

ÁLGEBRA II.FIUBA
Primer cuatrimestre de 2006

SUGERENCIAS PARA LA RESOLUCIÓN DE LA SEGUNDA PARTE DEL TRABAJO
PRÁCTICO 5
(por Ada Cammilleri)

Obs.: En todos los casos, para cada una de las matrices que aparezcan, la factorización indicada es una de las posibles.

1.

Suponemos conocido que la solución general de un sistema lineal homogéneo de ecuaciones diferenciales $X' = AX$ para $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, en el caso que A sea diagonalizable, se expresa de la forma

$$X(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} v_n$$

donde $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una base de \mathbb{C}^n cuyos elementos son autovectores de A , $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ son los correspondientes autovalores (esto es, $Av_i = \lambda_i v_i, \forall i$), y c_1, c_2, \dots, c_n constantes arbitrarias en \mathbb{C} .

(a) $A = PDP^{-1}$ donde $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

$$X(t) = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) $A = PDP^{-1}$ donde $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$$X(t) = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(c)

$$A = PDP^{-1} \text{ donde } P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$X(t) = c_1 e^{6t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2.

(a) La solución general se expresa $X(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La condición inicial determina que $c_1 = \frac{-1}{2}$, $c_2 = \frac{-3}{2}$.

(b)

A partir de la solución general indicada en 1.(c), la condición inicial determina que $c_1 = \frac{-3}{8}$, $c_2 = \frac{5}{8}$, $c_3 = \frac{-1}{2}$.

3. Dado que $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, siendo $\lambda = a + bi \in \mathbb{C}$ autovalor de A , se verifica que $e^{\lambda t} v_1$ y $e^{\bar{\lambda} t} \bar{v}_1$, siendo v_1 autovector de A asociado a λ , son soluciones del sistema $X' = AX$. Nos interesa considerar el caso $b \neq 0$. Si queremos encontrar soluciones reales del sistema consideramos que

$$X_1(t) = e^{at} (\cos(bt)w_1 + \text{sen}(bt)w_2)$$

$$X_2(t) = e^{at} (\cos(bt)w_2 - \text{sen}(bt)w_1)$$

donde $w_1 = \frac{1}{2}(v_1 + \overline{v_1})$ y $w_2 = \frac{i}{2}(v_1 - \overline{v_1})$, son soluciones linealmente independientes de $X' = AX$.

Observemos, en primer lugar, que tanto $X_1(t)$ como $X_2(t)$ son funciones a valores reales. Este hecho es consecuencia de que tanto w_1 como w_2 son vectores con componentes reales.

Verifiquemos que X_1 es solución de $X' = AX$ (en forma análoga se puede verificar lo mismo para X_2)

Primero calculemos X'_1 .

$$\begin{aligned} X'_1 &= e^{at}[a(\cos(bt)w_1 + \operatorname{sen}(bt)w_2) + b(-\operatorname{sen}(bt)w_1 + \cos(bt)w_2)] = \\ &= e^{at}[\cos(bt)(aw_1 + bw_2) + \operatorname{sen}(bt)(aw_2 - bw_1)] \end{aligned}$$

Por otra parte

$$AX_1 = e^{at}[\cos(bt)Aw_1 + \operatorname{sen}(bt)Aw_2]$$

La verificación se completa observando que

$$\begin{aligned} Aw_1 &= aw_1 + bw_2 \\ Aw_2 &= aw_2 - bw_1 \end{aligned}$$

Para estas últimas relaciones basta considerar, por ejemplo, que como $Av_1 = \lambda_1 v_1$ y $A\overline{v_1} = \overline{\lambda_1} \overline{v_1}$, resulta

$$\begin{aligned} A(v_1 + \overline{v_1}) &= 2Aw_1 = av_1 + biv_1 + a\overline{v_1} - bi\overline{v_1} = 2a\frac{(v_1 + \overline{v_1})}{2} + 2bi\frac{(v_1 - \overline{v_1})}{2} = \\ &= 2aw_1 + 2bw_2 \end{aligned}$$

La independencia lineal, en el conjunto de funciones a valores reales, del conjunto $\{X_1, X_2\}$ es consecuencia de la independencia lineal del conjunto $\{v_1, \overline{v_1}\}$ en \mathbb{C}^n .

(Para probar esta última observación, sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $\alpha X_1(t) + \beta X_2(t) = 0, \forall t$. En particular, para $t = 0$, obtenemos que

$$\alpha w_1 + \beta w_2 = 0.$$

De la definición de w_1 y w_2 , obtenemos entonces que

$$(\alpha + \beta i)v_1 + (\alpha - \beta i)\overline{v_1} = 0.$$

Luego, dado que $\{v_1, \overline{v_1}\}$ es l.i. en \mathbb{C}^n por ser autovectores asociados a autovalores diferentes, λ_1 y $\overline{\lambda_1}$ respectivamente, deben ser $\alpha + \beta i = 0$ y $\alpha - \beta i = 0$. Con esto, resulta $\alpha = 0$ y $\beta = 0$)

(a) $A = PDP^{-1}$ donde $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$.

Una base del espacio de soluciones reales de $X' = AX$ es $\{X_1(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\operatorname{sen}(t) \end{pmatrix}, X_2(t) = \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ -\operatorname{sen}(t) \end{pmatrix}\}$.

(b)

$$A = PDP^{-1} \text{ donde } P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \\ 0 & -i & i \\ 0 & 1-i & 1+i \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix}.$$

Una base del espacio de soluciones reales de $X' = AX$ es $\{X_1(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$

$$X_2(t) = e^t \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos(t) - \frac{1}{2}\sen(t) \\ \sen(t) \\ \cos(t) + \sen(t) \end{pmatrix}, X_3(t) = e^t \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\cos(t) - \frac{1}{2}\sen(t) \\ \cos(t) \\ \cos(t) - \sen(t) \end{pmatrix} \}.$$

4.

$$A = PDP^{-1} \text{ donde } P = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 2+i & 2-i \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & 2-i \end{pmatrix}.$$

Si planteamos una solución $X(t) = c_1 e^{(2+i)t} \begin{pmatrix} 5 \\ 2+i \end{pmatrix} + c_2 e^{(2-i)t} \begin{pmatrix} 5 \\ 2-i \end{pmatrix}$, a partir de la condición inicial se determina que $c_1 = \frac{1+2i}{10}$, $c_2 = \frac{1-2i}{10}$.

Si nos interesa plantear una solución real $X(t) = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 5\cos(t) \\ 2\cos(t) - \sen(t) \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} -5\sen(t) \\ -\cos(t) - 2\sen(t) \end{pmatrix}$, la condición inicial determina que $c_1 = \frac{1}{5}$, $c_2 = \frac{2}{5}$.

5. Recordemos que para resolver el sistema no homogéneo

$$Y' = AY + B(t)^{(*)},$$

a partir de una factorización de A , $A = PDP^{-1}$ con D diagonal, se considera hacer un cambio de variable $Y = PX$, multiplicar la ecuación $Y' = AY + B(t)$ a izquierda por P^{-1} y resolver el sistema (equivalente)

$$X' = DX + P^{-1}B(t).$$

Obtenida la solución general $X(t)$, expresada como la suma de la solución general del sistema $X' = DX$, notada $X_H(t)$, más una solución particular $X_P(t)$ del sistema completo, $X(t) = X_H(t) + X_P(t)$, haciendo $Y(t) = PX(t)$ se obtiene la solución general del sistema original $(*)$.

$$(a) A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = PDP^{-1} \text{ donde } P = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$X_P(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}te^t + \frac{1}{2}e^{2t} \\ \frac{1}{4}e^t + \frac{1}{2}e^{2t} \end{pmatrix}.$$

$$Y(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}te^t - e^{2t} - \frac{1}{4}e^t \\ \frac{1}{4}e^t + \frac{1}{2}te^t \end{pmatrix}.$$

$$(b) -A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = PDP^{-1} \text{ donde } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$X_P(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1-t \end{pmatrix}.$$

$$Y(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t-1 \\ t+1 \end{pmatrix}.$$

6. La solución general de $X' = AX$ para $A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$, en el caso que A tenga dos autovalores λ_1, λ_2 diferentes se expresa como $X(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2$ donde v_1, v_2 son sus correspondientes autovectores, y c_1, c_2 constantes arbitrarias en \mathbb{C} . Por lo tanto, considerando que $X(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

una posible A es $A = PDP^{-1}$ con $P = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

7.

(a) Si $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ es solución de (2), entonces $y_1' = y_2$, $y_2' = -by_1 - ay_2$. Luego $y_1'' + ay_1' + by_1 = y_2' + ay_2 + by_1 = 0$, esto es, y_1 cumple (1).

(b) Si y_1 es solución de (1) entonces $y_1'' + ay_1' + by_1 = 0$. Si definimos $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ verificamos que $Y' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} Y$. Esto es, Y es solución de (2).

(c)

El polinomio característico de A es $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + a\lambda + b$ y coincide con el polinomio asociado a la ecuación (1).

8.

Para encontrar la solución general de

$$X' = AX^{(*)}$$

proponemos, a partir de una factorización de A de la forma $A = PJP^{-1}$, donde J es una matriz triangular superior con los autovalores de A sobre la diagonal principal y algunos "1" y "0" por encima de dicha diagonal, efectuar un cambio de variable $X = PY$, multiplicar la ecuación dada a izquierda por P^{-1} y pasar a resolver el sistema (equivalente)

$$Y' = JY.$$

Obtenida la solución general $Y(t)$ de este último sistema, la solución general de $(*)$ se expresará como $X(t) = PY(t)$.

(a)

Veamos primero cómo encontrar las matrices P y J con las condiciones indicadas. Llamemos v_i a la i -ésima columna de P . Como -1 es el único autovalor de A y la dimensión del autoespacio asociado es 1, planteemos $J = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. De ser $AP = PJ$, se obtiene que

$$\begin{aligned} Av_1 &= -v_1 \\ Av_2 &= v_1 - v_2 \end{aligned}$$

Estas relaciones nos dicen que v_1 es autovector de A y que $(A + I)v_2 = v_1$. Tales condiciones se verifican definiendo, por ejemplo, $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, con lo cual podemos factorizar $A = PJP^{-1}$ con $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $J = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

En cuanto a la resolución del sistema, se obtiene que $X(t) = \begin{pmatrix} c_1e^{-t} + c_2te^{-t} \\ c_2e^{-t} \end{pmatrix}$ y, en consecuencia

$$Y(t) = (c_1 + c_2t)e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Un planteo análogo al empleado en el inciso (a) se puede aplicar para obtener la factorización de A .

$$A = PJP^{-1} \text{ donde } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, X(t) = \begin{pmatrix} c_1e^{-t} + c_2te^{-t} \\ c_2e^{-t} \\ c_3e^{-t} \end{pmatrix}.$$

$$Y(t) = (c_1 + c_2t)e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Un planteo análogo al empleado en el inciso (a) se puede aplicar para obtener la factorización de A .

$$A = PJP^{-1} \text{ donde } P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{-1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. X(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^t \\ c_2 e^{-t} + c_3 t e^{-t} \\ c_3 e^{-t} \end{pmatrix}.$$

$$Y(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + (c_2 + c_3 t) e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(d)

En este caso, -1 es el único autovalor de A y el autoespacio asociado tiene dimensión 1. Planteamos $J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Llamemos v_i a la i -ésima columna de P . De ser $AP = PJ$, se obtiene que

$$\begin{aligned} Av_1 &= -v_1 \\ Av_2 &= v_1 - v_2 \\ Av_3 &= v_2 - v_3 \end{aligned}$$

Estas relaciones nos dicen que v_1 es autovector de A , que $(A + I)v_2 = v_1$ y que $(A + I)v_3 = v_2$. Tales condiciones se verifican, definiendo, por ejemplo, $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, con lo cual podemos factorizar $A = PJP^{-1}$ con $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

En cuanto a la solución del sistema

$$X(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} + \frac{c_3}{2} t^2 e^{-t} \\ c_2 e^{-t} + c_3 t e^{-t} \\ c_3 e^{-t} \end{pmatrix}$$

y, en consecuencia

$$Y(t) = (c_1 + c_2 t + c_3 \frac{t^2}{2}) e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + (c_2 + c_3 t) e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$