Cálculo Avanzado

Segundo Cuatrimestre de 2009

Práctica 9

1. Evalúe la integral de superficie.

a) $\displaystyle\iint_S yz\ dS$, S es la parte del plano $x+y+z=1$ que se encuentra en el primer octante.

b) $\displaystyle\iint_S yz\ dS$, S está dada por $z=y+3$, $x^2+y^2\leq 1$.

c) $\displaystyle\iint_S (x^2z+y^2z)\ dS$, S es la semiesfera $x^2+y^2+z^2=4$, $z\geq 0$.

d) $\displaystyle\iint_S yz\ dS$, S es la superficie de ecuaciones paramétricas $x=uv$, $y=u+v$, $z=u-v$, $u^2+v^2\leq 1$.

2. Encuentre el centro de masa de la semiesfera $x^2+y^2+z^2=a^2$, $z\geq 0$, si tiene densidad constante.

3. Encuentre la masa de un embudo delgado en forma de cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $1\leq z\leq 4$, si su función de densidad es $\rho(x,y,z)=10-z$.

4. Evalúe la integral de superficie $\displaystyle\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$ para el campo vectorial $\mathbf{F}$ dado y la superficie orientada S. En otras palabras, halle el flujo de $\mathbf{F}$ a través de S. Para superficies cerradas utilice la orientación positiva (hacia afuera).

a) $\mathbf{F}(x,y,z)=xy\ \mathbf{i}+yz\ \mathbf{j}+zx\ \mathbf{k}$
S es la parte del paraboloide $z=4-x^2-y^2$ que se encuentra arriba del cuadrado $0\leq x\leq 1$, $0\leq y\leq 1$ y tiene la orientación hacia arriba

b) $\mathbf{F}(x,y,z)=xze^y\ \mathbf{i}-xze^y\ \mathbf{j}+z\ \mathbf{k}$
S es la parte del plano $x+y+z=1$ del primer octante y tiene la orientación hacia abajo

c) $\mathbf{F}(x,y,z)=x\ \mathbf{i}+y\ \mathbf{j}+z\ \mathbf{k}$
S es la esfera $x^2+y^2+z^2=9$ con orientación interior

d) $\mathbf{F}(x,y,z)=y\ \mathbf{j}-z\ \mathbf{k}$
S está formada por el paraboloide $y=x^2+z^2$, $0\leq y\leq 1$ y el disco $x^2+z^2\leq 1$, $y=1$

e) $\mathbf{F}(x,y,z)=x\ \mathbf{i}+2y\ \mathbf{j}+3z\ \mathbf{k}$
S es el cubo de vértices $(\pm1,\pm1,\pm1)$.

5. Un fluido con densidad de 1200 fluye con velocidad $\mathbf{v}=y\ \mathbf{i}+\mathbf{j}+z\ \mathbf{k}$. Encuentre el flujo que atraviesa el paraboloide dirigido hacia arriba $z=9-\dfrac{x^2+y^2}{4}$, $x^2+y^2\leq 36$.

6. Verifique que se cumple el teorema de la divergencia para el campo vectorial $\mathbf{F}$, en la región E.

a) $\mathbf{F}(x,y,z)=3x\ \mathbf{i}+xy\ \mathbf{j}+2xz\ \mathbf{k}$, E es cubo limitado por los planos $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$, $z=0$, $z=1$.

b) $\mathbf{F}(x,y,z)=(xy\ ,\ yz\ ,\ zx)$, E es el cilindro sólido $x^2+y^2\leq 1$, $0\leq z\leq 1$.

7. Calcule el flujo de $\mathbf{F}$ a través de S.

a) $\mathbf{F}(x,y,z) = 3y^2z^3\ \mathbf{i} + 9x^2yz^2\ \mathbf{j} - 4xy^2\ \mathbf{k}$, S es la superficie del cubo con vértices $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$.

b) $\mathbf{F}(x,y,z) = (-xz\ ,\ -yz\ ,\ z^2)$, S es el elipsoide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

c) $\mathbf{F}(x,y,z) = 3xy^2\ \mathbf{i} + xe^z\ \mathbf{j} + z^3\ \mathbf{k}$, S es la superficie del sólido limitado por el cilindro $y^2 + z^2 = 1$ y los planos $x = -1$ y $x = 2$.

d) $\mathbf{F}(x,y,z) = x^3y\ \mathbf{i} - x^2y^2\ \mathbf{j} - x^2yz\ \mathbf{k}$, S es la superficie frontera del sólido $x^2 + y^2 - z^2 \leq 1$ y los planos $-2 \leq z \leq 2$.

e) $\mathbf{F}(x,y,z) = (ye^{z^2}\ ,\ y^2\ ,\ e^{xy})$, S es la superficie frontera del sólido $x^2 + y^2 \leq 9$ y los planos $-3 \leq z \leq 0$.

8. Calcular el flujo de $F(x,y,z) = (x + y^8,\ \sqrt{1+x^2} - \ln z,\ 4z)$ a través del trozo de esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 5$, con $z \geq 1$, mediante una conveniente aplicación del teorema de Gauss

(Sug:¿La superficie es cerrada? Entonces ...)

9. Usando el teorema de Gauss, calcule el flujo de $F(x,y,z) = (e^{y^2}z^2,\ yz,\ xy^2z)$ a través de la superficie $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 4$ orientada según el campo de vectores normales que apunta hacia el eje z.

10. Calculé el flujo de $F(x,y,z) = (y^3z,\ xy,\ 3\sin(\pi y))$ a través de la superficie $x^2 + z^2 = y$, $0 \leq y \leq 9$ orientada con el campo normal que verifica $N(0,0,0) = (0,1,0)$.

11. Sea $\mathbf{F}\colon A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el campo definido por

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\ ,\ \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\ ,\ \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \right).$$

a) Calcule la divergencia de $\mathbf{F}$.

b) Calcule el flujo de $\mathbf{F}$ a través de la esfera $x^2 + y^2 + (z-4)^2 = 1$.

c) Calcule el flujo de $\mathbf{F}$ a través de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

12. Verifique se cumple el Teorema de Stokes para el campo vectorial dado $\mathbf{F}$ y la superficie S.

a) $\mathbf{F}(x,y,z) = 3y\ \mathbf{i} + 4z\ \mathbf{j} - 6x\ \mathbf{k}$
S es la parte del paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$ que se encuentra arriba del plano xy, orientado hacia arriba

b) $\mathbf{F}(x,y,z) = y\ \mathbf{i} + z\ \mathbf{j} + x\ \mathbf{k}$
S es la parte del plano $x + y + z = 1$ que se encuentra en el primer octante, orientado hacia arriba.

13. Utilice el teorema de Stokes para evaluar $\displaystyle\iint_S \mathrm{rot}\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$.

a) $\mathbf{F}(x,y,z) = yz\ \mathbf{i} + xz\ \mathbf{j} + xy\ \mathbf{k}$
S es la superficie $z = 9 - x^2 - y^2$, $z \geq 5$, orientado hacia arriba

b) $\mathbf{F}(x,y,z) = x^2e^{yz}\ \mathbf{i} + y^2e^{xz}\ \mathbf{j} + z^2e^{xy}\ \mathbf{k}$
S es la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$ orientada hacia arriba

c) $\mathbf{F}(x,y,z) = xyz\ \mathbf{i} + xy\ \mathbf{j} + x^2yz\ \mathbf{k}$
S está formada por la parte superior y cuatro lados (pero no el fondo) del cubo con vértices $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ orientado hacia afuera

d) $\mathbf{F}(x,y,z) = xy\ \mathbf{i} + e^z\ \mathbf{j} + xy^2\ \mathbf{k}$
S está formada por los cuatro lados de la pirámide con vértices $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,0,1)$, $(1,0,1)$ y $(0,1,0)$ que se encuentra a la derecha del plano xz , orientado en sentido positivo del eje x .

14. Use el teorema de Stokes para evaluar $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$. En cada caso C , vista desde arriba, está orientada en sentido contrario al giro de las manecillas del reloj.

a) $\mathbf{F}(x,y,z) = (x+y^2)\ \mathbf{i} + (y+z^2)\ \mathbf{j} + (z+x^2)\ \mathbf{k}$
C es el triángulo de vértices $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$

b) $\mathbf{F}(x,y,z) = 2z\ \mathbf{i} + 4x\ \mathbf{j} + 5y\ \mathbf{k}$
C es la curva de intersección del plano $z = x+4$ y el cilindro $x^2+y^2 = 4$

c) $\mathbf{F}(x,y,z) = x^2 z\ \mathbf{i} + xy^2\ \mathbf{j} + z^2\ \mathbf{k}$
C es la curva de intersección del plano $x+y+z=1$ y el cilindro $x^2+y^2=9$ y, vista desde arriba, está orientada en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

15. Calcule el trabajo realizado por el campo de fuerza

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left((1+x^2)^x + z^2\ ,\ (1+y^2)^y + x^2\ ,\ (1+z^2)^z + y^2\right)$$

al mover una partícula alrededor del borde de la parte de la esfera $x^2+y^2+z^2=4$ que está en el primer octante, en sentido contrario al giro de las manecillas del reloj (visto desde arriba).

16. Si S es una esfera y $\mathbf{F}$ satisface las hipótesis del teorema de Stokes, demuestre que

$$\iint_S \mathrm{rot}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = 0$$

17. Pruebe cada identidad, suponiendo que S y E satisfacen las condiciones del teorema de la divergencia y las funciones escalares y componentes de los campos vectoriales tienen derivadas parciales continuas de segundo orden.

a) $\displaystyle\iint_S \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}\ dS$, donde $\mathbf{a}$ es un vector constante

b) $\displaystyle V(E) = \frac{1}{3}\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$, donde $\mathbf{F}(x,y,z) = (x,y,z)$

c) $\displaystyle\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = 0$

d) $\displaystyle\iint_S D_{\mathbf{n}} f\ dS = \iiint_E \left(f\nabla^2 g + \nabla f\cdot\nabla g\right)\ dV$

e) $\displaystyle\iint_S (f\nabla g - g\nabla f)\cdot\mathbf{n}\ dS = \iiint_E \left(f\nabla^2 g - g\nabla^2 f\right)\ dV$

18. Suponga que S y C satisfacen las hipótesis del teorema de Stokes y f , g tienen derivadas parciales continuas de segundo orden. Utilice propiedades probadas en la práctica anterior para demostrar lo siguiente.

a) $\displaystyle\int_C (f\nabla g)\cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla f\times\nabla g)\cdot d\mathbf{S}$

b) $\displaystyle\int_C (f\nabla f)\cdot d\mathbf{r} = 0$

c) $\displaystyle\int_C (f\nabla g + g\nabla f)\cdot d\mathbf{r} = 0$