Integrales Curvilíneas

(Algunos ejemplos)

María del Carmen Calvo

En Cálculo Elemental se aprendió a integrar funciones de una variable sobre un segmento de recta. Cuando la función a integrar es positiva, su valor representa el área de una región plana limitada por su gráfico y el eje x.

Ahora que hemos estudiado funciones de más variables surge la posibilidad de integrar una función definida sobre algo más general que un segmento de recta: una curva. De esto se trata la definición de integral curvilínea de un campo escalar. La motivación de su definición es prácticamente la misma que para el caso de una variable: siendo f una función positiva, pretendemos que su integral sobre una curva C –contenida en su dominio– represente el área de la superficie cilíndrica vertical limitada inferiormente por C y superiormente por la imagen de C sobre el gráfico de f.

Más adelante introduciremos el concepto de integral de superficie que nos permitirá calcular áreas de superficies en general.

La noción de integral curvilínea de un campo vectorial está motivada por un concepto físico: el trabajo realizado por una fuerza que actúa sobre una partícula cuya trayectoria describe una curva en el plano o en el espacio.

Dada una trayectoria $\mathbf{c} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$ de clase C^1 a trozos, repasaremos la definición de integral curvilínea de campos escalares y vectoriales y desarrollaremos algunos ejemplos.

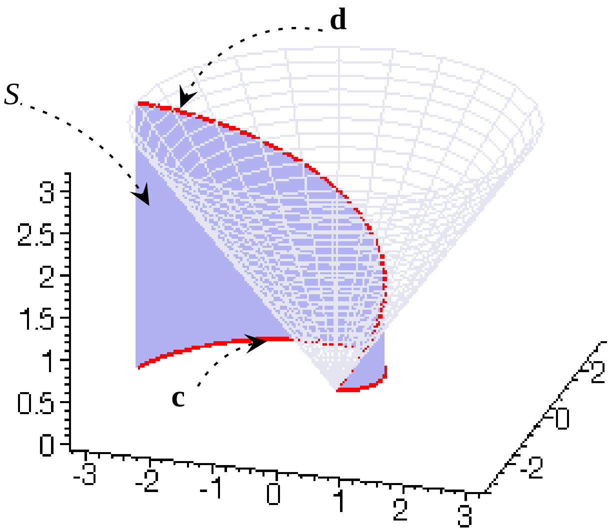
◆ Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua sobre $\mathbf{c}$

$$\int_{\mathbf{c}} f \, ds = \int_a^b f(\mathbf{c}(t))\|\mathbf{c}'(t)\| \, dt$$

Cuando $n = 2$, $f \geqslant 0$ y la trayectoria $\mathbf{c}$ es simple, el valor de esta integral representa el área de la superficie cilíndrica limitada por las curvas $\mathbf{c}(t) = (c_1(t), c_2(t))$ y $\mathbf{d}$ dada por

$$\mathbf{d}(t) = (c_1(t), c_2(t), f(\mathbf{c}(t)))$$

Como aplicación calculemos el área de la superficie S de la siguiente figura



donde

$$\mathbf{c}(t) = (t\cos t, t\,\mathrm{sen}\, t)^1 \quad (0 \leqslant t \leqslant \pi) \qquad , \qquad f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$$

con lo cual

$$\mathbf{d}(t) = (t\cos t, t\,\mathrm{sen}\, t, t)$$

dado que

$$f(t\cos t, t\,\mathrm{sen}\, t) = \sqrt{t^2\cos^2 t + t^2\mathrm{sen}^2 t} = |t| \underset{\substack{\uparrow \\ t\geqslant 0}}{=} t$$

Para calcular la integral curvilínea, y en consecuencia el área de S, necesitamos

$$\mathbf{c}'(t) = (\cos t - t\,\mathrm{sen}\, t, \mathrm{sen}\, t + t\cos t)$$
$$\|\mathbf{c}'(t)\| = \sqrt{\cos^2 t + t^2\mathrm{sen}^2 t - 2t\,\mathrm{sen}\, t\cos t + \mathrm{sen}^2 t + t^2\cos^2 t + 2t\,\mathrm{sen}\, t\cos t} = \sqrt{1+t^2}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} A(S) &= \int_{\mathbf{c}} f\, ds = \int_0^{\pi} f(t\cos t, t\,\mathrm{sen}\, t)\, \|\mathbf{c}'(t)\|\, dt \\ &= \int_0^{\pi} t\, \sqrt{1+t^2}\, dt = \frac{1}{2}\frac{(1+t^2)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{3}\left[(1+\pi^2)^{3/2} - 1\right] \end{aligned}$$

◆ Si $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es continuo sobre $\mathbf{c}$

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{c}(t))\cdot \mathbf{c}'(t)\, dt$$

El valor de esta integral representa el *trabajo* realizado por la fuerza **F** a lo largo de **c**.

[1] la traza de **c** es la espiral de ecuación polar: $r = \theta$.

Veamos algunos ejemplos

Ejemplo 1

Calcular el trabajo realizado por $\mathbf{F}(x,y,z) = (yz, xz, xy)$ a lo largo de $\mathbf{c}(t) = (t, t^2, t^3)$ $(1 \leqslant t \leqslant 2)$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} &= \int_1^2 \mathbf{F}(t,t^2,t^3)\cdot(1,2t,3t^2)\,dt\\ &= \int_1^2 (t^5,t^4,t^3)\cdot(1,2t,3t^2)\,dt = \int_1^2 (t^5+2t^5+3t^5)\,dt = \int_1^2 6t^5\,dt = t^6\Big|_1^2\\ &= 2^6 - 1 = 63\end{aligned}$$

Ejemplo 2

Dada la curva $\mathbf{c} : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbf{c}(t) = (1, t, e^t)$, calcular

$$\int_{\mathbf{c}} \cos z\,dx + e^x\,dy + e^y\,dz$$

Integrar una *forma diferencial* $P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$ significa integrar el campo vectorial,

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$$

dado que

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbf{c}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz\\ &\qquad= \int_a^b P(x(t),y(t),z(t))x'(t)dt + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)dt + R(x(t),y(t),z(t))z'(t)dt\\ &\qquad= \int_a^b \left[P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t)\right]dt\\ &\qquad= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{c}(t))\cdot\mathbf{c}'(t)\,dt\\ &\qquad= \int_{\mathbf{c}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}\end{aligned}$$

En nuestro caso se trata entonces de integrar el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (\cos z, e^x, e^y)$$

con lo cual,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{c}} \cos z\, dx + e^x\, dy + e^y\, dz &= \int_{\mathbf{c}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_0^2 \mathbf{F}(1,t,e^t)\cdot(0,1,e^t)\, dt\\ &= \int_0^2 (\cos e^t, e, e^t)\cdot(0,1,e^t)\, dt = \int_0^2 e + e^{2t}\, dt\\ &= \left[et + \frac{1}{2}e^{2t}\right]\Big|_0^2\\ &= 2e + \frac{e^4}{2} - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Ejemplo 3

Dada la curva $\mathbf{d} : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbf{d}(t) = (1, 2-t, e^{2-t})$, calcular

$$\int_{\mathbf{d}} \cos z\, dx + e^x\, dy + e^y\, dz$$

Podríamos calcular esta integral de la misma forma que en el caso anterior. Pero, para evitar las cuentas, conviene notar que

$$\mathbf{d}(t) = \mathbf{c}(2-t) = \mathbf{c}(0+2-t)$$

i.e., **d** es la curva opuesta de **c**. De esta forma, teniendo en cuenta que estamos integrando el mismo campo *vectorial* del ejemplo anterior, podemos asegurar que

$$\int_{\mathbf{d}} \cos z\, dx + e^x\, dy + e^y\, dz = -\int_{\mathbf{c}} \cos z\, dx + e^x\, dy + e^y\, dz = \frac{1}{2} - 2e - \frac{e^4}{2}$$

Ejemplo 4

Dada la curva $\mathbf{c} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{c}(t) = (\ln(3t^2+1), \cos^5(\pi t))$, calcular

$$\int_{\mathbf{c}} y\, dx + x\, dy$$

Aquí también podríamos calcular esta integral usando simplemente la definición. Pero resulta mucho más sencillo si nos damos cuenta de que el campo que vamos a integrar

$$\mathbf{F}(x,y) = (y,x)$$

es el gradiente de la función

$$f(x,y) = xy$$

que es de clase C^1 sobre la curva $\mathbf{c}$. Luego,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{c}} y\,dx + x\,dy = \int_{\mathbf{c}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{c}} \nabla f \cdot d\mathbf{s} \\ = f(\mathbf{c}(1)) - f(\mathbf{c}(0)) = f(\ln 4, -1) - f(0,1) \\ = -\ln 4\end{aligned}$$

Ejemplo 5 *(Importante)*

Calcular la integral del campo $\mathbf{F}(x,y) = \left(-\dfrac{y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$ a lo largo de la circunferencia $C : x^2+y^2 = 4$.

En principio debemos hallar una parametrización $\mathbf{c}$ de C que sea simple cerrada, para asegurarnos de que pasamos una sola vez por cada uno de sus puntos. Tomamos

$$\mathbf{c} : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad , \quad \mathbf{c}(t) = (2\cos t, 2\,\mathrm{sen}\, t)$$

que cumple lo que necesitamos. Calculemos entonces la integral,

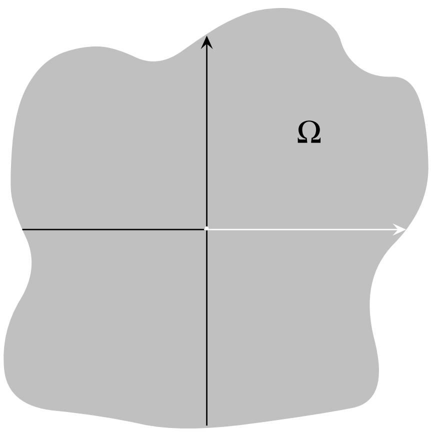
$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{c}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(2\cos t, 2\,\mathrm{sen}\, t)\cdot(-2\,\mathrm{sen}\, t, 2\cos t)\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{2\,\mathrm{sen}\, t}{4}, \frac{2\cos t}{4}\right)\cdot(-2\,\mathrm{sen}\, t, 2\cos t)\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} \mathrm{sen}^2 t + \cos^2 t\,dt \\ &= 2\pi\end{aligned}$$

Comentarios

1. Esto muestra que este campo *no* es un campo gradiente a lo largo de la curva C.

2. En cambio *sí* lo es en este conjunto

$$\Omega = \mathbb{R}^2 - (\mathbb{R}_{\geqslant 0} \times \{0\})$$



En efecto, vimos anteriormente que la transformación (*coordenadas polares*)

$$T : \mathbb{R}_{>0} \times (0, 2\pi) \longrightarrow \Omega$$

dada por

$$T(r, \theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$$

es biyectiva entre estos dos conjuntos y su inversa es, como T, de clase C^∞. Llamemos $r(x, y)$ y $\theta(x, y)$ a sus componentes y calculemos el gradiente de θ derivando parcialmente respecto de x e y las ecuaciones

$$\frac{x}{y} = \operatorname{cotg}\theta(x, y) \quad {}^{2} \qquad , \qquad \frac{y}{x} = \operatorname{tg}\theta(x, y) \quad {}^{3}$$

— Para un $(x, y) \neq (0, 0)$ tal que $y \neq 0$ usamos la relación

$$\frac{x}{y} = \operatorname{cotg}\theta(x, y)$$

Al derivarla respecto de x obtenemos

$$\frac{1}{y} = -[1 + \operatorname{cotg}^2(\theta(x, y))]\,\frac{\partial\theta}{\partial x}(x, y)$$

es decir,

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}(x, y) = -\frac{1}{y(1 + \operatorname{cotg}^2(\theta(x, y)))} = -\frac{1}{y\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right)} = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

Al derivarla respecto de y obtenemos

$$-\frac{x}{y^2} = -[1 + \operatorname{cotg}^2(\theta(x, y))]\,\frac{\partial\theta}{\partial y}(x, y)$$

es decir,

$$\frac{\partial\theta}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{y^2(1 + \operatorname{cotg}^2(\theta(x, y)))} = \frac{x}{y^2\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right)} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

— Para un $(x, y) \neq (0, 0)$ tal que $x \neq 0$ usamos la relación

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\theta(x, y)$$

y siguiendo un camino similar llegamos a los mismos valores para las derivadas parciales de $\theta(x, y)$; con lo cual podemos asegurar que para todo $(x, y) \neq (0, 0)$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial\theta}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

Es decir,

$$\mathbf{F} = \nabla\theta$$

[2] para los (x, y) tales que $y \neq 0$
[3] para los (x, y) tales que $x \neq 0$

siendo θ de clase C^{∞} en Ω. Por supuesto también vale la igualdad fuera del $(0,0)$ pero ya no es cierto que θ es C^1 en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$; en realidad, ni siquiera es continua sobre el semieje $x \geqslant 0$ [4].

De modo que esto no contradice el resultado que afirma que la integral del gradiente de una función C^1 sobre una curva cerrada es cero.

NOTA: este ejemplo está *muy* relacionado con la integral compleja de la función $\dfrac{1}{z}$ sobre una curva que contiene al origen en su interior.

[4] ¿por qué? Piénselo a partir de la definición de argumento y analice qué pasa con el argumento de (x, y) cuando se acerca a $(a, 0)$ $(a > 0)$ desde el semiplano superior y luego desde el semiplano inferior.