$ . Se sabe que si  $\hat{x}$  es solución por cuadrados mínimos de  $Ax = b$ ,  $A\hat{x} = P_{\text{col}(A)}(b)$ . Como el rango de  $A$  es  $m$  (pues la dimensión de  $\mathcal{S}$  es  $m$ ) vale que  $\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b$  con lo cual  $A\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b = Pb$ . Luego  $P$  es la matriz de proyección sobre el subespacio  $\mathcal{S}$ .

Otra forma de resolver el ejercicio es ver que  $P$  es simétrica e idempotente y que  $\text{col}(A) = \text{col}(P)$ .

(g) Para calcular  $A^T A$  tenga en cuenta que las columnas de  $A$  son ortonormales.

**23 (a)**  $y = \frac{9}{10} + \frac{2}{5}x$

(b) La solución por cuadrados mínimos de  $Ax = b$  es única si, y solo si, las columnas de  $A$  son l.i. (ver ej. (22)). En este caso  $A$  tiene dos columnas, la primera formada por "1", la segunda por las abscisas. Las columnas de  $A$  son l.i. si, y solo si, sus columnas no son proporcionales, esto es, si, y solo si, no todas las abscisas son iguales.

**24 (a)**  $p(t) = -0.7 + 5.6040 t$  con velocidad 5.6040

(b)  $p(t) = -0.11 + 5.0983 t + 0.0843 t^2$  con aceleración 0.1686 y velocidad inicial 5.0893

(c) La segunda pues, en este caso, la norma del error es la centésima parte de la del primero.

**25 (a)**  $f = -42.4 + 0.639 p + 0.799 s$

(b)  $\hat{f} \approx 74$

**26**  $b = 0.9184 + 0.7299 h$

**27**  $a = 13.75, b = 0.0911$ .  $a$  representa la pendiente.  $\hat{L} \approx 26.6862$

**28 (a)** Para ver la dimensión de  $V$  note que  $a + bx + cx^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = c = 0$  por ser polinomios de distinto grado, luego como  $e^{-x} \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ , se tiene que  $(a + bx + cx^2)e^{-x} = 0 \Leftrightarrow a + bx + cx^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = c = 0$ . Para ver que  $(f, f) = 0 \Rightarrow f = 0$ , por ser suma de reales no negativos  $f$  debe valer cero en  $0, 1$  y  $-1$ . Luego  $a = 0, b + c = 0$  y  $c - b = 0$  por lo tanto  $a = b = c = 0$ . Compruebe los demás axiomas.

**(b)**  $g = [g - P_S(g)] + P_S(g) = P_{S^\perp}(g) + P_S(g)$   
 donde  $S = \text{gen} \{(x + x^2)e^{-x}\}$

$$\begin{aligned} [P_S(g)](x) &= \frac{((x + x^2)e^{-x}, (1 + x)e^{-x})}{\|(x + x^2)e^{-x}\|^2} (x + x^2)e^{-x} \\ &= \frac{4e^{-2}}{4e^{-2}} (x + x^2)e^{-x} \\ &= (x + x^2)e^{-x} \\ [P_{S^\perp}(g)](x) &= (1 - x^2)e^{-x} \end{aligned}$$

**29** Note que

$$\{x \in \mathbb{R}^3 : (x, [1 \ 2 \ 1]^T) = 0\} = \text{gen} \{[1 \ 2 \ 1]^T\}^\perp = \text{gen} \{[1 \ 1 \ 1]^T, [1 \ 1 \ 0]^T\},$$

pues  $[1 \ 2 \ 1]^T$  es un elemento de la base ortonormal.

$$\begin{aligned} P_S(a[1 \ 1 \ 1]^T + b[1 \ 1 \ 0]^T) &= \\ &= \frac{(a[1 \ 1 \ 1]^T + b[1 \ 1 \ 0]^T, [1 \ 1 \ 1]^T - [1 \ 1 \ 0]^T)}{\|[1 \ 1 \ 1]^T - [1 \ 1 \ 0]^T\|^2} [0 \ 0 \ 1]^T \\ &= \frac{(a[1 \ 1 \ 1]^T + b[1 \ 1 \ 0]^T, [1 \ 1 \ 1]^T) - (a[1 \ 1 \ 1]^T + b[1 \ 1 \ 0]^T, [1 \ 1 \ 0]^T)}{\|[1 \ 1 \ 1]^T\|^2 + \|[1 \ 1 \ 0]^T\|^2} [0 \ 0 \ 1]^T \\ &= \frac{a((1, 1, 1), [1 \ 1 \ 1]^T) - b([1 \ 1 \ 0]^T, [1 \ 1 \ 0]^T)}{\|[1 \ 1 \ 1]^T\|^2 + \|[1 \ 1 \ 0]^T\|^2} [0 \ 0 \ 1]^T \\ &= \frac{a - b}{2} [0 \ 0 \ 1]^T \end{aligned}$$

y a partir de esta equivalencia calcule la proyección sobre  $S^\perp$  y luego las distancias para despejar  $a$  y  $b$ .

**30**  $S = \{p \in \mathcal{P}_2 : p(t) = a(2 + t^2) + bt, \quad a, b \in \mathbb{R}\}$  y  $S^\perp = \{r \in \mathcal{P}_2 : r(t) = a(-4 + t + 6t^2), \quad a \in \mathbb{R}\}$  usando que  $\mathcal{P}_2 = S \oplus S^\perp$  se tiene que  $p = P_S(p) + P_{S^\perp}(p)$  y luego (justificar)  $p(t) = (4 - t + 2t^2) + \alpha(-4 + t + 6t^2)$ . Calcule la norma, despeje los dos valores posibles de  $\alpha$  y encuentre los vectores correspondientes a cada uno.

**31**  $W = \text{gen}\{[0 \ 1 \ 0 \ 0]^T\}$  (justificar entre otras cosas la dimensión de  $W$ ).  $P_W([1 \ 1 \ 1 \ 1]^T) = [0 \ 1 \ 0 \ 0]^T$ .

**32** Llamando  $w_1 = v_1 - v_2$ ,  $w_2 = v_1 + v_2$  y  $w_3 = v_3 - 2v_1$  se tiene  $\mathcal{S} = \text{gen}\{w_1 + w_2, w_2 - w_1\}$  con lo cual (necesariamente  $\dim \mathcal{S}^\perp = 1$ )  $\mathcal{S}^\perp = \text{gen}\{w_3\}$ . Ahora bien,

$$\begin{aligned} d(2v_3 - 4v_1, \mathcal{S}) &= \left\| P_{\mathcal{S}^\perp} \left( 2(w_3 + w_1 + w_2) - 4 \left( \frac{w_1 + w_2}{2} \right) \right) \right\| \\ &= \|P_{\mathcal{S}^\perp}(2w_3)\| \\ &= \|P_{\text{gen}\{w_3\}}(2w_3)\| \\ &= 2\|w_3\| \\ &= 2 \end{aligned}$$

En cuanto a  $\|v_1 + v_2 + v_3\|$  escríbalo en función de  $\{w_1, w_2, w_3\}$  y use el teorema de Pitágoras.

**33** Basta con encontrar una base ortogonal de  $\mathcal{S}$  tal que el vector  $[1 \ -1 \ 0]^T$  pertenezca a la base, o sea que  $B_{\mathcal{S}} = \{[1 \ -1 \ 0]^T, w\}$  luego  $\mathcal{S} = U \oplus \text{gen}\{w\}$ . Como  $w \perp U$  inmediatamente,

$$P_{\mathcal{S}}(\cdot) = P_U(\cdot) + P_{\text{gen}\{w\}}(\cdot),$$

por lo tanto  $W = \{x \in \mathbb{R}^3 : P_{\text{gen}\{w\}}(x) = 0\} = \text{gen}\{w\}^\perp$ . Observe y justifique por qué  $W \cap \mathcal{S}^\perp \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ . Encuentre explícitamente  $W$ .

**34** Si  $(v, w) = (u, w) \quad \forall w \in \mathcal{S}$  entonces  $(v - u, w) = 0 \quad \forall w \in \mathcal{S}$  con lo cual  $v - u \in \mathcal{S}^\perp$ , por lo que  $P_{\mathcal{S}}(v - u) = 0$ . Como la proyección es lineal,

$$\begin{aligned} 0 &= P_{\mathcal{S}}(v - u) = P_{\mathcal{S}}(v) - P_{\mathcal{S}}(u) \Rightarrow \\ P_{\mathcal{S}}(u) &= P_{\mathcal{S}}(v). \end{aligned}$$

**35** Sabemos que todo  $b \in \mathbb{R}^3$  puede expresarse como  $b = P_{\text{col}(A)}(b) + P_{\text{col}(A)^\perp}(b)$ .

Como  $A \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = P_{\text{col}(A)}(b)$  y  $\text{col}(A)^\perp = \text{Nul}(A^T) = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$ , resulta que  $b = A \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} +$

$\alpha \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ . Como  $\left\| \alpha \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\| = 4$  se obtienen 2 respuestas:

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{4}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ y } b = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{4}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

**36 (a)** la matriz de proyección sobre  $\text{Nul}(A)^\perp$  es  $\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} [1 \ 1 \ -2]$

$$(b) \hat{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

**37 (a)** Recuerde que la reflexión de un vector  $v$  sobre un subespacio  $\mathcal{S}$  de  $\mathbb{R}^n$  es el vector  $w = P_{\mathcal{S}}(v) - P_{\mathcal{S}^\perp}(v)$ . Se aplica entonces esta observación para obtener la matriz en una base  $B = B_{\mathcal{S}} \cup B_{\mathcal{S}^\perp}$

pasando luego a la base canónica.  $[T]_E = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -6 & -3 & 2 \\ -3 & 2 & -6 \\ 2 & -6 & -3 \end{bmatrix}$ . Compruebe que la matriz obtenida

es involutiva y simétrica.

$$(b) [T]_E = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(c) [T]_E = \begin{bmatrix} 1,1984 & -0,1638 & 0,3796 \\ 1,3515 & 0,7280 & 2,1632 \\ -0,3781 & -0,1097 & 0,4877 \end{bmatrix} \quad (\text{¿Qué resultado arroja la matriz a la octava?})$$

(d) Podría ser una reflexión respecto de  $\mathcal{S}$  (o también respecto de  $\mathcal{S}^\perp$ ) tal como  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : T \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T = \frac{1}{3} [-x + 2y + 2z \quad 2x - y + 2z \quad 2x + 2y - z]^T$ .

Más generalmente, como  $d(v, \mathcal{S}) = \|P_{\mathcal{S}^\perp} v\|$ ,  $T$  debe ser tal que  $\|P_{\mathcal{S}^\perp} T(x)\| = \|P_{\mathcal{S}^\perp} x\| \forall x \in \mathbb{R}^3$ . Si tomamos una b.o.n cualquiera de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\{v_1, v_2, v_3\}$  con  $v_1 \in \mathcal{S}$  y  $v_2, v_3 \in \mathcal{S}^\perp$ , y elegimos tres vectores  $w_1, w_2$  y  $w_3$  tales que  $w_1 \in \mathcal{S}$ ,  $w_2, w_3 \in \mathcal{S}^\perp$ ,  $\|w_2\| = \|w_3\| = 1$  y  $w_2 \perp w_3$ , tenemos que la t.l.  $T$  definida mediante  $T(v_1) = w_1$ ,  $T(v_2) = w_2$  y  $T(v_3) = w_3$ , verifica la condición  $\|P_{\mathcal{S}^\perp} T(x)\| = \|P_{\mathcal{S}^\perp} x\| \forall x \in \mathbb{R}^3$ , y por lo tanto una de las condiciones del ejercicio ( demuéstrela ). Ahora sólo basta con elegir los  $w_i$  para que  $T$  sea diferente de  $\pm I$ .

(e) La matriz de la reflexión con respecto al eje  $x_1$  es  $[R]_E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ ; si el eje de rotación

de  $Q$  es el  $x_1$  se obtiene para la rotación de ángulo  $\phi$  la matriz  $[Q]_E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\text{sen} \phi \\ 0 & \text{sen} \phi & \cos \phi \end{bmatrix}$ , de

donde la matriz de la composición es  $[R \circ Q]_E = [R]_E \cdot [Q]_E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos \phi & \text{sen} \phi \\ 0 & -\text{sen} \phi & -\cos \phi \end{bmatrix}$ .

La matriz correspondiente a la rotación de ángulo  $2\phi$  es  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\phi) & -\text{sen}(2\phi) \\ 0 & \text{sen}(2\phi) & \cos(2\phi) \end{bmatrix}$  (note que puede obtenerse calculando  $[Q]_E \cdot [Q]_E$ ).

**38 (a)** Si  $r = 1$  no existe una transformación lineal que verifique lo pedido.

Si  $r = 4$  existen infinitas transformaciones lineales posibles.

Si  $r \in \mathbb{R} - \{1, 4\}$  queda definida una única transformación cuyo núcleo admite la base  $\{v_2 + v_3\}$  y cuya imagen admite la base  $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \right\}$ .

(b) Se define  $f$  sobre una base de  $\mathbb{R}^3$  (note que dos vectores de dicha base son de  $\text{Im}(T)$  y uno de  $(\text{Im}(T))^\perp$ ):

$$f \left( \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T \right) = v_1 + v_2 + 2v_3, \quad f \left( \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T \right) = v_1 + 3v_2 + 2v_3, \quad f \left( \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T \right) = v_2 + v_3$$