Álgebra II

María Inés Parnisari

3 de enero de 2012

Índice

1 Revisión de Matrices

$z^n = a \Longrightarrow z = \sqrt[n]{|a|} \cdot e^{i\left(\frac{2k\pi + arg(a)}{n}\right)}$ con $k = 0, 1, \ldots, n-1$
$e^{(a+ib)t} = e^a(\cos(bt) + i \cdot \sin(bt))$

1.1 Propiedades de las matrices

- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$
- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$
- $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$

1.2 Propiedades de los determinantes

Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

1. $\det(A^T) = \det(A)$,
2. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$,
3. Si una fila de A se suma a $k\cdot$(otra fila) para producir una matriz B, $\det(B) = \det(A)$,
4. Si dos filas de A se intercambian de lugar para producir B, $\det(B) = -\det(A)$,
5. Si una fila de A se multiplica por k para producir B, $\det(B) = k \cdot \det(A)$,
6. Si toda la matriz A se multiplica por k para producir B, $\det(B) = k^n \cdot \det(A)$,
7. Si A es una matriz triangular, $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.

1.3 Espacios fila, nulo y columna de matrices

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$.
Espacio nulo: $Nul(A) = \{x \in R^m : \ Ax = 0\}$
Espacio columna: $Col(A) = \{b \in R^n : \ Ax = b \text{ para alguna } x\}$
Espacio fila: $Fil(A) = \{x \in R^m$: x es combinación lineal de las filas de $A\}$
Propiedades:

- $nul(A) = nul(A^T A) = (fil(A))^{\perp}$
- $nul(A^T) = nul(AA^T) = (col(A))^{\perp}$
- $rg(A) = rg(A^T A)$, con lo cual $A^T A$ es inversible $\Leftrightarrow$ A es inversible
- $\dim(col(A)) = \dim(fil(A))$
- $col(A) \oplus col(A)^{\perp} = R^n$
- $fil(A) \oplus fil(A)^{\perp} = R^m$
- $rg(A) + \dim(nul(A)) = m$

Sean $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$ y $B \in \mathbb{K}^{r\times n}$, entonces:

- $Col\,(BA) \subseteq Col(B)$ (son iguales si $rg\,(A) = n$)
- $Nul\,(A) \subseteq Nul\,(BA)$ (son iguales si $rg\,(B) = n$)
- Si $rg\,(A) = n \Rightarrow rg\,(BA) = rg\,(B)$
- Si $rg\,(B) = n \Rightarrow rg\,(BA) = rg(A)$
- $Col\,(A) \perp Col\,(B) \iff A^T B = 0$

1.4 Matrices equivalentes y semejantes

Matrices equivalentes: dos matrices A y B son equivalentes si existen otras dos matrices E y F regulares tal que $A = EBF$. Dos matrices equivalentes pueden pensarse como dos descripciones de una misma TL, pero con respecto a bases distintas.

Matrices semejantes: dos matrices cuadradas A y B son semejantes (notamos $A \sim B$) si y solo si existe una matriz P inversible tal que $B = P^{-1}AP$ ó $A = PBP^{-1}$. Dos matrices semejantes pueden pensarse como dos descripciones de un mismo operador lineal, pero con respecto a bases distintas. Estas dos matrices cumplen que:

1. $\det(A) = \det(B)$
2. $tr\,(A) = tr(B)$
3. $rg\,(A) = rg(B)$
4. $p_A\,(\lambda) = p_B\,(\lambda) \Longrightarrow \sigma\,(A) = \sigma(B)$

2 Espacios Vectoriales

Espacio	Dimensión
R^n	n
C_C^n	n
C_R^n	$2n$
$K^{n\times m}$	$n \times m$
P_n	$n+1$
$C[a,b]$	∞

2.1 Propiedades de los subespacios

$\mathbb{S}$ es un subespacio vectorial del espacio $\mathbb{V}_{\mathbb{K}} \iff \begin{cases} 0_{\mathbb{V}} \in \mathbb{S} \\ (\alpha x + y) \in \mathbb{S}\, \forall x, y \in \mathbb{V} \text{ y } \forall \alpha \in \mathbb{K} \end{cases}$

2.2 Independencia lineal

Combinación lineal: El vector x es una combinación lineal de $v_1, v_2, \ldots, v_q$ si $x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_q v_q$ y $a_1, a_2, \ldots, a_q$ no son todos nulos.

Independencia lineal: x es LI si $0 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_q v_q$ y $a_1 = a_2 = \ldots = a_q = 0$. Dos vectores son LD si son proporcionales. Un subconjunto de un conjunto LI sigue siendo LI.

2.3 Operaciones con subespacios

Sean $S_1, S_2, \ldots, S_q$ subespacios de $\mathbb{V}$.

1. **Intersección**: $S = \bigcap_{i=1}^{q} S_i = \{x \in \mathbb{V} : x \in S_i \; \forall i = 1, \ldots, q\}$.
2. **Suma**: $S = \sum_{i=1}^{n} S_i = gen\{\bigcup_{i=1}^{m} B_i\}$, donde B_i es base de S_i.
3. **Unión**: $S = S_1 \cup S_2$ es un subespacio cuando $S_1 \subseteq S_2$ ó $S_2 \subseteq S_1$.
4. **Suma directa**: $S_1, S_2, \ldots, S_q$ están en suma directa $\Longleftrightarrow$ la unión de sus bases es base de $\mathbb{V}$.

Dos subespacios son suplementarios cuando están en suma directa y su suma es todo el espacio.

2.4 Bases

Si $\dim(\mathbb{V}) = n$, $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset \mathbb{V}$ es base de $\mathbb{V} \Longleftrightarrow \begin{cases} \{v_1, \ldots, v_n\} \text{ genera } \mathbb{V} \\ \{v_1, \ldots, v_n\} \text{ es LI} \end{cases}$

2.5 Coordenadas de un vector en una base

Si $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es base de un espacio vectorial B y $x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$, entonces $C_B(x) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

Dado un vector y una base, las coordenadas de ese vector en esa base son únicas.

$\forall v, w \in \mathbb{V}$ y $\forall k \in \mathbb{K}$: $\begin{cases} C_B(v+w) = C_B(v) + C_B(w) \\ C_B(k \cdot v) = k \cdot C_B(v) \end{cases}$

$\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ es LI $\Longleftrightarrow \{C_B(v_1), C_B(v_2), \ldots, C_B(v_r)\}$ es LI para cualquier base B.

2.6 Matriz de pasaje

Sean $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y $C = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ bases del espacio $\mathbb{V}$. Las matrices de cambio se base son:

$$C_{BC} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ C_C(v_1) & C_C(v_2) & \cdots & C_C(v_n) \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

$$C_{CB} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ C_B(w_1) & C_B(w_2) & \cdots & C_B(w_n) \\ | & | & & | \end{bmatrix} = C_{BC}^{-1}$$

Además: si B y C son bases ortonormales, entonces C_{BC} es una matriz ortogonal.

2.7 Teorema de la dimensión

$$\dim(S+H) = \dim(S) + \dim(H) - \dim(S \cap H)$$

$$\dim(S+H+T) = \dim(S) + \dim(H) + \dim(T) - \dim(S \cap (H+T)) - \dim(H \cap T)$$

3 Producto Interno

3.1 Axiomas

Sea $< \bullet, \bullet >: \mathbb{V}_{\mathbb{K}} \times \mathbb{V}_{\mathbb{K}} \to \mathbb{R}$ un producto interno.

1. $< x, y > \in \mathbb{K}$ y $\forall x, y \in \mathbb{V}$
2. $< x, y > = < \overline{y, x} > \forall x, y \in \mathbb{V}$
3. $< \lambda x, y > = \overline{\lambda} < x, y > \forall x, y \in \mathbb{V}$ y $\forall \lambda \in \mathbb{K}$
4. $< x, \lambda y > = \lambda < x, y > \forall x, y \in \mathbb{V}$ y $\forall \lambda \in \mathbb{K}$
5. $< x, y + z > = < x, y > + < x, z > \forall x, y, z \in \mathbb{V}$
6. $< x, x > = 0 \; \forall x \in \mathbb{V}$ (si $< x, x > = 0$ entonces $x = 0$)

3.2 Productos internos canónicos (PIC)

En $R^n : < x, y > = x^T y$

En $C^n : < x, y > = x^H y$

En $R^{n \times m} : < A, B > = tr(A^T B)$

En $C^{n \times m} : < A, B > = tr(A^H B)$

En $P_R[a, b] : < p, q > = \int_a^b p(t) g(t) \, dt$

En $P_C[a, b] : < p, q > = \int_a^b \overline{p(t)} g(t) \, dt$

En $C_R[a, b] : < f, g > = \int_a^b f(t) g(t) \, dt$

En $C_C[a, b] : < f, g > = \int_a^b \overline{f(t)} g(t) \, dt$

3.3 Definiciones

Ortogonalidad: $< x, y > = 0 \iff x \perp y$.

Norma de un vector : $|x|^2 = < x, x >$. La norma depende del producto interno.

Propiedades de la norma:

1. $|x| \in \mathbb{R} \, \forall x \in \mathbb{V}$
2. $|x| \geq 0$ ($|x| = 0 \iff x = 0$)
3. $|k \cdot x| = |k| \cdot |x|$
4. Desigualdad de Cauchy-Schwarz: $| < x, y > | \leq |x| \cdot |y|$, $x, y \in \mathbb{V}_{\mathbb{K}}$. Son iguales si x es paralelo a y.
5. Desigualdad triangular: $|x + y| \leq |x| + |y|$.
6. Teorema de Pitágoras: si $x \perp y$ entonces $|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2$. La recíproca sólo vale para $\mathbb{R}$.
7. Identidad del paralelogramo: $|x + y|^2 + |x - y|^2 = 2 \left(|x|^2 + |y|^2 \right)$, $\forall x, y \in \mathbb{V}$.

Ángulo entre dos vectores: $\cos(\theta) = \frac{< x, y >}{|x| \cdot |y|}$ con $\theta \in [0, \pi]$, $\forall x, y \neq 0, \forall$ EPI real.

Complemento ortogonal de un conjunto en un EPI: Sea $A \subset \mathbb{V}_{\mathbb{K}}$. $A^{\perp} = \{x \in \mathbb{V}_{\mathbb{K}} : < x, y > = 0 \, \forall y \in A\}$. Para el cálculo del complemento ortogonal a un subespacio de dimensión finita, alcanza con exigir la ortogonalidad a un sistema de generadores.

Función distancia: $d : \mathbb{V}_{\mathbb{R}} \times \mathbb{V}_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^+ : d(x, y) = |x - y| = |y - x|$

3.4 Matriz asociada a un PI

Sea $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_q\}$ base de $(\mathbb{V}_{\mathbb{K}}, \bullet)$. Entonces $G \in \mathbb{K}^{q\times q}, g_{ij} =< v_i, v_j >$ es la matriz del producto interno:

$$G = \begin{bmatrix} |v_1|^2 & (v_1, v_2) & \cdots & (v_1, v_q) \\ (v_2, v_1) & |v_2|^2 & \cdots & (v_2, v_q) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (v_q, v_1) & (v_q, v_2) & \cdots & |v_q|^2 \end{bmatrix}$$

Propiedades:

- $g_{ii} > 0 \ \forall i = 1, 2, \ldots, q$.
- $G^H = G$.
- G es definida positiva.
- $\exists G^{-1}$.

3.5 Expresión matricial de un PI

Si B es base de $\mathbb{V}_{\mathbb{K}}$ y G es la matriz del PI en esa base, entonces $\forall x, y \in \mathbb{V}$:

$$< x, y >= C_B^H(x) \cdot G \cdot C_B(y)$$

Propiedades:

- La matriz de un PI en una BOG es una matriz diagonal.
- La matriz de un PI en una BON es la matriz identidad.

3.6 La mejor aproximación en EPIs

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial de funciones, y $\mathbb{W}$ un subespacio de $\mathbb{V}$. Si se quiere aproximar $f \in \mathbb{V}$ con una función $g \in \mathbb{W}$, la mejor aproximación será la proyección ortogonal de f sobre el subespacio $\mathbb{W}$.

4 Proyecciones y Matrices de Proyección

Sea $S \subset \mathbb{V}$ y $S^\perp$ su complemento ortogonal, entonces $\forall x \in \mathbb{V}$:

$$x \doteq \underbrace{u}_{\in S} + \underbrace{v}_{\in S^\perp} \doteq P_S(x) + P_{S^\perp}(x)$$

4.1 Propiedades de la proyección

- $P_S(x)$ es el vector de S más próximo a x.
- $P_S(v) = v \iff v \in S$ y además $P_S(w) = 0 \iff w \in S^\perp$.
- Por Pitágoras: $|x|^2 = |P_S(x)|^2 + \left|P_S^\perp(x)\right|^2 \forall x \in \mathbb{V}$.
- $|P_S(x)| \leq |x|$ (si $|P_S(x)| = |x|$ entonces $x \in S$)
- $d(x, S) = |P_{S^\perp}(x)|$

4.2 Expresión de la proyección y la reflexión

Sea S un subespacio de $\mathbb{V}$, y $B = \{v_1, v_2, \dots, v_q\}$ una BOG de S. Entonces $\forall x \in \mathbb{V}$:

$$P_S(x) \doteq \sum_{i=1}^{q} \frac{< v_i, x >}{< v_i, v_i >} \cdot v_i$$

$$R_S(x) = 2P_S(x) - x = P_S(x) - P_{S^\perp}(x) = x - 2P_{S^\perp}(x)$$

4.3 Proyecciones y TLs

Sea $T : \mathbb{V}_\mathbb{K} \to \mathbb{V}_\mathbb{K}$ una transformación lineal tal que $\begin{cases} Im\,(P_S) = S \\ Nu\,(P_S) = S^\perp \end{cases}$ y sea $B = \{\underbrace{v_1, v_2, \dots, v_q}_{\in S}, \underbrace{v_{q+1}, v_{q+2}, \dots, v_n}_{\in S^\perp}\}$ una base de $\mathbb{V}$, entonces la matriz de la TL es:

$$[P_S]_B = \begin{bmatrix} 1 & & & & \cdots & 0 \\ & \ddots & & & & \vdots \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & & & 0 \end{bmatrix}$$

(tantos 1 como la dimensión del espacio sobre el cual proyecto, y tantos 0 como la dimensión del complemento ortogonal)

Nota: la matriz de un operador proyección en una BON es una matriz de proyección. En cualquier otra base, no lo es.

4.4 Reflexiones y TLs

Sea $T : \mathbb{V}_\mathbb{K} \to \mathbb{V}_\mathbb{K}$ una TL tal que $\begin{cases} T\,(v) = v, \forall v \in S \\ T\,(v) = -v, \forall v \in S^\perp \end{cases}$ y sea $B = \{\underbrace{v_1, v_2, \dots, v_q}_{\in S}, \underbrace{v_{q+1}, v_{q+2}, \dots, v_n}_{\in S^\perp}\}$ una base de $\mathbb{V}$, entonces la matriz de la TL es:

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & & & & \cdots & 0 \\ & \ddots & & & & \vdots \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & & & -1 \end{bmatrix}$$

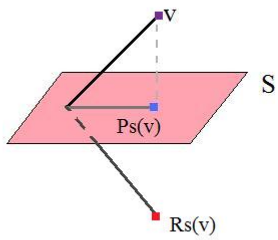

Figura 1: Proyección y reflexión.

(tantos 1 como la dimensión del espacio sobre el cual reflejo, y tantos -1 como la dimensión del complemento ortogonal)

4.5 Matriz de Householder

La matriz de reflexión sobre un subespacio de dimensión $n-1$ que es ortogonal a un vector w en un espacio de dimensión n se puede obtener mediante la expresión:

$$H = I_d - 2\frac{ww^T}{w^T w}$$

Propiedades de la matriz de Householder:

- Es involutiva: $H \circ H = I_d$.
- Es simétrica: $H^T = H$.
- Es inversible: $\exists H^{-1}$ y $H^{-1} = H$
- Es ortogonal: $H^T H = H H^T = Id$.

4.6 Rotaciones en $\mathbb{R}^3$

Sea $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una BON de $\mathbb{R}^3$ y sea T la rotación de θ grados alrededor del eje v_1.

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

4.7 Proceso Gram-Schmidt

Dada una base $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ para un subespacio $\mathbb{W}$ de $\mathbb{R}^n$, defina:

- $v_1 = x_1$
- $v_2 = x_2 - \frac{x_2 . v_1}{v_1 . v_1} \cdot v_1$
- $v_p = x_p - \frac{x_p \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} \cdot v_1 - \frac{x_p \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} \cdot v_2 - \ldots - \frac{x_p \cdot v_{p-1}}{v_{p-1} \cdot v_{p-1}} \cdot v_{p-1}$

Entonces $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ es una BOG para $\mathbb{W}$.

4.8 Matrices de Proyección

Trabajamos con el producto interno canónico y sobre $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}$=$\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

$P \in \mathbb{K}^{n \times n}$ es una matriz de proyección $\Longleftrightarrow \begin{cases} P^2 = P \\ P^H = P \end{cases}$

<u>Propiedades</u>:

- $col(P) = nul(P)^{\perp}$
- $P \cdot y = y \Longleftrightarrow y \in col(P)$
- Si P_S es matriz de proyección sobre S y $P_{S^{\perp}}$ es matriz de proyección sobre $S^{\perp}$ entonces $P_S + P_{S^{\perp}} = Id$
- Las columnas de P son una base del espacio sobre el cual proyectan.
- $rg(P) = tr(P)$
- $\det(P) \neq 0$ si $P \neq Id$
- Si P_1 y P_2 son matrices de proyección, y $P_1 \cdot P_2 = P_2 \cdot P_1 = 0$, entonces $P_1 + P_2$ es matriz de proyección y $rg(P_1 + P_2) = rg(P_1) + rg(P_2)$

Obtención de la matriz de proyección:

- Sea Q una matriz cuyas columnas son una BON de $S \subset \mathbb{V}$. Entonces la única matriz de proyección sobre S es $[P_S] = QQ^T$. La matriz de proyección sobre $S^{\perp}$ es $\left[P_S^{\perp}\right] = I_d - [P_S]$
- Sea $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_q\}$ una base de S, y A la matriz que tiene por columnas a $v_1, v_2, \ldots, v_q$. Entonces la única matriz de proyección sobre S se obtiene mediante $[P_s] = A \left(A^H A\right)^{-1} A^H = AA^{\#}$

4.9 Inversas y pseudoinversas

Pseudoinversa: Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times q}$ tal que $rg\left(A\right) = q$. La matriz pseudoinversa de A es $A^{\#} = (A^H A)^{-1} A^H$

Propiedades:

- Si A es cuadrada e inversible, $A^{-1} = A^{\#}$
- $A^{\#} \in \mathbb{R}^{q\times n}$
- $A^{\#}A = Id_{(q)}$
- $AA^{\#} = [P]_{Col(A)}$
- $Nul\left(AA^{\#}\right) = [Col\left(A\right)]^{\perp}$

4.10 Cuadrados mínimos

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times q}$, $x \in \mathbb{K}^q$, $b \in \mathbb{R}^n$. Si $Ax = b$ tiene una solución exacta, entonces $b \in Col(A)$. Si $b \notin Col\left(A\right)$, intentamos hallar una solución $\hat{x} \in \mathbb{K}^q$ (la solución por cuadrados mínimos) tal que:

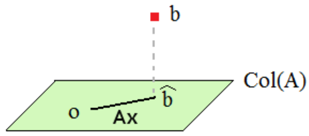

Figura 2: Cuadrados mínimos.

- $|A\hat{x} - b| < |Au - b| \ \forall u \in \mathbb{K}^q$,
- $d\left(A\hat{x}, b\right) \leq d(Au, b) \ \forall u \in \mathbb{K}^q$,
- $|A\hat{x}| \leq |b|$ (son iguales si $b \in Col\left(A\right)$),
- Ecuaciones normales de cuadrados mínimos: $A^T A\hat{x} = A^T b$
- $A\hat{x} = \hat{b} = P_{Col A}\left(b\right) \Longleftrightarrow \begin{cases} A\hat{x} \in Col(A) \\ b - A\hat{x} \in Col\left(A\right)^{\perp} \end{cases}$

Observaciones:

1. Si $\hat{x} = 0$ entonces $b \in [Col\left(A\right)]^{\perp}$. La recíproca solo es cierta si A es inversible.
2. Si las columnas de A son LI, la solución por cuadrados mínimos es única y se obtiene mediante $\hat{x} = \left(A^T A\right)^{-1} A^T b = A^{\#}b$. Si las columnas de A son LD, el sistema $A^T A\hat{x} = A^T b$ tiene infinitas soluciones, y éstas son de la forma $\hat{x} = \hat{x}_p + \underbrace{\hat{x}_n}_{\in Nul(A)}$.
3. Si $b \in Col(A)$, entonces toda solución de $Ax = b$ es una solución exacta y por cuadrados mínimos.
4. El error de aproximación $\mathcal{E}$ es igual a $\left|b - \hat{b}\right|$.

4.11 Regresión lineal

Sean los puntos $P_i = (x_i, y_i)$ con $i = 1, 2, \ldots, n$. La recta que mejor aproxima a los puntos es $y = \alpha + \beta x$, y los coeficientes α, β se obtienen resolviendo el sistema $\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ por cuadrados mínimos.

4.12 Solución por cuadrados mínimos de norma mínima

La solución por cuadrados mínimos de norma mínima pertenece al espacio $Fil(A)$ y se obtiene como $\tilde{x} = A^+ b$, siendo A^+ la pseudoinversa de Moore-Penrose de A.

5 Transformaciones Lineales

Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}_{\mathbb{K}}, \mathbb{W}_{\mathbb{K}})$ y $A = [T]_{BC}$ con B base de $\mathbb{V}$ y C base de $\mathbb{W}$ la matriz de T.

5.1 Condiciones de TLs

1. $T(u+v) = T(u) + T(v)$ con $u, v \in \mathbb{V}$.
2. $T(\alpha \cdot u) = \alpha \cdot T(u)$ con $u \in \mathbb{V}_{\mathbb{K}}$ y $\alpha \in \mathbb{K}$.
3. $T(0_{\mathbb{V}_{\mathbb{K}}}) = 0_{\mathbb{W}_{\mathbb{K}}}$.

5.2 Núcleo e imagen

Núcleo: $Nu(T) = \{v \in \mathbb{V}_{\mathbb{K}} : T(v) = 0_{\mathbb{W}}\} = C_B^{-1}(Nul(A))$. Es un subespacio.

Imagen: $Im(T) = \{w \in \mathbb{W}_{\mathbb{K}} : T(v) = w \text{ con } v \in \mathbb{V}_{\mathbb{K}}\} = C_C^{-1}(Col(A))$. Es un subespacio.

La imagen de una TL puede obtenerse como lo que generan los transformados de una base del espacio de partida.

Teorema de la dimensión: Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ y sea $\dim(\mathbb{V}) = n$ (finita). Entonces:

$$\dim(\mathbb{V}) = \dim(Nu(T)) + \dim(Im(T))$$

5.3 Clasificación de TLs

5.3.1 Inyectividad (monomorfismo)

Una TL es inyectiva si verifica: $v_1 \neq v_2 \Longrightarrow T(v_1) \neq T(v_2)\, \forall v_1, v_2 \in \mathbb{V}$.

Una TL es inyectiva $\Longleftrightarrow Nu(T) = \{0_{\mathbb{V}}\} \Longleftrightarrow \dim(Im(T)) = \dim(\mathbb{V})$

Una TL inyectiva transforma conjuntos LI a conjuntos LI. La recíproca también es cierta: si A es un conjunto LI y es transformado en otro conjunto LI, la TL es inyectiva. Es decir: si T es inyectiva y A es LI, $T(A)$ es LI.

Las matrices asociadas a TLs inyectivas tienen sus columnas LI.

Si $\dim(V) > \dim(\mathbb{W})$, T no puede ser inyectiva.

5.3.2 Sobreyectividad (epimorfismo)

Una TL es sobreyectiva $\Longleftrightarrow Im(T) = \mathbb{W}$.

Las matrices asociadas a TLs sobreyectivas tienen sus filas LI.

Si $\dim(\mathbb{W}) > \dim(\mathbb{V})$, T no puede ser sobreyectiva.

5.3.3 Biyectividad (isomorfismo)

Si $\dim(\mathbb{W}) = \dim(\mathbb{V})$, y $Nu(T) = \{0\}$, T es biyectiva.

Tes biyectiva $\Longleftrightarrow$ si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es base de $\mathbb{V}$, entonces $\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ es base de $\mathbb{W}$.

La matriz asociada a una TL biyectiva tiene sus filas y columnas LI, o sea que es una matriz inversible, o sea que existe la TL inversa: $T^{-1} = [T]^{-1}$

Si $\dim(\mathbb{V}) = \dim(\mathbb{W})$, entonces o bien T es inyectiva y sobreyectiva, o bien no es ninguna.

5.4 Matriz asociada a una TL

Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}_{\mathbb{K}}, \mathbb{W}_{\mathbb{K}})$, sea $B = \{v_1, v_2, \dots, v_q\}$ base de $\mathbb{V}$ y $C = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ base de $\mathbb{W}$. Entonces T se puede escribir como $T(x) = Ax$, con $A \in \mathbb{K}^{m \times q}$ tal que:

$$A = [T]_{BC} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ C_C(T(v_1)) & C_C(T(v_2)) & \cdots & C_C(T(v_q)) \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

Propiedades:

- $[T]_{BC} \cdot C_B(v) = C_C(T(v)) \, \forall v \in \mathbb{V}$
- $v \in Nu(T) \iff C_B(v) \in Nul(A)$
- $w \in Im(T) \iff C_C(w) \in Col(A)$
- $\dim(Im(T)) = rg(A)$

Teorema: sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ $\mathbb{K}$-espacios vectoriales ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$). Sea $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$. Si B_1 y B_2 son bases ordenadas de $\mathbb{V}$, y C_1 y C_2 son bases ordenadas de $\mathbb{W}$, entonces $rg\left([T]_{B_1C_1}\right) = rg([T]_{B_2C_2})$.

5.5 Teorema Fundamental de las TLs

Sea $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ base de $\mathbb{V}$ y $w_1, w_2, \dots, w_n$ vectores de $\mathbb{W}$. Entonces existe y es única la TL que verifica que $T(v_1) = w_1$, $T(v_2) = w_2, \dots, T(v_n) = w_n$. Además, dada una TL y un par de bases, existe una única matriz asociada. La recíproca también es verdadera: dada una matriz y un par de bases, existe una única TL asociada.

5.6 Composición de TLs

$f \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ y $g \in \mathcal{L}(\mathbb{W}, \mathbb{H}) \Longrightarrow g \circ f \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{H})$

Propiedades:

- $Nu(f) \subseteq Nu(g \circ f)$
- $Im(g \circ f) \subseteq Im(g)$

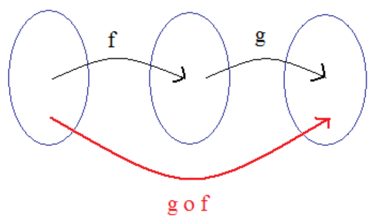

Figura 3: Composición.

5.7 Operadores lineales

Un operador lineal es una TL que va de un espacio en sí mismo. Se escribe como $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$.

Propiedades:

1. Si $T_1 \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ y $T_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$, entonces $T_1 \circ T_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$.
2. Si $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$, $T^n = \underbrace{T \circ T \circ \ldots \circ T}_{n\ veces}$

6 Autovalores y Autovectores

6.1 Autovalores y autovectores de una matriz cuadrada

Autovector: Un vector $v \neq \overline{0}$ es autovector de $A \in \mathbb{K}^{n \times n} \iff \exists \lambda \in \mathbb{K} : \; Av = \lambda v$.

Autoespacio: El autoespacio de A asociado a un autovalor λ es $S_\lambda(A) = nul(A - \lambda I)$.

Polinomio característico: El polinomio característico de una matriz $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ es $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, y tiene grado n. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ el polinomio tiene a lo sumo n raíces. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ tiene exactamente n raíces.

Autovalor: Los autovalores de una matriz son las raíces de su polinomio característico.

Espectro de una matriz: $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} : \; \lambda \text{es autovalor de } A\}$

6.2 Multiplicidad geométrica y algebraica de un autovalor

$m_g(\lambda) = \dim(S_\lambda(A))$

$m_a(\lambda) =$ número de veces que aparece λ como raíz del polinomio característico.

Siempre se verifica que: $1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$.

6.3 Propiedades

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$.

- A es singular $\Longleftrightarrow$ 0 es un autovalor de $A \Longleftrightarrow m_g(0) = n-k \Longleftrightarrow rg(A) = k < n$.
- Dos autovectores asociados a autovalores distintos son LI.
- Si $A \in \mathbb{K}^{2\times 2}$, entonces $p_A(\lambda) = \lambda^2 - tr(A)\lambda + \det(A)$.
- Si todas las filas o columnas de A suman s entonces $s \in \sigma(A)$.
- Sea $p(t) = a_k t^k + \ldots + a_1 t + a_0$ $(a_k \neq 0)$. Si λ es autovalor de A, entonces se cumple que $p(\lambda)$ es autovalor de $p(A)$, y para cada autovalor μ de $p(A)$ existe un autovalor λ de A tal que $p(\lambda) = \mu$.
- Si λ es autovalor de A...

  1. λ es autovalor de A^T,
  2. λ^{-1} es autovalor de A^{-1} y $S_{\lambda^{-1}}\left(A^{-1}\right) = S_\lambda(A)$,
  3. $r\cdot\lambda$ es autovalor de $r\cdot A$,
  4. λ^k es autovalor de A^k, $k \in \mathbb{N}$
  5. $\lambda + r$ es autovalor de $A + r\cdot I$.

6.4 Autovalores y autovectores de operadores lineales

$T : \mathbb{V}_\mathbb{K} \to \mathbb{V}_\mathbb{K}$. Un vector $v \neq \overline{0}$ es autovector de $T \Longleftrightarrow T(v) = \lambda v$, con λ autovalor de T.

$S_\lambda(T) = \{x \in \mathbb{V} :\ T(x) = \lambda x \text{ y } \lambda \text{ autovalor de } T\} = Nuc(T - \lambda I)$. Si B es base de $\mathbb{V}$ y A es la matriz de T en esa base, entonces:

1. $\sigma(A) = \sigma(T)$ $\forall B$ base de $\mathbb{V}$
2. x es autovector de$T \Longleftrightarrow C_B(x)$ es autovector de $[T]_B = A$

Propiedades:

- $T(x) = \lambda\cdot x \Longrightarrow T^n(x) = \lambda^n\cdot x$ $(n \in \mathbb{N})$.
- Si λ es autovalor de T, λ^{-1} es autovalor de T^{-1}.
- Si h es un polinomio en $\mathbb{K}$ y $T(x) = Ax$, entonces $\begin{cases} \sigma[h(A)] = h[\sigma(A)] \\ S_{h(\lambda)} h(A) = S_\lambda(A) \end{cases}$
- $T : \mathbb{V}_\mathbb{K} \to \mathbb{V}_\mathbb{K}$ es regular $\Longleftrightarrow 0 \notin \sigma(T)$

6.5 Diagonalización

$A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es diagonalizable $\Longleftrightarrow A \sim D \Longleftrightarrow$ existe una base de $\mathbb{K}^n$ compuesta por autovectores de $A \Longleftrightarrow A$ tiene n autovectores LI $\Longleftrightarrow m_g(\lambda) = m_a(\lambda)$ $\forall\lambda \in \sigma(A) \Longleftrightarrow \exists\, P$ inversible y D diagonal tal que: $A = PDP^{-1}$, siendo P la matriz de autovectores y D la matriz de autovalores.

6.5.1 Matrices trivialmente diagonalizables

- Nula: autovalor 0, autovectores: cualquier vector no nulo.
- Identidad: autovalor: 1, autovectores: cualquier vector no nulo.
- Diagonal ($A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$): autovalores: $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, autovectores: los que tienen sus componentes nulas excepto la n-ésima.
- Escalar ($A = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R}$): autovalor: k, autovectores: cualquier vector no nulo.
- De proyección ($A \in \mathbb{K}^{n\times n}, \dim S = q$): autovalor 1 con $m_a(1) = m_g(1) = q$, autovalor 0 con $m_a(0) = m_g(0) = n - q$
- De reflexión: autovalor 1 con $m_a(1) = q$, autovalor -1 con $m_a(0) = n - q$

6.5.2 Propiedades

- Si A es diagonalizable entonces A^n es diagonalizable ($D_A^n = D_{A^n}$ y $\sigma(A^n) = \sigma^n(A)$). La recíproca es falsa.
- Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tiene n autovalores distintos entonces A es diagonalizable. La recíproca es falsa.
- $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = p_A(0)$
- $(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

6.6 Autovalores complejos de una matriz real

Supongamos que $\lambda = a + bi$ con $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ es un autovalor de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Entonces $\overline{\lambda} = a - bi$ también es autovalor de A y $v \in \mathbb{C}^n$ es autovector de A asociado a λ si y sólo si $\overline{v}$ es autovector de A asociado a $\overline{\lambda}$. En particular, si $\{v_1, \ldots, v_r\}$ es base de S_λ entonces $\{\overline{v}_1, \ldots, \overline{v_r}\}$ es base de $S_{\overline{\lambda}}$.

6.7 Diagonalización de TLs

$T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}_\mathbb{K})$ con $\dim(\mathbb{V}_\mathbb{K}) = n$, es diagonalizable $\iff \exists B$ base de$\mathbb{V}_\mathbb{K}$ tal que $[T]_B$ es diagonal $\iff \exists B$ base de $\mathbb{V}_\mathbb{K}$ formada por autovectores de $T \iff T$ tiene n autovectores LI. Esa base es B y $[T]_B = diag(\sigma(T))$. Si $A = [T]_H$, H cualquier base, entonces T es diagonalizable si y sólo si A es diagonalizable.

7 Diagonalización de Matrices Hermíticas, Formas Cuadráticas, DVS

7.1 Diagonalización de matrices simétricas y hermíticas

Matriz antisimétrica: Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es antisimétrica ($A^T = -A$) entonces:

- Los autovalores de A son imaginarios puros o nulos,
- Los autovectores asociados a autovalores distintos son ortogonales,
- A es diagonalizable unitariamente.

Matriz simétrica (hermítica): $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es simétrica ($B = \mathbb{C}^{n\times n}$ es hermítica) si y solo si:

1. A es diagonalizable ortogonalmente: $A = PDP^T$ (B es diagonalizable unitariamente con D real: $B = PDP^H$)

Propiedades:

- $A(B)$ tiene n autovalores reales
- Los elementos de la diagonal de $A(B)$ son reales
- $\det(A) \in \mathbb{R}$
- $\dim(S_\lambda(A)(B)) = m_a(\lambda)\ \forall\lambda \in \sigma(A, B)$
- Los autovectores asociados a autovalores distintos son ortogonales

Matriz ortogonal: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es ortogonal ($B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es unitaria) si y solo si:

1. $AA^T = A^TA = Id$ ($BB^H = B^HB = Id$)
2. $A^T = A^{-1}$ ($B^H = B^{-1}$)
3. Las columnas de A (B) son BON de $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$)

Propiedades:

- $\det(A) = \pm 1$. Si $\det(A) = 1$, A es la matriz de una rotación
- Los autovalores tienen módulo 1, y pueden ser reales o complejos
- Son matrices unitariamente diagonalizables
- Los autovectores asociados a autovalores distintos son ortogonales
- Preservan los productos internos ($< Ax, Ay >=< x, y >$) y las normas ($|Ax| = |x|$)
- Si C es unitaria, BC y CB son unitarias

7.2 Descomposición espectral de matrices simétricas

Si $A = PDP^{-1} = PDP^T$, las columnas de P son autovectores ortonormales $u_1, \ldots, u_n$ de A y los autovalores correspondientes $\lambda_1, \ldots, .\lambda_n$ están en la matriz diagonal D. Entonces:

$$A = \lambda_1 u_1 u_1^T + \lambda_2 u_2 u_2^T + \ldots + \lambda_n u_n u_n^T$$

7.3 Subespacios invariantes por una matriz o por una TL

$S \in \mathbb{K}^n$ es invariante por $A \in \mathbb{K}^{n\times n} \iff \forall x \in S:\ Ax \in S$.

$S \subset \mathbb{V}$ es invariante por $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}) \iff \forall x \in S:\ T(x) \in S$.

Propiedades:

- Si λ es autovalor de T, entonces $S_\lambda(T)$ es un subespacio invariante por T, puesto que $\forall x \in S_\lambda(T) \Rightarrow T(x) = \lambda x \in S_\lambda(T)$.
- No todo subespacio invariante es un autoespacio de T, pero sí los subespacios invariantes de dimensión 1.

7.4 Formas cuadráticas

Una forma cuadrática en $\mathbb{R}^n$ es una función $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $Q(x) = x^T Ax$, donde A es una matriz simétrica de $n \times n$.

Teorema de los ejes principales: sea A una matriz simétrica de $n \times n$. Entonces existe un cambio ortogonal de variable, $x = Py$, donde P es una matriz ortogonal tal que $\det(P) = +1$ e y es un nuevo vector, que transforma la forma cuadrática $x^T Ax$ a una forma cuadrática $y^T Dy$ sin términos de producto cruzado: $Q(x) = x^T Ax = (Py)^T A(Py) = y^T (P^T AP)y = y^T D_A y = g(y)$

Perspectiva geométrica de los ejes principales: sea la forma cuadrática $Q(x) = x^T Ax$, con $A = PDP^T$. El conjunto de todas las $x \in \mathbb{R}^n : x^T Ax = c$ es una elipse, una hipérbola, dos rectas, un punto o ningún punto. Si A es diagonal, la gráfica está en posición estándar. Si A no es diagonal, la gráfica está girada hasta salirse de la posición estándar. Los "ejes principales" son los autovectores de A y son el nuevo sistema de coordenadas para los cuales la gráfica está en posición estándar.

7.5 Clasificación de formas cuadráticas

Una forma cuadrática $Q(x) = x^T Ax$ es:

	Definición	**Criterio I**	**Criterio II**
Definida positiva	$Q(x) > 0, \forall x \neq 0$	$a_{11} > 0$ y $det(A) > 0$	los autovalores de A son positivos
Semi-definida positiva	$Q(x) \geq 0, \forall x$	$\det(A_k) \geq 0, k = 1, 2, \ldots, n$	los autovalores de A son positivos o cero
Definida negativa	$Q(x) < 0, \forall x \neq 0$	$a_{11} < 0$ y $det(A) > 0$	los autovalores de A son negativos
Semi-definida negativa	$Q(x) \leq 0, \forall x$	$det(A_k) \leq 0, k = 1, 2, \ldots, n.$	los autovalores de A son negativos o cero
Indefinida	$Q(x) \gtrless 0$		los autovalores de A son tanto positivos como negativos

7.6 Optimización restringida

Teorema de Rayleigh: sea la forma cuadrática $Q(x) = x^T Ax$, con A simétrica. Se verifica:

$$\lambda_{min}(A) \leq \frac{Q(x)}{\|x\|^2} \leq \lambda_{max}(A)$$

Sea extremar una forma cuadrática $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^T Ax$ (A simétrica), sujeto a la restricción $|x| = \alpha$. El máximo de f es $\lambda_{max}(A).\alpha^2$ y se alcanza en $M = \{x \in S_{\lambda_{max}}(A) : |x| = \alpha\}$. El mínimo de f es $\lambda_{min}(A).\alpha^2$ y se alcanza en $m = \{x \in S_{\lambda_{min}}(A) : |x| = \alpha\}$.

Sea extremar una forma cuadrática $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^T Ax$ (A simétrica), sujeto a la restricción $x^T Bx = \alpha^2$, y sea B definida positiva tal que $B = P_B D_B P_B^T$. Mediante un cambio de variable $y = \sqrt{D_B} P_B^T x$ ($x = \sqrt{D_B^{-1}} P_B y$), esto es equivalente a extremar $g(y) = y^T \left(\sqrt{D_B^{-1}} P_B^T A P_B \sqrt{D_B^{-1}}\right) y$ sujeto a la restricción $|y| = \alpha$. Entonces: $\max g(y) = \max f(x)$, y $\min g(y) = \min f(x)$. Los x en donde se alcanza ese extremo se hallan realizando la cuenta $x = P_B y$.

7.7 DVS

Valores singulares: $VS(A) = \sqrt{\lambda_i}\ \forall \lambda_i \in \sigma(A^T A)$.

Sea A una matriz de $m \times n$ con rango r. Entonces existe una matriz Σ, y existen una matriz U ortogonal de $m \times m$ y una matriz V ortogonal de $n \times n$ tales que $A = U\Sigma V^T$, donde:

- $\Sigma \in \mathbb{R}^{m\times n}$ es tal que $\Sigma = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, y las entradas diagonales de D son los primeros r valores singulares de A, ordenados en forma descendente: $\sigma_i \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0$.
- $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz cuyas columnas son una BON de autovectores $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ asociados a los autovalores de $A^T A$.
- $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$ es una matriz cuyas primeras r columnas son los vectores $\frac{Av_1}{\sigma_1}, \ldots, \frac{Av_r}{\sigma_r}$. Las otras columnas se obtienen completando una BON para $\mathbb{R}^m$. Las columnas de U son autovectores de AA^T.

7.8 Aplicaciones de las DVS

Sea $A \in \mathbb{K}^{m\times n}, A = \begin{bmatrix} | & & | \\ u_1 & \cdots & u_m \\ | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D & 0 \\ \vdots & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{bmatrix}^T$. Si $rg\,(A) = r$ entonces:

- $\{u_1, u_2, \ldots, u_r\}$ es BON de $Col(A)$
- $\{u_{r+1}, \ldots, u_m\}$ es BON de $[Col\,(A)]^\perp$
- $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ es BON de $Fil\,(A)$
- $\{v_{r+1}, \ldots, v_n\}$ es BON de $[Fil\,(A)]^\perp$

7.9 Propiedades de las DVS

- $rg\,(A) = rg\,(\Sigma) = rg\left(\Sigma^T\right) = \#VS\,(A)_{positivos}$
- $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es inversible $\iff$ A tiene n VS positivos
- $VS\,(A)_{positivos} = VS\left(A^T\right)_{positivos}$
- Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, |det(A)| = \prod_{i=1}^{n} VS_i(A)$
- Si A es cuadrada y definida positiva, $\sigma\,(A) \equiv VS(A)$
- Si $A{\sim}B$, entonces $VS\,(A) \equiv VS(B)$
- Si B es ortogonal, A, AB y BA tienen los mismos valores singulares
- Si A es cuadrada y simétrica, entonces $VS_i\,(A) = |\lambda_i(A)|$
- Si A tiene filas BON, los valores singulares no nulos de A son 1. Si A tiene columnas BON, los valores singulares de A son 1
- La matriz $A^T A$ (matriz de *Gram* de A) es siempre simétrica y semi definida positiva, con lo cual nunca tendrá valores singulares negativos. Será definida positiva cuando A tenga columnas LI
- Sea $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal tal que $T\,(x) = Ax$. Sea la forma cuadrática $f\,(x) = |T\,(x)|^2 = x^T \left(A^T A\right) x$. Entonces:
    1. El máximo de $f(x)$ sujeto a $|x| = 1$ es $\lambda_{max}\left(A^T A\right)$. Entonces el máximo de $|T(x)|$ es $VS_{max}(A)$ y se alcanza en $M = \{x \in \mathbb{R}^m : x \in S_{\lambda_{max}}\left(A^T A\right), |x| = 1\}$.
    2. El mínimo de $f(x)$ sujeto a $|x| = 1$ es $\lambda_{min}\left(A^T A\right)$. Entonces el mínimo de $|T(x)|$ es $VS_{min}(A)$ y se alcanza en $m = \{x \in \mathbb{R}^m : x \in S_{\lambda_{min}}\left(A^T A\right), |x| = 1\}$.

7.10 DVS reducida con matrices de proyección y pseudoinversa

DVS reducida: Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Si $A = U\Sigma V^T$, y $rg\,(A) = r$, entonces una DVS reducida de A es $A = U_r\Sigma_r V_r^T$ siendo $U_r \in \mathbb{K}^{n\times r}$, $\Sigma_r \in \mathbb{K}^{r\times r}$, $V_r^T \in \mathbb{K}^{r\times m}$.

Pseudoinversa de Moore-Penrose de A: $A^+ = V_r\Sigma_r^{-1}U_r^T$

Propiedades:

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$:

1. $A^+ = A^\#$cuando $rg\,(A) = m$
2. $A^+A = V_rV_r^T = P_{Fil(A)}$
3. $AA^+ = U_rU_r^T = P_{Col(A)}$

8 Ecuaciones Diferenciales

8.1 Independencia lineal y Wronskiano

Matriz de Wronski: Sea $A = \{f_1, f_2, \ldots, f_q\}$ funciones definidas en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, a valores en $\mathbb{C}$, con derivada hasta el orden $(q-1)$ continua en I. La matriz de wronski de A es, para cada $x \in I$:

$$Mw_A\,(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) & \cdots & f_q(x) \\ f_1^{'}(x) & \cdots & f_q^{'}(x) \\ f_1^{(q-1)}(x) & \cdots & f_q^{(q-1)}(x) \end{bmatrix}$$

Wronskiano: $w_A\,(t) = det(Mw_A)$

Propiedades:

- Si existe un $x_0 \in I$ tal que $w_A(x_0) \neq 0$, entonces las funciones $f_1, f_2, \ldots, f_q$ son LI.
- Si un conjunto es LD en un I, su wronskiano es la función nula. La recíproca es falsa; es verdadera solo si las funciones que componen el wronskiano son soluciones de una ED lineal de orden superior.
- La derivada del wronskiano es el determinante obtenido derivando la última fila. La derivada del wronskiano es la suma de q determinantes.

8.2 Identidad de Abel

Sea la ecuación diferencial $y(x)^{(n)} + a_{n-1}\cdot y(x)^{(n-1)} + \ldots + a_1\cdot y'\,(x) + a_0\cdot y\,(x) = 0$ en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, sea $S = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ el conjunto de las soluciones de ED, y sea W_S el wronskiano de este conjunto. Entonces se verifica que:

$$W_S^{'}(t) = -a_{n-1}\cdot W_S(t)$$

8.3 Ecuaciones diferenciales lineales

8.3.1 Condición de existencia y unicidad de un PVI

Sea el problema $\begin{cases} a_ny\,(x)^{(n)} + \ldots + a_1y'\,(x) + a_0y(x) = f(x) \\ y\,(x_0) = y_0 \end{cases}$

La condición de existencia y unicidad de la solución del PVI es:

- ED normal en I: $a_n \neq 0\,\forall x \in I$.
- $x_0 \in I$.

8.3.2 Variables separables: $y' = \frac{f(x)}{g(x)}$ con $y = y(x)$

Separamos la ecuación en $g(x) \cdot dy = f(x) \cdot dx$ e integrando ambos miembros se tiene $G(y) = F(x) + c$.

8.3.3 Homogéneas: $y' = f(x, y)$ con $f(tx, ty) = f(x, y)$

Hacemos un cambio de variable $y = zx$ (donde $z = z(x)$). Entonces $y' = z + xz'$.

8.3.4 Lineales de 1^{er} orden

Obtenemos primero la solución general de la homogénea (y_h) y luego una particular de la no homogénea (y_p). La solución buscada es $y_G = y_H + y_P$.

1. Solución de la ecuación homogénea asociada ($y' + p(x)y = 0$): es de variables separables. Una solución es $y_H(x) = e^{-\int p(x)dx}$.
2. Solución de la no homogénea: una solución se obtiene multiplicando toda la ecuación por el factor integrante de Lagrange: $u(v) = e^{\int p(x)dx}$. Entonces, la ecuación a resolver será $[u(v).y]' = u(v).q(x)$

8.3.5 Diferencial exacta: $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$

Es diferencial exacta si existe $f(x, y)$ tal que $df = P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$, es decir si $\frac{\partial f}{\partial x} = P(x, y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = Q(x, y)$. En ese caso, la solución general es $f(x, y) = C$. Se cumple que la ecuación anterior es diferencial exacta si y solo si $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Se dice además que $\mu(x, y)$ es un factor integrante de la ecuación $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$ si al multiplicar la ecuación por $\mu(x, y)$ la ecuación resultante es diferencial exacta.

8.3.6 Lineales homogéneas de orden superior con coeficientes constantes: $a_n(t)y^{(n)} + ... + a_1y' + a_0y = 0\,\forall t \in I$ (I)

Polinomio característico de (I): $p(\lambda) = \sum_{i=0}^{n} a_i\lambda_i^n$

Espectro de (I): $\sigma(p) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ p(\lambda) = 0\}$

$y_H(t) = t^k e^{\lambda t}$ es una solución de la ED si $\lambda \in \sigma(p)$, multiplicidad "m", $k = 0, 1, \ldots, m-1$.

Si la ED es de coeficientes constantes reales, las raíces del polinomio característico aparecerán conjugadas. Esto es, $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$. Luego, $y_1 = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i.sen(\beta t))$ e $y_2 = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) - i.sen(\beta t))$. Entonces, $gen\{y_1, y_2\} = gen\{e^{\alpha t}\cos(\beta t), e^{\alpha t}sen(\beta t)\}$.

8.3.7 Lineales no homogéneas de orden superior con coeficientes constantes: $a_ny^{(n)} + ... + a_1y' + a_0y = f(x)$

La solución general es de la forma $y_G = y_P + y_H$, donde y_H se obtiene como antes, e y_P se obtiene mediante alguno de estos métodos:

Método de variación de parámetros: aplicable en cualquier caso.

$y_P(t) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x) \cdot y_i(x)$, siendo $y_i(x)$ las soluciones de y_H, y $u_i(x)$ las funciones que satisfacen

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \\ \vdots \\ u_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \frac{f(x)}{a_n} \end{bmatrix}$$

Método de coeficientes indeterminados: aplicable cuando $f(x)$ es exponencial, polinomio, seno y coseno, siendo $a_2y'' + a_1y' + a_0y = f(x)$ con $f(x) = p_1(x).e^{m_1x} + \ldots + p_k(x).e^{m_kx}$.

$y_P(t) = q_1(x).e^{m_1x} + \ldots + q_k(x).e^{m_kx}$.

- Si e^{m_kx} no es solución de la EDO homogénea asociada (i.e. m_k no es raíz de $a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$), q_k es un polinomio del grado de p_k con coeficientes a determinar.
- Si e^{m_kx} si es solución de la EDO homogénea asociada (i.e. m_k sí es raíz de $a_2"\lambda^2 + a_1"\lambda + a_0 = 0$), q_k es un polinomio de un grado mayor que p_k con coeficientes a determinar.
- Una vez armada la y_P se reemplaza en la ED original, e igualando los términos semejantes se hallan los coeficientes indeterminados.

9 Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Lineales

$$\begin{cases} x'_t = a_{11}x + a_{12}y + b_1 \\ y'_t = a_{21}x + a_{22}y + b_2 \end{cases} \implies \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \implies X' = AX + B$$

9.1 Sistemas homogéneos con A diagonalizable

La solución de $X' = AX$ ($A \in \mathbb{K}^{n\times n}$), con λ_i autovalor de A y v_i autovector de A asociado a λ_i, es:

$$X = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i e^{\lambda_i t} = \underbrace{\begin{bmatrix} | & & | \\ v_1e^{\lambda_1 t} & \cdots & v_ne^{\lambda_n t} \\ | & & | \end{bmatrix}}_{\varphi(t)\in\mathbb{K}^{n\times n}} \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}}_{C}$$

9.2 Sistemas no homogéneos con A diagonalizable

Sea el sistema $X' = AX + B$. La solución es $X_G = X_H + X_P$ con:

1. $X_H = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i e^{\lambda_i t} = \varphi(t) \cdot C$
2. $X_P = \varphi(t) \cdot u(t)$ siendo $u(t)$ tal que $\varphi(t) \cdot u'(t) = B$

9.3 Sistemas homogéneos con A no diagonalizable

Sea el sistema $X' = AX$ con A no diagonalizable, proponemos una factorización de la forma $A = PJP^{-1}$, donde $J \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es la *matriz de Jordan* de A que tiene la siguiente estructura en bloques: $J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_l \end{bmatrix}$

donde cada bloque J_i es una matriz $k_i \times k_i$ de la forma $J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{bmatrix}$ para algún autovalor $\lambda_i$de A. (Dado un autovalor λ_i, su multiplicidad geométrica es el número de bloques de Jordan correspondientes a λ_i, y su multiplicidad algebraica es la suma de los tamaños de los bloques correspondientes a ese autovalor.)

Luego: $X' = AX \overset{X=PY}{\longmapsto} PY' = PJP^{-1}PY \longmapsto Y' = JY$. Resolvemos este sistema y la solución general del problema se expresará como $X(t) = PY(t)$.

9.3.1 Caso $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

A necesariamente posee un autovalor doble $\lambda \in \mathbb{R}$ de multiplicidad geométrica 1, con lo cual la matriz J posee un solo bloque correspondiente a λ:

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Respecto de la matriz $P = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}$ deber ser inversible y $AP = PJ$. La matriz P se obtiene hallando un par de vectores v_1 y v_2 LI que satisfagan las condiciones $(A - \lambda I)\, v_1 = 0$ y $(A - \lambda I)\, v_2 = v_1$. Observamos que v_1 es autovector de A asociado a λ.

9.3.2 Caso $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

1. A tiene un autovalor triple $\lambda \in \mathbb{R}$ de multiplicidad geométrica 1. En este caso:

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

   Respecto de $P = [\, v_1 \quad v_2 \quad v_3]$, $\{v_1, v_2, v_3\}$ deben ser LI y satisfacer las condiciones $(A - \lambda I)\, v_1 = 0, (A - \lambda I)\, v_2 = v_1, (A - \lambda I)\, v_3 = v_2$. Observamos que v_1 es autovector de$A$ asociado a λ.

2. A tiene un autovalor triple $\lambda \in \mathbb{R}$ de multiplicidad geométrica 2. En este caso:

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

   Respecto de $P = [\, v_1 \quad v_2 \quad v_3]$, $\{v_1, v_2, v_3\}$ deben ser LI y satisfacer las condiciones $(A - \lambda I)\, v_1 = 0, (A - \lambda I)\, v_2 = v_1, (A - \lambda I)\, v_3 = 0$. Observamos que v_1 y v_3 son autovectores de A asociados a λ.

3. A tiene un autovalor doble $\lambda \in \mathbb{R}$ de multiplicidad geométrica 1 y un autovalor $\mu \in \mathbb{R}$ simple. En este caso J debe tener dos bloques de Jordan:

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

   Respecto de $P = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$, $\{v_1, v_2, v_3\}$ deben ser LI y satisfacer las condiciones $(A - \lambda I)\, v_1 = 0, (A - \lambda I)\, v_2 = v_1, (A - \mu I)\, v_3 = 0$. Observamos que v_1 y v_3 son autovectores de A asociados a λ y μ respectivamente.