Cálculo Avanzado

Segundo Cuatrimestre de 2009

Práctica 6

1. Evalúe la integral doble identificándola primero como el volumen de un sólido.

a) $\displaystyle\iint_R 3\ dA \quad , \quad R = \{(x,y) \mid -2 \le x \le 2\ ,\ 1 \le y \le 6\}$

b) $\displaystyle\iint_R (4-2y)\ dxdy \quad , \quad R = [0,1]\times[0,1]$

2. Calcule la integral iterada

a) $\displaystyle\int_1^3 \left(\int_0^1 (1+4xy)\ dx\right) dy$ b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \cos y\ dy\right) dx$

c) $\displaystyle\int_0^3 \left(\int_0^1 \sqrt{x+y}\ dx\right) dy$ d) $\displaystyle\int_1^4 \left(\int_1^2 \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right) dy\right) dx$

3. Calcule la integral doble

a) $\displaystyle\iint_R (6x^2y^3 - 5y^4)\ dA \quad , \quad R = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 3\ ,\ 0 \le y \le 1\}$

b) $\displaystyle\iint_R \frac{xy^2}{x^2+1}\ dA \quad , \quad R = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1\ ,\ -3 \le y \le 3\}$

c) $\displaystyle\iint_R \frac{1}{x+y}\ dA \quad , \quad R = [1,2]\times[0,1]$

4. Halle el volumen del sólido que se euncuentra bajo gráfico de la función $f(x,y) = 1 - \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9}$ y arriba del cuadrado $R = [-1,1]\times[-2,2]$.

5. Halle el volumen del sólido limitado por la superfice $z = x\sqrt{x^2+y}$ y los planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$ y $z = 0$.

6. Halle el volumen del sólido que se encuentra en el primer octante, definido por por las inecuaciones $z \le 9 - y^2$, $x \le 2$.

7. Evalúe la integral iterada y grafique la región de integración

a) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^{x^2} (x+2y)\ dy\right) dx$ b) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_y^{e^y} \sqrt{x}\ dx\right) dy$ c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\cos\theta} e^{\operatorname{sen}\theta}\ dr\right) d\theta$

8. Evalúe la integral doble

a) $\displaystyle\iint_D x^3y^2\ dA \quad , \quad D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 2\ ,\ -x \le y \le x\}$

b) $\displaystyle\iint_D \frac{2y}{x^2+1}\ dA \quad , \quad D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1\ ,\ 0 \le y \le \sqrt{x}\ \}$

c) $\displaystyle\iint_D x\cos y\ dA \quad , \quad D$ está limitada por $y = 0$, $y = x^2$, $x = 1$

d) $\displaystyle\iint_D y^3\ dA$, D es la región triangular con vértices $(0,2)$, $(1,1)$ y $(3,2)$

9. Trace la región de integración y cambie el orden de integración

a) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^x f(x,y)\ dy\right) dx$ b) $\displaystyle\int_1^2 \left(\int_0^{\ln x} f(x,y)\ dy\right) dx$ c) $\displaystyle\int_0^4 \left(\int_{y/2}^2 f(x,y)\ dx\right) dy$

10. Al evaluar una integral doble sobre una región D se obtuvo una suma de integrales iteradas comos sigue:

$$\iint_D f(x,y)\ dA = \int_0^1 \left(\int_0^{2y} f(x,y)\ dx\right) dy + \int_1^3 \left(\int_0^{3-y} f(x,y)\ dx\right) dy$$

Trace la región D y exprese la integral doble como una integral iterada con el orden de integración invertido.

11. Evalúe la integral invirtiendo el orden de integración

a) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{3y}^3 e^{x^2}\ dx\right) dy$ b) $\displaystyle\int_0^3 \left(\int_{y^2}^9 y\cos(x^2)\ dx\right) dy$

c) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{\operatorname{arc\,sen} y}^{\pi/2} \cos x\sqrt{1+\cos^2 x}\ dx\right) dy$

12. Evalúe la integral $\displaystyle\iiint_E (x^2+yz)\ dV$, donde $E=\{(x,y,z)\mid\ 0\le x\le 2\ ,\ -3\le y\le 0\ ,\ -1\le z\le 1\}$.

13. Evalúe la integral triple

a) $\displaystyle\iiint_E 2x\ dV$, donde $E=\{(x,y,z)\mid\ 0\le y\le 2\ ,\ 0\le x\le \sqrt{4-y^2}\ ,\ 0\le z\le y\}$.

b) $\displaystyle\iiint_E 6xy\ dV$, donde E está bajo el plano $z=1+x+y$ y arriba de la región del plano xy limitada por las curvas $y=\sqrt{x}$, $y=0$ y $x=1$.

c) $\displaystyle\iiint_E xy\ dV$, donde E es el tetraedro sólido con vértices $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,2,0)$ y $(0,0,3)$

d) $\displaystyle\iiint_E z\ dV$, donde E es el sólido del primer octante definido por $y+z\le 1$ y $x+z\le 1$.

e) $\displaystyle\iiint_E x\ dV$, donde E está definido por el paraboloide $4y^2+4z^2\le x\le 4$.

14. Calcule el volumen del sólido dado

a) El tetraedro limitado por los planos de coordenadas y el plano $2x+3y+6z=12$.

b) El sólido definido por $4x^2+z^2\le 4$, $0\le z+2\le y$.

c) El sólido definido por $x\le y^2$, $x+z\le 1$, $z\ge 0$.

15. Una carga eléctrica está distribuida sobre el rectángulo $0\le x\le 2$, $1\le y\le 2$ de modo que la densidad de carga en (x,y) es $\sigma(x,y)=x^2+3y^2$ (medida en coulombs por metro cuadrado). Encuentre la carga total sobre el rectángulo.

16. Halle la masa y centro de masa del sólido dado E con función de densidad ρ .

a) E es el sólido $0 \leq y \leq \sqrt{x} \quad 0 \leq x \leq 1$ y $\rho(x,y,z) = 2$

b) E es el cubo dado por $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$, $0 \leq z \leq a$ y $\rho(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.

17. Graficar las siguientes regiones y describirlas en coordenadas polares:

a) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 3\}$

b) $D = \{(x,y) \text{ en el primer cuadrante} : x^2 + y^2 \leq 3\}$

c) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

d) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4,\ y \leq x,\ x \leq -y\}$

e) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ x \leq y,\ \sqrt{3}x \geq y\}$

f) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 1\}$.

g) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1,\ x + y \geq 1\}$

18. Calcule el área, cuando sea posible, de cada una de las regiones del ejercicio anterior.

19. Calcule la integral dada

a) $\iint_R x \, dA$, donde R es el disco con centro en el origen y radio 5

b) $\iint_R xy \, dA$, donde R es la región del primer cuadrante que se encuentra entre las circunferencias $x^2 + y^2 = 4$ y $x^2 + y^2 = 25$

c) $\iint_D e^{-x^2-y^2} \, dA$, donde D es la región $x^2 + y^2 \leq 4$, $x \geq 0$.

d) $\iint_D (x^2 + y^2) \, dA$, donde D es la región limitadas por los espirales $r = \theta$ y $r = 2\theta$ para $0 \leq \theta \leq 2\pi$

e) $\iint_R x^2 \, dA$, donde R es la región limitada por la elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$.

20. Utilice una integral doble para hallar el área de la región

a) Un pétalo de la rosa $r = \cos 3\theta$

b) La región interior a la lemniscata $r^2 = 4\cos 2\theta$, $-\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4$.

21. Una piscina tiene forma de círculo de 40 pies de diámetro. La profundidad es constante a lo largo de rectas este-oeste y aumenta linealmente desde 2 pies en el extremo sur hasta 7 pies en el extremo norte. Halle el volumen de agua de esta piscina.

22. Una carga eléctrica está distribuida dobre el disco unitario $x^2 + y^2 \leq 1$ de modo que la densidad de carga en (x,y) es $\sigma(x,y) = 1 + x^2 + y^2$ (medida en coulombs por metro cuadrado). Halle la carga total sobre el disco.

23. Una lámina ocupa la parte del disco $x^2 + y^2 \leq 1$ en le primer cuadrante. Halle su centro de masa si la densidad en cualquier punto es proporcional a su distancia al eje x .

24. Describir y graficar los siguientes conjuntos en coordenadas cilíndricas:

a) $D = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 \leq 1,\ -2 \leq z \leq 3,\ x \geq 0\}$

b) $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq z,\ 0 \leq z \leq 9\}$

c) $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq z^2,\ z \geq 0\}$

d) $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 5,\ x, y, z \geq 0\}$

e) $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\,,\ \ \sqrt{x^2 + y^2} \leq z\}$

25. Calcular el volumen, si es posible, de cada una de las regiones del ejercicio anterior.

26. Utilice coordenadas cilíndricas para evaluar

a) $\displaystyle\iiint_E \sqrt{x^2 + y^2}\, dV$, donde E es la región que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 16$ y entre los planos $z = -5$ y $z = 4$

b) $\displaystyle\iiint_E y\, dV$, donde E es el sólido que está entre los cilindros $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 4$, arriba del plano xy y debajo del plano $z = x + 2$

c) $\displaystyle\iiint_E x^2\, dV$, donde E es el sólido que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$, arriba del plano $z = 0$ y debajo de del cono $z^2 = 4x^2 + 4y^2$

27. Describir y graficar los siguientes conjuntos en coordenadas esféricas.

a) $V = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$.

b) $V = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\,,\ z \geq 0\}$.

c) $V = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\,,\ y \geq 0\}$.

d) $V = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\,,\ x \geq y\}$.

e) $V = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\,,\ \ \sqrt{x^2 + y^2} \leq z\}$.

28. Calcular el volumen de los sólidos del ejercicio anterior.

29. Utilice coordenadas esféricas para evaluar

a) $\displaystyle\iiint_B (x^2 + y^2 + z^2)\, dV$, donde B es la esfera unitaria $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$

b) $\displaystyle\iiint_E z\, dV$, donde E está entre las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ en el primer octante

c) $\displaystyle\iiint_E \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dV$, donde E está limitado por debajo por el cono $\phi = \dfrac{\pi}{6}$ y por arriba por la esfera $\rho = 2$

d) el volumen del sólido que está dentro sobre el cono $\phi = \dfrac{\pi}{3}$ y debajo de la esfera $\rho = 4\cos\phi$

30. Trace el sólido cuyo volumen está dado por la integral y evalúe la integral

a) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_0^{4-r^2} r\ dz dr d\theta$

b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 \rho^2 \operatorname{sen}\phi \; d\rho d\theta d\phi$

31. Calcule el volumen del sólido V dado

a) Debajo del paraboloide $z = x^2 + y^2$ y arriba del disco $x^2 + y^2 \leq 9$.

b) Una esfera de radio a.

c) V definido por $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z$, $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3$.

d) V definido por $x^2 + y^2 \leq 4$, $4x^2 + 4y^2 + z^2 \leq 64$.

32. a) Encuentre el centroide de una semiesfera homogénea sólida de radio a

b) Calcule el volumen y el centroide del sólido E que está arriba del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y debajo de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

33. Utilice la transformación dada para evaluar la integral

a) $\displaystyle\iint_R (3x + 4y)\; dA$, donde R es la región limitada por las rectas $y = x$, $y = x - 2$, $y = -2x$ e $y = 3 - 2x$

$x = \frac{1}{3}(u + v)$, $y = \frac{1}{3}(v - 2u)$

b) $\displaystyle\iint_R xy\; dA$, donde R es la región del primer cuadrante limitada por las rectas $y = x$ e $y = 3x$ y las hipérbolas $xy = 1$ y $xy = 3$

$x = \dfrac{u}{v}$, $y = v$.

34. a) Evalúe $\displaystyle\iiint_E dV$, donde E es el sólido interior al elipsoide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$. Utilice la transformación $x = au$, $y = bv$, $z = cw$

b) La Tierra no es una esfera perfecta; la rotación ha provocado que se achate en los polos y por eso la forma se puede aproximar con un elipsoide con $a = b = 6378$ km y $c = 6356$ km. Utilice la parte a) para estimar el volumen de la Tierra.

35. Evalúe la integral haciendo un cambio de variables apropiado

a) $\displaystyle\iint_R xy\; dA$, donde R es la región limitada por las rectas $2x - y = 1$, $2x - y = -3$, $3x + y = 1$ y $3x + y = -2$

b) $\displaystyle\iint_R \cos\left(\frac{y - x}{y + x}\right)\; dA$, donde R es la región trapezoidal con vértices $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 2)$ y $(0, 1)$

c) $\displaystyle\iint_R e^{x+y}\; dA$, donde R está dada por la desigualdad $|x| + |y| \leq 1$