

CÁLCULO AVANZADO
SEGUNDO CUATRIMESTRE DE 2009
PRÁCTICA 4

1. Utilice la definición de derivadas parciales como límites para hallar $f_x(x_0, y_0)$ y $f_y(x_0, y_0)$
 - a) $f(x, y) = x^2 - xy + 2y^2$, con $(x_0, y_0) = (0, 1)$.
 - b) $f(x, y) = \sqrt{3x - y}$, con $(x_0, y_0) = (1, 2)$.

2. Dadas las siguientes funciones, determinar si es posible calcular las derivadas parciales en los puntos indicados usando la regla práctica o si deben calcularse por definición. Calcular las derivadas parciales.
 - a) $f(x, y) = xy$, en $(1, -2)$.
 - b) $f(x, y) = x^3 - 2xy$, en $(-2, 1)$.
 - c) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0); \end{cases}$ en $(1, 0)$ y en $(0, 0)$.
 - d) $f(x, y) = |(x - 1)y|$ en $(0, 0)$, y $(-1, 1)$.

3. Encuentre todas las primeras derivadas parciales y sus respectivos dominios.
 - a) $f(x, y) = 3x - 2y^4$
 - b) $z = xe^{3y}$
 - c) $f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}$
 - d) $f(s, t) = \frac{st^2}{s^2 + t^2}$
 - e) $f(x, y) = \int_y^x \cos(t^2) dt$
 - f) $f(x, y) = \ln(x - y)$
 - g) $f(x, y, z) = xy^2z^3 + 3yz$

4. Halle todas las segundas derivadas parciales.
 - a) $f(x, y) = x^4 - 3x^2y^3$
 - b) $f(x, y) = \ln(3x + 5y)$
 - c) $z = \frac{x}{x + y}$
 - d) $z = y \operatorname{tg} 2x$
 - e) $u = e^{-s} \operatorname{sen} t$
 - f) $v = \sqrt{x + y^2}$

5. Verifique que la función $u = e^{-\alpha^2 k^2 t} \operatorname{sen} kx$ es una solución de la ecuación de conducción del calor $u_t = \alpha^2 u_{xx}$.

6. Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la función $f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^4}{x - y^2} & \text{si } x \neq y^2, \\ 0 & \text{si } x = y^2. \end{cases}$
 - a) Calcular, si existen, las derivadas parciales de f en $(0, 0)$.
 - b) ¿Es f continua en el origen?

7. Decidir, aplicando la definición, si las siguientes funciones son diferenciables en los puntos indicados.
 - a) $f(x, y) = 3x - 2y$ en $(1, 0)$.
 - b) $f(x, y) = x^2y$ en $(1, 2)$.

$$c) f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{en } (0, 0)$$

$$d) f(x, y) = |xy| \quad \text{en } (0, 0) \text{ y } (1, 0).$$

8. Explique por qué la función es diferenciable en el punto dado. Entonces encuentre la diferencial y la linealización $L(x, y)$ de la función en ese punto.

$$a) f(x, y) = x\sqrt{y}, (1, 4) \qquad b) f(x, y) = y \ln x, (2, 1)$$

$$c) f(x, y) = e^x \cos xy, (0, 0) \qquad d) f(x, y) = \frac{x}{y}, (6, 3)$$

$$e) f(x, y) = \arctg(x + 2y), (1, 0) \qquad f) f(x, y) = \sqrt{1 + x^2 y^2}, (0, 2)$$

9. Encuentre la ecuación del plano tangente a la superficie dada en el punto especificado.

$$a) z = y^2 - x^2, (-4, 5, 9)$$

$$b) z = \sqrt{4 - x^2 - 2y^2}, (1, -1, 1)$$

$$c) z = \ln(2x + y), (-1, 3, 0)$$

10. Encuentre la aproximación lineal de la función $f(x, y) = \sqrt{20 - x^2 - 7y^2}$ en $(2, 1)$ y utilícela para aproximar $f(1,95, 1,08)$.

11. Encuentre la aproximación lineal de la función $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ en $(3, 2, 6)$ y utilícela para aproximar el número $\sqrt{(3,02)^2 + (1,97)^2 + (5,99)^2}$.

12. La longitud y ancho de un rectángulo son 30 cm y 24 cm, respectivamente, con un margen de error en la medición de 0,1 cm en cada dimensión. Utilice diferenciales para estimar el máximo error en el área calculada del rectángulo.

13. Las dimensiones de una caja rectangular cerrada son 80 cm, 60 cm y 50 cm, respectivamente, con un posible error de 0,2 cm en cada dimensión. Utilice diferenciales para estimar el máximo error al calcular el área de la superficie de la caja.

14. Si R es la resistencia total de tres resistores, conectados en paralelo, con resistencias R_1, R_2, R_3 , entonces

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Si las medidas de las resistencias, en ohms, son $R_1 = 25 \Omega$, $R_2 = 40 \Omega$ y $R_3 = 50 \Omega$, con un posible error del 0,5% en cada caso, estime el máximo error en el valor calculado de R .

15. Para cada una de las siguientes funciones diferenciables, calcular la matriz de la diferencial en los puntos indicados:

$$a) f(x, y) = (2x - 3y + 5, -x + y) \quad \text{en } (1, -2).$$

$$b) f(x, y) = (x^2 - 3y^4, \ln(y + 2), xy) \quad \text{en } (2, -1).$$

$$c) f(x, y, z) = 2xy - z \quad \text{en } (1, 2, 3).$$

$$d) f(t) = (t, \sin(2\pi t), e^2) \quad \text{en } t = 1.$$

16. Para cada una de las siguientes funciones diferenciables, calcular la matriz jacobiana:

$$a) f(x, y) = (x, y) \qquad b) f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

$$c) f(x, y, z) = (x + e^z + y, yx^2) \qquad d) f(r, \theta, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$$

$$e) f(x, y) = (x + y, x - y, xy) \qquad f) f(r, \theta, \varphi) = (r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \varphi).$$