

ALGEBRA II. FIUBA
Segundo cuatrimestre de 2004

Sugerencias para la resolución del trabajo práctico N° 2
(por Fernando Acero con la colaboración de Ada Cammilleri)

1. $\alpha = \arccos(\sqrt{84}/12)$ para el canónico, $\beta = \arccos(13/\sqrt{276})$ para el segundo p.i. (comprobar que efectivamente es un p.i.).

2. $w^\perp = \text{gen}\{(1, 0, 1), (2, -1, 0)\}$ es un subespacio de \mathbb{R}^3 .

3. a) El conjunto V_0 contiene al $\mathbf{0}$, pues $(\mathbf{0}, \mathbf{w}) = 0$ cualquiera sea \mathbf{w} (pruébese) y si dos vectores \mathbf{x} , \mathbf{y} pertenecen a V_0 siendo α un escalar cualquiera es $(\alpha \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{w}) = \alpha (\mathbf{x}, \mathbf{w}) + (\mathbf{y}, \mathbf{w}) = 0$ donde la primera igualdad se verifica por dos axiomas de la definición de p.i. (¿cuáles?), la segunda por hipótesis (¿cuál?) y de allí resulta que $\alpha \mathbf{x} + \mathbf{y}$ pertenece a V_0 , y entonces (¿por qué?) V_0 es un subespacio de V .
 b) En el caso $V = \mathbb{R}^n$, $V_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tales que } (x, w) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tales que } x_1 w_1 + x_2 w_2 + \dots + x_n w_n = 0\}$. Como w no es nulo, se verifica que $\dim(V_0) = n-1$ (ya que V_0 contiene a todas las soluciones de un sistema lineal homogéneo que consta de una ecuación no nula). El caso $V = \mathbb{C}^n$ se resuelve en forma análoga.

4. a) Deben ser números reales tales que $a_{12} = a_{21}$, $a_{11} > 0$ y $a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} > 0$ (de aquí se deduce que, en particular, también $a_{22} > 0$). Respecto de cómo hallar la condición $a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} > 0$, suponiendo haber determinado que debe verificarse $a_{12} = a_{21}$, $a_{11} > 0$, como uno de los axiomas de la definición de p.i. exige que $(x, x) \geq 0$, y si $(x, x) = 0$ entonces necesariamente $x = 0$, considerar $(x, x) = a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2 = (\sqrt{a_{11}} x_1 + \frac{a_{12} x_2}{\sqrt{a_{11}}})^2 + (a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}}) x_2^2$. Para que esta expresión sea una suma de cuadrados (y en tal caso probar dicho axioma), debe ser $(a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}}) > 0$.
 b) La comprobación es inmediata. Respecto de la A hallada, se trata de una matriz simétrica con determinante y diagonal principal positiva.

5. a) Siendo $\mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathbf{v} + \mathbf{v}$ es $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{u} - \mathbf{v} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|$ y de allí $\|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$; ahora rehacer intercambiando u con v y se tiene la desigualdad pedida.
 b) Considerar que $\|\mathbf{u} \pm \mathbf{v}\|^2 = (\mathbf{u} \pm \mathbf{v}, \mathbf{u} \pm \mathbf{v}) = \|\mathbf{u}\|^2 \pm 2 \text{Re}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \|\mathbf{v}\|^2$. En un espacio real, es $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = (\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v}) = \|\mathbf{u}\|^2 + 2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \|\mathbf{v}\|^2$ de modo que es inmediato que la igualdad $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$ se verifica si, y solo si, $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$.

Proponer un ejemplo que muestre que puede tenerse la igualdad pitagórica *sin* la ortogonalidad en un espacio complejo con p.i..

- c) Basta considerar que $\|\mathbf{u} \pm \mathbf{v}\|^2 = (\mathbf{u} \pm \mathbf{v}, \mathbf{u} \pm \mathbf{v}) = \|\mathbf{u}\|^2 \pm 2 \text{Re}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \|\mathbf{v}\|^2$ y sumar las dos igualdades.
- d) como en c) pero restando.
- e) Considerar las expresiones de $\|\mathbf{u} \pm \mathbf{v}\|^2$ y $\|\mathbf{u} \pm i\mathbf{v}\|^2$. Además tener en cuenta que si z es complejo, $\text{Re}(-iz) = \text{Im}(z)$; podemos hallar, usando d), que $\text{Im}((\mathbf{u}, \mathbf{v})) = \text{Re}(-i(\mathbf{u}, \mathbf{v})) = \text{Re}((\mathbf{u}, -i\mathbf{v}))$ y de allí el resultado.

Detallar y justificar las igualdades.

6. Por ejemplo, en a), dado $u \in V$, para verificar $(u,u)_V = (c_B(u), c_B(u)) = 0 \implies u=0$ (esto es, u debe ser el vector nulo), como (\cdot, \cdot) es un p.i. en \mathbb{R}^n (o en \mathbb{C}^n), de ser $(c_B(u), c_B(u)) = 0$ necesariamente $c_B(u) = 0$ (el vector columna con todas las componentes nulas), con lo cual $u=0$. (recordar propiedades de c_B)
Respecto de b), para mostrar uno de los axiomas, dado $u \in \mathbb{R}^n$ (o \mathbb{C}^n), si $(u,u) = (c_B(u)^{-1}, c_B(u)^{-1})_V = 0$, como $(\cdot, \cdot)_V$ es un p.i. en V , debe ser $c_B(u)^{-1} = 0$ (el vector nulo de V), pero entonces $u=0$ (pues el vector nulo de V tiene coordenadas todas nulas, recordar propiedades de c_B^{-1})
7. Respecto de probar que la definición dada corresponde a un p.i., esto puede demostrarse, por ejemplo, a partir del ejercicio 6 a) considerando $B = \{1, t, t^2\}$ y el producto interno canónico en \mathbb{R}^3 . Luego, por cálculo directo, es $\|1\| = \|t\| = \|t^2\| = 1$; $0 = (1, t) = (1, t^2) = (t, t^2)$.
8. a) Verificar la axiomática es inmediato, excepto cuando se trata de probar que *la única* función f para la cual $\int_0^1 f^2 = 0$, es la nula.

Para ello, considerar el siguiente resultado de Análisis: si $g: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, $g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a,b]$ y $\int_a^b g(x) dx = 0$ entonces $g(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b]$. Observar que la continuidad es fundamental para obtener tal conclusión. Encontrar un ejemplo en el cual se defina una función g , con un número finito de discontinuidades en $[a,b]$, para la cual se verifique que $g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a,b]$ y $\int_a^b g(x) dx = 0$, pero tal que g no sea la función nula.

$\left| \int_0^1 f(t) g(t) dt \right| \leq \sqrt{\int_0^1 f^2(t) dt} \sqrt{\int_0^1 g^2(t) dt}$ es la expresión de la desigualdad de Schwarz en este caso.

- b) Argumentar con el cumplimiento de los axiomas en el subespacio.
- c) $\alpha = \arccos(\sqrt{30/7} \cdot 5/12)$; $a = -1/2$.
9. Probamos directamente 9e), del cual el resto es un ejemplar; siendo $\mathbf{x} = \sum_i x_i \mathbf{v}_i, \mathbf{y} = \sum_j y_j \mathbf{v}_j$ se tiene que $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\sum_i x_i \mathbf{v}_i, \sum_j y_j \mathbf{v}_j) = \sum_i \sum_j \overline{x_i} (\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) y_j = \overline{c_B^t(\mathbf{x})} G c_B(\mathbf{y})$, la segunda igualdad debida a axiomas y propiedades del p.i. (¿cuáles?, detallar), la tercera a la definición de coordenadas, producto matricial y definición de G (esto es $G_{ij} = (\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)$), de lo que es inmediato que $G = \overline{G^T}$ (pues es $G_{ij} = (\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = (\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i) = \overline{G_{ji}}$, la segunda igualdad por axioma del p.i.) y además para cualquier elemento $X \in \mathbb{K}^n$ (distinto del nulo) se verifica $\overline{X}^T G X > 0$ (pues basta ver que tomando $\mathbf{x} = c_B^{-1}(X)$ es también \mathbf{x} no nulo (¿por qué?), y por lo tanto (\mathbf{x}, \mathbf{x}) es positivo, y entonces, *a posteriori* $\overline{X}^T G X > 0$), de modo que efectivamente es G una matriz definida positiva. Ahora, recíprocamente, sea G una matriz definida positiva, definiendo $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \overline{c_B^t(\mathbf{x})} G c_B(\mathbf{y})$ se tiene efectivamente un p.i. (probar los axiomas) en V . Además debe ser claro que la matriz G es diagonal cuando la base B ortogonal (y G es la identidad cuando la base B es ortonormal).

Ahora, y como añadido, proponemos probar que $\det(G) > 0$ (con lo cual, particularmente G es invertible). También se propone exhibir una matriz G simétrica con determinante positivo para la que no exista una base B tal que satisfaga lo anterior.

Recordar la caracterización obtenida en el ejercicio 4) para el caso de una matriz de 2×2 .

$$d) G = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}; (t, t^2 - t + 1) = 5/12. \quad f.) G = \begin{pmatrix} 2 & 1-i & i \\ 1+i & 3 & i \\ -i & -i & 1 \end{pmatrix}$$

$$10. \quad a) 1/3; \quad b) G = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

11. Si hubiese un X no nulo que satisficiera $G X = \mathbf{0}$, sería también $X^H G X = 0$ contra la suposición de que G es definida positiva.

$$12. \quad \left\| \sum_i x_i \mathbf{v}_i \right\|^2 = \left(\sum_i x_i \mathbf{v}_i, \sum_j x_j \mathbf{v}_j \right) = \sum_i \sum_j \overline{x_i} (\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) x_j = \sum_i \overline{x_i} \|\mathbf{v}_i\|^2 x_i = \sum_i |x_i|^2 \|\mathbf{v}_i\|^2$$

donde la tercera igualdad procede por hipótesis (¿de qué modo exactamente?).

$$13. \quad c_B(t^2 - 1) = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \|t^2 - 1\| = \sqrt{\frac{8}{15}}$$

14. La descomposición (única) es $(1 \ 1 \ 1)^T = 1/3 (1 \ 2 \ -1)^T + 1/3 (2 \ 1 \ 4)^T$.

$$15. \quad a. P_S(\mathbf{v}) = 1/6 (5 \ -1 \ 1)^T; \quad d(\mathbf{v}, S) = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

$$b. P_S(\mathbf{v}) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} a - bi + (1+i)c \\ ia + b + (i-1)c \\ (1-i)a - (1+i)b + 2c \end{pmatrix};$$

$$d(\mathbf{v}, S) = \sqrt{|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 - \frac{1}{4} |a - ib + (1+i)c|^2}$$

$$c. P_S(\mathbf{v}) = 2t + 5/6; \quad d(\mathbf{v}, S) = \frac{\sqrt{5}}{20}$$

16. En este ejercicio es importante lo que se haya tomado por definición de $P_S(\mathbf{v})$; si partimos del resultado $S \oplus S^\perp = V$ (supuesta $\dim(V)$ finita), para cualquier \mathbf{v} existe una descomposición única $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ con $\mathbf{v}_1 \in S$, $\mathbf{v}_2 \in S^\perp$ y ahora *definimos* $P_S(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_1$ (y entonces resulta $P_{S^\perp}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_2$). Así tenemos, reescribiendo lo anterior, que es $\mathbf{v} = P_S(\mathbf{v}) + P_{S^\perp}(\mathbf{v})$.

a. Si $\mathbf{v} \in S$ es claro que $\mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{0}$ con $\mathbf{v} \in S$, $\mathbf{0} \in S^\perp$ de donde, *por esta definición*, es $P_S(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$.

Vale también la recíproca, esto es, que si $P_S(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ entonces $\mathbf{v} \in S$ (probarlo). Además de cada resultado se obtiene también el referido al complemento (pues basta notar que siendo S el complemento ortogonal de S^\perp), de modo que a) también puede leerse del siguiente modo: $\mathbf{v} \in S^\perp$ sii $P_{S^\perp}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ y también $\mathbf{v} \in S$ sii $P_{S^\perp}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$, etc.

b. De $\mathbf{v} = P_S(\mathbf{v}) + P_{S^\perp}(\mathbf{v})$ se tiene (¿por qué?) $\|\mathbf{v}\|^2 = \|P_S(\mathbf{v})\|^2 + \|P_{S^\perp}(\mathbf{v})\|^2$ y de allí el resultado observando que $\mathbf{v} - P_S(\mathbf{v}) = P_{S^\perp}(\mathbf{v})$.

c. Basta ver que $\|\mathbf{v}\|^2 = \|P_S(\mathbf{v})\|^2 + \|P_{S^\perp}(\mathbf{v})\|^2 \geq \|P_S(\mathbf{v})\|^2$ con la igualdad cumpliéndose si $\|P_{S^\perp}(\mathbf{v})\|^2 = 0$, es decir sii (¿por qué?) $P_{S^\perp}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ o lo que es lo mismo, $\mathbf{v} \in S$. (es claro que también vale la recíproca, esto es que si se da la igualdad, $\mathbf{v} \in S$. (¿por qué?)).

Si se ha definido, para $\mathbf{v} \in V$, la proyección ortogonal de \mathbf{v} sobre S , $P_S(\mathbf{v})$, como el único vector de S tal que $\mathbf{v} - P_S(\mathbf{v})$ es ortogonal a S , consideramos

a) cuando $\mathbf{v} \in S$, verificar que \mathbf{v} cumple la definición de proyección ortogonal sobre S .

b) Escribir $\mathbf{v} = P_S(\mathbf{v}) + (\mathbf{v} - P_S(\mathbf{v}))$ y aplicar Pitágoras.

c) $\|\mathbf{v}\|^2 = \|P_S(\mathbf{v})\|^2 + \|P_{S^\perp}(\mathbf{v})\|^2 \geq \|P_S(\mathbf{v})\|^2$

d) Es la definición de proyección ortogonal de \mathbf{v} sobre S .

e) Considerar $\mathbf{v} = P_S(\mathbf{v}) + (\mathbf{v} - P_S(\mathbf{v}))$ y mostrar que la intersección entre S y S^\perp es nula. (con lo cual concluimos que suponiendo que exista $P_S(\mathbf{v})$ para cada $\mathbf{v} \in V$, resulta $S \oplus S^\perp = V$).

17. $B = \left\{ (1 \ 1 \ 0 \ 0)^T, (0 \ 0 \ 1 \ 1)^T, (1 \ -1 \ -1 \ 1)^T \right\}$; $P_S(\mathbf{w}) = \mathbf{w}$, pues $\mathbf{w} \in S$.

18. Resulta la BOG del ejercicio 13, luego se normaliza.

19. Usando 16 d), buscamos $\mathbf{w} \in S$ tal que $\mathbf{u} - \mathbf{w}$ resulte ortogonal a S . Para ello, planteamos

$$\mathbf{w} = \mathbf{a}(1 \ -1 \ 0)^T + \mathbf{b}(1 \ 0 \ 1)^T \text{ y buscamos } \mathbf{a}, \mathbf{b} \text{ tales que } \mathbf{u} - \mathbf{w} \text{ verifique lo señalado. Resulta } P_S(\mathbf{u}) = 1/3 (1 \ 1 \ 2)^T.$$

20. Si $\mathbf{w} \in S^\perp$, \mathbf{w} es ortogonal a todo vector de S , en particular lo es a los vectores que generan S . Para la recíproca, sea \mathbf{x} un vector cualquiera de S , (y entonces es $\mathbf{x} = \sum_1^r x_i \mathbf{v}_i$) y \mathbf{w} un vector ortogonal a los $\mathbf{v}_i, \forall i \in [1, r]$; entonces se tiene $\langle \mathbf{w}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{w}, \sum_1^r x_i \mathbf{v}_i \rangle = \sum_1^r x_i \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_i \rangle = 0$ luego $\mathbf{w} \in S^\perp$.

21. a. $S^\perp = \{ (x \ y \ z \ w)^T \in \mathbb{R}^4 / x = y, z = 0 \} = \text{gen} \{ (1 \ 1 \ 0 \ 0)^T, (0 \ 0 \ 0 \ 1)^T \}$.

b. $S^\perp = \{ (x \ y \ z \ w)^T \in \mathbb{R}^4 / 2x = y, z = 0 \} = \text{gen} \{ (1 \ 2 \ 0 \ 0)^T, (0 \ 0 \ 0 \ 1)^T \}$.

c. $S^\perp = \{ (x \ y \ z)^T \in \mathbb{C}^3 / x = (i-1)z, y = (2-i)z \} = \text{gen} \{ (i-1 \ 2-i \ 1)^T \}$.

22. a) La definición de producto matricial expresa precisamente que S está formado por los vectores de \mathbb{R}^n ortogonales (con el producto interno canónico) a las filas de A . Es decir: $S = (\text{Fil}(A))^\perp$, o también, $S^\perp = \text{Fil}(A)$. Por lo tanto, podemos escribir, $\text{Nul}(A) = (\text{Fil}(A))^\perp$.

Luego $n - \dim(S) = n - \dim \text{Nul}(A) = \text{rango de } A$ (dado que $S = \text{Nul}(A)$). Además, $n - \dim(S) = \dim S^\perp$.

Si se reemplaza \mathbb{R} por \mathbb{C} , se trata de las filas conjugadas de A (¿por qué?).

En este caso podemos escribir $\text{Nul}(A) = (\text{Fil}(\bar{A}))^\perp$, donde \bar{A} es la matriz que se obtiene a partir de A conjugando todos sus coeficientes.

b) i. $B = \{ (2, 1, -1) \}$; ii. Los primeros r vectores canónicos; iii. $B = \{ (1 \ i \ 1+i \ 0)^T \ (0 \ 2-i \ 0 \ 1)^T \}$.

c) $S = \{ (x \ y \ z)^T \in \mathbb{R}^3 / x + y - 2z = 0 \}$.

23. Como $\dim(S)$ es finita, está garantizada la existencia de $P_S(\mathbf{v})$, para cada $\mathbf{v} \in V$. Luego, mostrar que el vector $\mathbf{v} - P_S(\mathbf{v})$ verifica la definición de proyección ortogonal sobre S^\perp .

En el caso que S sea un subespacio descrito por ecuaciones lineales, para calcular $P_S(\mathbf{v})$, se puede calcular $P_{S^\perp}(\mathbf{v})$, proyectando sobre el espacio generado por las filas de la matriz A que define las ecuaciones (¿por qué?) y luego restar este resultado de \mathbf{v} (en el caso \mathbb{R}^n)

24. Se desprende de modo natural del resultado $S \oplus S^\perp = V$ (dar detalles; recordar que cuando dos subespacios están en suma directa, la unión de una base del primero y una del segundo determina una base del subespacio suma entre ellos)

25. (**Corregir en el enunciado:** en la definición. del p.i.: el límite inferior de la integral debe ser 0)

- $B = \{ 1, 2t - 1 \}$
- $P_{S^\perp}(\mathbf{g}) = t - 1/6$
- $P_S(\mathbf{g}) = t^2 - t + 1/6$
- $d(\mathbf{g}, S) = \| P_{S^\perp}(\mathbf{g}) \|^2$

26. $\mathbf{v} = (2 \ 2 \ -1)^T \pm \sqrt{2} (2 \ -2 \ 0)^T$. (rehacer el ejercicio con $\|\mathbf{v}\| = 3$ y $\|\mathbf{w}\| = 2$, explicar).

27. a) Basta observar que $S^\perp = \text{gen} \{ \mathbf{w} \}$, y entonces $P_{S^\perp}(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{w}^T \mathbf{v}}{\mathbf{w}^T \mathbf{w}} \mathbf{w}$ y de allí el resultado.

b) Aplicar a), luego es inmediato.

28. **En el enunciado debe decir:** $T(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - 2 \frac{\mathbf{w}^T \mathbf{v}}{\mathbf{w}^T \mathbf{w}} \mathbf{w}$.

$$b) T(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - 2 \frac{\mathbf{w}^T \mathbf{v}}{\mathbf{w}^T \mathbf{w}} \mathbf{w} = \left(\mathbf{v} - \frac{\mathbf{w}^T \mathbf{v}}{\mathbf{w}^T \mathbf{w}} \mathbf{w} \right) - \left(\frac{\mathbf{w}^T \mathbf{v}}{\mathbf{w}^T \mathbf{w}} \mathbf{w} \right) = P_S(\mathbf{v}) - P_{S^\perp}(\mathbf{v}).$$

c) Reflexión sobre el hiperplano S ;

d) Reescribir T .

$$e) \text{ Observar que } \mathbf{H}^T = \left(\mathbf{I} - 2 \frac{\mathbf{w} \mathbf{w}^T}{\mathbf{w}^T \mathbf{w}} \right)^T = \mathbf{I}^T - 2 \frac{(\mathbf{w}^T)^T \mathbf{w}^T}{\mathbf{w}^T \mathbf{w}} = \mathbf{I} - 2 \frac{\mathbf{w} \mathbf{w}^T}{\mathbf{w}^T \mathbf{w}} = \mathbf{H};$$

además probar que $\mathbf{H} \mathbf{H} = \mathbf{I}$ (detallar y explicar);

f) Siendo \mathbf{H} simétrica, es otro modo de decir que $\mathbf{H} \mathbf{H} = \mathbf{I}$ (explicar).

¿Qué parte de este ejercicio es aplicable cuando se trata de hallar la reflexión respecto de un subespacio que no es un hiperplano?

$$29. a. \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -a - 2b + 2c \\ -2a + 2b + c \\ 2a + b + 2c \end{pmatrix}; b. \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

30. Basta observar que $\mathbf{w} = (\sqrt{3} - 1 \quad -1 \quad 1)^T$ y efectuar las operaciones.