

CÁLCULO AVANZADO
SEGUNDO CUATRIMESTRE DE 2009
PRÁCTICA 5

1. Sean las funciones

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (x^2 - y, e^{\sqrt{x}}), & g(x, y) &= 2x^2 - 3xy, \\ h(x, y) &= (3xy - y^2, xy), & k(x, y) &= (x^2, y^2). \end{aligned}$$

a) Determinar si existen las siguientes composiciones:

$$g \circ f, \quad f \circ g, \quad f \circ h, \quad h \circ f, \quad k \circ f, \quad f \circ k, \quad f \circ f$$

b) En los casos en que sea posible, indicar cual es el dominio y cual el codominio de la composición.

2. Sean $f(u, v) = (e^{u-2}, u^2 - v^2)$ y $g(x, y) = (x + 2, x - y^2)$. Calcular $D(f \circ g)(0, 1)$

(a) Directamente (a partir de la composición) (b) Aplicando la regla de la cadena.

3. Halle la matriz de la diferencial de $f \circ \mathbf{g}$ en el punto indicado.

a) $f(x, y) = x^2y + xy^2$, $\mathbf{g}(2 + t^4, 1 - t^3)$, en $t = 1$.

b) $f(x, y) = \sin x \cos y$, $\mathbf{g}(t) = (\pi t, \sqrt{t})$, en $t = 0$.

c) $f(x, y, z) = xe^{y/z}$, $\mathbf{g} = (t^2, 1 - t, 1 + 2t)$, en $t = 1$.

d) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$, $\mathbf{g}(s, t) = (s + t, st)$, en $(s, t) = (1, 2)$.

e) $f(x, y) = \arctg(2x + y)$, $\mathbf{g}(s, t) = (s^2t, s \ln t)$, en $(2, 1)$.

f) $f(r, \theta) = e^r \cos \theta$, $\mathbf{g}(r, \theta) = (st, \sqrt{s^2 + t^2})$, en $(0, \pi/4)$.

4. a) Sean $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ y $\mathbf{g}(s, t) = (st, s \cos t, s \sin t)$. Calcular $\frac{\partial f \circ \mathbf{g}}{\partial s}(1, 0)$.

b) Sean $z = y^2 \operatorname{tg} x$, $x = t^2 uv$, $y = u + tv^2$ y $w(u, v, t) = z(x(u, v, t), y(u, v, t))$. Calcular $\frac{\partial w}{\partial u}$, $\frac{\partial w}{\partial t}$ cuando $t = 2$, $u = 1$, $v = 0$.

c) Sean $u = \frac{x + y}{y + z}$, $x = p + r + t$, $y = p - r + t$, $z = p + r - t$ y $w(p, r, t) = u(x(p, r, t), y(p, r, t), z(p, r, t))$. Calcular $\frac{\partial w}{\partial r}(1, -1, 2)$.

5. Si f y g son funciones de una sola variable dos veces derivables, demuestre que la función

$$u(x, y) = f(x + at) + g(x - at)$$

es solución de la ecuación de la onda $u_{tt} = a^2 u_{xx}$.

6. La temperatura en un punto (x, y) es $T(x, y)$, medida en grados Celsius. Un insecto se arrastra de modo que su posición después de t segundos está dada por $x = \sqrt{1 + t}$, $y = 2 + \frac{1}{3}t$, donde x e y se miden en centímetros. La función de temperatura satisface $T_x(2, 3) = 4$ y $T_y(2, 3) = 3$. ¿Con qué rapidez está subiendo la temperatura en la trayectoria del insecto después de 3 segundos?

b) Utilice el resultado de la parte a) par hallar la dirección en la que la función $f(x, y) = x^4y - x^2y^3$ decrece con mayor rapidez, en el punto $(2, -3)$.

14. Encuentre las direcciones en las que la derivada direccional de $f(x, y) = x^2 + \sin xy$ en el punto $(1, 0)$ tiene valor 1.

15. Suponga que, en cierta región del espacio, el potencial eléctrico V está dado por

$$V(x, y, z) = 5x^2 - 3xy + xyz$$

a) Encuentre la razón de cambio del potencial en $P(3, 4, 5)$, en la dirección del vector $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$.

b) ¿En qué dirección cambia V más rápidamente en P ?

c) ¿Cuál es la mayor razón de cambio en P ?

16. Sea f una función de dos variables que tiene derivadas parciales continuas y considere los puntos $A(1, 3)$, $B(3, 3)$, $C(1, 7)$ y $D(6, 15)$. La derivada direccional de f en A en la dirección del vector \vec{AB} es 3 y la derivada direccional en A en la dirección de \vec{AC} es 26. Encuentre la derivada direccional de f en A en la dirección del vector \vec{AD} .

17. Sean $\mathbf{v} = (2, 0)$, $\mathbf{w} = (0, -3)$ y $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable tal que

$$f(1, 2) = 3, \quad \frac{\partial f}{\partial v}(1, 2) = 4, \quad \frac{\partial f}{\partial w}(1, 2) = -9.$$

a) Halle $\nabla f(1, 2)$.

b) Si $f(1, 2) = 3$, halle una ecuación del plano tangente al gráfico de f en $(1, 2)$.

c) Halle la derivada direccional de f en el punto $(1, 2)$ en la dirección de $\mathbf{u} = (3, 4)$.

18. Sean $\mathbf{v} = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, $\mathbf{w} = (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ y $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable tal que

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(1, 2) = 4, \quad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{w}}(1, 2) = -2.$$

a) Halle la dirección en la cual f decrece más rápidamente.

b) Sabiendo que $f(1, 2) = 3$, calcule en forma aproximada $f(1.01, 1.95)$.

19. Una función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}_0) = a^3 + b$ para todo vector unitario $\mathbf{v} = (a, b)$ **no** puede ser diferenciable en \mathbf{x}_0 . Explique por qué.

20. Halle las ecuaciones de

(i) el plano tangente

(ii) la recta normal a la superficie dada en el punto especificado

a) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$, $(4, -1, 1)$

b) $x^2 + y^2 - z^2 - 2xy + 4xz = 4$, $(1, 0, 1)$

c) $z + 1 = xe^y \cos z$, $(1, 0, 0)$

21. Sea $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $F(-4, 3, 1) = 0$ y $\nabla F(-4, 3, 1) = (-2, 0, 3)$. Halle una ecuación del plano tangente a la superficie definida por la ecuación

$$F(3x - 2y^2 - z, x - y + 2z, e^{xyz}) = 0$$

en el punto $(0, 1, 2)$. Halle también una ecuación de la recta normal a la superficie en el mismo punto.