Cálculo Avanzado

Segundo Cuatrimestre de 2009

Práctica 8

1. Evalúe las siguientes integrales

a) $\displaystyle\int_C y\, ds\,,\quad C:\ x=t^2,\ y=t\ ,\ 0\le t\le 2$

b) $\displaystyle\int_C xy^4\, ds\,,\quad C$ es la mitad de la circunferencia $x^2+y^2=16$

c) $\displaystyle\int_C xe^{yz}\, ds\,,\quad C$ es el segmento de recta de $(0,0,0)$ a $(1,2,3)$

2. Un alambre delgado se dobla en forma de semicircunferencia $x^2+y^2=4\ ,\ x\ge 0$. Si la densidad lineal es una constante k, encuentre la masa y centro de masa del alambre.

3. a) Escriba las fórmulas equivalentes a las de la ecuaciones

$$\overline{x}=\frac{1}{m}\int_C x\rho(x,y)\,ds \qquad \overline{y}=\frac{1}{m}\int_C y\rho(x,y)\,ds$$

para el centro de masa $(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$ de un alambre delgado con función de densidad $\rho(x,y,z)$ que tiene la forma de la curva espacial C.

b) Encuentre el centro de masa de un alambre en forma de la hélice parametrizada por $\mathbf{r}(t)=(2\operatorname{sen}t\ ,\ 2\cos t\ ,\ 3t)\ ,\ 0\le t\le 2\pi$, si la densidad en cualquier punto es igual al cuadrado de la distancia desde el origen.

4. Evalúe la integral de línea, donde C es la curva dada.

a) $\displaystyle\int_C xy\,dx+(x-y)\,dy\,,\quad C$ está formada por los segmentos de recta de $(0,0)$ a $(2,0)$ y de $(2,0)$ a $(3,2)$

b) $\displaystyle\int_C z^2\,dx-z\,dy+2y\,dz\,,\quad C$ está formada por los segmentos de recta $(0,0,0)$ a $(0,1,1)$, de $(0,1,1)$ a $(1,2,3)$ y de $(1,2,3)$ a $(1,2,4)$

5. Evalúe la integral de línea $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, donde C está dada por la función vectorial $\mathbf{r}(t)$.

a) $\mathbf{F}(x,y)=x^2y^3\mathbf{i}-y\sqrt{x}\mathbf{j}\ ,\quad \mathbf{r}(t)=(t^2\ ,\ -t^3)\ ,\ 0\le t\le 1$

b) $\mathbf{F}(x,y,z)=(\operatorname{sen}x\ ,\ \cos y\ ,\ xz)\,,\quad \mathbf{r}(t)=t^3\mathbf{i}-t^2\mathbf{j}+t\mathbf{k}\ ,\ 0\le t\le 1$

6. Halle el trabajo realizado por el campo de fuerza $\mathbf{F}(x,y)=x\mathbf{i}+(y+2)\mathbf{j}$ al mover un objeto a lo largo de un arco de la cicloide $\mathbf{r}(t)=(t-\operatorname{sen}t)\mathbf{i}+(1-\cos t)\mathbf{j}\ ,\ 0\le t\le 2\pi$.

7. Calcule el trabajo realizado por el campo de fuerza $\mathbf{F}(x,y,z)=(xz\ ,\ yx\ ,\ zy)$ sobre una partícula que se mueve a lo largo de la curva $\mathbf{r}(t)=(t^2\ ,\ -t^3\ ,\ t^4)\ ,\quad 0\le t\le 1$.

8. Determine si $\mathbf{F}$ es o no un campo vectorial conservativo. Si lo es, encuentre una función f tal que $\mathbf{F}=\nabla f$.

a) $\mathbf{F}(x,y) = (6x+5y)\mathbf{i} + (5x+4y)\mathbf{j}$

b) $\mathbf{F}(x,y) = xe^y\mathbf{i} + ye^x\mathbf{j}$

c) $\mathbf{F}(x,y) = (2x\cos y - y\cos x)\mathbf{i} + (-x^2 \operatorname{sen} y - \operatorname{sen} x)\mathbf{j}$

d) $\mathbf{F}(x,y) = (ye^x + \operatorname{sen} y)\mathbf{i} + (e^x + x\cos y)\mathbf{j}$

9. Encuentre una función f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$ y utilícela para evaluar $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ a lo largo de la curva C

a) $\mathbf{F}(x,y) = x^3y^4\mathbf{i} + x^4y^3\mathbf{j}$
$C:\ \mathbf{r}(t) = \sqrt{t}\mathbf{i} + (1+t^3)\mathbf{j}\ ,\ 0 \le t \le 1$

b) $\mathbf{F}(x,y,z) = y\mathbf{i} + (x+z)\mathbf{j} + y\mathbf{k}$
C es el segmento de recta de $(2,1,4)$ a $(8,3,-1)$

c) $\mathbf{F}(x,y,z) = (2xz + \operatorname{sen} y)\mathbf{i} + x\cos y\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$
$C:\ \mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j} + t\mathbf{k}\ ,\ 0 \le t \le 2$

10. Demuestre que la integral de línea es independiente de la trayectoria y evalúe la integral

$$\int_C 2x \operatorname{sen} y\ dx + (x^2\cos y - 3y^2)\ dy$$

siendo C cualquier trayectoria de $(-1,0)$ a $(5,1)$.

11. Calcule el trabajo realizado por el campo de fuerza $\mathbf{F}$ al mover un objeto de P a Q , siendo

$$\mathbf{F}(x,y) = x^2y^3\mathbf{i} + x^3y^2\mathbf{j} \qquad P=(0,0)\ ,\ Q=(2,1)$$

12. Sean $F\colon A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ el campo $F(x,y) = \left(-\dfrac{y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$.

a) ¿Es cierto que $Q_x = P_y$ en el dominio de F ?

b) Calcular $\oint_C F\cdot ds$ con C una circunferencia de radio R con centro en el origen.

c) El campo F , ¿es conservativo? Justificar.

13. Verificar el teorema de Green en los siguientes casos.

a) $F(x,y) = (-y,x)$ y la región $D \subset \mathbb{R}^2$ definida por $D = \left\{(x,y) : x^2+y^2 \le 1,\ y \le \sqrt{3}x,\ y \ge -x\right\}$.

b) $\mathbf{F}(x,y) = (xy\ ,\ x^2y^3)$, D es el triángulo con vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(1,2)$.

14. Utilice el teorema de Green para evaluar la integral de línea a lo largo de la curva dada, positivamente orientada

a) $\int_C e^x\ dx + 2xe^y\ dy$, C es el cuadrado de lados $x=0$, $x=1$, $y=0$ e $y=1$.

b) $\int_C (y + e^{\sqrt{x}})\ dx + (2x + \cos y^2)\ dy$, C es la frontera de la región limitada por las parábolas $y = x^2$ y $x = y^2$.

c) $\int_C xy\ dx + 2x^2\ dy$, C está formada por el segmento de recta de $(-2,0)$ a $(2,0)$ y la mitad superior de la circunferencia $x^2+y^2=4$.

d) $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde $\mathbf{F}(x,y) = (y^2 - x^2 y \ , \ xy^2)$ y C es la frontera del recinto definido por $x^2 + y^2 \leq 2 \, , \ 0 \leq x \leq y$.

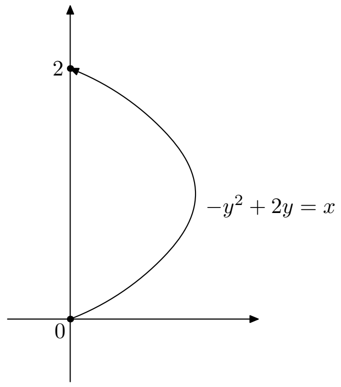
15. Calcule el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F}(x,y) = x(x+y)\mathbf{i} + xy^2\mathbf{j}$ al mover una partícula desde el origen, a lo largo del eje x hasta $(1,0)$, luego a lo largo del segmento de recta hasta $(0,1)$ y finalmente de regreso al origen, a lo largo del eje y .

16. Aplique el teorema de Green para calcular el área de la región acotada por el eje x y la curva $\mathbf{r}(t) = (t - \operatorname{sen} t \ , \ 1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

17. Calcule el área de la región limitada por la hipocicloide con ecuación vectorial $\mathbf{r}(t) = \cos^3 t\mathbf{i} + \operatorname{sen}^3 t\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

18. ¿Es posible utilizar el teorema de Green para calcular la circulación del campo del ejercicio 12 a lo largo de la circunferencia de centro 0 y radio 1 ?

19. Sea F el campo $F(x,y) = (e^{x^2} + \cos x + y \ , \ y^3 - 3y - 2x)$ y C la cuerva que une $(0,0)$ con el $(0,2)$ como muestra la figura (orientada de $(0,0)$ a $(0,2)$).
Calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot ds$.



20. Sea $F \colon \mathbb{R}^2 - \{P\} \to \mathbb{R}^2$, $F = (P,Q)$ un campo C^1 tal que $Q_x - P_y = 6$. Sean C_1 una circunferencia de centro P y radio 8 y C_2 un cuadrado de centro P y lado 6 . Calcular $\oint_{C_2^+} F \cdot ds$ sabiendo que $\oint_{C_1^+} F \cdot ds = 10$.