

CÁLCULO AVANZADO
SEGUNDO CUATRIMESTRE DE 2009
PRÁCTICA 3

1. Encuentre y trace el dominio de la función.

- | | |
|--|--|
| a) $f(x, y) = \sqrt{x+y}$ | b) $f(x, y) = \frac{x-3y}{x+3y}$ |
| c) $f(x, y) = \sqrt{y-x} \ln(y+x)$ | d) $f(x, y) = xy\sqrt{x^2+y}$ |
| e) $f(x, y) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$ | f) $f(x, y) = \sqrt{\frac{x}{x^2+2-1}}$ |
| g) $f(x, y) = \sqrt{x^2+y^2-1} + \ln(4-x^2-y^2)$ | h) $f(x, y, z) = \ln(16-4x^2-4y^2-z^2)$ |
| i) $f(x, y) = (\ln(x^2-y^2), \operatorname{sen}(x^2+y^2))$ | j) $f(x, y) = \left(\frac{1}{x^2+y^2}, \frac{1}{x^2-y^2} \right)$ |

2. a) Determinar si los siguientes conjuntos son abiertos

- (i) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x+y < 3\}$.
- (ii) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| > 2\}$.
- (iii) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x+y > 2, x \geq 0, y \geq 0\}$.
- (iv) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 4\}$.
- (v) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 4\}$.
- (vi) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 < 4, z=0\}$.

b) Determine la frontera de cada uno de los conjuntos del inciso anterior.

- c) El punto $(0, 0)$, ¿es un punto de acumulación del conjunto A ? ¿Y del conjunto B ?
El punto $(1, \sqrt{3})$, ¿es un punto de acumulación del conjunto D ? ¿Y del conjunto E ?

3. Trace un mapa de contorno de la función, mostrando curvas de nivel

- a) $f(x, y) = xy$
- b) $f(x, y) = x^2 - y^2$
- c) $f(x, y) = \sqrt{x+y}$
- d) $f(x, y) = y - \cos x$
- e) $f(x, y) = e^{1/(x^2+y^2)}$

4. Describa las superficies de nivel de la función.

- a) $f(x, y, z) = x + 3y + 5z$
- b) $f(x, y, z) = x^2 - y^2$

5. Sea $f: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x, y) = \begin{cases} \ln(x^2+y^2-1) & \text{si } (x, y) \in A - \{(0, 0)\} \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$,

- a) Determine A (el dominio de f).
- b) El conjunto A , ¿es abierto? ¿Cuál es su frontera?
- c) El punto $(0, 0)$, ¿es un punto de acumulación de A ?
- d) ¿Cuál es la curva de nivel 0 de f ? ¿Y cuál la de nivel 1?

6. Justifique las siguientes afirmaciones

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x = 0$

b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} y = 1$

7. Explique por qué no es posible calcular el límite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ con f de la función del ejercicio 5.

8. Determinar y probar si existe o no el límite.

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (5,-2)} (x^5 + 4x^3y - 5xy^2)$

b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (6,3)} xy \cos(x - 2y)$

c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x^2}{x^2 + (y - 1)^2}$

d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x + y)^2}{x^2 + y^2}$

e) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{8x^2y^2}{x^4 + y^4}$

f) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + xy^2}{x^2 + y^2}$

g) $\lim_{(x,y) \rightarrow (-2,0)} \frac{(x + 2)y}{\sqrt{(x + 2)^2 + y^2}}$

h) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy + 1}{x^2 + y^2 + 1}$

i) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$

j) $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,0)} \frac{xy - 2y}{x^2 + y^2 - 4x + 4}$

k) $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xy + yz^2 + xz^2}{x^2 + y^2 + z^4}$

l) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xy + yz + zx}{x^2 + y^2 + z^2}$

m) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{(x - y)^2}{(x + y)^2}, \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$

n) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y}{x^4 + y^2}$

o) $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (1,0,2)} \left(\frac{(x - 1)^2}{\sqrt{(x - 1)^2 + (z - 2)^2}}, \frac{(z - 2)y}{\sqrt{(x - 1)^2 + y^2}} \right)$

p) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{(x - 1)^7}{x + y - 3}$

9. Determine el mayor conjunto en el que la función es continua.

a) $F(x, y) = \frac{1}{x^2 - y}$

b) $F(x, y) = \arctg(x + \sqrt{y})$

c) $G(x, y) = \sqrt{x + y} - \sqrt{x - y}$

d) $G(x, y) = \text{sen}^{-1}(x^2 + y^2)$

e) $f(x, y, z) = \frac{xyz}{x^2 + y^2 - z}$

f) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y^3}{2x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

10. Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x - 1)y}{\sqrt{(x - 1)^2 + y^2}} + \alpha x & \text{si } (x, y) \neq (1, 0) \\ \alpha^2 & \text{si } (x, y) = (1, 0) \end{cases}$$

Determinar **todos** los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para los cuales f es continua en $(1, 0)$.