

ALGEBRA II. FIUBA
Segundo cuatrimestre de 2004

Sugerencias para la resolución del trabajo práctico N° 3
(por Fernando Acero con la colaboración de Ada Cammilleri)

1. $Q^t Q (Q^H Q)$ es una matriz diagonal (que comparte con Q el número de columnas, espacio nulo y rango), siendo el i -ésimo elemento de la diagonal igual a la norma de la i -ésima columna de Q .
2. Notamos $I = I_n$. Es claro que cualquiera sea \mathbf{v} en K^n es $\mathbf{v} = P\mathbf{v} + (\mathbf{v} - P\mathbf{v})$, donde $P\mathbf{v} \in \text{col}(P)$ (¿por qué?) mientras que $(\mathbf{v} - P\mathbf{v}) \in [\text{col}(P)]^\perp$, dado que es ortogonal a cualquier vector $P\mathbf{x} \in \text{col}(P)$. (para esto, considerar el producto $(P\mathbf{x}, \mathbf{v} - P\mathbf{v}) = \mathbf{x}^H P^H (\mathbf{v} - P\mathbf{v}) = \mathbf{x}^H (P^H - P^H P) \mathbf{v} = \mathbf{x}^H (P - PP) \mathbf{v} = \mathbf{x}^H (P - P^2) \mathbf{v} = \mathbf{x}^H (\mathbf{0}) \mathbf{v} = 0$). Luego, $P\mathbf{v}$ es tal como se enuncia. (Y entonces $(I - P)\mathbf{v}$ es la proyección de \mathbf{v} sobre $[\text{col}(P)]^\perp$).
3. P es hermítica ($P^H = (\mathbf{w} \mathbf{w}^H)^H = \mathbf{w} \mathbf{w}^H = P$) e idempotente ($P^2 = \mathbf{w} (\mathbf{w}^H \mathbf{w}) \mathbf{w}^H = \mathbf{w} \mathbf{w}^H = P$), de modo que es de proyección; y como $\text{col}(P) = \text{gen}\{\mathbf{w}\}$ (¿por qué?), su rango es 1 y proyecta precisamente sobre $\text{gen}\{\mathbf{w}\}$.
4. Notamos $I = I_n$. Considerando que P es de proyección, resulta que $(I - P)^H = I^H - P^H = I - P$, y además $(I - P)^2 = I - 2P + P^2 = I - P$, con lo cual, $I - P$ es de proyección. Para la otra implicación, si $I - P$ es de proyección, debe ser $(I - P)^2 = I - 2P + P^2 = I - P$, de donde $P = P^2$, y además $P^H = [I - (I - P)]^H = I^H - (I - P)^H = I - (I - P) = P$, de modo que P es de proyección. Además, $I - P$ proyecta sobre $[\text{col}(P)]^\perp$ como se vio en el ej. 2.
5.
 - a. Falso, pues con $Q = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$ es $QQ^H = \begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix}$ que no es idempotente;
 - b. Falso y vale el mismo contraejemplo anterior;
 - c. Verdadero puesto que llamando $P = Q Q^H$ entonces $P^2 = Q (Q^H Q) Q^H = Q Q^H = P$ (la segunda igualdad por el ejercicio 1) y $P^H = (Q Q^H)^H = (Q^H)^H Q^H = Q Q^H = P$;
 - d. Verdadero puesto que para todo \mathbf{v} en K^n , de ser $P\mathbf{v} = P'\mathbf{v}$, o lo que es lo mismo $(P - P')\mathbf{v} = \mathbf{0}$, $\forall \mathbf{v}$, resultaría (¿por qué?) $P = P'$;
 - e. Verdadero, pues si el rango no fuera a lo sumo $(n - 1)$ debería ser n , y por lo tanto P sería regular (invertible), y como $P^2 = P$, resultaría, premultiplicando por P^{-1} , $P = I$ contra la hipótesis;
Otra forma de mostrar que el enunciado dado es verdadero es considerar que si el rango de P es n , entonces $\text{col}(P) = K^n$, con lo cual P es la matriz de proyección sobre K^n , esto es, $P = I$.
 - f. Verdadero (basta observar el comentario en e.)

$$6. a. P = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}; \quad b. P = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad c. P = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 6 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

7. Dado que (justificar y detallar) $\text{col}(AB) \subset \text{col}(A)$ y $\text{rango}(A) = 2 = \text{rango}(AB)$, resulta

$$\text{col}(AB) = \text{col}(A), \text{ y de allí la matriz de proyección } P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

8. Observar que por ser $x^t A = 0$, x es ortogonal a cada columna de A . Por lo tanto, $\text{gen}\{x\} \subset [\text{col}(A)]^\perp$. Como $\text{gen}\{x\}$ y $[\text{col}(A)]^\perp$ tienen igual dimensión (por qué?), resulta que $[\text{col}(A)]^\perp = \text{gen}\{x\}$

(justificar) y entonces
$$P = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Qué sucedería si el rango de A fuera 2 en lugar de 3?

9. La matriz $I - P$ proyecta (ver ej. 4) sobre $[\text{col}(P)]^\perp$ cuya dimensión es $n - k$.

10. i. Es simétrica e idempotente; ii.
$$Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

11. a.
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

b.
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 3\sqrt{2} & 5\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3} & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

c.
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1/6 \\ 0 & 1 & -2/6 \\ 1 & 1 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9/2 \\ 0 & 1 & 4/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 3\sqrt{2} & 9\sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{3} & 4\sqrt{3}/3 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

d.
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

12. De la igualdad $A = Q_0 R_0$, resulta que $\text{col}(A) \subset \text{col}(Q_0)$. Dado que el rango R_0 es m (¿por qué?), R_0 es inversible, con lo cual $A R_0^{-1} = Q_0$, y de ahí, $\text{col}(Q_0) \subset \text{col}(A)$. Luego, $\text{col}(A) = \text{col}(Q_0)$. De la triangularidad de R_0 se desprende la última afirmación (detallar).

13. Dado que $A = QR$, resulta que $\text{col}(A) \subset \text{col}(Q)$; como además, $\dim \text{col}(Q) = k = \text{rango de } A = \dim \text{col}(A)$, resulta $\text{col}(A) = \text{col}(Q)$.

Obs.: Supongamos dadas todas la hipótesis del ej. 13 excepto "rango de $A = k$ ". Veamos cómo, en ese caso, también se puede probar el mismo resultado. Como $A = QR$, resulta que $\text{col}(A) \subset \text{col}(Q)$. Probemos ahora que $\text{col}(Q) \subset \text{col}(A)$; para ello, basta ver que cada columna de Q está en $\text{col}(A)$. La i -ésima columna de Q , Q_i , es $Q_i = Q e_i$ con $e_i = (0 \dots 1 \ 0 \dots 0)^t$. Por otra parte, como R tiene rango k , $\text{col}(R) = \mathbb{R}^k$, con lo cual, existe $x_i \in \mathbb{R}^m$ tal que $R x_i = e_i$. Luego, $A x_i = Q R x_i = Q e_i = Q_i$ y entonces $Q_i \in \text{col}(A)$.

14. R no se ajusta a definición (¿por qué?); no (si se trata de extraer 2 columnas cualesquiera de $Q=I$)

$$15. A = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \dots \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^T \left(\sqrt{n} \quad \sqrt{n} \mathbf{a}_1 \quad \dots \quad \sqrt{n} \mathbf{a}_{n-1} \right).$$

$$16. a. \hat{x} = (3 \quad 2)^T; \quad b. \hat{x} = (1 \quad 1 \quad 4)^T + \mathbf{a}(1 \quad -1 \quad -1)^T$$

¿para qué valor de \mathbf{a} se tiene una solución de longitud mínima y cuál es tal solución?.

Para $\alpha = 4/3$, siendo la correspondiente solución óptima $1/3 (7, -1, 8)$.

17. No.

$$18. a. \hat{x} = \left(1 \quad \frac{18}{5}\right)^T + \mathbf{a}(1 \quad -1)^T; \quad b. \hat{x} = \left(1 \quad \frac{2}{3}\right)^T.$$

19. VVFVFFVV.

20. Se aplica directamente el resultado: si w es una solución por cuadrados mínimos de $Ax = b$, entonces toda otra solución es de la forma $u = w + h$, con $h \in \hat{\mathbf{I}} \text{Nul}(A)$ [Prueba: siendo w una solución, sea u otra cualquiera, luego (¿por qué?) $Au = Aw + \mathbf{P} A(u-w) = \mathbf{0}$, es decir $(u-w) \in \hat{\mathbf{I}} \text{Nul}(A)$ y de allí el resultado escribiendo $u = w + (u-w)$]. La afirmación recíproca es obviamente verdadera, esto es que siendo w una solución, $w + h$ es otra solución, cualquiera sea h en el espacio nulo de A (probarlo).

Así se tiene $\hat{x} = (1 \quad 2 \quad -1)^T + \mathbf{a}(1 \quad 1 \quad -1)^T$; en cuanto a la segunda parte, como $A \hat{x} = \mathbf{P}_{\text{col}(A)}(b)$, $b = A \hat{x} + h'$, con $h' \in \hat{\mathbf{I}}[\text{col}(A)]^\perp$, es decir $b = (1 \quad 2 \quad 1)^T + \mathbf{b}(1 \quad -2 \quad 3)^T$, y con la restricción $\|b\| = 3$, resulta $\mathbf{b} = \pm \frac{3}{\sqrt{14}}$, obteniéndose dos valores de b .

Rehacer con $\|b\| = \sqrt{6}$, explicar.

21. a. Si $x \in \text{Nul}(A^H A)$ debe ser $A^H A x = \mathbf{0} \Rightarrow x^H A^H A x = \|Ax\|^2 = 0 \Rightarrow Ax = \mathbf{0} \Rightarrow x \in \text{Nul}(A)$; por otra parte, si $x \in \text{Nul}(A)$ es $(A^H A)x = A^H(Ax) = A^H \mathbf{0} = \mathbf{0} \Rightarrow x \in \text{Nul}(A^H A)$.
 b. Dado que A y $A^H A$ tienen el mismo número (m) de columnas, e igual nulidad (como consecuencia de a.), deben tener el mismo rango.
 c. Es obvia consecuencia de b.
 d. Las ecuaciones normales $A^H A \hat{x} = A^H b$ tienen solución única si, y solo si, las columnas de $A^H A$ son l.i., y por lo anterior, esto equivale a que las columnas de A sean l.i., y entonces tal solución es $\hat{x} = (A^H A)^{-1} A^H b$; la comprobación es inmediata.

$$22. a. \text{La pseudo inversa de } A \text{ es } \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 0 & 11 & 11 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

23. Sea $b \in \mathbb{R}^n$. Por el ej. 19 b) sabemos que si \hat{x} es solución por cuadrados mínimos de la ecuación $Ax = b$, entonces $A \hat{x} = \mathbf{P}_{\text{col}(A)}(b) = \mathbf{P}_S(b)$. Por otra parte, como el rango de A es m , tenemos que $\hat{x} = (A^t A)^{-1} A^t b$ (por ej. 21 d)), con lo cual, $A \hat{x} = [A (A^t A)^{-1} A^t] b = \mathbf{P} b = \mathbf{P}_S(b)$, y por lo tanto, $\mathbf{P} = A (A^t A)^{-1} A^t$ es la matriz de proyección sobre S .
 (Otra forma de resolverlo es mostrar que la matriz \mathbf{P} definida es simétrica e idempotente, y que $\text{col}(A) = \text{col}(\mathbf{P})$).

$$24. a. y = 9/10 + 2/5 x;$$

- b. Cualquier recta (¡excepto la vertical !) que pase por el punto $(1, 2/3)$.
(De la familia de rectas ¿alguna es preferible?)
25. La solución por cuadrados mínimos del $Ax = b$ es única si, y solo si, (ejercicio 21) las columnas de A son l.i.; en el presente caso A tiene dos columnas y siendo la primera formada por “1”, la segunda por las abscisas, resulta que A tendrá columnas l.i. si, y solo si, estas columnas no son proporcionales, esto es, si, y solo si, no todas las abscisas son iguales.
26. a. $p(t) = -0.7000 + 5.6040 t$, con velocidad 5.6040 ;
b. $p(t) = -0.1100 + 5.0983 t + 0.0843 t^2$, con aceleración 0.1686 (y velocidad inicial 5.0893);
c. La segunda, pues en este caso, la norma del error es la centésima parte de la del primero.
27. Basta plantear las ecuaciones normales.