

ÁLGEBRA II.FIUBA
Primer cuatrimestre de 2006

SUGERENCIAS PARA LA RESOLUCIÓN DE LA SEGUNDA PARTE DEL TRABAJO
PRÁCTICO 4

(por Ada Cammilleri)

1.

Para $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$ resulta $\text{Re}(f) = f_1$, $\text{Im}(f) = f_2$.

Consideramos conocidas, para funciones de variable real a valores reales, las reglas de derivación y las propiedades de la integral, y definimos, para $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$, su derivada $f'(t)$ tal que $f'(t) = f_1'(t) + if_2'(t)$ y su integral de definida, $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f_1(t)dt + i \int_a^b f_2(t)dt$.

(a) $f_1(t) = 2t + \text{sen}(t)$, $f_2(t) = t - \text{sen}(t)$,

$$f'(t) = 2 + \cos(t) + i(1 - \cos(t)),$$

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b (2t + \text{sen}(t))dt + i \int_a^b (t - \text{sen}(t))dt = (t^2 - \cos(t))|_a^b + i(\frac{t^2}{2} + \cos(t))|_a^b.$$

(b) $f_1(t) = 1 - 27t^2$, $f_2(t) = 9t - 27t^3$,

$$f'(t) = -54t + i(9 - 81t^2),$$

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b (1 - 27t^2)dt + i \int_a^b (9t - 27t^3)dt = (t - 9t^3)|_a^b + i(9\frac{t^2}{2} - 27\frac{t^4}{4})|_a^b.$$

(c) $f_1(t) = \frac{1}{1+t^2}$, $f_2(t) = \frac{-t}{1+t^2}$,

$$f'(t) = \frac{-2t}{(1+t^2)^2} + i(\frac{-1-t^2}{(1+t^2)^2}),$$

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b (\frac{1}{1+t^2})dt + i \int_a^b (\frac{-t}{1+t^2})dt = (\text{arctg}(t))|_a^b - i(\frac{1}{2}\ln(1+t^2))|_a^b.$$

2.

Obviemos, para simplificar la notación, la dependencia de t .

(a) El resultado propuesto sigue de considerar $(c(f_1 + if_2) + d(g_1 + ig_2))' = (cf_1 + dg_1 + i(cf_2 + dg_2))' = (cf_1 + dg_1)' + i(cf_2 + dg_2)'$.

(b) Siendo $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$ y $g(t) = g_1(t) + ig_2(t)$ resulta que

$(fg)' = ((f_1 + if_2)(g_1 + ig_2))' = (f_1g_1 - f_2g_2 + i(f_1g_2 + f_2g_1))' = (f_1g_1)' - (f_2g_2)' + i[(f_1g_2)' + (f_2g_1)']$. Luego se deriva cada paréntesis con la reglas habituales y se re-agrupan los términos de modo de comprobar que $(fg)' = f'g + fg'$.

(c) Se puede aplicar la regla del producto considerando que $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$. Luego, para calcular $(\frac{1}{g})'$ tener en cuenta que $\frac{1}{g} = \frac{g_1 - ig_2}{g_1^2 + g_2^2}$ y considerar que $(\frac{1}{g})' = (\frac{g_1 - ig_2}{g_1^2 + g_2^2})' = (\frac{g_1}{g_1^2 + g_2^2})' - i(\frac{g_2}{g_1^2 + g_2^2})'$. Desarrollar esta última expresión derivando cada término y comparar con $\frac{-g}{g^2}$.

(d) Veamos en primer lugar el caso $n > 0$ y usemos un argumento inductivo. Consideremos, ante todo, definir $f^0(t) = 1$, $\forall t \in I$ y obviemos la dependencia de t para simplificar la escritura.

Es claro que, en el caso $n = 1$, basta comprobar que $f' = f^0 f'$. Sea ahora $k \in N$ y supongamos que el enunciado es cierto para este k ; esto es, $(f^k)' = k f^{k-1} f'$. Queremos probar que también es cierto para el índice $(k + 1)$. Eso equivale a comprobar que $(f^{k+1})' = (k + 1) f^k f'$.

Consideramos que $f^{k+1} = f^k f$ y la regla de derivación del producto, $(f^{k+1})' = (f^k)' f + f^k f'$. Si en el primer término aplicamos la hipótesis inductiva (el enunciado que se supone cierto para el índice k), obtenemos que $(f^{k+1})' = (f^k)' f + f^k f' = k f^{k-1} f' f + f^k f' = k f^k f' + f^k f' = (k + 1) f^k f'$ como se quería ver.

Para el caso $n < 0$ consideremos que $f^n = (f^{-1})^{-n}$ donde $(-n) > 0$. Por lo tanto, para calcular $(f^n)' = ((f^{-1})^{-n})'$ aplicando el resultado anterior y teniendo en cuenta que $(f^{-1})' = \frac{-f'}{f^2}$, obtenemos que $(f^n)' = ((f^{-1})^{-n})' = (-n)(f^{-1})^{-n-1}(f^{-1})' = (-n)f^{n+1}(\frac{-f'}{f^2}) = nf^{n-1}f'$.

3. Consideremos que para $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$ y $F(t) = F_1(t) + iF_2(t)$ por ser F una primitiva de f resulta que $F_1'(t) = f_1(t)$ y $F_2'(t) = f_2(t)$.

(a) Sean $F(t)$ y $G(t)$ ambas primitivas de $f(t)$, con lo cual $F'(t) = G'(t) = f(t) \forall t \in I$. Por lo tanto, $F'(t) - G'(t) = (F - G)'(t) = 0 \forall t \in I$. Resulta entonces que $(F - G)(t) = F(t) - G(t) = k \forall t \in I$, donde $k \in \mathbb{C}$.

(b) Como $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f_1(t)dt + i \int_a^b f_2(t)dt$, resulta que $\int_a^b f(t)dt = F_1(b) - F_1(a) + i(F_2(b) - F_2(a)) = F(b) - F(a)$.

4.

Consideremos $z = x + iy$, $z' = x' + iy' \in \mathbb{C}$.

(a)

$$\begin{aligned} e^{z+z'} &= e^{x+x'}(\cos(y+y') + i\operatorname{sen}(y+y')) = \\ &= e^x e^{x'}(\cos(y)\cos(y') - \operatorname{sen}(y)\operatorname{sen}(y') + i(\operatorname{sen}(y)\cos(y') + \cos(y)\operatorname{sen}(y'))) = \\ &= e^x(\cos(y) + i\operatorname{sen}(y))e^{x'}(\cos(y') + i\operatorname{sen}(y')) = e^z e^{z'}. \end{aligned}$$

(b) $e^z = 1 = e^x(\cos(y) + i\operatorname{sen}(y))$ si, y solo si, $e^x \cos(y) = 1$ y simultáneamente $e^x \operatorname{sen}(y) = 0$. Esta última igualdad vale si, y solo si, $\operatorname{sen}(y) = 0$ o sea $y = 2k\pi$ donde $k \in \mathbb{Z}$. Con este resultado, en la primera igualdad queda $e^x = 1$ o sea, $x = 0$. Por lo tanto $z = 0 + i2k\pi$.

(c) $|e^z| = |e^x| |\cos(y) + i\operatorname{sen}(y)| = e^x$.

En particular, $|e^{0+it}| = e^0 = 1, \forall t \in \mathbb{R}$.

(d) $e^z \neq 0$ pues, según el ítem anterior, su módulo es no nulo. Por lo tanto tiene inverso y para verificar lo pedido basta comprobar que $e^{-z}e^z = 1$

(e) Consideremos que $e^z = e^{z'} \Leftrightarrow e^{z-z'} = 1$. Pero esto último equivale, según (b), a que $z - z' = 2k\pi i$ con $k \in \mathbb{Z}$.

5.

Sea $P(t) = p_1(t) + ip_2(t)$. Entonces, y omitiendo la dependencia de t para simplificar la escritura, $(e^P)' = (e^{p_1}(\cos(p_2) + i\operatorname{sen}(p_2)))'$; si en esta última expresión se deriva usando la regla de derivación del producto, se tiene en cuenta que $(e^{p_1})' = p_1' e^{p_1}$ y que $(\cos(p_2) + i\operatorname{sen}(p_2))' = -\operatorname{sen}(p_2)p_2' + i\cos(p_2)p_2' = ip_2'(\cos(p_2) + i\operatorname{sen}(p_2))$ se llega al resultado propuesto en el ejercicio.

6. Para calcular $\int_0^\pi e^{(2+i)t} dt$ se considera la primitiva $\frac{e^{(2+i)t}}{2+i}$ y se aplica la regla de Barrow. Resulta que la parte real de la integral es $\frac{2e^{2\pi}}{5} - \frac{2}{5}$ y la parte imaginaria es $-\frac{e^{2\pi}}{5} + \frac{1}{5}$.

7.

(a) $y(x) = c_1 e^{2x}$

(b) Multiplicando la ecuación $y' - y = (1+i)x$ por el factor (integrante) e^{-x} se despeja la solución $y(x) = c_1 e^x - (1+i)(x+1)$

(c) Multiplicando la ecuación $y' + (2x - 1)y = 0$ por el factor (integrante) e^{-x^2-x} se obtiene la solución $y(x) = c_1 e^{-x^2+x}$

(d) Multiplicando la ecuación $y' + \frac{1}{t}y = \frac{3t^3-1}{t}$ por el factor (integrante) t se obtiene la solución $y(t) = c_1 \frac{1}{t} + \frac{3}{4}t^3 - 1$.

8.

(a) Multiplicado la ecuación $y' = \frac{1+x}{x}y$ por el factor (integrante) $e^x x$ se despeja la solución $y(x) = c_1 x e^x$. La condición inicial determina que $c_1 = \frac{3}{e}$.

(b) Multiplicado la ecuación $y' + y = \sin(x)$ por el factor (integrante) e^x se despeja la solución $y(x) = c_1 e^{-x} + \frac{1}{2}(\sin(x) - \cos(x))$. La condición inicial determina que $c_1 = \frac{1}{2}$.

(c) Multiplicado la ecuación $y' + \frac{x^2}{1+x}y = \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{1+x}$ por el factor (integrante) $e^{\frac{x^2}{2}-x}(x+1)$ se despeja la solución $y(x) = c_1 \frac{e^{\frac{-x^2+2x}{2}}}{x+1} + \frac{e^{\frac{-x^2+2x}{2}}}{x+1} \int_a^x e^{\frac{t^2-3t}{2}} dt$, donde $-1 < a < x$. La condición inicial determina que $c_1 = 1 - \int_a^0 e^{\frac{t^2-3t}{2}} dt$.

9. La solución general se expresa $y(x) = y_H(x) + y_P(x)$.

(a) $y_H(x) = c_1 e^{2x}, y_P(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$.

(b) $y_H(x) = c_1 e^x, y_P(x) = e^x(\frac{x^2}{2} + x)$.

(c) $y_H(x) = c_1 e^{-t}, y_P(x) = e^t$.

(d) $y_H(x) = c_1 e^{it}, y_P(x) = \frac{e^{it}t^2}{2}$.

(e) $y_H(x) = c_1 e^{-ix}, y_P(x) = i\cos(2x) + 2\sin(2x)$.

(f) $y_H(x) = c_1 e^{-3x}, y_P(x) = e^x(\frac{2}{17}\cos(x) + \frac{1}{34}\sin(x))$.

10.

(a) Como las raíces de $r^2 + 3r + 2$ son -1 y -2 , una base del espacio solución formada por funciones a valores reales es $\{e^{-x}, e^{-2x}\}$.

(b) Como las raíces de $2r^2 - 18$ son 3 y -3 , una base del espacio solución formada por funciones a valores reales es $\{e^{-3x}, e^{3x}\}$.

(c) Como las raíces de $r^2 - 8r + 16$ son 4 y 4 , una base del espacio solución formada por funciones a valores reales es $\{e^{4x}, x e^{4x}\}$.

(d) Como las raíces de $r^2 + 9$ son $3i$ y $-3i$, una base del espacio solución formada por funciones a valores reales es $\{\cos(3x), \sin(3x)\}$.

(e) Como las raíces de $2r^2 + 2r + 2$ son $\frac{-1+\sqrt{5}i}{2}$ y $\frac{-1-\sqrt{5}i}{2}$, una base del espacio solución formada por funciones a valores reales es $\{e^{-\frac{1}{2}x}\cos(\frac{\sqrt{5}x}{2}), e^{-\frac{1}{2}x}\sin(\frac{\sqrt{5}x}{2})\}$.

(f) En el caso $k = 0$ la raíz doble de r^2 es 0 y por lo tanto una base del espacio solución formada por funciones a valores reales es $\{1, x\}$. En el caso $k \neq 0$, las raíces de $r^2 - k^2$ son k y $-k$ y por lo tanto una base del espacio solución formada por funciones a valores reales es $\{e^{kx}, e^{-kx}\}$.

(g) Como las raíces de $2r^2 + 10r + 25$ son $\frac{-5+5i}{2}$ y $\frac{-5-5i}{2}$, una base del espacio solución formada por funciones a valores reales es $\{e^{-\frac{5}{2}x}\cos(\frac{5x}{2}), e^{-\frac{5}{2}x}\sin(\frac{5x}{2})\}$.

(h) Como las raíces de $r^2 + 2r + (w^2 + 1)$ son $-1 + iw$ y $-1 - iw$, una base del espacio solución formada por funciones a valores reales es $\{e^{-x}\cos(wx), e^{-x}\sin(wx)\}$.

11.

Expresamos la solución general $y(x) = y_H(x) + y_P(x)$.

(a) $y_H(x) = c_1 + c_2e^{-x}$, $y_P(x) = x^3 - 3x^2 + 6x$.

(b) $y_H(x) = c_1e^{-3x} + c_2xe^{-3x}$, $y_P(x) = \text{sen}(3x)$.

(c) $y_H(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x}$, $y_P(x) = \frac{1}{4}xe^{2x}$.

(d) $y_H(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{-x}$, $y_P(x) = -\frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$.

(e) $y_H(x) = c_1\cos(x) + c_2\text{sen}(x)$, en el caso $w \neq 1$, $y_P(x) = \frac{1}{1-w^2}\cos(wx)$, en el caso $w = 1$, $y_P(x) = \frac{1}{2}x\text{sen}(x)$.

(f) $y_H(x) = c_1e^{wx} + c_2e^{-wx}$, $y_P(x) = -\frac{A}{w_0^2 + w^2}\text{sen}(w_0t)$.

12.

(a) $y(x) = -5e^x + \frac{7}{2} + \frac{3}{2}e^{2x}$.

(b) $y(x) = -3\text{sen}(x) + \cos(x)$.

(c) $y(x) = -5e^{-2x} - 6xe^{-2x} + \frac{1}{2}e^x + \frac{9}{2}e^{-x}$.

13.

(a) $y(x) = \frac{1}{2}(e^{3x} + e^{-3x})$, única solución.

(b) $y(x) = -2 + e^{2x}$, única solución.

(c) Este problema no tiene solución.

(d) $y(x) = \cos(2x) + k\text{sen}(2x)$, donde k es una constante cualquiera, por lo tanto este problema tiene infinitas soluciones.

14. Expresamos la solución general como $y(x) = y_H(x) + y_P(x)$.

(a) $y_H(x) = c_1e^x + c_2xe^x$, $y_P(x) = \frac{4}{35}x^{\frac{7}{2}}e^x$.

(b) $y_H(x) = c_1e^x + c_2e^{-x}$, $y_P(x) = (\frac{1}{2}e^x - \ln|1 - e^x| + x)e^x + (\ln|1 - e^x| - 1 + e^x - \frac{1}{6}e^{3x})e^{-x}$.