CÁTEDRA DE INVESTIGACIÓN OPERATIVA
71.07

CADENAS DE MARKOV

2016

ING. HORACIO ROJO
ING. MIGUEL MIRANDA

PRÓLOGO

Las cadenas de Markov comprenden un capítulo particularmente importante de ciertos fenómenos aleatorios que afectan a sistemas de naturaleza dinámica y que se denominan procesos estocásticos. Deben su nombre a Andréi Andréievich Markov (1856-1922).

Markov fue un matemático ruso conocido por sus trabajos relacionados con la teoría de los números y la teoría de probabilidades. Nació en Riazán y estudió en la Universidad de San Petersburgo en donde, luego de obtener el doctorado, fue docente de Teoría de Probabilidades. Hizo investigaciones que permitieron generalizar el teorema central del límite y realizó estudios sobre las variables dependientes. Su aporte principal tuvo lugar en 1907 con el estudio de procesos con sucesos encadenados, en donde una variable aleatoria evoluciona en forma tal que el estado futuro de la misma depende del estado actual, pero que es independiente de la historia de dicha variable. Estos procesos, como así también el subconjunto de ellos que se conocen hoy con el nombre de Cadenas de Markov fueron estudiados y desarrollados posteriormente por su discípulo Andréi Nikoláievich Kolmogorov y, en forma independiente, por el ingeniero británico Sydney Chapman. Hoy se aplican en diversas disciplinas entre las que podemos mencionar economía, ingeniería, márketing, biología y sociología, entre otros campos.

En el capítulo 1 se describen los procesos estocásticos y dentro de ellos se encuadran los Procesos y las Cadenas de Markov. En el capítulo 2 se analizan en detalle las Cadenas de Markov de parámetro discreto, definiéndose las probabilidades de transición y de estado y las ecuaciones generales que rigen el comportamiento de esas cadenas, las que luego se aplican al estudio de las principales cadenas ergódigas y no ergódicas. En el capítulo 3 se sigue un esquema similar aplicado a las cadenas de Markov de parámetro discreto continuo, que son luego utilizadas en el capítulo 4 para la modelización de sistemas de nacimiento y muerte, y en particular para los sistemas de atención. Por último, en el capítulo 5, se muestran otras aplicaciones de las cadenas markovianas.

Queremos dejar constancia de nuestro profundo agradecimiento a Alejandro Miguel Rossi y a la Ing. Virginia Guala por la exhaustiva tarea de revisión efectuada y por los invalorables consejos y sugerencias que nos han formulado en la elaboración de este texto.

Los autores

CAPÍTULO 1

PROCESOS ESTOCÁSTICOS

INTRODUCCIÓN

Los procesos dinámicos son aquellos que describen sistemas cuyo estado varía a medida que se evoluciona sobre un parámetro t. El parámetro de evolución más común en los procesos físico-económicos reales en los campos de la ingeniería y de la administración de empresas es el tiempo.

El estado del sistema puede quedar definido por una sola variable o por una familia de variables denominada “vector de estado”. Por ejemplo, el estado de un sistema de atención al público, puede quedar definido por la cantidad de personas que se encuentran esperando recibir el servicio. El clima en un lugar geográfico es, en cambio, un proceso cuyo estado queda definido por una familia de variables (temperatura, velocidad de viento, humedad, etc.).

El conjunto de todos los valores posibles que puede asumir la variable (o familia) de estado define lo que se denomina espacio de estados del proceso y puede ser finito o infinito. Asimismo, la naturaleza de las variables que definen el espacio de estados puede ser continua o discreta.

La observación del comportamiento del sistema a través de las variables que representan su estado puede realizarse en forma continua o discreta. Es este último caso, los puntos (o instantes) de observación, pueden estar igualmente espaciados o no.

La evolución de un estado i a otro estado j entre dos etapas del proceso se denomina “transición”, y tiene asociada una probabilidad[1]. En particular, la transición entre dos etapas sucesivas se llama “paso”.

1.1 PROCESOS ESTOCÁSTICOS

Los procesos estocásticos son procesos dinámicos que evolucionan en forma aleatoria. La presencia de fenómenos aleatorios hace que el sistema avance sobre el parámetro t cambiando de estado en forma probabilística. En otras palabras, al realizar una serie de observaciones del proceso, en diferentes ocasiones y bajo idénticas condiciones, los resultados observados son, en general, diferentes. Por esta razón, para describir el comportamiento del sistema se debe definir

[1] Ver terminología en página 108

- al menos una variable aleatoria x = f(t) que represente una característica mensurable de los distintos estados que puede tomar el sistema en el instante *t* según sea el resultado del fenómeno aleatorio, y
- la probabilidad asociada a dicha variable aleatoria p(x,t). Cada una de las variables aleatorias tiene su propia función de distribución de probabilidad y puede estar vinculada o no al resto.

Luego, el proceso estocástico queda caracterizado por el conjunto

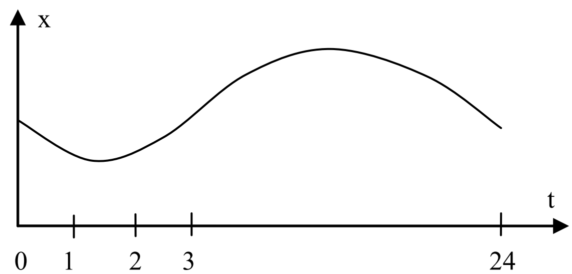
$$x;\ p(x,t)\ ;\ t \qquad (1.1)$$

Ejemplo 1.a

En un sistema de generación de energía eléctrica la potencia eléctrica horaria requerida en un día es un proceso estocástico, en donde:

x = potencia eléctrica requerida

t = 0, 1, 2, …, 24: horas del día



p(x,t) = probabilidad de que se requiera una potencia x en la hora t

1.2 CLASIFICACIÓN DE LOS PROCESOS ESTOCÁSTICOS

Para su estudio, los procesos estocásticos pueden clasificarse de diversas maneras, como se indica a continuación:

1.2.1 Clasificación de los procesos estocásticos según la memoria de la historia de estados.

Esta clasificación tiene relación con la memoria que guarda el proceso de la historia de los estados anteriores. Para efectuar este análisis se define la probabilidad condicional o de transición entre estados mediante la siguiente expresión:

$$p\left\{(x_{t+\Delta t}, t+\Delta t)\ /\ (x_t, t); (x_{t-\Delta t_1}, t-\Delta t_1); (x_{t-\Delta t_2}, t-\Delta t_2); (x_{t-\Delta t_3}, t-\Delta t_3); ....\right\} \quad (1.2)$$

siendo:

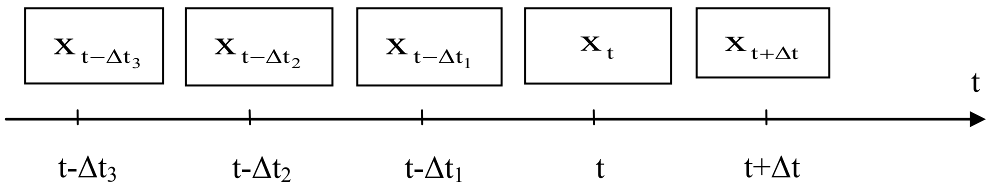
$x_{t+\Delta t}$: un estado particular en el instante $t+\Delta t$

x_t : un estado particular en el instante t

$x_{t-\Delta t_1}$: un estado particular en el instante $t-\Delta t_1$

$x_{t-\Delta t_2}$: un estado particular en el instante $t-\Delta t_2$

$x_{t-\Delta t_3}$: un estado particular en el instante $t-\Delta t_3$



En función de lo anterior, se definen los siguientes procesos:

a) Procesos aleatorios puros

Son procesos en los que se cumple que:

$$p\left(x_{t+\Delta t}, t+\Delta t \,/\, x_t, t\, ;\; x_{t-\Delta t_1}, t-\Delta t_1\, ;\, x_{t-\Delta t_2}, t-\Delta t_2\, ;\; x_{t-\Delta t_3}, t-\Delta t_3\, ;\ldots\right) = p\left(x_{t+\Delta t}, t+\Delta t\right) \tag{1.3}$$

es decir que la probabilidad de que el sistema se encuentre en un estado cualquiera $x_{t+\Delta t}$ en el instante t+Δt es independiente de cuáles hayan sido los estados anteriores x_t, $x_{t-\Delta t_1}$, $x_{t-\Delta t_2}$, etc.. Se dice que es un proceso absolutamente sin memoria, ya que la probabilidad de un estado no depende de la historia de los estados en etapas anteriores.

Muestras independientes hechas al azar en el control de calidad de lotes de materia prima recibidos en planta son un ejemplo de procesos aleatorios.

b) Procesos markovianos

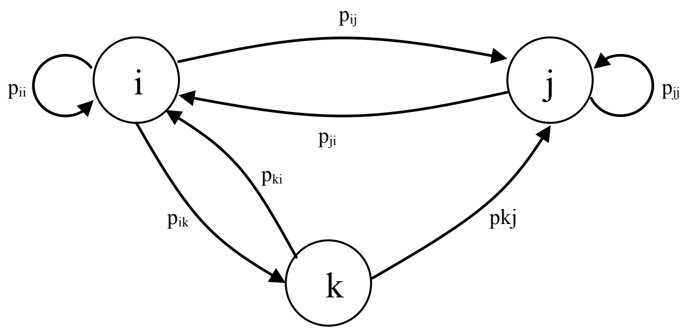
Son procesos en los que se cumple que:

$$p\left(x_{t+\Delta t}, t+\Delta t \,/\, x_t, t\, ;\, x_{t-\Delta t_1}, t-\Delta t_1\, ;\, x_{t-\Delta t_2}, t-\Delta t_2\, ;\; x_{t-\Delta t_3}, t-\Delta t_3\, ;\ldots\right) = p\left(x_{t+\Delta t}, t+\Delta t \,/\, x_t, t\right) \tag{1.4}$$

es decir que la probabilidad de que el sistema se encuentre en un estado cualquiera $x_{t+\Delta t}$ en el instante t+Δt se puede calcular si se conoce cuál ha sido el estado inmediatamente anterior x_t, con independencia de cuáles hayan sido los estados anteriores $x_{t-\Delta t_1}$, $x_{t-\Delta t_2}$, etc. Se dice que es un proceso sin memoria, ya que la probabilidad del evento en el próximo paso depende sólo del estado del sistema en el momento actual, pero no de cómo evolucionó para llegar a él. A estos procesos se los suele caracterizar como procesos en los cuales “dado el presente (x_t) el futuro ($x_{t+\Delta t}$) es independiente del pasado ($x_{t-\Delta t_1}$, $x_{t-\Delta t_2}$, ….)”. También se dice que son procesos con memoria de primer orden.

Un ejemplo de dichos procesos se encuentra en el funcionamiento de una red de transmisión de energía eléctrica en la cual el estado del sistema está dado por el número de líneas fuera de servicio en un instante dado. Otro ejemplo lo constituye un canal de telecomunicaciones, en el cual el estado del sistema es la salida digital del canal. En ambos casos los estados futuros dependen del estado actual y no de cómo se ha evolucionado para llegar a dicho estado.

Los procesos de Markov pueden representarse mediante grafos, en donde cada estado se representa con un nodo y las transiciones de un paso se indican mediante flechas, consignándose la probabilidad de transición arriba o al lado de ellas, tal como se muestra a continuación para un proceso que puede adoptar tres estados *i*, *j* y *k*:



c) <u>Procesos con memoria</u>

Son todos los restantes procesos estocásticos cuyas probabilidades condicionales de transición no cumplen con (1.3) ni (1.4). También se los llama procesos con memoria de orden superior.

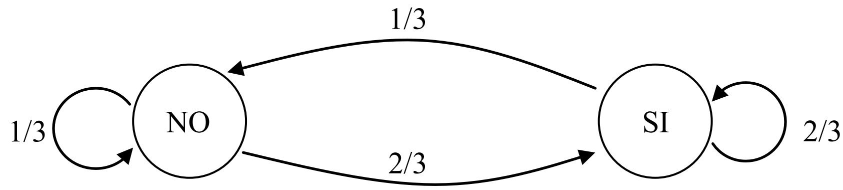
Ejemplo 1.b

El siguiente es un proceso con tres variantes que permiten ejemplificar cada uno de los procesos arriba enunciados: aleatorios, markovianos y con memoria. Dado un bolillero con tres bolillas: 1, 2 y 3, se definen las siguientes experiencias de pruebas repetidas:

a) se extraen bolillas "con reposición" y los resultados aleatorios 1, 2 o 3 definen los estados *x* del siguiente proceso:

$$x_t \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{SI, si la bolilla es 1 o 2} \\ \text{NO, si la bolilla es 3} \end{array} \right\} \quad t = 1, 2, 3, \ldots.$$

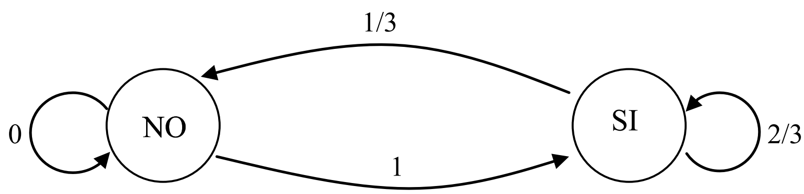
Este es un proceso aleatorio puro de ensayos independientes, pues la probabilidad de presentación de los estados "SI" y "NO" en *t* valen 2/3 y 1/3 respectivamente, independiente de cuál haya sido el estado anterior. Lo dicho se ilustra en el siguiente "grafo de transiciones" sucesivas entre estados, en el cual los nodos representan los estados del proceso, los arcos las transiciones sucesivas posibles entre estados y los atributos de los arcos las probabilidades condicionales de transición entre dos estados sucesivos:



b) se extraen bolillas “con o sin reposición” según sean los estados 1 o 2 y 3, definiéndose los estados x_t del siguiente proceso:

$$x_t \begin{cases} \text{SI, si la bolilla es 1 o 2 (y se reponen todas)} \\ \text{NO, si la bolilla es 3 (y no se repone)} \end{cases} \Bigg\} \quad t = 1, 2, 3, \ldots.$$

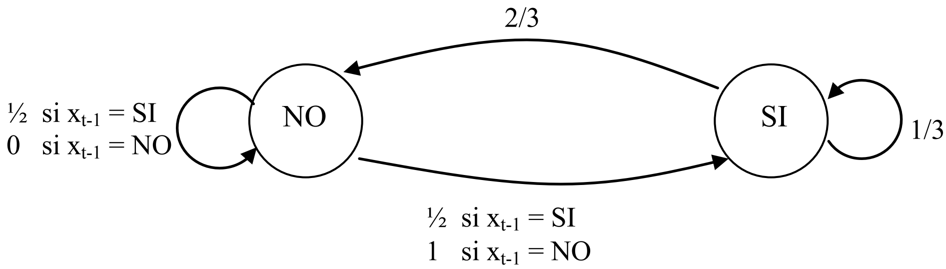
Este es un proceso tipo Markov, pues conocido un estado x_t en *t* se pueden calcular las probabilidades de los estados x_{t+1} en t+1, tal como se indica en el siguiente grafo de transiciones:



c) se extraen bolillas “con o sin reposición” según sean los estados 1 y 2 o 3 respectivamente, definiéndose los estados x_t del siguiente proceso:

$$x_t \begin{cases} \text{SI, si la bolilla es 1 (y se reponen todas)} \\ \text{NO, si la bolilla es 2 o 3 (y no se repone)} \end{cases} \Bigg\} \quad t = 1, 2, 3, \ldots.$$

Este es un proceso con memoria, pues la probabilidad del estado x_{t+1}= SI, requiere del conocimiento de los estados x_t y x_{t-1}, tal como se indica en el grafo de transiciones; y lo propio sucede para el estado x_{t+1}= NO.



1.2.2 Clasificación de los procesos estocásticos según la naturaleza discreta o continua de las variables.

Referida específicamente a los procesos de Markov, esta clasificación guarda relación con la naturaleza discreta o continua del espacio de estados de la variable x y del parámetro tiempo t.

a) Naturaleza del espacio de estados

Cuando x representa una magnitud continua (tensión o corriente eléctrica, fuerza, energía, potencia, presión, etc.), el espacio de estados de x deberá ser un intervalo de números reales, y se hablará entonces de un "proceso de Markov con estados continuos" o brevemente "proceso de Markov". En cambio, cuando x representa una magnitud discreta (cantidad de artículos en stock en un almacén, número de líneas en servicio en un sistema de transmisión de energía eléctrica, cantidad de clientes en un sistema de atención y espera, etc.), el espacio de estados x será una secuencia finita o numéricamente infinita de enteros, y se hablará entonces de un "proceso de Markov con estados discretos" o simplemente "cadena de Markov".

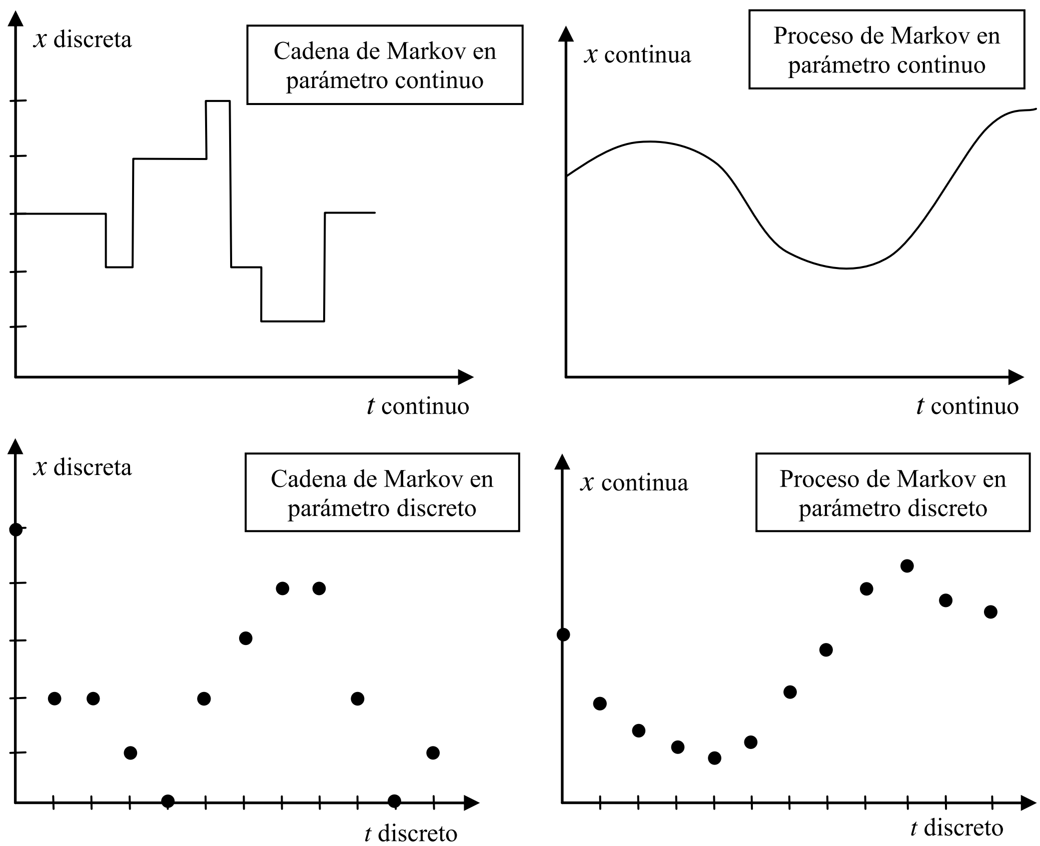
b) Naturaleza del parámetro t

La naturaleza dinámica de este tipo de sistemas hace que la definición de la variable aleatoria x requiera la especificación del parámetro t, es decir del conjunto de los instantes en que se puede observar el estado del sistema. Así, si las observaciones se llevan a cabo en cualquier instante del continuo ($t \geq 0$), se habla de un proceso o cadena de Markov en parámetro continuo, mientras que en otras ocasiones las observaciones se efectúan en determinados instantes de tiempo (por ej. de hora en hora, $t = 0, 1, 2, \dots$) y en este caso se habla de un proceso o cadena de Markov en parámetro discreto.

Lo anterior se puede resumir en el siguiente cuadro:

		Naturaleza del espacio de estados x	
		Discreto	Continuo
Naturaleza del parámetro tiempo t	Continuo ($t \geq 0$)	Cadenas de Markov en parámetro continuo	Procesos de Markov en parámetro continuo
	Discreto (t: 0, 1, 2, …)	Cadenas de Markov en parámetro discreto	Procesos de Markov en parámetro discreto

y se representa gráficamente en las figuras que se muestran a continuación:



1.2.3 Clasificación de los procesos estocásticos según su homogeneidad en el tiempo

Con referencia ahora específicamente a las cadenas de Markov, ya sean en parámetro discreto o continuo, los distintos estados de las variables x_t se suelen representar genéricamente con las letras i, j, k, etc. (o también E_i, E_j, E_k, …). En particular, los valores de dichos estados dependen de la naturaleza del sistema cuyo modelo se formula, pero habitualmente se utilizan números enteros: 0, 1, 2, …, m. Luego para las Cadenas de Markov la probabilidad condicional de transición (1.4) se expresa de la siguiente manera:

$$p\left(j, t+\Delta t \,/\, i, t\right) = p_{ij}^{(t+\Delta t)} \qquad (1.5)$$

Se dice que una cadena de Markov es homogénea cuando la probabilidad condicional de transición (1.5) del estado *i* al estado *j* en cualquier instante *t* sólo depende de la diferencia Δt, es decir;

$$p_{ij}^{(t+\Delta t)} = p_{ij}^{(\Delta t)} \quad ; \quad \forall\ t \geq 0 \qquad (1.6)$$

y que es no homogénea en caso contrario.

En base a las tres clasificaciones efectuadas se puede realizar el siguiente cuadro:

- Procesos estocásticos
  - Procesos aleatorios puros
  - Procesos markovianos
    - Procesos de Markov (estados continuos)
    - Cadenas de Markov
      - en parámetro discreto
        - Homogéneas
        - No homogéneas
      - en parámetro continuo
        - Homogéneas
        - No homogéneas
  - Procesos con memoria

Los capítulos siguientes se limitarán al análisis de las Cadenas de Markov homogéneas, tanto en parámetro discreto como continuo, las que describen una gran cantidad de procesos físico-económicos de la realidad, como ser:

- ✓ análisis de comportamientos de compra y lealtad a una marca (“brandswitching”),
- ✓ estudio de reemplazo de equipos,
- ✓ planeamiento de necesidades de personal,
- ✓ análisis de inventarios,
- ✓ análisis de créditos,
- ✓ estudio de sistemas de colas, etc.

CAPÍTULO 2

CADENAS DE MARKOV HOMOGÉNEAS EN PARÁMETRO DISCRETO

INTRODUCCIÓN

Tal como se describió en el capítulo anterior, la falta de memoria de la historia previa es una característica de las Cadenas de Markov, las que constituyen secuencias de eventos que se van evidenciando sobre un parámetro *t*, en donde cada evento (independientemente de cómo se arribó a él) condiciona la probabilidad de los próximos eventos. El sistema avanza de un estado al próximo de acuerdo a probabilidades de transición, y cuando éstas son independientes del tiempo, se dice que la cadena es homogénea.

En la primera parte de este capítulo se estudiarán las probabilidades condicionales de transición – definidas en (1.5) y (1.6) – e incondicionales de estado – definidas en (1.1) – en las Cadenas de Markov homogéneas, y se desarrollarán las ecuaciones que rigen su comportamiento, las que luego serán aplicadas al estudio del comportamiento de dichas cadenas en los regímenes transitorio y permanente.

2.1 ESTUDIO DE LAS PROBABILIDADES EN LAS CADENAS DE MARKOV HOMOGÉNEAS

2.1.1 Probabilidad condicional de transición

a) Definición general:

Tal como se ha expresado en (1.6), la probabilidad condicional de transición del estado *i* al estado *j* en un intervalo Δt en una cadena de Markov homogénea en parámetro discreto es la probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado *j* en el instante t+Δt dado que se encontraba en el estado *i* en el instante *t*:

$$p_{ij}^{(t+\Delta t)} = p\,\{(j, t+\Delta t) / (i, t)\} \qquad ; \qquad \text{con} \begin{cases} t = 0, 1, 2, ... \\ \Delta t = n = 1, 2, ... \\ i = 0, 1, 2, ..., m \\ j = 0, 1, 2, ..., m \end{cases} \tag{2.1}$$

El intervalo Δt = n es un entero y se denomina número de pasos o transiciones de la cadena sobre el parámetro *t*.

El conjunto de probabilidades de transición $p_{ij}^{(\Delta t)}$ para todos los estados *i* y *j* definen la matriz de probabilidades de transición $P^{(\Delta t)}$:

$$
P^{(\Delta t)} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ \dots \\ k \\ \dots \\ m \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & \dots & k & \dots & m \end{array} \\
\begin{bmatrix}
p_{00}^{(\Delta t)} & p_{01}^{(\Delta t)} & \dots & p_{0k}^{(\Delta t)} & \dots & p_{0m}^{(\Delta t)} \\
p_{10}^{(\Delta t)} & p_{11}^{(\Delta t)} & \dots & p_{1k}^{\Delta t} & \dots & p_{1m}^{(\Delta t)} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
p_{k0}^{(\Delta t)} & p_{k1}^{(\Delta t)} & \dots & p_{kk}^{(\Delta t)} & \dots & p_{km}^{(\Delta t)} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
p_{m0}^{(\Delta t)} & p_{m1}^{(\Delta t)} & \dots & p_{mk}^{(\Delta t)} & \dots & p_{mm}^{(\Delta t)}
\end{bmatrix} \end{array}
= \begin{bmatrix} V_0^{\Delta t} \\ V_1^{\Delta t} \\ \dots \\ V_k^{\Delta t} \\ \dots \\ V_m^{\Delta t} \end{bmatrix} \quad (2.2)
$$

Para esta matriz se cumplen las siguientes condiciones:

$$
\begin{cases}
0 \le p_{ij}^{(\Delta t)} \le 1 \qquad ; \quad \forall\, i, j & (2.3) \\
\displaystyle\sum_{j=0}^{m} p_{ij}^{(\Delta t)} = 1 \qquad ; \quad i = 0, 1, ,2, ..., m & (2.4)
\end{cases}
$$

con $\Delta t = 1, 2, 3, \ldots\ldots$

Cada vector fila $V_i^{(\Delta t)}$ enumera las probabilidades condicionales de pasar a los diferentes estados en Δt pasos, dado que el estado actual es "i".

$$V_i^{(\Delta t)} = [p_{i0}^{(\Delta t)} \quad p_{i1}^{(\Delta t)} \quad p_{i2}^{(\Delta t)} \; .... \, p_{ik}^{(\Delta t)} \, ... \, p_{im}^{(\Delta t)}]$$

b) Probabilidad de transición de un paso

Es un caso particular de la (2.1) y representa la probabilidad condicional de transición del estado *i* al estado *j* en un intervalo $\Delta t = 1$.

$$p_{ij} = p_{ij}^{(1)} = p\,\{(j, t+1) / (i, t)\} \qquad ; \qquad \text{con} \begin{cases} t = 0, 1, 2, ... \\ i = 0, 1, 2, ..., m \\ j = 0, 1, 2, ..., m \end{cases} \quad (2.5)$$

Análogamente, el conjunto de probabilidades de transición de un paso p_{ij}, para todo *i* y *j*, definen la matriz P de probabilidades de transición de un paso (denominada simplemente "matriz de transición"):

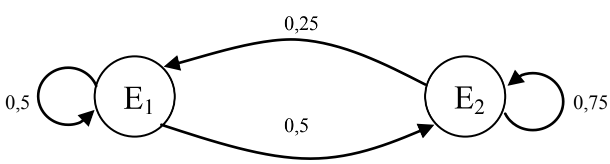
$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ \dots \\ k \\ \dots \\ m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & \dots & k & \dots & m \end{array} \\ \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & \cdots & p_{0k} & \cdots & p_{0m} \\ p_{10} & p_{11} & \cdots & p_{1k} & \cdots & p_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{k0} & p_{k1} & \cdots & p_{kk} & \cdots & p_{km} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{m0} & p_{m1} & \cdots & p_{mk} & \cdots & p_{mm} \end{bmatrix} \end{array} = \begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ \dots \\ V_k \\ \dots \\ V_m \end{bmatrix} \qquad (2.6)$$

El conjunto de probabilidades de transición desde un estado “i” a cada uno de los estados “j” que el proceso puede seguir en un solo paso, define el denominado <u>vector distribución de probabilidades de un paso</u>, $V_{ij}^{(1)}$ o, directamente, V_{ij}:

$$V_{ij} = [p_{i0}^{(0)} \quad p_{i1}^{(0)} \quad p_{i2}^{(0)} \; .... \; p_{ik}^{(0)} \; ... \; p_{im}^{(0)}] = [p_{i0} \quad p_{i1} \quad p_{i2} \; .... \; p_{ik} \; ... \; p_{im}] \qquad (2.7)$$

Ejemplo 2.a:

Una máquina se puede encontrar funcionando (estado E_1) o fuera de servicio (estado E_2). Se sabe que si en un día determinado la máquina está funcionando, la probabilidad de que el día siguiente también se encuentre funcionando es del 50%, mientras que si está fuera de servicio, la probabilidad de que al día siguiente la máquina vuelva a funcionar es del 25%. Luego, la representación gráfica y la matriz de transición de un paso se indican a continuación:



$$\begin{array}{c} \\ E_1 \\ E_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} E_1 & E_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,25 & 0,75 \end{bmatrix} \end{array}$$

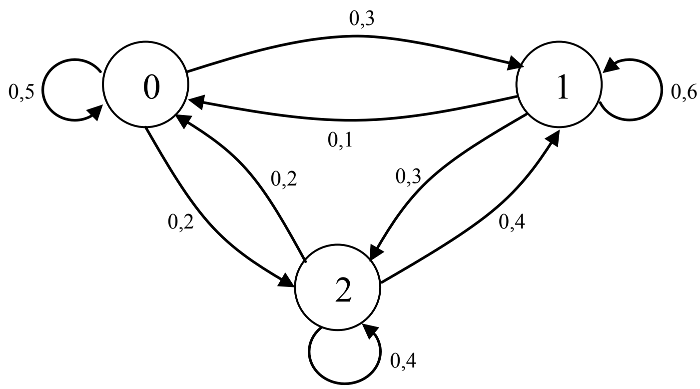
Ejemplo 2. a.bis:

Un proceso físico puede adoptar solamente tres estados (0, 1 y 2). Si el proceso se encuentra en el estado 0, la probabilidad de mantenerse en el estado 0 es de 0,5, la probabilidad de pasar al estado 1 es de 0,3 y de pasar al estado 2, de 0,2. Por su parte, si el proceso se halla en el estado 1, la probabilidad de pasar al estado 0 es de 0,1, la de mantenerse en el mismo estado 1 es de 0,6, y la de pasar al estado 2 es de 0,3. Finalmente si el sistema se encuentra en el estado 2, la probabilidad de pasar al estado 0 es de 0,2, de pasar al estado 1 es de 0,4 y de mantenerse en el mismo estado 2 es de 0,4.

La matriz de transición en un paso será:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\
P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0,6 & 0,3 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

y la representación gráfica correspondiente:



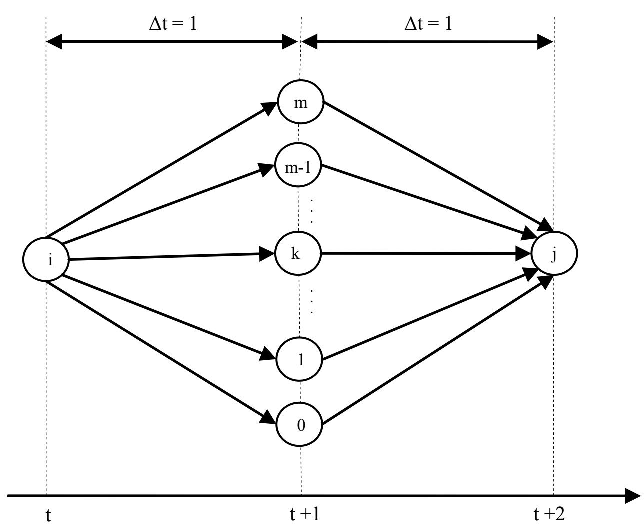
c) Probabilidad de transición de dos pasos:

En forma análoga se define:

$$
p_{ij}^{(2)} = p\{(j, t+2) / (i, t)\} \quad ; \quad \text{con} \begin{cases} t = 0, 1, 2, ... \\ i = 0, 1, 2, ..., m \\ j = 0, 1, 2, ..., m \end{cases} \tag{2.8}
$$

que se puede calcular mediante el siguiente producto de probabilidades:

$$
p_{ij}^{(2)} = \sum_{k=0}^{m} p_{ik} \cdot p_{kj} \quad ; \quad \forall \begin{cases} i = 0, 1, 2, ..., m \\ j = 0, 1, 2, ..., m \end{cases} \tag{2.9}
$$



Esto es, para todo par de estados *i* y *j* separados por un avance $\Delta t = n = 2$ pasos, la probabilidad de transición se puede expresar en función de las probabilidades de transición de un paso del estado *i* a un conjunto exhaustivo de estados *k* (todos los estados posibles) y de las probabilidades de transición de un paso de cada uno de los estados *k* al estado *j*.

Para su demostración se definen los conjuntos A, B_k y C cuyos elementos son ternas ordenadas de eventos: la primera componente es el estado del sistema en el instante t, la segunda en t+1 y la tercera en t+2:

A: conjunto de ternas cuya primera componente es el estado *i* en *t*

B_k: cada conjunto de ternas cuya segunda componente es uno de los estados *k* en *t*+1

C: conjunto de ternas cuya tercera componente es el estado j en t+2.
Además se cumple que: $P(C \cap A) = P(C/A) \cdot P(A)$

La probabilidad de pasar del estado *i* al *j* en dos pasos es, entonces:

$$p_{ij}^{(2)} = P(C/A) = \frac{P(C \cap A)}{P(A)} = \frac{\sum_{k=0}^{m} P(C \cap B_k \cap A)}{P(A)} = \frac{\sum_{k=0}^{m} P(C/B_k \cap A) \cdot P(B_k \cap A)}{P(A)}$$

y por ser una cadena de Markov se cumple la ecuación (1.4). Luego es:

$$P(C/B_k \cap A) = P(C/B_k)$$

De esta forma se demuestra la ecuación (2.9) pues:

$$p_{ij}^{(2)} = \frac{\sum_{k=0}^{m} P(C/B_k) \cdot P(B_k/A) \cdot P(A)}{P(A)} = \sum_{k=0}^{m} p_{kj} \cdot p_{ik}$$

Como se indicó anteriormente, el conjunto de probabilidades de transición de dos pasos se puede expresar mediante la matriz

$$P^{(2)} = \begin{bmatrix} p_{00}^{(2)} & p_{01}^{(2)} & \cdots & p_{0k}^{(2)} & \cdots & p_{0m}^{(2)} \\ p_{10}^{(2)} & p_{11}^{(2)} & & p_{1k}^{(2)} & & p_{1m}^{(2)} \\ \cdots & & & & & \\ p_{k0}^{(2)} & p_{k1}^{(2)} & & p_{kk}^{(2)} & & p_{km}^{(2)} \\ \cdots & & & & & \\ p_{m0}^{(2)} & p_{m1}^{(2)} & & p_{mk}^{(2)} & & p_{mm}^{(2)} \end{bmatrix} \qquad (2.10)$$

que, conforme a la ecuación de (2.9), es el producto matricial:

$$P^{(2)} = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & \cdots & p_{0k} & \cdots & p_{0m} \\ p_{10} & p_{11} & & p_{1k} & & p_{1m} \\ \cdots & & & & & \\ p_{k0} & p_{k1} & & p_{kk} & & p_{km} \\ \cdots & & & & & \\ p_{m0} & p_{m1} & & p_{mk} & & p_{mm} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & \cdots & p_{0k} & \cdots & p_{0m} \\ p_{10} & p_{11} & & p_{1k} & & p_{1m} \\ \cdots & & & & & \\ p_{k0} & p_{k1} & & p_{kk} & & p_{km} \\ \cdots & & & & & \\ p_{m0} & p_{m1} & & p_{mk} & & p_{mm} \end{bmatrix}$$

Es decir:

$$P^{(2)} = P \cdot P = P^2 \tag{2.11}$$

Ejemplo 2.b:

Supongamos que para el ejemplo 2.a se desean conocer las probabilidades de que, luego de dos días, la máquina se encuentre en cado uno de sus dos estados: E_1 (trabajando) y E_2 (fuera de servicio). Este interrogante se podría responder a través de la teoría clásica de la probabilidad de la siguiente forma:

Si el estado actual es E_1, en un paso el sistema puede mantenerse en el propio estado E_1 o pasar a E_2. Si el proceso avanzó a E_1, en la siguiente etapa podrá mantenerse en E_1 o cambiar a E_2. Si, en cambio en el primer paso avanzó a E_2, en la segunda etapa podrá retornar al estado E1 o mantenerse en E_2. La probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado E_1 luego de dos transiciones dado que el estado actual es E_1, es decir $p_{11}^{(2)}$, es igual a:

$$p_{11}^{(2)} = p_{11} \cdot p_{11} + p_{12} \cdot p_{21} = 0{,}5 \cdot 0.5 + 0{,}5 \cdot 0{,}25 = 0{,}375$$

De la misma forma, la probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado E_2 luego de dos pasos (días), dado que el estado actual es E_1, es decir $p_{12}^{(2)}$, es:

$$p_{12}^{(2)} = p_{11} \cdot p_{12} + p_{12} \cdot p_{22} = 0{,}5 \cdot 0.5 + 0{,}5 \cdot 0{,}75 = 0{,}625$$

Si el estado actual es E_2, en cambio, en el primer paso el sistema puede pasar a E_1 o mantenerse en E_2. Si pasó a E_1, en la segunda transición el proceso podrá mantenerse en E_1 o volver a E_2. Si, en cambio en el primer paso se mantuvo en E_2, en la segunda etapa podrá retornar al estado E_1 o mantenerse en E_2. La probabilidad de que, luego de dos pasos el sistema se encuentre en E_1 es igual a:

$$p_{21}^{(2)} = p_{21} \cdot p_{11} + p_{22} \cdot p_{21} = 0{,}25 \cdot 0.5 + 0{,}75 \cdot 0{,}25 = 0{,}3125$$

Asimismo, la probabilidad de que se encuentre en E_2 después de los dos días es:

$$p_{22}^{(2)} = p_{21} \cdot p_{12} + p_{22} \cdot p_{22} = 0{,}25 \cdot 0.5 + 0{,}75 \cdot 0{,}75 = 0{,}6875$$

De esta forma, hemos descrito todas las probabilidades asociadas a cada uno de los estados del sistema luego de dos pasos. Esta información se puede resumir en la matriz de transición de dos pasos:

$$P^{(2)} = \begin{bmatrix} p_{11}^{(2)} & p_{12}^{(2)} \\ p_{21}^{(2)} & p_{22}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} \cdot p_{11} + p_{12} \cdot p_{21} & p_{11} \cdot p_{12} + p_{12} \cdot p_{22} \\ p_{21} \cdot p_{11} + p_{22} \cdot p_{21} & p_{21} \cdot p_{12} + p_{22} \cdot p_{22} \end{bmatrix}$$

$$P^{(2)} = \begin{bmatrix} 0{,}5 \cdot 0.5 + 0{,}5 \cdot 0{,}25 & 0{,}5 \cdot 0.5 + 0{,}5 \cdot 0{,}75 \\ 0{,}25 \cdot 0.5 + 0{,}75 \cdot 0{,}25 & 0{,}25 \cdot 0.5 + 0{,}75 \cdot 0{,}75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}3750 & 0{,}6255 \\ 0{,}3125 & 0{,}6875 \end{bmatrix}$$

Sin embargo, se pueden responder los interrogantes de manera más sencilla calculando directamente la matriz P^2, conforme a la expresión (2.11):

$$P^2 = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} \cdot p_{11} + p_{12} \cdot p_{21} & p_{11} \cdot p_{12} + p_{12} \cdot p_{22} \\ p_{21} \cdot p_{11} + p_{22} \cdot p_{21} & p_{21} \cdot p_{12} + p_{22} \cdot p_{22} \end{bmatrix}$$

Es decir, cada elemento de la matriz anterior enuncia la probabilidad de transición en dos pasos para los dos estados y para cada estado inicial.

d) Ecuación de Chapman-Kolmogorov:

En forma genérica, la probabilidad de transición de *n* pasos es:

$$p_{ij}^{(n)} = p\left\{(j, t+1) / (i, t)\right\} \quad ; \quad \text{con} \begin{cases} t = 0, 1, 2, ... \\ n = 1, 2, .3, ... \\ i = 0, 1, 2, ..., m \\ j = 0, 1, 2, ..., m \end{cases} \tag{2.12}$$

Repitiendo el proceso descripto en el punto anterior para deducir la ecuación (2.9) se llega a la siguiente expresión algebraica general:

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^{m} p_{ik} \cdot p_{kj}^{(n-1)} \quad ; \quad \forall \begin{cases} i = 0, 1, 2, ..., m \\ j = 0, 1, 2, ..., m \end{cases} \tag{2.13.a}$$

que también se puede formular como:

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^{m} p_{ik}^{(n-1)} \cdot p_{kj} \cdot \quad ; \quad \forall \begin{cases} i = 0, 1, 2, ..., m \\ j = 0, 1, 2, ..., m \end{cases} \tag{2.13.b}$$

La expresión anterior es conocida como ecuación de Chapman-Kolmogorov, que establece que la probabilidad de pasar de un estado *i* a un estado *j* en *n* pasos puede calcularse a partir de la suma de las probabilidades conjuntas de pasar desde el estado *i* a cada uno de los posibles estados *k* que puede asumir el proceso en el paso *n-1* y desde el estado *k* al estado *j* en el último paso.

Como antes, el conjunto de probabilidades de transición de *n* pasos $p_{ij}^{(n)}$, para todo *i* y *j*, definen la matriz de probabilidades de transición de *n* pasos:

$$P^{(n)} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ \ldots \\ k \\ \ldots \\ m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & \ldots & k & \ldots & m \end{array} \\ \begin{bmatrix} p_{00}^{(n)} & p_{01}^{(n)} & \ldots & p_{0k}^{(n)} & \ldots & p_{0m}^{(n)} \\ p_{10}^{(n)} & p_{11}^{(n)} & & p_{1k}^{(n)} & & p_{1m}^{(n)} \\ \ldots & & & & & \\ p_{k0}^{(n)} & p_{k1}^{(n)} & & p_{kk}^{(n)} & & p_{km}^{(n)} \\ \ldots & & & & & \\ p_{m0}^{(n)} & p_{m1}^{(n)} & & p_{mk}^{(n)} & & p_{mm}^{(n)} \end{bmatrix} \end{array} \tag{2.14}$$

en donde cada fila constituye el vector de probabilidades $V_i^{(n)}$ de pasar desde el estado i al estado j en n pasos. La expresión matricial general de la ecuación de Chapman-Kolmogorov, tomando por ejemplo la forma (2.13a), queda:

$$P^{(n)} = \begin{bmatrix} p_{00}^{(n)} & p_{01}^{(n)} & \ldots & p_{0k}^{(n)} & \ldots & p_{0m}^{(n)} \\ p_{10}^{(n)} & p_{11}^{(n)} & & p_{1k}^{(n)} & & p_{1m}^{(n)} \\ \ldots & & & & & \\ p_{k0}^{(n)} & p_{k1}^{(n)} & & p_{kk}^{(n)} & & p_{km}^{(n)} \\ \ldots & & & & & \\ p_{m0}^{(n)} & p_{m1}^{(n)} & & p_{mk}^{(n)} & & p_{mm}^{(n)} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & \ldots & p_{0k} & \ldots & p_{0m} \\ p_{10} & p_{11} & & p_{1k} & & p_{1m} \\ \ldots & & & & & \\ p_{k0} & p_{k1} & & p_{kk} & & p_{km} \\ \ldots & & & & & \\ p_{m0} & p_{m1} & & p_{mk} & & p_{mm} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_{00}^{(n-1)} & p_{01}^{(n-1)} & \ldots & p_{0k}^{(n-1)} & \ldots & p_{0m}^{(n-1)} \\ p_{10}^{(n-1)} & p_{11}^{(n-1)} & & p_{1k}^{(n-1)} & & p_{1m}^{(n-1)} \\ \ldots & & & & & \\ p_{k0}^{(n-1)} & p_{k1}^{(n-1)} & & p_{kk}^{(n-1)} & & p_{km}^{(n-1)} \\ \ldots & & & & & \\ p_{m0}^{(n-1)} & p_{m1}^{(n-1)} & & p_{mk}^{(n-1)} & & p_{mm}^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

Es decir:

$$P^{(n)} = P \cdot P^{(n-1)}$$

Extendiendo la ecuación anterior en forma recurrente se obtiene:

$$P^{(n)} = P \cdot P^{(n-1)} = P \cdot P \cdot P^{(n-2)} = P \cdot P \cdot P \cdot P^{(n-3)} = \ldots.$$

$$\boxed{P^{(n)} = P^n} \tag{2.15}$$

que es la expresión genérica matricial de la ecuación de Chapman-Kolmogorov.

Ejemplo 2.c

Las matrices de transición de 3, 4 y 5 pasos de la cadena del ejemplo 2.b son:

$$P^3 = P^2 \cdot P = \begin{bmatrix} 0{,}375 & 0{,}625 \\ 0{,}3125 & 0{,}6875 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}25 & 0{,}75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}34375 & 0{,}65625 \\ 0{,}32812 & 0{,}67187 \end{bmatrix}$$

$$P^4 = P^3 \cdot P = \begin{bmatrix} 034375 & 0{,}65625 \\ 0{,}32812 & 067187 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}25 & 0{,}75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}33593 & 0{,}66406 \\ 0{,}33203 & 0{,}66796 \end{bmatrix}$$

$$P^5 = P^4 \cdot P = \begin{bmatrix} 0{,}33593 & 0{,}66406 \\ 0{,}33203 & 0{,}66796 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}25 & 0{,}75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}33398 & 0{,}66601 \\ 0{,}33300 & 0{,}66699 \end{bmatrix}$$

2.1.2 Probabilidad incondicional de estado

a) Definición general

Tal como se ha expresado en (1.1), la probabilidad incondicional de estado de una cadena de Markov homogénea en parámetro discreto es la probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado *i* en el instante *t*:

$$p(i,t) \qquad \text{con} \begin{cases} t = 0, 1, 2, \ldots\ldots., \\ i = 0, 1, 2, \ldots, m \end{cases} \tag{2.16}$$

y el conjunto de probabilidades incondicionales de estado $p(i,t)\ \forall i$, definen el vector de probabilidades de estado $V^{(t)}$:

$$V^{(t)} = [p(0,t) \quad p(1,t) \quad p(2,t) \ldots.\, p(k,t) \ldots p(m,t)]$$

vector en el cual se cumplen las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} 0 \le p(i,t) \le 1 \qquad ; \quad \forall\, i & (2.17) \\ \sum_{i=0}^{m} p(i,t) = 1 \qquad ; \quad \text{con } i = 0, 1, ,2, \ldots. & (2.18) \end{cases}$$

b) Probabilidad de estado inicial

Es un caso especial de (2.16), para t = 0:

$$p(i,0) \qquad \text{con } i = 0, 1, ..., m \tag{2.19}$$

y el conjunto de probabilidades de estado iniciales $p(i,0) \ \forall i$, definen el vector de probabilidades de estado inicial:

$$V^{(0)} = [p(0,0) \quad p(1,0) \quad p(2,0) \ .... \ p(k,0) \ ... \ p(m,0)] \tag{2.20}$$

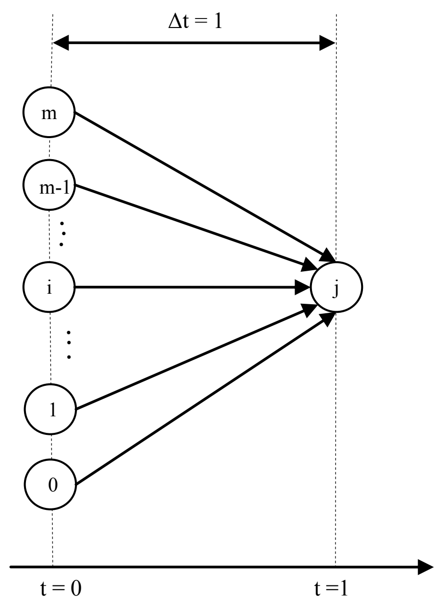
c) Probabilidad de estado luego de un paso

Para cada estado inicial *j*, la probabilidad luego de un paso

$$p(j,1) \qquad \text{con } j = 0, 1, ..., m \tag{2.21}$$

se puede expresar en función de las probabilidades de estado iniciales aplicando el Teorema de Probabilidad total, quedando expresada la llamada <u>ecuación de estado</u>:

$$p(j,1) = \sum_{i=0}^{m} p(i,0) \cdot p_{ij} \qquad ; \text{con } j = 0, 1, ..., m \tag{2.22}$$



Como antes, el conjunto de probabilidades de estado luego de un paso $p_j^{(1)}, \forall j$, define el vector de probabilidades de estado luego de 1 paso:

$$V^{(1)} = [p(0,1) \quad p(1,1) \quad p(2,1) \ .... \ p(k,1) \ ... \ p(m,1)]$$
(2.23)

Aplicando la ecuación de estado (2.22) a cada uno de los elementos del vector (2.23), queda la expresión matricial de la ecuación de estado:

$$V^{(1)} = [p(0,1) \quad p(1,1) \dots p(k,1) \dots p(m,1)] =$$

$$= [p(0,0) \quad p(1,0) \dots p(k,0) \dots p(m,0)] \cdot \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & \cdots & p_{0k} & \cdots & p_{0m} \\ p_{10} & p_{11} & \cdots & p_{1k} & \cdots & p_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{k0} & p_{k1} & \cdots & p_{kk} & \cdots & p_{km} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{m0} & p_{m1} & \cdots & p_{mk} & \cdots & p_{mm} \end{bmatrix}$$

Es decir:

$$V^{(1)} = V^0 \cdot P \tag{2.24}$$

d) Expresión general de la Ecuación de Estado

En forma genérica, para determinar la probabilidad de estado luego de *n* pasos:

$$p(j, n) \qquad \text{con} \begin{cases} n = 1, 2, 3, \dots, \\ j = 0, 1, \ \dots, m \end{cases} \tag{2.25}$$

se hacen las mismas consideraciones que para deducir la ecuación (2.22), llegándose a la expresión algebraica general de la ecuación de estado:

$$p(j, n) = \sum_{i=0}^{m} p(i,0) \cdot p_{ij}^{(n)} \quad ; \text{con} \begin{cases} n = 1, 2, .3,.., \\ j = 0, 1, \dots, m \end{cases} \tag{2.26.a}$$

que también puede formularse como:

$$p(j, n) = \sum_{i=0}^{m} p(i, n-1) \cdot p_{ij} \quad ; \text{con} \begin{cases} n = 1, 2, .3,.., \\ j = 0, 1, \dots, m \end{cases} \tag{2.26.b}$$

Como antes, el conjunto de probabilidades de estado luego de *n* pasos p(j,n) define el vector de probabilidades de estado:

$$V^{(n)} = [p(0, n) \quad p(1, n) \quad p(2, n) \dots . p(k, n) \dots p(m, n)] \tag{2.27}$$

y la expresión matricial general de la ecuación de estado, tomando por ejemplo la primera forma (2.26.a), queda:

$$V^{(n)} = [p(0,0) \ \ p(1,0) \dots p(k,0) \dots p(m,0)] \cdot \begin{bmatrix} p_{00}^{(n)} & p_{01}^{(n)} & \cdots & p_{0k}^{(n)} & \cdots & p_{0m}^{(n)} \\ p_{10}^{(n)} & p_{11}^{(n)} & \cdots & p_{1k}^{(n)} & \cdots & p_{1m}^{(n)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{k0}^{(n)} & p_{k1}^{(n)} & \cdots & p_{kk}^{(n)} & \cdots & p_{km}^{(n)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{m0}^{(n)} & p_{m1}^{(n)} & \cdots & p_{mk}^{(n)} & \cdots & p_{mm}^{(n)} \end{bmatrix}$$

Es decir:

$$V^{(n)} = V^0 \cdot P^n \qquad (2.28)$$

Análogamente, tomando la segunda forma (2.26.b) queda:

$$V^{(n)} = [p(0,n-1) \quad p(1,n-1) \quad \dots \quad p(m,n-1)] \cdot \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & \cdots & p_{0m} \\ p_{10} & p_{11} & \cdots & p_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{m0} & p_{m1} & \cdots & p_{mm} \end{bmatrix}$$

Es decir:

$$V^{(n)} = V^{n-1} \cdot P \qquad (2.29)$$

Las ecuaciones (2.28) y (2.29) constituyen las expresiones genéricas matriciales de la ecuación de estado, que se pueden resumir en la siguiente expresión:

$$\boxed{V^{(n)} = \begin{cases} V^0 \cdot P^{(n)} \\ \\ V^{n-1} \cdot P \end{cases}} \qquad (2.30)$$

Las ecuaciones (2.15) y (2.30) permiten calcular la probabilidad de cada uno de los estados de la cadena, luego de un número *n* de pasos, conocidas la probabilidad de estado para un instante dado y la matriz P de probabilidades de transición de un paso.

Ejemplo 2.d

Para el ejemplo de la cadena de Markov descripta en la experiencia b del ejemplo 1.a, en donde la matriz de transición de un paso estaba dada por:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0{,}333 & 0{,}667 \end{bmatrix}$$

si se parte de un estado inicial con las siguientes probabilidades:

$$\begin{cases} p(0,0) = 0{,}5 \\ p(1,0) = 0{,}5 \end{cases}$$

es decir, $V^{(0)} = \left[0{,}5 \quad 0{,}5\right]$

las probabilidades de 1, 2, 3 y 4 pasos serán respectivamente:

$$V^{(1)} = V^{(0)} \cdot P = \left[0{,}5 \quad 0{,}5\right] \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0{,}333 & 0{,}667 \end{bmatrix} = \left[0{,}167 \quad 0{,}833\right]$$

$$V^{(2)} = V^{(0)} \cdot P^2 = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}333 & 0{,}667 \\ 0{,}222 & 0{,}778 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}278 & 0{,}722 \end{bmatrix}$$

$$V^{(3)} = V^{(0)} \cdot P^3 = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}222 & 0{,}778 \\ 0{,}259 & 0{,}741 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}241 & 0{,}759 \end{bmatrix}$$

$$V^{(4)} = V^{(0)} \cdot P^4 = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}259 & 0{,}741 \\ 0{,}251 & 0{,}749 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}253 & 0{,}751 \end{bmatrix}$$

e) Generalización del Régimen transitorio para un estado cualquiera i

Conocido un estado inicial *i* del proceso las expresiones (2.28) o (2.29), se aplican para calcular las probabilidades de estado luego de *n* pasos y constituyen, junto con la condición de colectividad exhaustiva, las condiciones de Chapman-Kolmogorov:

$$\begin{cases} V_i^{(n)} = V_i^{(n-1)} \cdot P \\ \sum_{i=0}^{m} p(i,n) = 1 \end{cases} \qquad (2.31.a)$$

$$\begin{cases} V_i^{(n)} = V_i \cdot P^{(n)} \\ \sum_{i=0}^{m} p(i,n) = 1 \end{cases} \qquad (2.31.b)$$

Ejemplo 2.e

En la cadena del ejemplo 2b, si se supone que el estado inicial es E_1 (máquina funcionando) tendremos que el vector de transición en un paso es:

$$V_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

Luego, la probabilidad de que el proceso se encuentre en los estados E_1 y E_2, en dos pasos (días) es:

$$V_1^{(2)} = V_1^{(1)} \cdot P = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}25 & 0{,}75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}375 & 0{,}625 \end{bmatrix}$$

La probabilidad de que en dos pasos se encuentre en el estado E_1 (funcionando) es, entonces, 0,375 y que se encuentre en el estado E_2 (fuera de servicio) es 0,625.

Luego de tres pasos, la respuesta se puede obtener mediante el producto del vector de transición en dos pasos por la matriz de transición:

$$V_1^{(3)} = V_1^{(2)} \cdot P = \begin{bmatrix} 0{,}375 & 0{,}625 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}25 & 0{,}75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}34375 & 0{,}65625 \end{bmatrix}$$

o bien multiplicando el vector de transición en un paso por la matriz de transición en dos pasos:

$$V_1^{(3)} = V_1 \cdot P^{(2)} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,375 & 0,625 \\ 0,3125 & 0,6875 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,34375 & 0,65625 \end{bmatrix}$$

Si en cambio, el estado actual es E_2 (máquina fuera de servicio), luego de dos pasos las probabilidades estarán dadas por el vector $V_2^{(2)}$:

$$V_2^{(2)} = V_2^{(1)} \cdot P = \begin{bmatrix} 0,25 & 0,75 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,25 & 0,75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3125 & 0,6875 \end{bmatrix}$$

Y de tres pasos por el vector $V_2^{(3)}$:

$$V_2^{(3)} = V_2^{(2)} \cdot P = \begin{bmatrix} 0,3125 & 0,6875 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,25 & 0,75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,32812 & 0,67187 \end{bmatrix}$$

Obsérvese que se habría arribado a estos mismos resultados, como se vio en el ejemplo 2c, con las matrices de transición de 2 y 3 pasos:

$$P^{(2)} = P^2 = \begin{bmatrix} V_1^{(2)} \\ V_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,375 & 0,625 \\ 0,3125 & 0,6875 \end{bmatrix}$$

$$P^{(3)} = P^3 = \begin{bmatrix} V_1^{(3)} \\ V_2^{(3)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,34375 & 0,65625 \\ 0,32812 & 0,67187 \end{bmatrix}$$

2.2 CLASIFICACIÓN Y ANÁLISIS DE CADENAS DE MARKOV HOMOGÉNEAS

A continuación se efectúa una clasificación de las Cadenas de Markov homogéneas según la posibilidad o no de que puedan ser reducibles o separables en cadenas más chicas para el estudio de su comportamiento tanto en el régimen transitorio como en el permanente. Esta clasificación dará lugar a la definición de las cadenas ergódicas (o irreductibles) y las cadenas no ergódicas (o reducibles o separables). Previamente, se definirán los diferentes tipos de estados y de clases o conjuntos de estados.

2.2.1 Estados accesibles y comunicantes

Un estado *j* es accesible desde un estado *i* si para algún paso $n \geq 1$ se cumple que $p_{ij}^{(n)} > 0$, y se escribe:

$$i \rightarrow j$$

La accesibilidad es una propiedad transitiva, es decir si $i \rightarrow j$ y $j \rightarrow k \Rightarrow i \rightarrow k$

Dos estados *i* y *j* se comunican si *j* es accesible desde *i* y si *i* es accesible desde *j*, y se escribe:

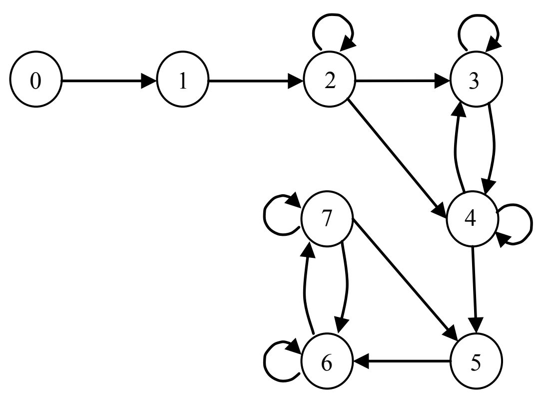
$i \leftrightarrow j$

La comunicación también es una propiedad transitiva, es decir

si $i \leftrightarrow j$ y $j \leftrightarrow k \Rightarrow i \leftrightarrow k$

Ejemplo 2.f

En la cadena markoviana siguiente, en cuya matriz de transición se indican con una "x" los valores de $p_{ij} > 0$, el estado 6 es accesible desde el 5 en un paso y desde el 4 en dos pasos, a través del estado 5.



$$
\begin{array}{c|c}
i\backslash j & \begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\
\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} &
\left[\begin{array}{cccccccc}
 & x & & & & & & \\
 & & x & & & & & \\
 & & x & x & x & & & \\
 & & & x & x & & & \\
 & & & x & x & x & & \\
 & & & & & & x & \\
 & & & & & & x & x \\
 & & & & & x & x & x
\end{array}\right]
\end{array}
$$

Por ejemplo, el estado 2 no es accesible desde el 3.

Los estados 3 y 4 son comunicantes, como también lo son los estados 5 y 7.

Los estados 4 y 7, sin embargo, no son comunicantes, dado que si bien el estado 7 es accesible desde el 4, el estado 4 no es accesible desde el 7.

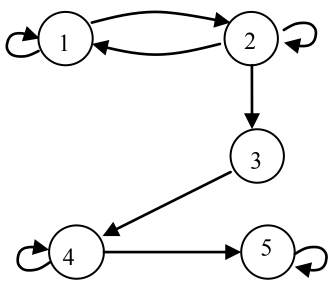
2.2.2 Estados recurrentes y sin retorno

Un estado *i* es recurrente si, una vez que el proceso lo alcanza, regresará a él. Un estado que no se comunica con ningún otro estado, ni siquiera consigo mismo, se llama sin retorno.

Un caso especial de estado recurrente es el denominado estado absorbente, que es aquel al que, si el proceso lo alcanza, la probabilidad de abandonarlo es cero. Es decir, un estado *i* es absorbente si la probabilidad de transición en un paso $p_{ii} = 1$.

Ejemplo 2.g

En la siguiente cadena, el estado 3 es un estado sin retorno:



$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{bmatrix} x & x & & & \\ x & x & x & & \\ & & & 1 & \\ & & & x & x \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Es decir, es un estado que no se comunica con ningún otro; ni siguiera consigo mismo. El estado sin retorno es un caso particular de estado transitorio en donde, una vez alcanzado, la probabilidad de que el proceso no regrese nunca a él es igual a 1.

El estado 5 es absorbente. Una vez que el proceso lo alcanza, ya no sale más del mismo (o el proceso se termina).

2.2.3 Clases comunicantes

Una clase comunicante es un conjunto de estados que se comunican entre sí. Una clase puede consistir en un solo estado.

En el ejemplo 2.f se pueden formar las siguientes clases comunicantes:

$$\begin{cases} C_1 = \{2\} \\ C_2 = \{3, 4\} \\ C_3 = \{5, 6, 7\} \end{cases}$$

Las clases comunicantes se pueden clasificar en recurrentes y transitorias.

Una clase es recurrente cuando la probabilidad de que la cadena se encuentre en un estado de dicha clase después de ∞ transiciones es positiva; esto significa que una vez que la cadena ha alcanzado dicha clase, siempre regresará a ella.

En el ejemplo 2.f, la clase C_3 es recurrente.

Una clase es transitoria cuando la probabilidad de que la cadena se encuentre en un estado de dicha clase después de ∞ transiciones es nula; esto significa que una vez que la cadena ha alcanzado dicha clase, existe una probabilidad de que no retorne nunca a ella.

En el ejemplo 2.f. las clases C_1 y C_2 son transitorias.

Resumiendo lo anterior, los estados y las clases pueden clasificarse de la siguiente manera:

$$
\begin{cases}
\text{Comunicantes} \begin{cases} \text{Recurrentes} \begin{cases} \text{Absorbentes} \\ \text{No absorbentes} \end{cases} \\ \text{Transitorias} \end{cases} \\
\text{Sin retorno}
\end{cases}
$$

2.2.4 <u>Clasificación de las Cadenas de Markov homogéneas</u>

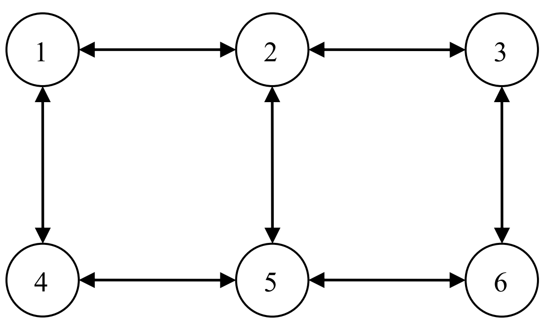
Las Cadenas de Markov homogéneas se pueden clasificar de la siguiente forma:

$$
\begin{cases}
\text{Ergódicas} \begin{cases} \text{Regulares} \\ \text{Periódicas} \end{cases} \\
\begin{matrix}\text{No ergódicas} \\ \text{(o separables)}\end{matrix} \begin{cases} \text{Absorbentes} \\ \text{Cíclicas} \end{cases}
\end{cases}
$$

<u>Cadenas ergódicas</u>:

Una cadena de Markok homogénea es ergódica o irreductible cuando todos sus estados se comunican; es decir, cuando constituyen una única clase comunicante recurrente.

Por ejemplo, la siguiente cadena es ergódica:



$$
\begin{array}{c|cccccc|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
\hline
1 & & x & & x & & \\
2 & x & & x & & x & \\
3 & & x & & & & x \\
4 & x & & & & x & \\
5 & & x & & x & & x \\
6 & & & x & & x & \\
\end{array}
$$

Los estados de una cadena irreductible son todos recurrentes. Estas cadenas se llaman así porque forman una sola clase comunicante (se pueden reducir únicamente a una clase).

Las cadenas ergódigas pueden ser clasificadas en regulares y periódicas.

a) Cadenas regulares

Una cadena ergódica es regular o aperiódica si alguna de las potencias de su matriz de transición contiene sólo elementos positivos; por ejemplo:

$$P = \begin{bmatrix} x & x & & x & x \\ & x & x & & x \\ & & & x & x \\ x & & x & & x \\ x & x & & & \end{bmatrix}$$

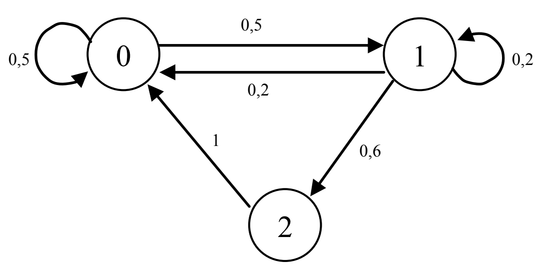
$$P^2 = \begin{bmatrix} x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \\ x & x & x & & x \\ x & x & & x & x \\ x & x & x & x & x \end{bmatrix}$$

$$P^4 = \begin{bmatrix} x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \end{bmatrix}$$

Un criterio para comprobar que una cadena es regular consiste en calcular las sucesivas potencias de P hasta encontrar un número r de pasos tal que la matriz P^r tiene todos sus elementos no nulos.

Ejemplo 2.h

La siguiente cadena



$$P = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 1 & & \end{bmatrix}$$

es regular. En efecto, si bien al elevar la matriz al cuadrado no todos los elementos son distintos de cero:

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0{,}35 & 0{,}35 & 0{,}30 \\ 0{,}74 & 0{,}14 & 0{,}12 \\ 0{,}50 & 0{,}50 & 0 \end{bmatrix}$$

puede observarse que para r = 3 todos los elementos son no nulos:

$$P^3 = \begin{bmatrix} 0{,}545 & 0{,}245 & 0{,}210 \\ 0{,}518 & 0{,}398 & 0{,}084 \\ 0{,}350 & 0{,}350 & 0{,}300 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, es una cadena ergódica regular.

b) Cadenas periódicas:

Una cadena, es periódica cuando no puede encontrarse una potencia de P para la cual todos los elementos sean positivos. Es decir, las sucesivas potencias de la matriz P^r denotan un patrón periódico que permite asegurar siempre la presencia de al menos un cero en P^r. Un ejemplo de cadena periódica es la siguiente:

$$P = \begin{bmatrix} & x & x & \\ x & & & x \\ x & & & x \\ & x & x & \end{bmatrix} \quad P^2 = \begin{bmatrix} x & & & x \\ & x & x & \\ & x & x & \\ x & & & x \end{bmatrix} \quad P^3 = \begin{bmatrix} & x & x & \\ x & & & x \\ x & & & x \\ & x & x & \end{bmatrix} \quad P^4 = \begin{bmatrix} x & & & x \\ & x & x & \\ & x & x & \\ x & & & x \end{bmatrix}$$

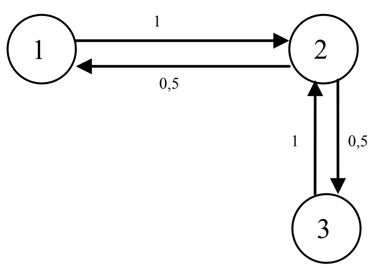
en donde se cumple que

$P^2 = P^4 = P^6 = \dots P^m$ (para *m* par), y

$P = P^3 = P^5 = \dots P^n$ (para *n* impar).

Ejemplo 2.i

La siguiente cadena:



$$P = \begin{bmatrix} & 1 & \\ 0{,}5 & & 0{,}5 \\ & 1 & \end{bmatrix}$$

es ergódica pues sus sucesivas potencias son:

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0{,}5 & & 0{,}5 \\ & 1 & \\ 0{,}5 & & 0{,}5 \end{bmatrix}; \qquad P^3 = \begin{bmatrix} & 1 & \\ 0{,}5 & & 0{,}5 \\ & 1 & \end{bmatrix};$$

$$P^4 = \begin{bmatrix} 0{,}5 & & 0{,}5 \\ & 1 & \\ 0{,}5 & & 0{,}5 \end{bmatrix}; \qquad P^5 = \begin{bmatrix} & 1 & \\ 0{,}5 & & 0{,}5 \\ & 1 & \end{bmatrix}; \dots.$$

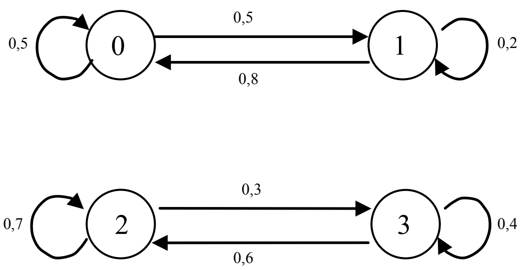
en donde se observa un patrón de repetición periódico, con la presencia siempre de ceros en las matrices.

Cadenas no ergódicas

Una cadena de Markov es no ergódica o reducible cuando no todos sus estados son comunicantes. Esto significa que se la puede reducir o separar en clases comunicantes y/o estados sin retorno. Si una cadena tiene por lo menos un estado sin retorno es no ergódica.

Ejemplo 2.j

La siguiente cadena:



$$P = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0,8 & 0,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,7 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0,6 & 0,4 \end{bmatrix}$$

Es separable en dos clases comunicantes recurrentes:

$$\begin{cases} C_1 = \{0, 1\} \\ C_2 = \{2, 3\} \end{cases}$$

La cadena del ejemplo 2.f es separable en:

- Una clase comunicante recurrente: $C_3 = \{5, 6, 7\}$
- Dos clases comunicantes transitorias: $C_1 = \{2\}$ y $C_2 = \{3, 4\}$
- Dos estados sin retorno: 0 y 1.

Dentro de las cadenas no ergódicas merecen especial atención dos tipos de cadenas denominadas, respectivamente, cadenas absorbentes y cadenas cíclicas.

a) Cadenas absorbentes

Una cadena de Markov es absorbente si

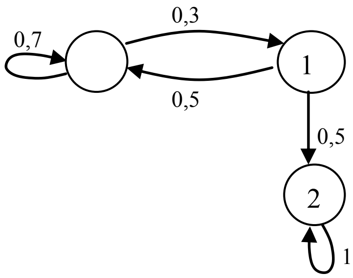
✓ tiene por lo menos un estado absorbente, y si

✓ es posible acceder desde cada estado no absorbente hasta por lo menos un estado absorbente (no necesariamente en un paso).

Recordemos que un estado absorbente es un estado que no puede ser abandonado; es decir, una vez alcanzado es imposible dejarlo, por lo que el proceso termina, o bien se detiene para comenzar nuevamente a partir de otro estado. Un estado "j" absorbente se identifica porque tiene una probabilidad unitaria p_{jj} en la matriz de transición.

Ejemplo 2.k:

La siguiente cadena



$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\
P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0,7 & 0,3 & \\ 0,5 & & 0,5 \\ & & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

es absorbente, separable en una clase comunicante transitoria $C = \{0, 1\}$ y un estado absorbente 2.

Ejemplos de estados absorbentes, en donde el proceso se termina (o se detiene) una vez alcanzados, pueden ser:

- el pago de una factura
- la realización de un contrato,
- la venta de un activo fijo,
- el despido de un empleado, etc.

b) Cadenas cíclicas

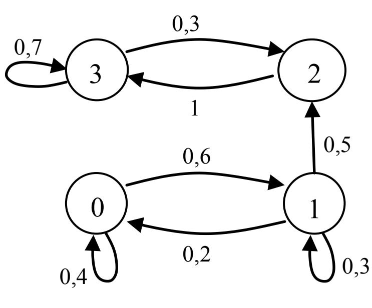
Son cadenas no ergódicas en las cuales el proceso pasa de un estado a otro cíclicamente según un cierto patrón de comportamiento. El ciclo es un camino cerrado entre estados de una clase recurrente.

Para que una cadena sea cíclica debe cumplirse que

- tenga por lo menos un ciclo, y
- sea posible entrar en el ciclo

Ejemplo 2.l:

La siguiente cadena:



$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\
\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0,4 & 0,6 & & \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 & \\ & & & 1 \\ & & 0,3 & 0,7 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

es una cadena cíclica separable en dos clases: una clase comunicante transitoria $C_1 = \{0, 1,\}$ y una clase comunicante recurrente que forma un ciclo $C_2 = \{2, 3\}$.

Muchas características de comportamiento de las cadenas no ergódicas después de que se ha producido un número elevado de transiciones se estudian mediante el análisis de sus clases comunicantes como si fueran cadenas ergódigas independientes.

2.3 CADENAS ERGÓDICAS EN RÉGIMEN PERMANENTE

Se define como régimen permanente o estado estacionario de una cadena de Markov homogénea a la situación que el sistema alcanza luego de un período relativamente largo de tiempo. En dicho régimen la cadena ya ha entrado en una condición de equilibrio estocástico, lo que significa que sus probabilidades de estado devienen estables en el tiempo.

En cambio, el régimen transitorio es la situación en la que el sistema se encuentra luego de un período relativamente corto de tiempo. En dicho régimen la cadena no ha encontrado todavía una condición particular de equilibrio estocástico.

Dentro de las cadenas ergódicas regulares y periódicas interesa estudiar específicamente sus comportamientos en el régimen permanente, y sus conclusiones, según se comentó más arriba, son extensibles a las clases recurrentes de las cadenas no ergódicas.

2.3.1 Estudio del comportamiento de las cadenas regulares en el régimen permanente

Tal como se definió en 2.2.4, una cadena regular es una cadena ergódica en la cual todos sus estados pueden comunicarse simultáneamente en una cantidad r de pasos.

Para describir el comportamiento de una cadena regular en el régimen permanente, o a largo plazo, es preciso conocer las probabilidades de transición cuando el número *n* de transiciones tiende a infinito. Se puede demostrar que si la cadena es regular, el límite de la matriz de probabilidades de transición $P^{(n)}$ cuando *n* tiende a infinito es una matriz regular (todos sus elementos son positivos), con todas sus filas iguales. Es decir, a partir de (2.15) tendremos:

$$\lim P^{(n)} = \lim_{n\to\infty} P^n = \begin{bmatrix} p(0) & p(1) & \dots & p(j) & \dots & p(m) \\ p(0) & p(1) & \dots & p(j) & \dots & p(m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p(0) & p(1) & \dots & p(j) & \dots & p(m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p(0) & p(1) & \dots & p(j) & \dots & p(m) \end{bmatrix} \qquad (2.32)$$

y el límite del vector de probabilidades de estado queda, tomando (2.30)

$$\lim_{n\to\infty} V^{(n)} = V^{(0)} \cdot \lim_{n\to\infty} P^{(n)} =$$

$$[p(0,0) \quad p(1,0) \ldots p(i,0) \ldots p(m,0)] \cdot \begin{bmatrix} p(0) & p(1) & \ldots & p(j) & \ldots & p(m) \\ p(0) & p(1) & \ldots & p(j) & \ldots & p(m) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p(0) & p(1) & \ldots & p(j) & \ldots & p(m) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p(0) & p(1) & \ldots & p(j) & \ldots & p(m) \end{bmatrix}$$

y, por cumplirse que $\sum_{i=0}^{m} p(i,0) = 1$, queda:

$$\lim_{n\to\infty} V^{(n)} = V^* = [p(0) \quad p(1) \ldots p(k) \ldots p(m)] \tag{2.33}$$

Las ecuaciones (2.32) y (2.33) expresan que en una cadena de Markov regular, luego de un número suficientemente grande de transiciones ($n \to \infty$), sus probabilidades de transición $p_{ij}^{(n)}$ y de estado p(j,n) se estabilizan en valores lìmites iguales para cada estado *j*, e independientes del estado inicial *i*. Este estado se conoce como régimen permanente o estacionario, y sus probabilidades de estado p_j representan los porcentajes de tiempo que la cadena permanece en cado estado *j* luego de un período largo de tiempo. El vector V^* se llama vector de probabilidad invariante o distribución estacionaria o distribución de equilibrio.

Esta distribución de estados límites se puede determinar mediante tres caminos alternativos:

a) mediante el límite de la ecuación (2.33):

$$\lim P^{(n)} = \lim_{n\to\infty} P^n = P^n$$

b) mediante la ecuación que se deriva de la (2.31.b): Para $n \to \infty$, según lo expresado más arriba se cumple que

$$\lim_{n\to\infty} V^{(n)} = \lim_{n\to\infty} V^{(n-1)} = V^*$$

Luego, reemplazando en la (2.31b):

$$\boxed{\begin{array}{l} V^* = V^* \cdot P \\ \sum_{j=0}^{m} p_j = 1 \end{array}} \tag{2.34}$$

Las ecuaciones (2.34), constituyen las condiciones de Chapman-Kolmogorov para régimen permanente.

c) Mediante la denominada “ecuación de balance de flujos probabilísticos”, que se deriva de la primera ecuación (2.34). En efecto, si se desarrolla esta última tendremos:

$$V^* = [p(0)\ \ p(1) \ldots p(i) \ldots p(m)] \cdot \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} \cdots p_{0j} \cdots p_{0m} \\ p_{10} & p_{11} \cdots p_{1j} \cdots p_{1m} \\ \cdots & \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ p_{i0} & p_{i1} \cdots p_{ij} \cdots p_{im} \\ \cdots & \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ p_{m0} & p_{m1} \cdots p_{mj} \cdots p_{mm} \end{bmatrix} = [p(0)\ p(1) \ldots p(j) \ldots p(m)]$$

En la cual el elemento genérico p(j) es:

$$p(j) = \sum_{i=0}^{m} p(j) \cdot p_{ij} = \sum_{\forall i \neq j}^{m} p(i) \cdot p_{ij} + p(j) \cdot p_{jj}$$

Agrupando queda:

$$\sum_{\forall i \neq j}^{m} p(i) \cdot p_{ij} = p(j) \cdot (1 - p_{jj})$$

y, aplicando la (2.4) a las transiciones del estado *j* a un conjunto exhaustivo de estados k:

$$\sum_{\forall k} p_{jk} = 1 \quad \therefore \quad (1 - p_{jj}) = \sum_{\forall k \neq j}^{m} p_{jk}$$

Reemplazando queda:

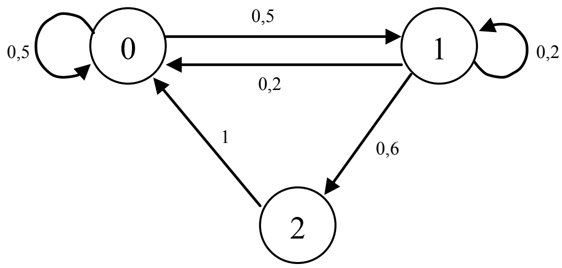
$$\boxed{\sum_{\forall i \neq j}^{m} p(i) \cdot p_{ij} = p(j) \cdot \sum_{\forall k \neq j}^{m} p_{jk}} \quad ; \ j = 0, 1, \ldots, n \qquad (2.35)$$

que es la ecuación de balance de flujos probabilísticos, la cual expresa que “para un nodo (estado) genérico *j*, la suma de los flujos probabilísticos ingresantes al nodo es igual a la suma de los flujos probabilísticos egresantes del mismo”.

Esta ecuación es muy útil para el planteo del sistema de ecuaciones que permite determinar las probabilidades de estado, a partir del gráfico de la cadena markoviana.

Ejemplo 2.m

La siguiente cadena



$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\
P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \\ 1 & & \end{bmatrix}
\end{array}
$$

es ergódica ya que, como se puede observar a continuación, la matriz P^3 tiene todos sus elementos no nulos.

$$
P = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
P^2 = \begin{bmatrix} 0,35 & 0,35 & 0,30 \\ 0,74 & 0,14 & 0,12 \\ 0,50 & 0,50 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
P^3 = \begin{bmatrix} 0,545 & 0,245 & 0,210 \\ 0,518 & 0,398 & 0,084 \\ 0,350 & 0,350 & 0,300 \end{bmatrix}
$$

Se puede determinar el vector invariante V^* mediante el cálculo de las sucesivas potencias de P^n:

$$
P^4 = \begin{bmatrix} 0,5315 & 0,3215 & 0,1470 \\ 0,4226 & 0,3386 & 0,2388 \\ 0,5450 & 0,2450 & 0,2100 \end{bmatrix}
$$

$$
P^8 = \begin{bmatrix} 0,4985 & 0,3158 & 0,1858 \\ 0,4979 & 0,3090 & 0,1931 \\ 0,5077 & 0,3096 & 0,1827 \end{bmatrix}
$$

$$
P^{16} = \begin{bmatrix} 0,5000 & 0,3125 & 0,1875 \\ 0,5000 & 0,3125 & 0,1875 \\ 0,5000 & 03125, & 0,1875 \end{bmatrix} = P^{18} = P^{19} = \ldots = \underset{n\to\infty}{P^n}
$$

Vemos que, a medida que aumenta *n*, los elementos $p_{ij}^{(n)}$ se estabilizan en valores límites, independientemente de su estado inicial, de manera que cada vector V_i^n es igual para cada *i*. Es decir, para un *n* suficientemente grande se cumple que:

$$V_i^n = V_i^{n+1} = V^n = V^{n+1} = V^* = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}3125 & 0{,}1875 \end{bmatrix}$$

Esto significa que, en estado de régimen permanente, la probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado 0 es del 50%, en el estado 1, de 31,25%, y en 2, del 18,75%.

La segunda forma de calcular estas probabilidades de régimen permanente es mediante las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov (2.34). Expandiendo el producto matricial, tendríamos un sistema de 4 ecuaciones con 3 incógnitas, por lo que se puede eliminar cualquiera de las primeras 3 ecuaciones para resolver. La ecuación que establece que la suma de las probabilidades es igual a 1 no se puede eliminar, ya que las primeras satisfacen la solución trivial.

En régimen permanente, tendremos:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} p(0) & p(1) & p(2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 1 & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(0) & p(1) & p(2) \end{bmatrix} \\ p(0) + p(1) + p(2) = 1 \end{cases}$$

Realizando el producto matricial y eliminando una ecuación:

$$\begin{cases} p(0) \cdot 0{,}5 + p(1) \cdot 0{,}2 + p(2) = p(0) \\ p(0) \cdot 0{,}5 + p(1) \cdot 0{,}2 = p(1) \\ p(0) + p(1) + p(2) = 1 \end{cases}$$

Simplificando:

$$\begin{cases} 0{,}5 \cdot p(0) - 0{,}2 \cdot p(1) - p(2) = 0 \\ -0{,}5 \cdot p(0) + 0{,}8 \cdot p(1) = 0 \\ p(0) + p(1) + p(2) = 1 \end{cases}$$

Queda entonces el producto matricial: $V^* \cdot A = B$, siendo:

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}5 & -0{,}2 & -1 \\ -0{,}5 & 0{,}8 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad ; \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolviendo, se llega al resultado anterior:

$$V^* = B \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}5000 & 0{,}3125 & 0{,}1875 \end{bmatrix}$$

El sistema de ecuaciones linealmente independientes se puede formular directamente incluyendo la ecuación de la suma de probabilidades en la matriz de transición. Para ello se reemplaza un vector cualquiera de la matriz por un vector de elementos “1”, y en el vector fila resultado del producto matricial se reemplaza por "1" el elemento correspondiente. Suponiendo que se elige anular la ecuación correspondiente al estado 3, el sistema quedaría formulado como sigue:

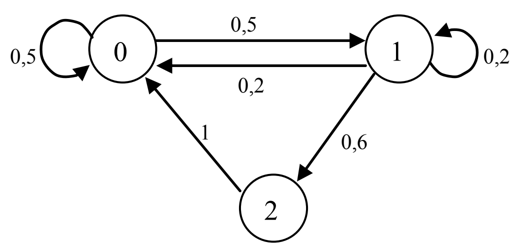
$$\begin{bmatrix} p(0) & p(1) & p(2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & 1 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(0) & p(1) & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} p(0) \cdot 0{,}5 + p(1) \cdot 0{,}2 + p(2) = p(0) \\ p(0) \cdot 0{,}5 + p(1) \cdot 0{,}2 = p(1) \\ p(0) + p(1) + p(2) = 1 \end{cases}$$

que es el mismo sistema de ecuaciones de más arriba, y cuyo resultado es

$p(0) = 0{,}5000$, $p(1) = 0{,}3125$ y $p(2) = 0{,}1875$.

Finalmente, la otra forma de plantear el sistema de ecuaciones para el régimen estacionario en Cadenas de Markov ergódicas es a través del denominado método de "suma de flujos". Tal como se comentó, para el régimen permanente debe verificarse que el flujo de probabilidades que concurren a un nodo sea igual al flujo de probabilidades que de él emergen.



Los balances de los nodos son:

- BALANCE EN NODO 0: $p(0) \cdot 0{,}5 = p(1) \cdot 0{,}2 + p(2) \cdot 1$
- BALANCE EN NODO 1: $p(1) \cdot [0{,}2 + 0{,}6] = p(0) \cdot 0{,}5$
- BALANCE EN NODO 2: $p(2) \cdot 1 = p(1) \cdot 0{,}6$

Obviamente, en un nodo cualquiera el flujo probabilístico de la probabilidad de permanecer en el mismo nodo se anula. Por ejemplo en el caso del nodo 0 habrá un flujo saliente p(0)·0,5 que se anula con el flujo entrante p(0)·0,5.

En definitiva, el sistema de ecuaciones queda planteado eliminando cualquiera de las ecuaciones anteriores y agregando la de la suma de probabilidades de estado. Por ejemplo, eliminando la ecuación correspondiente al balance del nodo 2:

$$\begin{cases} p(0)\cdot 0{,}5 = p(1)\cdot 0{,}2 + p(2) \\ p(1)\cdot 0{,}8 = p(0)\cdot 0{,}5 \\ p(0)+p(1)+p(2) = 1 \end{cases}$$

2.3.2 Estudio del comportamiento de las cadenas periódicas en el régimen permanente

Tal como se ha definido en 2.2.4, una cadena periódica es una cadena ergódica en la cual no se puede encontrar una potencia r de la matriz P para la cual todos los elementos de P^r sean no nulos.

A diferencia de las cadenas regulares, en las cadenas periódicas no pueden encontrarse valores límites de la matriz $P^{(n)} = P^n$ (para $n \rightarrow \infty$). No obstante, la cadena se estabiliza en valores límites de probabilidades de estado a largo plazo, los cuales, como en el caso anterior, representan los porcentajes de tiempo que el proceso permanece en cado estado, y que se pueden calcular con cualquiera de las formas vistas en el punto 2.3.1.

Ejemplo 2.n

La matriz

$$P = \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix}$$

es periódica, ya que

$$P^2 = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} = P^4 = P^6 = \ldots = P^n \text{ para } n \text{ par, y}$$

$$P^3 = \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix} = P = P^5 = \ldots P^m \text{ para } m \text{ impar.}$$

Planteando el sistema de ecuaciones del producto matricial, como hemos visto, eliminando una de estas ecuaciones y agregando la ecuación que establece que los estados son mutuamente excluyentes, tendremos:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} p(1) & p(2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(1) & p(2) \end{bmatrix} \\ p(1) + p(2) = 1 \end{cases}$$

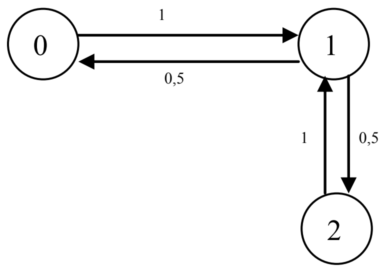
De donde resulta el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} p(1)\cdot 0 + p(2)\cdot 1 = p(1) \\ p(1) + p(2) = 1 \end{cases}$$

Cuya solución es p(1) = 0,5 y p(2) = 0,5

Ejemplo 2.o

La siguiente cadena periódica:



$$P = \begin{bmatrix} & 1 & \\ 0{,}5 & & 0{,}5 \\ & 1 & \end{bmatrix}$$

se resolverá en cambio por el método de suma de flujos, balanceando, por ejemplo, los nodos 0 y 2:

$$\begin{cases} p(0)\cdot 1 = p(1)\cdot 0{,}5 \\ p(2)\cdot 1 = p(1)\cdot 0{,}5 \\ p(0) + p(1) + p(2) = 1 \end{cases}$$

que nos lleva al siguiente resultado:

$$V^{*} = \begin{bmatrix} 0{,}25 & 0{,}50 & 0{,}25 \end{bmatrix}$$

2.4 ESTUDIO DEL COMPORTAMIENTO DE LAS CADENAS NO ERGÓDICAS

Según se ha dicho anteriormente, dentro de las cadenas no ergódicas merecen especial atención las cadenas absorbentes y las cadenas cíclicas. De este tipo de cadenas interesa fundamentalmente estudiar su comportamiento en el régimen transitorio, pues en el estado de régimen permanente queda caracterizado por el estudio del comportamiento de sus clases recurrentes como cadenas ergódicas independientes.

2.4.1. Estudio del comportamiento de las cadenas absorbentes

Como se ha definido en el punto 2.2.4, una cadena absorbente es una cadena no ergódica separable en:

- uno o varios estados absorbentes (estados con probabilidad nula de ser abandonados, por lo que cuando son alcanzados por el proceso, éste se detiene definitivamente o se detiene para comenzar luego desde otro estado), y
- uno o varios estados no absorbentes constituidos por clases comunicantes transitorias o estados sin retorno, desde cada uno de las cuales se puede acceder a por lo menos un estado absorbente.

En las cadenas absorbentes es de interés conocer:

- el número esperado de veces que el proceso pasa por cada estado no absorbente antes de ser absorbido,

- el número promedio de pasos que el proceso tarda en absorberse, y
- la probabilidad de que el proceso sea absorbido por un estado determinado cuando el sistema tiene varios estados absorbentes.

Para realizar estos análisis se opera con la matriz de transición P, pero reagrupada en cuatro submatrices, constituyendo lo que se conoce como “forma canónica”. Para un proceso con una cantidad *a* de estados absorbentes y *n* de estados no absorbentes, la matriz canónica tiene la siguiente estructura:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{“a” estados} & \text{“n” estados} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{“a” estados} \\[2ex] \text{“n” estados} \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline A & N \end{array}\right) \end{array}$$

en donde:

I (a x a): Matriz identidad. Cada elemento representa la probabilidad de permanecer en un estado absorbente en un paso.

0 (a x n): Matriz nula. Cada elemento representa la probabilidad de pasar de un estado absorbente a uno no absorbente en un paso.

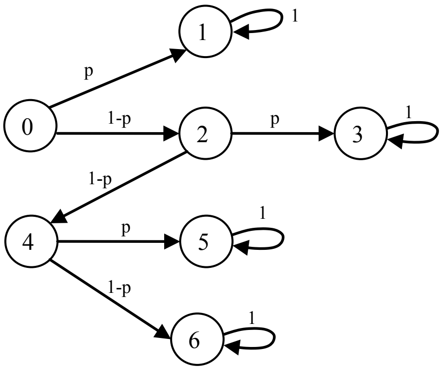
A (n x a): Matriz de estados absorbentes. Cada elemento representa la probabilidad de pasar de un estado no absorbente a uno absorbente en un paso.

N (n x n): Matriz de estados no absorbentes. Cada elemento representa la probabilidad de pasar de un estado no absorbente a otro no absorbente en un paso.

Ejemplo 2.p

Ejemplos de cadenas absorbentes se pueden encontrar en múltiples procesos de la realidad. Uno de los más ilustrativos lo constituye un proceso de inspección como el del siguiente problema. Supongamos que se tiene que inspeccionar una muestra de tres piezas hasta encontrar una pieza que sea mala, con probabilidad *p*, o hasta que las tres piezas sean buenas. Los estados posibles, el grafo y la matriz de transición son:

ESTADOS	0	1	2	3	4	5		6
Situación	Buenas	0	0	1	1	2	2	3
	Malas	0	1	0	1	0	1	0



$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} &
\begin{bmatrix}
 & p & (1-p) & & & & \\
 & 1 & & & & & \\
 & & & p & (1-p) & & \\
 & & & 1 & & & \\
 & & & & & p & (1-p) \\
 & & & & & 1 & \\
 & & & & & & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Se puede observar la presencia de cuatro estados absorbentes: 1, 3, 5 y 6, y de tres estados sin retorno: 0, 2 y 4.

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc|ccc} 1 & 3 & 5 & 6 & 0 & 2 & 4 \end{array} \\
P = &
\left[\begin{array}{cccc|ccc}
1 & & & & & & \\
 & 1 & & & & & \\
 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & & \\
\hline
p & & & & & (1-p) & \\
 & p & & & & & (1-p) \\
 & & p & (1-p) & & &
\end{array}\right]
\end{array}
$$

2.4.2. <u>Determinación de variables de interés en las cadenas absorbentes</u>

Para los análisis que siguen se utilizarán las matrices A y N.

a) Número esperado de veces que el proceso pasa por cada estado no absorbente antes de ser absorbido, comenzando desde el estado *i* no absorbente

De acuerdo a lo visto anteriormente, cada elemento de N representa la probabilidad de pasar de un estado no absorbente *i* a otro estado no absorbente *j* en un paso. Luego, cada elemento de la matriz N^2 representa la probabilidad de pasar de un estado no absorbente *i* a otro no absorbente *j* en dos pasos, y en forma genérica, cada elemento de la matriz N^n representa la probabilidad de pasar de un estado no absorbente *i* a otro estado no absorbente en *n* pasos.

Por lo tanto, el número esperado de veces que la cadena puede pasar por un estado no absorbente *j*, habiendo comenzado en un estado genérico no absorbente *i*, está dado por:

$$n_{j/i} = \underbrace{1 \cdot I}_{\substack{\text{al co–} \\ \text{mienzo}}} + \underbrace{1 \cdot N}_{\substack{\text{en un} \\ \text{paso}}} + \underbrace{1.N^2}_{\substack{\text{en dos} \\ \text{pasos}}} + \ldots + \underbrace{1 \cdot N^n}_{\substack{\text{en n} \\ \text{pasos}}} + \ldots = \frac{I}{I - N}$$

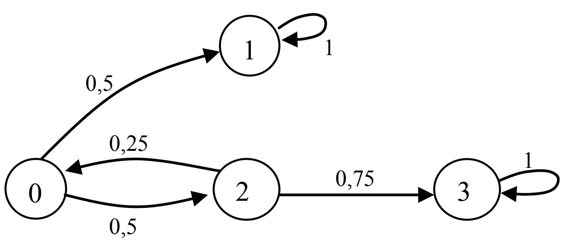
Siendo $\lim\limits_{n \to \infty} N^n = 0$, tendremos que:

$$\boxed{n_{j/i} = (I - N)^{-1}} \qquad (2.36)$$

en donde $(I\text{-}N)^{-1}$ es la inversa[2] de la matriz I-N.

Ejemplo 2.q

Dada la siguiente matriz absorbente:



$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} & 0,50 & 0,50 & \\ & 1 & & \\ 0,25 & & & 0,75 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Reagrupando a la matriz canónica correspondiente:

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc:cc} 1 & 3 & 0 & 2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & & & \\ & 1 & & \\ \hdashline 0,50 & & & 0,50 \\ & 0,75 & 0,25 & \end{array}\right] \end{array}$$

Tendremos:

$$A = \begin{bmatrix} 0,5 & \\ & 0,75 \end{bmatrix} \qquad N = \begin{bmatrix} & 0,5 \\ 0,25 & \end{bmatrix}$$

Luego, resulta:

$$\text{I-N} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} & 0,5 \\ 0,25 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0,50 \\ -0,25 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculando la matriz inversa:

[2] La matriz inversa de una matriz cuadrada A, comúnmente referida como A^{-1}, es una matriz tal que el producto A. A^{-1} = I, en donde I es la matriz identidad. Una matriz tiene inversa si su determinante $|A| \neq 0$. Existen varios métodos para invertir matrices, entre ellos el procedimiento de Gauss-Jordan.

$$(I-N)^{-1} = \begin{array}{c} 0 \\ 2 \end{array}\begin{bmatrix} 1{,}1429 & 0{,}5714 \\ 0{,}2857 & 1{,}1429 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, si la cadena comienza en el estado no absorbente 0, pasará en promedio por ese estado 1,1429 veces, incluyendo el comienzo, y 0,5714 por el estado 2, antes de ser absorbida por los estados 1 o 3. Si, en cambio, la cadena comienza en el estado no absorbente 2, pasará en promedio 0,2857 veces por el estado 0, y 1,1429 veces por el estado 2, incluyendo el comienzo antes de ser absorbida por alguno de los referidos estados absorbentes 1 o 3.

b) Número esperado de transiciones que el proceso tarda en ser absorbido:

En función de lo anterior, cuando la cadena comienza en un estado no absorbente *i*, el número esperado de pasos que tarda en ser absorbida es la suma de los elementos de la fila *i* de la matriz $(I\text{-}N)^{-1}$. Por lo tanto, en forma genérica, el número esperado de transiciones desde cada estado i hasta la absorción puede quedar expresado mediante el siguiente vector:

$$\boxed{\bar{n} = (I-N)^{-1} \cdot \bar{1}} \tag{2.37}$$

en donde $\bar{1}$ es un vector columna (1 x m), con todos sus elementos iguales a 1.

Ejemplo 2.r:

Para la cadena del ejemplo 2.q, tendremos:

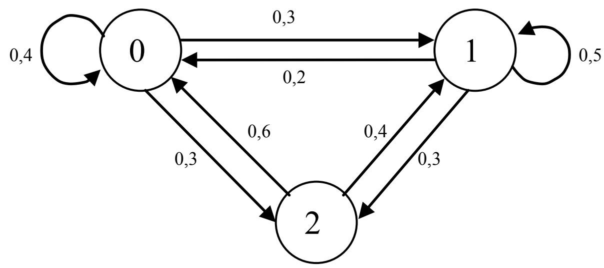
$$(I-N)^{-1} \cdot \bar{1} = \begin{array}{c} 0 \\ 2 \end{array}\begin{bmatrix} 1{,}1429 & 0{,}5714 \\ 0{,}2857 & 1{,}1429 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} 0 \\ 2 \end{array}\begin{bmatrix} 1{,}7143 \\ 1{,}4286 \end{bmatrix}$$

Es decir que si el proceso comienza en el estado no absorbente 0, hará en promedio 1,71 transiciones antes de absorberse. Si, en cambio, empieza en el estado 2, tardará 1,43 pasos para absorberse.

b.1) **Extensión para cadenas no absorbentes**

Para determinar el número de pasos promedio para alcanzar un estado determinado cualquiera *j*, se procede de manera análoga al punto anterior, haciendo la suposición de que el estado *j* es absorbente.

Ejemplo 2.s:



$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0,4 & 0,3 & 0,3 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0,6 & 0,4 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Para averiguar el número promedio de transiciones que se realizan hasta alcanzar por ejemplo el estado 2 por primera vez, a este estado se lo debe considerar como si fuera absorbente, de manera que la nueva matriz de transición sería:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0,4 & 0,3 & 0,3 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ & & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Luego, se pasa al formato canónico:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{c:cc} 2 & 0 & 1 \end{array} \\ P = \begin{array}{c} 2 \\ 0 \\ 1 \end{array} & \left[\begin{array}{c:cc} 1 & & \\ \hdashline 0,3 & 0,4 & 0,3 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \end{array}\right] \end{array}$$

La matriz (I-N) es entonces:

$$I - N = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,4 & 0,3 \\ 0,2 & 0,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,6 & -0,3 \\ -0,2 & 0,5 \end{bmatrix}$$

y su inversa:

$$(I - N)^{-1} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \begin{bmatrix} 2,08 & 1,25 \\ 0,83 & 2,50 \end{bmatrix}$$

El vector $\bar{n}$ será:

$$\bar{n} = (I - N)^{-1} \cdot \bar{1} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \begin{bmatrix} 2,08 & 1,25 \\ 0,82 & 2,50 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,33 \\ 3,33 \end{bmatrix}$$

Es decir, partiendo del estado 0, el número de ocasiones que transcurren en promedio antes de llegar al estado 2 es 3,33. Por su parte, si el estado inicial es 1, el número promedio de pasos que transcurren antes de alcanzar el estado 2 es igual a 3,33.

c) Probabilidad de absorción por cada estado absorbente

Para cada estado no absorbente *i* interesa conocer la probabilidad de que el proceso sea absorbido por cada estado absorbente *j*. Este valor es igual a la probabilidad de ir de *i* a *j* en un paso, más la probabilidad de hacerlo en dos pasos, más la probabilidad de hacerlo en tres, y así sucesivamente:

$p(i \to j) = p(i \to j \text{ en un paso}) + p(i \to j \text{ en dos pasos}) + \ldots\ldots$

$P(i \to j) = A + N \cdot A + N^2 \cdot A + N^3 \cdot A + \ldots\ldots$

$= I \cdot A + N \cdot A + N^2 \cdot A + N^3 \cdot A + \ldots..$

$= (I + N + N^2 + N^3 + \ldots..) \cdot A$

Es decir,

$$P(i \to j) = (I - N)^{-1} \cdot A$$

Para el ejemplo 2.q, es:

$$P(i \to j) = (I - N)^{-1} \cdot A =$$

$$= \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 0 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} 1{,}1429 & 0{,}5714 \\ 0{,}2857 & 1{,}1429 \end{bmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}50 & \\ & 0{,}75 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 1 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0{,}5714 & 0{,}4286 \\ 0{,}1429 & 0{,}8571 \end{bmatrix} \end{array}$$

Esto significa que:

- ✓ Comenzando en el estado 0, la probabilidad de terminar en el estado 1 es 0,57 y en el estado 3 es 0,43 (aproximadamente).
- ✓ Si, en cambio, se comienza en el estado 2, la probabilidad de terminar el proceso en el estado 1 es de 0,14 y de absorberse en el estado 3 es de 0,86 (aproximadamente).

2.5 ESTUDIO DEL COMPORTAMIENTO DE LAS CADENAS CÍCLICAS

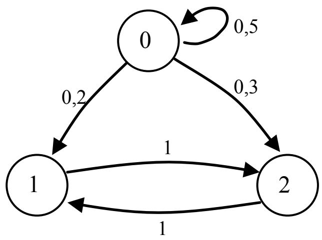
Como se ha definido en 2.2.4 una cadena cíclica es aquella en la cual el proceso pasa de un estado a otro cíclicamente según un cierto patrón de comportamiento, cumpliéndose las siguientes condiciones:

- Tiene por lo menos un ciclo (es decir, un camino cerrado entre estados de una misma clase comunicante), y
- Es posible acceder a dicho ciclo.

En el régimen transitorio (corto plazo) se puede determinar el número de intentos promedio que se realizan para alcanzar el ciclo. Este cálculo se puede hacer suponiendo que el ciclo es un estado absorbente.

Ejemplo 2.t

La siguiente cadena cíclica



$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0,5 & 0,2 & 0,3 \\ & & 1 \\ & 1 & \end{bmatrix} \end{array}$$

no es ergódica, ya que es reducible en dos clases: una clase comunicante transitoria C_1 = [0] y una clase comunicante recurrente C_2 = [1, 2]. Esta última clase constituye un ciclo.

Para determinar el número de veces que se requieren para llegar al ciclo, se toma al ciclo 1-2 como un estado absorbente. Luego, la matriz de transición se transforma en:

$$\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1-2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & (1-2) \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0,50 & 0,50 \\ & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

y su canónica:

$$\begin{array}{c} \\ (1-2) \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} (1-2) & 0 \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline 0,50 & 0,50 \end{array}\right] \end{array}$$

Por lo tanto:

$$I–N = [1] – [0,50] = [0,50]$$

$$(I-N)^{-1} = [2]$$

$$(I-N)^{-1} \cdot \bar{1} = [2] \cdot [1] = [2] \quad \therefore \quad N_0 = 2$$

Se requieren, entonces, 2 pasos en promedio para alcanzar el ciclo.

En el largo plazo (régimen permanente) el sistema es cíclico, y el tiempo que el proceso pasa en cada estado del ciclo se calcula con el procedimiento ya visto para régimen permanente. Para el ejemplo 2.t, el sistema de ecuaciones que nos permite determinar las probabilidades de estado en régimen permanente se puede plantear mediante el siguiente producto matricial:

$$[p(0) \quad p(1) \quad p(2)] \cdot \begin{bmatrix} 0,5 & 0,2 & 1 \\ & & 1 \\ & 1 & 1 \end{bmatrix} = [p(0) \quad p(1) \quad p(2)]$$

cuyo resultado es:

p(0) = 0

p(1) = 0,50

p(2) = 0,50

El ciclaje es común en operaciones de máquinas, en ciertas funciones matemáticas y en algunos sistemas físico-económicos.

CAPÍTULO 3

CADENAS DE MARKOV HOMOGÉNEAS EN PARÁMETRO CONTINUO

INTRODUCCIÓN

Se sigue a continuación un desarrollo análogo al de las cadenas en parámetro discreto, definiéndose primero las probabilidades condicionales de transición e incondicionales de estado, y estudiándose luego el comportamiento de las cadenas regulares en el régimen permanente.

3.1 ESTUDIO DE LAS PROBABILIDADES EN LAS CADENAS DE MARKOV HOMOGÉNEAS

3.1.1 Probabilidad condicional de transición

a) Definición general

La probabilidad condicional de transición es:

$$p_{ij}^{(\Delta t)} = p\left\{\left(j, t+\Delta t\right) / \left(i, t\right)\right\} \quad ; \quad \text{con} \begin{cases} t \geq 0 \\ \Delta t \geq 0 \\ i = 0, 1, 2, \ldots, m \\ j = 0, 1, 2, \ldots, m \end{cases} \tag{3.1}$$

y la matriz de probabilidades de transición es:

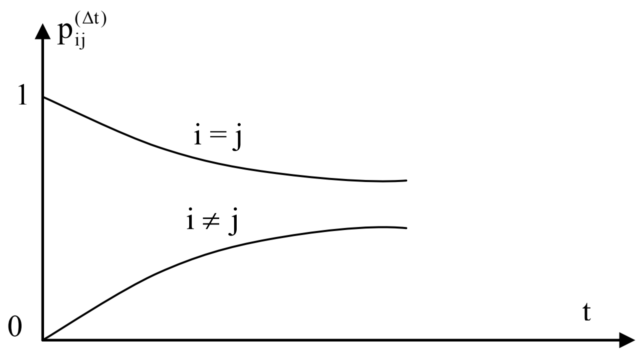
$$P^{(\Delta t)} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ \ldots \\ k \\ \ldots \\ m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & \ldots & k & \ldots & m \end{array} \\ \begin{bmatrix} p_{00}^{(\Delta t)} & p_{01}^{(\Delta t)} & \ldots & p_{0k}^{(\Delta t)} & \ldots & p_{0m}^{(\Delta t)} \\ p_{10}^{(\Delta t)} & p_{11}^{(\Delta t)} & & p_{1k}^{(\Delta t)} & & p_{1m}^{(\Delta t)} \\ \ldots & & & & & \\ p_{k0}^{(\Delta t)} & p_{k1}^{(\Delta t)} & & p_{kk}^{(\Delta t)} & & p_{km}^{(\Delta t)} \\ \ldots & & & & & \\ p_{m0}^{(\Delta t)} & p_{m1}^{(\Delta t)} & & p_{mk}^{(\Delta t)} & & p_{mm}^{(\Delta t)} \end{bmatrix} \end{array} \tag{3.2}$$

Para esta matriz se cumplen las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} 0 \le p_{ij}^{(\Delta t)} \le 1 & ; \quad \forall\, i, j \qquad (3.3) \\ \displaystyle\sum_{j=0}^{m} p_{ij}^{(\Delta t)} = 1 & ; \quad i = 0, 1, ,2, ..., m \qquad (3.4) \\ \text{con } \Delta t \geq 0 & \end{cases}$$

Además, en el caso de parámetro *t* continuo, las probabilidades de transición deben ser continuas en t = 0; es decir, deben cumplirse las siguientes condiciones:

$$\lim_{t \to \infty} p_{ij}^{(\Delta t)} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \qquad (3.5) \text{ y } (3.6)$$



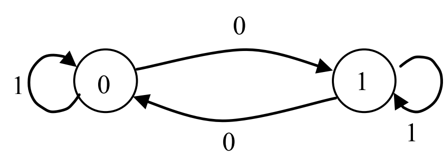
Ejemplo 3.a

El siguiente es un ejemplo de matriz de probabilidades condicionales de transición correspondiente a una cadena de Markov homogénea en parámetro continuo con dos estados: 0 y 1.

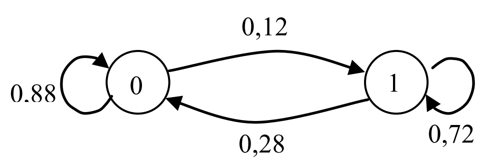
$$\begin{cases} P^{(\Delta t)} = \begin{bmatrix} p_{00}^{(\Delta t)} & p_{01}^{(\Delta t)} \\ p_{10}^{(\Delta t)} & p_{11}^{(\Delta t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}7 + 0{,}3 \cdot e^{-\Delta t} & 0{,}3 - 0{,}3 \cdot e^{-\Delta t} \\ 0{,}7 - 0{,}7 \cdot e^{-\Delta t} & 0{,}3 + 0{,}7 \cdot e^{-\Delta t} \end{bmatrix} \\ \text{con } \Delta t \geq 0 \end{cases}$$

Luego, para cada valor de Δt se tiene una matriz distinta, por ejemplo:

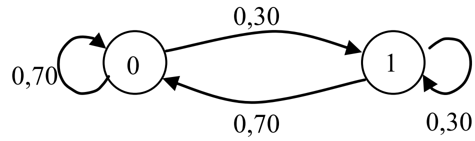
Para $\Delta t = 0$ $\quad p^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$



Para $\Delta t = 0{,}5$ $\quad p^{(0,5)} = \begin{bmatrix} 0{,}88 & 0{,}12 \\ 0{,}28 & 0{,}72 \end{bmatrix}$



Para $\Delta t \to \infty$ $$p^{(\infty)} = \begin{bmatrix} 0{,}70 & 0{,}30 \\ 0{,}70 & 0{,}30 \end{bmatrix}$$



b) Tasas o intensidades de transición

Al estudiar el comportamiento de una cadena de Markov homogénea en parámetro continuo, es necesario trabajar con probabilidades de transición entre instantes de tiempo muy próximos. Esta situación conduce, por la ecuación (3.5), a probabilidades de transición que tienden a cero. Es decir que cuando $\Delta t \to 0 \Rightarrow p_{ij}^{(\Delta t)} \to 0$.

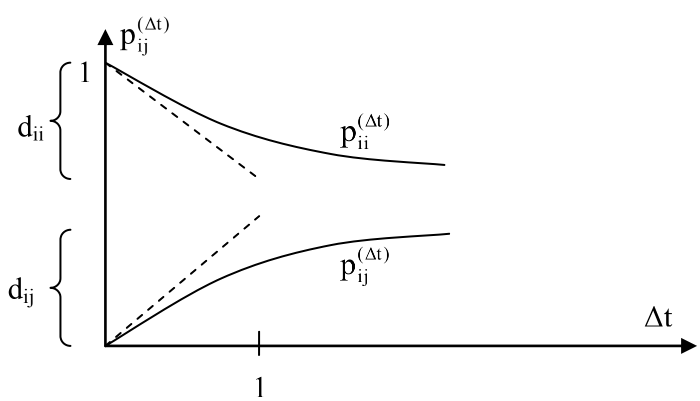
Para solucionar el inconveniente de tener que trabajar con probabilidades $p_{ij}^{(\Delta t)}$ diferenciales, se introduce el concepto de la derivada de la probabilidad de transición entre dos estados *i* y *j* distintos en $\Delta t = 0$. Esta nueva magnitud, llamada tasa (o intensidad) de transición, expresa la variación de la probabilidad de transción entre estados diferentes de la cadena en un intervalo Δt pequeño, referido a un Δt unitario (por el concepto de derivada), y queda definida matemáticamente como:

$$d_{ij} = \left[\frac{d\, p_{ij}^{(\Delta t)}}{d\Delta t} \right]_{\Delta t = 0} \tag{3.7}$$

Formalmente, esta magnitud de transición en una cadena en parámetro continuo es la magnitud equivalente a la probabilidad de transición de un paso en las cadenas en parámetro discreto.

Para i = j el valor resultante se denomina tasa o intensidad de permanencia en el estado *i*, y matemáticamente es:

$$d_{ii} = \left[\frac{d\, p_{ii}^{(\Delta t)}}{d\Delta t} \right]_{\Delta t = 0} \tag{3.8}$$



Nuevamente, el conjunto de tasas de transición y permanencia definen la matriz de transición D:

$$D = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ \dots \\ k \\ \dots \\ m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & \dots & k & \dots & m \end{array} \\ \begin{bmatrix} d_{00} & d_{01} & \dots & d_{0k} & \dots & d_{0m} \\ d_{10} & d_{11} & & d_{1k} & & d_{1m} \\ \dots & & & & & \\ d_{k0} & d_{k1} & & d_{kk} & & d_{km} \\ \dots & & & & & \\ d_{m0} & d_{m1} & & d_{mk} & & d_{mm} \end{bmatrix} \end{array} \qquad (3.9)$$

Entre las tasas de transición y permanencia se puede establecer una relación análoga a la (3.4).

De (3.4): $\sum_{j=0}^{m} p_{ij}^{(\Delta t)} = 1$

Derivando: $$\frac{d\left[\sum_{j=0}^{m} p_{ij}^{(\Delta t)}\right]_{\Delta t=0}}{d\Delta t} = \sum_{j=0}^{m} \frac{d\left[p_{ij}^{(\Delta t)}\right]_{\Delta t=0}}{d\Delta t} = \sum_{j=0}^{m} d_{ij}^{(\Delta t)} = 0$$

Luego:

$$d_{ii} = -\sum_{\forall j \neq i} d_{ij} \qquad (3.10)$$

La ecuación (3.10) expresa que los elementos de la diagonal principal de la matriz D se calculan como la suma de los elementos de su fila, cambiados de signo.

Ejemplo 3.b

La matriz de tasas D correspondientes al ejemplo 3.a es:

$$D = \begin{bmatrix} -0,3 & 0,3 \\ 0,7 & -0,7 \end{bmatrix}$$

en la que se observa que se cumple la ecuación (3.10).

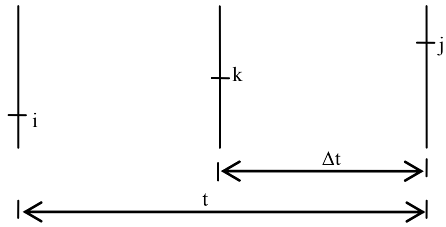
c) Ecuación de Chapman-Kolmogorov

La ecuación de Chapman-Kolmogorov (2.13) y (2.15) es también aplicable al caso continuo, expresándola en su forma algebraica:

$$p_{ij}^{(t)} = \sum_{k=0}^{m} p_{ik}^{(\Delta t-1)} \cdot p_{kj}^{(\Delta t)} \qquad ; \qquad \text{con} \begin{cases} t \geq 0 \\ \Delta t \geq 0 \\ i = 0, 1, 2, ..., m \\ j = 0, 1, 2, ..., m \end{cases} \tag{3.11}$$

o matricial:

$$\boxed{P^{(t)} = P^{(t-\Delta t)} \cdot P^{(\Delta t)}} \tag{3.12}$$



Ejemplo 3.c

Tomando la matriz de probabilidades de transición del ejemplo 3.a:

$$P^{(t)} = \begin{bmatrix} 0{,}7 + 0{,}3 \cdot e^{-t} & 0{,}3 - 0{,}3 \cdot e^{-t} \\ 0{,}7 - 0{,}7 \cdot e^{-t} & 0{,}3 + 0{,}7 \cdot e^{-t} \end{bmatrix}$$

Se verificará la ecuación de Chapman (3.11 y 3.12) tomando como ejemplo $i = 0$, $j = 1$, $t = 3$, $\Delta t = 0{,}5$. Tendremos que:

- por cálculo directo:

  $$p_{01}^{(3)} = 0{,}3 - 0{,}3 \cdot e^{-3} = 0{,}285$$

- por aplicación de la ecuación de Chapman-Kolmogorov:

  $$p_{01}^{(3)} = p_{00}^{(2,5)} \cdot p_{01}^{(0,5)} + p_{01}^{(2,5)} \cdot p_{11}^{(0,5)} = 0{,}725 \cdot 0{,}118 + 0{,}275 \cdot 0{,}725 = 0{,}285$$

Luego, verifica.

3.1.2 Probabilidad incondicional de estado

a) Definición

La probabilidad incondicional:

$$p(i,t) \qquad \text{con} \begin{cases} t \geq 0 \\ i = 0, 1, 2, ..., m \end{cases} \tag{3.13}$$

y el vector de probabilidades incondicionales de estado es:

$$V^{(t)} = [p(0,t) \quad p(1,t) \quad p(2,t) \ldots . p(k,t) \ldots p(m,t)] \tag{3.14}$$

cumpliéndose:

$$\begin{cases} 0 \leq p(i,t) \leq 1 & ; \quad \forall\, i & (3.15) \\ \sum_{i=0}^{m} p(i,t) = 1 & ; \quad \text{con } t \geq 0 & (3.16) \end{cases}$$

b) Probabilidad de estado inicial

Es un caso especial de la (3.13), para t = 0:

$$p(i,0) \qquad \text{con } i = 0, 1, \ldots, m \tag{3.17}$$

y el vector de probabilidades:

$$V^{(0)} = [p(0,0) \quad p(1,0) \quad p(2,0) \ldots.\, p(k,0) \ldots p(m,0)] \tag{3.18}$$

c) Ecuación de estado

La ecuación de estado (2.26) y (2.30) es también aplicable al caso continuo, adoptando las siguientes formas, ya sea en cualquiera de sus expresiones algebraicas:

$$p(j,t) = \sum_{i=0}^{m} p(i,0) \cdot p_{ij}^{(t)} \qquad ; \text{ con} \begin{cases} t \geq 0 \\ j = 0, 1, \ldots, m \end{cases} \tag{3.19.a}$$

$$p(j,t) = \sum_{i=0}^{m} p(i,t-\Delta t) \cdot p_{ij}^{(\Delta t)} \qquad ; \text{ con} \begin{cases} t \geq 0 \\ \Delta t \geq 0 \\ j = 0, 1, \ldots, m \end{cases} \tag{3.19.b}$$

o matricial:

$$\boxed{V^{(t)} = \begin{cases} V^{0} \cdot P^{(t)} \\ \\ V^{(t-\Delta t)} \cdot P^{(\Delta t)} \end{cases}} \tag{3.20.}$$

expresión genérica matricial de la ecuación de estado para el caso continuo.

Las ecuaciones (3.12) y (3.20) permiten calcular la probabilidad de cada uno de los estados de la cadena, en cualquier instante de tiempo t.

3.2 ESTUDIO DEL COMPORTAMIENTO DE LAS CADENAS REGULARES EN EL RÉGIMEN PERMANENTE

En forma análoga al caso discreto, el régimen permanente o estado estacionario de una cadena de Markov homogénea en parámetro continuo se obtiene haciendo tender el parámetro *t* a infinito, y si la cadena es regular se cumple también que el límite de la matriz de probabilidades de transición $P^{(t)}$ con $t \to \infty$ es regular con todas sus filas iguales e independientes del tiempo.

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{bmatrix} p(0) & p(1) & \ldots & p(j) & \ldots & p(m) \\ p(0) & p(1) & \ldots & p(j) & \ldots & p(m) \\ \ldots & & & & & \\ p(0) & p(1) & \ldots & p(j) & \ldots & p(m) \\ \ldots & & & & & \\ p(0) & p(1) & \ldots & p(j) & \ldots & p(m) \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

y el vector de probabilidades de estado queda, de la igualdad de la ecuación (3.20):

$$\lim_{t\to\infty} V^{(t)} = V^{(0)} \cdot \lim_{t\to\infty} P^{(t)} =$$

$$= \left[p(0,0) \quad p(1,0) \ldots p(i,0) \ldots p(m,0)\right] \cdot \begin{bmatrix} p(0) & p(1) & \ldots & p(j) & \ldots & p(m) \\ p(0) & p(1) & \ldots & p(j) & \ldots & p(m) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p(0) & p(1) & \ldots & p(j) & \ldots & p(m) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p(0) & p(1) & \ldots & p(j) & \ldots & p(m) \end{bmatrix}$$

y, por cumplirse que $\sum_{i=0}^{m} p(i,0) = 1$, queda:

$$\lim_{t\to\infty} V^{(t)} = V^* = \left[p(0) \quad p(1) \ldots p(k) \ldots p(m)\right] \tag{3.22}$$

De igual forma que en el caso discreto, las (3.21) y (3.22) expresan que en una cadena de Markov regular, luego de un tiempo *t* suficientemente grande sus probabilidades de transición $p_{ij}^{(t)}$ y de estado p(j,t) se estabilizan en valores límites similares e independientes del estado inicial y del tiempo t, definiéndose a este estado como régimen permanente o estado estacionario. Esta distribución se puede determinar mediante tres caminos alternativos:

a) mediante el límite de la ecuación (3.21)

b) mediante la ecuación que se deriva de la ecuación (3.20.b) para $t \to \infty$

$$\lim_{t\to\infty} V^{(t)} = \lim_{t\to\infty} V^{(t-\Delta t)} = V^*$$

Luego, tendremos:

$$\boxed{\begin{array}{l} V^* = V^* \cdot P^{(\Delta t)} \\ \sum_{j=0}^{m} p(j) = 1 \end{array}} \qquad (3.23)\ \text{y}\ (3.24)$$

Se puede observar que, de (3.23), el vector V^* de probabilidades en el régimen permanente es constante e independiente del intervalo Δt que se toma dentro de dicho régimen. Luego, de (3.23) y (3.24), conocida la matriz $P^{(\Delta t)}$ se puede calcular el vector V^*.

c) un camino más práctico de cálculo es a partir de la matriz D. Desarrollando la (3.23):

$$\left[\, p(0) \ldots\ p(i) \ldots p(m) \right] \cdot \begin{bmatrix} p_{00}^{(\Delta t)} & \ldots & p_{0j}^{(\Delta t)} & \ldots & p_{0m}^{(\Delta t)} \\ & \ldots & & \ldots & \\ p_{i0}^{(\Delta t)} & \ldots & p_{ij}^{(\Delta t)} & \ldots & p_{im}^{(\Delta t)} \\ & \ldots & & \ldots & \\ p_{m0}^{(\Delta t)} & \ldots & p_{mj}^{(\Delta t)} & \ldots & p_{mm}^{(\Delta t)} \end{bmatrix} = \left[p(0) \ldots p(j) \ldots p(m) \right]$$

Derivando con respecto a Δt en $\Delta t = 0$ es:

$$\left[\, p(0) \ldots\ p(i) \ldots p(m) \right] \cdot \begin{bmatrix} d_{00} & \ldots & d_{0j} & \ldots & d_{0m} \\ & \ldots & & \ldots & \\ d_{i0} & \ldots & d_{ij} & \ldots & d_{im} \\ & \ldots & & \ldots & \\ d_{m0} & \ldots & d_{mj} & \ldots & d_{mm} \end{bmatrix} = \left[0 \ldots 0 \ldots 0 \right] \qquad (3.25)$$

Es decir,

$$V^* \cdot D = 0$$

Siendo, de (3.24):

$$\left[p(0) \quad p(1)\ \ldots\ p(i)\ \ldots\ p(m) \right] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \ldots \\ 1 \\ \ldots \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \qquad (3.26)$$

y, de (3.10):

$$d_{ii} = -\sum_{\forall j \neq i} d_{ij} \qquad (3.27)$$

Las ecuaciones (3.25) a (3.27) también pueden expresarse de la siguiente forma:

$$m+1 \text{ ecuaciones} \begin{cases} \sum_{j=0}^{m} p(i)\cdot d_{ij} = 0 & \text{i ecuaciones} \\ \sum_{i=0}^{m} p(i) = 1 \end{cases} \qquad (3.28) \text{ y } (3.29)$$

siendo, por (3.27): $d_{ii} = -\sum_{\forall j \neq i} d_{ij}$

Además, por la (3.27) la suma de los elementos de cualquier fila de la matriz D es cero. Luego, una columna cualquiera es la combinación lineal de las m columnas restantes, o lo que es equivalente, una cualquiera de las m+1 ecuaciones es combinación lineal de las m ecuaciones restantes, pudiéndose eliminar. Si se desecha, por ejemplo, la última ecuación, su lugar formal en la expresión matricial (3.25) puede ser ocupado por la (3.26), eliminando la última columna de D, e incorporando en su lugar el vector de elementos uno, y reemplazando el último cero del vector de términos independientes por un uno, quedando de esta manera integradas las ecuaciones (3.25) y (3.26) en una sola ecuación:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} p(0) & p(1) \ldots p(i) \ldots p(m) \end{bmatrix}}_{V^*} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} d_{00} & d_{01} & \ldots & p_{0k} & \ldots & 1 \\ d_{10} & d_{11} & \ldots & p_{1k} & \ldots & 1 \\ \ldots & & & & & \\ d_{i0} & d_{i1} & \ldots & d_{ik} & \ldots & 1 \\ \ldots & & & & & \\ d_{m0} & d_{m1} & \ldots & d_{mk} & \ldots & 1 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \ldots 0 \ldots 1 \end{bmatrix}}_{B} \qquad (3.30)$$

$$d_{ii} = -\sum_{\forall j \neq i} d_{ij} \qquad (3.27)$$

Luego, el vector V^* de probabilidades del régimen estacionario queda expresado:

$$\boxed{V^* = B \cdot A^{-1}} \qquad (3.31)$$

y dada la estructura particular de B, V^* está integrado por la última fila de la matriz A^{-1}.

Este sistema de ecuaciones puede ser también interpretado como un sistema de balance de flujos probabilísticos para una cadena en parámetro continuo. En efecto, si en la ecuación (3.27) se efectúa el cambio de variables *j* por *i* y *k* por *j* queda:

$$d_{jj} = -\sum_{\forall k \neq j} d_{jk}$$

Reemplazando en la (3.28) queda:

$$0 = \sum_{\forall i \neq j} p(i) \cdot d_{ij} + p(j) \cdot d_{jj} = \sum_{\forall i \neq j} p(i) \cdot d_{ij} - p(j) \cdot \sum_{\forall k \neq j} d_{jk}$$

y ordenando:

$$\boxed{\sum_{\forall i \neq j} p(i) \cdot d_{ij} = p(j) \cdot \sum_{\forall k \neq j} d_{jk}} \tag{3.32}$$

Que es la extensión de la ecuación (2.35) de balance de flujos probabilísticos para el caso de cadenas en parámetro continuo.

CAPÍTULO 4

PROCESOS DE NACIMIENTO Y MUERTE EN PARÁMETRO CONTINUO

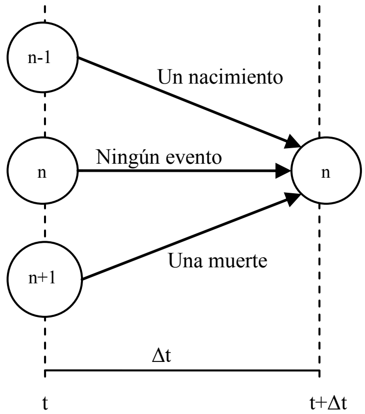
INTRODUCCIÓN

Un tipo muy especial de Cadena de Markov en parámetro continuo es el llamado proceso de nacimiento y muerte en donde:

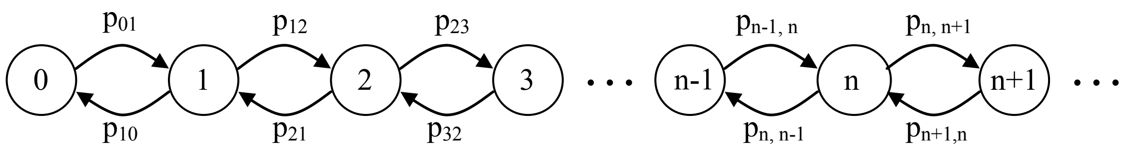
- el estado del sistema *n* en un instante *t* queda definido por su tamaño, es decir por la cantidad de unidades (o individuos) presentes en el sistema, en el instante *t*,
- los eventos se dan en forma independiente y son solamente de dos tipos: "nacimientos", en donde la variable que representa el estado se incrementa y "muertes", en donde el estado decrece, y
- la probabilidad de que se verifique más de un evento en un intervalo de tiempo muy pequeño (tanto como para suponer que $\Delta t^2 \to 0$) es prácticamente nula.

Los procesos de nacimiento y muerte tienen muchas aplicaciones en ingeniería, epidemiología, teoría de colas e ingeniería de rendimientos. Se puede utilizar, por ejemplo, para estudiar la evolución de bacterias, el número de personas con una enfermedad determinada en una población, y el número de clientes que están esperando en cola para comprar una entrada de cine.

Un caso particular de procesos de nacimiento y muerte es aquel en donde las variaciones de estado en un intervalo de tiempo pueden ser solamente unitarias, es decir cuando la probabilidad de que se produzca más de un nacimiento o una muerte en un intervalo de tiempo Δt infinitesimal es nula. Esto implica que el tamaño del sistema sólo puede incrementarse en una unidad, permanecer en el mismo valor, o disminuir en una unidad. Por ello, al estado *n* del sistema en el instante $t+\Delta t$ solamente puede arribarse desde el estado $n-1$ (si se produce un nacimiento en el intervalo Δt), desde el propio estado *n* (si no se produce ningún nacimiento o muerte en dicho intervalo), o desde el estado $n+1$ (si ocurre una muerte en Δt). Es decir:



Considerando que, conforme al método de suma de flujos comentado, el flujo probabilístico p_{ii} de un nodo se anula, la cadena markoviana de un proceso de nacimiento y muerte, en régimen permanente (es decir cuando las probabilidades de estado no dependen del tiempo), puede representarse de la siguiente forma:



4.1 PROCESOS DE NACIMIENTO Y MUERTE POISSONIANOS

En una gran cantidad de sistemas de procesos del mundo real, los procesos de nacimiento y de muerte son de tipo Poisson. Para un proceso Poisson de parámetro λ, la probabilidad de que se produzcan *n* eventos en un intervalo Δt está dada por:

$$p(n) = \frac{(\lambda \cdot \Delta t)^n \cdot e^{-\lambda \Delta t}}{n!} \tag{4.2}$$

siendo n = 0, 1, 2, … y λ > 0.

Los procesos Poisson tienen la particularidad de que la probabilidad de que se verifique un evento en un intervalo de tiempo muy pequeño (tan chico como para suponer que en dicho intervalo no se puede producir más de un de evento), es $\lambda \cdot \Delta t$, y de que no se verifique $1- \lambda \cdot \Delta t$. Esta propiedad se justifica del siguiente modo:

De (4.2) se determina que la probabilidad de que en el intervalo de tiempo Δt no se dé un evento es:

$$p(0) = \frac{(\lambda\, \Delta t)^0 \cdot e^{-\lambda \Delta t}}{0!} = e^{-\lambda \Delta t} \tag{4.3}$$

y la probabilidad de que se verifique:

$$p(1) = \frac{(\lambda\,\Delta t)^1 \cdot e^{-\lambda\,\Delta t}}{1!} = \lambda\,\Delta t \cdot e^{-\lambda\,\Delta t} \qquad (4.4)$$

Tomando un período de tiempo Δt suficientemente chico para que en ese intervalo no se pueda producir más de un evento (o de manera tal de suponer que $\Delta t^2 \approx 0$), tendremos que:

$$p(0) + p(1) = 1$$

$$e^{-\lambda\,\Delta t} + \lambda\,\Delta t . e^{-\lambda\,\Delta t} = 1$$

$$e^{-\lambda\,\Delta t}(1 + \lambda\,\Delta t) = 1$$

$$e^{-\lambda\,\Delta t} = \frac{1}{1 + \lambda\,\Delta t}$$

Multiplicando y dividiendo el segundo término por $(1- \lambda\Delta t)$:

$$e^{-\lambda\,\Delta t} = \frac{1 - \lambda\Delta t}{(1 + \lambda\Delta t).(1 - \lambda\Delta t)} = \frac{1 - \lambda\Delta t}{1^2 - (\lambda\Delta t)^2} = 1 - \lambda\Delta t$$

Luego, considerando (4.3), tendremos que

$$p(0) = 1 - \lambda\,\Delta t$$

y, por lo tanto

$$p(1) = \lambda\,\Delta t \qquad (4.6)$$

Llamando ahora:

λ_n : Número promedio de ingresos al sistema por unidad de tiempo cuando el estado del mismo es *n*.

μ_n : Número promedio de egresos del sistema cuando el estado del mismo es *n*.

tendremos que, en un proceso de nacimiento y muerte de eventos poissonianos, para un período de tiempo infinitesimal Δt y para un estado *n* determinado:

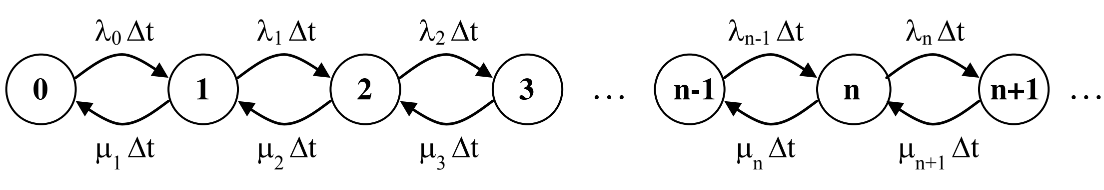
Probabilidad de que haya un nacimiento = $1-\lambda_n \cdot \Delta t$ (4.5)

Probabilidad de que no haya un nacimiento = $1-\lambda_n \cdot \Delta t$ (4.6)

Probabilidad de que haya una muerte = $\mu_n \cdot \Delta t$ (4.7)

Probabilidad de que no haya una muerte = $1-\mu_n \cdot \Delta t$ (4.8)

En estas condiciones, la representación gráfica de la cadena markoviana, para nacimientos o muertes unitarias, es:



Balanceando los nodos tendremos:

Nodo 0: $p(1) = p(0) \cdot \dfrac{\lambda_o}{\mu_1}$

Nodo 1: $p(2) = \dfrac{\lambda_1}{\mu_2} \cdot p(1)$

Nodo 2: $p(3) = \dfrac{\lambda_2}{\mu_3} \cdot p(2)$

y, para un estado genérico n, la ecuación de estado en régimen permanente es:

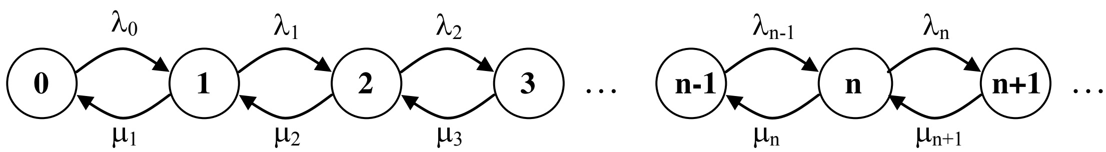
$$\text{Nodo n:} \quad \boxed{p(n) = p(n-1) \cdot \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n}} \quad \text{para } \forall\ n \geq 1 \tag{4.9}$$

La expresión (4.9) es una ecuación generativa, en donde la probabilidad del estado n+1 se determina a partir del estado n.

$$\sum_{n=0}^{N} p(n) = 1 \tag{4.10}$$

en donde N es el tamaño máximo de individuos admitido por el sistema.

Tal como puede observarse en las ecuaciones de balance de nodos arriba desarrolladas, los Δt se simplifican y, en consecuencia, en lugar de las probabilidades de transición, se pueden tomar directamente las tasas de transferencia, como también se explicó en el capítulo 3 para Cadenas de Markov en parámetro continuo. En resumen, la cadena de nacimiento y muerte podría expresarse del siguiente modo:



Cabe mencionar que si el sistema está vacío la tasa esperada de egresos es nula, es decir $\mu_0 = 0$.

Los sistemas en donde el espacio de estados es finito (es decir, N finito) se pueden solucionar resolviendo el sistema de N ecuaciones simultáneas, constituidas por N-1 ecuaciones (4.9) y por la ecuación (4.10).

En los sistemas que admiten infinitos estados (es decir, N infinito) se requiere determinar la probabilidad de que el sistema esté sin unidades p(0) para poder aplicar luego la expresión (4.9) a fin de determinar en forma generativa el resto de las probabilidades. Por supuesto que este método es también aplicable a sistemas de espacio de estados finitos. Para hallar p(0), despejando la probabilidad de cada estado en función de p(0):

$$p(1) = p(0) \cdot \frac{\lambda_o}{\mu_1}$$

$$p(2) = \frac{\lambda_1}{\mu_2} \cdot p(1) = \frac{\lambda_1 \cdot \lambda_0}{\mu_2 \cdot \mu_1} \cdot p(0)$$

$$p(3) = \frac{\lambda_2}{\mu_3} \cdot p(2) = \frac{\lambda_2 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_0}{\mu_3 \cdot \mu_2 \cdot \mu_1} \cdot p(0)$$

y, para un estado genérico n, la ecuación de estado de régimen permanente es:

$$\boxed{p(n) = p(n-1) \cdot \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} = \prod_1^n \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} \cdot p(0)} \qquad \text{para } \forall\, n \geq 1 \tag{4.11}$$

Luego, combinando (4.9) con (4.10), se puede obtener la expresión de la probabilidad de que el sistema se encuentre sin ninguna unidad.

$$p(0) = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{N} p(n)} = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{N} \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \cdot p(0)} \tag{4.12}$$

En los sistemas en donde el espacio de estados es infinito (esto es cuando se admiten infinitas unidades) una condición necesaria para que exista la distribución estacionaria es que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} < \infty \tag{4.13}$$

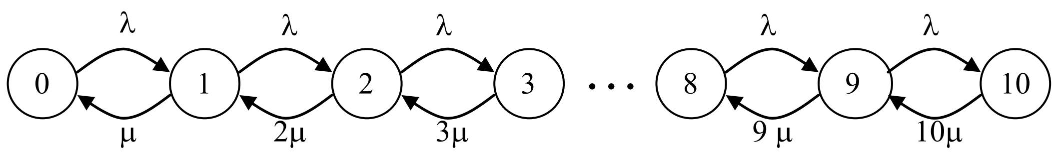
Ejemplo 4.a

Un pequeño supermercado tiene un garage para 10 automóviles. Los clientes arriban, conforme a un proceso Poisson cada 5 minutos y tardan en promedio 30 minutos en efectuar la compra y salir del garage, también según un proceso Poisson.

La tasa de ingresos al garage, para un estado n, es igual a la tasa de arribos por la probabilidad de que el garage no esté completo. Por otra parte, para una cantidad *n* de autos en el garage, cabe esperar que la tasa de egresos sea igual a la frecuencia con que cada automóvil utiliza el garage ($1/\mu$) multiplicada por *n*.

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & \text{para } 0 \leq n < 10 \\ 0 & \text{para } n = 10 \end{cases}$$

$$\mu_n = \begin{cases} 0 & \text{para } n = 0 \\ n \cdot \mu & \text{para } 1 \leq n \leq 10 \end{cases}$$



La ecuación de estado en régimen permanente es, entonces:

$$p(n) = \frac{\lambda}{n \cdot \mu} \cdot p(n-1)$$

Planteando el sistema de 10 ecuaciones (constituidas por 9 ecuaciones de estado y la ecuación de colectividad exahustiva de las probabilidades), y tomando como parámetros:

$$\lambda = \frac{1}{5}\frac{\text{auto}}{\text{min}} = 12\frac{\text{autos}}{\text{h}}$$

$$\mu = \frac{1}{30}\frac{\text{auto}}{\text{min}} = 2\frac{\text{autos}}{\text{h}}$$

tendremos:

V^* = [0,0026; 0,0156; 0,0467; 0,0932; 0,1398; 0,1678; 0,1678; 0,1438; 0,1079; 0,0719; 0,0431]

El número promedio de autos que ingresa al garage por hora es

$$\lambda \cdot [1 - p(10)] = 11{,}4823$$

Este valor, multiplicado por el tiempo promedio de permanencia de cada auto en el garage (0,50 h), nos da el número de autos que, en promedio, se encuentran en el garage: 5,7411.

Ejemplo 4.b

A un depósito comercial con atención permanente arriba un proveedor en promedio cada 6 horas, según una distribución exponencial. En cada reparto, el proveedor entrega una sola unidad del producto en cuestión (o, dicho de otra forma, llegan al depósito 4 unidades por día, conforme a una distribución Poisson). El depósito tiene una capacidad máxima de almacenamiento de 3 unidades. Si el depósito está completo en el momento del arribo de una unidad, dicha unidad no se adquiere.

Se demanda una unidad de este producto cada 4 horas, también conforme a una distribución exponencial (o, dicho de otra forma, la demanda del producto es de 6 unidades por día, conforme a una distribución Poisson). Si el producto no se encuentra en existencia en el momento de ser requerido por los compradores, la venta se pierde.

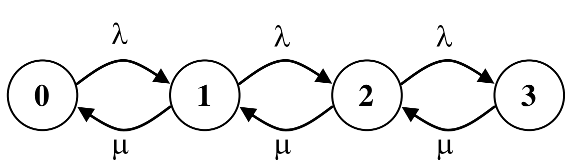
Es un proceso de nacimiento y muerte unitario. Tendremos que la tasa de llegadas del producto al depósito para los distintos estados es:

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & \text{para } n = 0, 1, 2 \\ 0 & \text{para } n = 3 \end{cases}$$

$$\mu_n = \begin{cases} 0 & \text{para } n = 0 \\ \mu & \text{para } n = 1, 2, 3 \end{cases}$$

siendo λ = 4 unidades/día y μ = 6 unidades/día.

La Cadena de Markov es:



En régimen permanente, las probabilidades de los distintos estados se pueden determinar resolviendo el sistema de ecuaciones simultáneas:

$$p(1) = p(0) \cdot \frac{\lambda}{\mu}$$

$$p(2) = \frac{\lambda}{\mu} \cdot p(1)$$

$$p(3) = \frac{\lambda}{\mu} \cdot p(2)$$

$$p(0) + p(1) + p(2) + p(3) = 1$$

cuyo resultado es:

V^*= [0,4154; 0,2769; 0,1846; 0,1231]

Otra forma, es determinando primero la probabilidad de que no haya ningún producto en el depósito, a partir de la (4.12):

$$p(0) = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{N} p(n)} = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{N} \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \cdot p(0)} = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3} = 0{,}4154$$

y luego aplicando (4.9) para determinar el resto de las probabilidades.

Ejemplo 4.c

Suponiendo que el depósito del ejemplo 4.b no tiene restricciones de tamaño, tendríamos:

$$\lambda_n = \lambda \qquad \forall\, n$$

$$\mu_n = \begin{cases} 0 & \text{para } n = 0 \\ \mu & \text{para } n > 0 \end{cases}$$

Aplicando (4.12) tendremos que:

$$p(1) = p(0) \cdot \frac{\lambda}{\mu}$$

$$p(2) = \frac{\lambda}{\mu} \cdot p(1) = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \cdot p(0)$$

$$p(3) = \frac{\lambda}{\mu} \cdot p(2) = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 \cdot p(0)$$

y, en forma genérica:

$$p(n) = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot p(0) \tag{4.14}$$

Además:

$$\sum_{0}^{\infty} p(n) = \sum_{0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n} \cdot p(0) = 1$$

Despejando:

$$p(0) = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n}}$$

Para que se verifique (4.13), la razón λ/μ de la serie geométrica del denominador debe ser menor a 1. Desarrollando la serie:

$$p(0) = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 0{,}3333$$

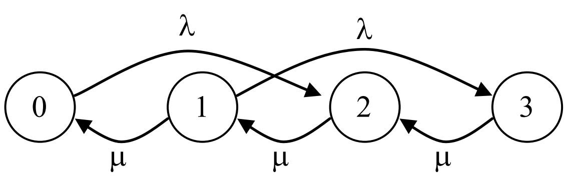
Luego, aplicando (4.14) tendremos, por ejemplo:

$$p(1) = 0{,}2222$$

$$p(2) = 0{,}1481 \text{ , etc.}$$

Ejemplo 4.d

Supondremos ahora que el proveedor del ejemplo 4.b en cada reparto entrega de a dos unidades o ninguna (en el caso de que no haya lugar en el depósito para las dos). En este caso el proceso de nacimiento es de tipo "*batch*".



Este ejemplo será resuelto balanceando, por ejemplo los nodos 0, 1 y 3 para resolver el sistema de ecuaciones siguiente:

- $p(0) \cdot \lambda = p(1) \cdot \mu$
- $p(1) \cdot (\lambda + \mu) = \cdot p(2) \cdot \mu$
- $p(3) \cdot \mu = p(1) \cdot \lambda$
- $p(0) + p(1) + p(2) + p(3) = 1$

Cuya solución es:

$V^{*} = [0{,}3103;\ 0{,}2069;\ \ 0{,}3448;\ \ 0{,}1379]$

4.2 SISTEMAS DE ESPERA

Los sistemas de espera, también llamados de cola, tales como los de prestación de servicios a clientes de cualquier naturaleza, son sistemas que están constituidos por canales o servidores que prestan un servicio determinado y por clientes que pueden estar recibiendo el servicio en los canales o bien esperando ser atendidos en una cola.

Los clientes, que generalmente provienen de una población externa, pueden ingresar al sistema, y en tal caso serán atendidos inmediatamente si hay algún canal disponible, o tendrán que esperar a que se desocupe algún canal para poder comenzar el servicio. Cuando un canal se libera, con algún criterio previamente determinado se selecciona a algún cliente para atender entre todos los que están esperando (por ejemplo, al cliente que ingresó primero al sistema). Una vez completada la atención, los clientes se retiran (egresan) del sistema.

El estado de estos sistemas queda definido por la cantidad de clientes que se encuentra en ellos en un momento determinado.

La capacidad del sistema, es decir el número máximo de clientes que puede residir en el mismo, puede ser limitada o ilimitada.

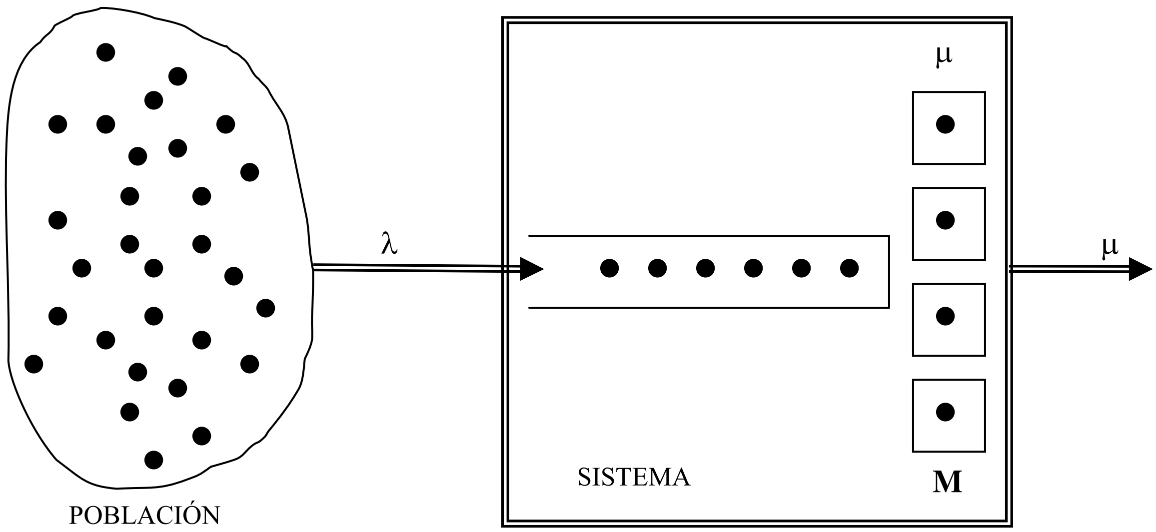
En consecuencia, los sistemas pueden ser estudiados como procesos de nacimiento y muerte en donde un nacimiento está dado por un ingreso de un cliente al sistema y una muerte por un egreso de un cliente del sistema.

Cuando los arribos de los clientes son procesos Poisson (es decir, cuando el intervalo entre arribos de clientes es una variable aleatoria con distribución exponencial) y cuando los servicios también son de tipo Poisson (es decir, cuando la duración del servicio es una variable aleatoria con distribución exponencial), para el régimen permanente se pueden aplicar las ecuaciones (4.9) y (4.10) para calcular las probabilidades de que el sistema se encuentre en un estado determinado.

La determinación de las probabilidades de estado permitirá calcular los valores promedio de una serie de variables características que miden la eficiencia del sistema, tales como la longitud de la cola, el número de clientes dentro del sistema, tiempo de espera, tiempo de permanencia dentro del sistema, porcentaje de ocupación de los canales, etc.

4.2.1 Sistemas de capacidad infinita

Suponiendo un sistema sin restricciones de capacidad, con M canales similares de atención, dispuestos en paralelo, y en donde todos los clientes que arriban al sistema intentan ingresar independientemente del estado (es decir, no son impacientes), tendremos:



$$\lambda_n = \lambda \qquad \forall\, n. \tag{4.15}$$

$$\mu_n = \begin{cases} 0 & \text{para } n = 0 \\ n \cdot \mu & \text{para } 1 \le n < M \\ M \cdot \mu & \text{para } n \ge M \end{cases} \tag{4.16}$$

En estas condiciones la ecuación (4.9) queda:

$$\boxed{p(n) = \frac{\lambda^n}{n! \cdot \mu^n} \cdot p(0)} \qquad \text{para } n < M \tag{4.17}$$

$$\boxed{p(n) = \frac{\lambda^n}{M! \cdot \mu^n \cdot M^{n-M}} \cdot p(0)} \qquad \text{para } n \ge M \tag{4.18}$$

que, conjuntamente con (4.10) permiten resolver el problema:

$$p(0) = \frac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{M-1} \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{M^M}{M!} \cdot \sum_{M}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{M \cdot \mu}\right)^n} \tag{4.19}$$

Dado que esta probabilidad debe estar acotada en un valor comprendido entre 0 y 1, el denominador debe tomar un valor mayor o igual a uno y finito. La primera de las series tiene convergencia, por ser una serie finita, mientras que la segunda serie converge si se cumple que:

$$\frac{\lambda}{M \cdot \mu} < 1$$

Es decir:

$$\frac{\lambda}{\mu} < M \tag{4.20}$$

En estas condiciones, desarrollando la segunda serie del denominador, la ecuación (4.19) queda:

$$p(0) = \frac{1}{\sum_{n=0}^{M-1} \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^M \frac{\mu}{(M-1)! \cdot (M \cdot \mu - \lambda)}} \tag{4.21}$$

En particular, para sistemas de un solo canal tendremos que la (4.16):

$$\mu_n = \begin{cases} 0 & \text{para } n = 0 \\ \mu & \text{para } n \geq 1 \end{cases} \tag{4.22}$$

Por lo que la (4.18) queda:

$$p(n) = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot p(0) \tag{4.23}$$

y la (4.19):

$$p(0) = 1 - \frac{\lambda}{\mu} \tag{4.24}$$

4.2.2 Sistemas de capacidad limitada

Para los sistemas de capacidad limitada a un número máximo de individuos igual a N, dado que la probabilidad de que un cliente ingrese al sistema cuando el mismo está completo es cero, las ecuaciones (4.15) se transforman en:

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & \text{para } n = 0, 1, 2, \ldots, N-1 \\ 0 & \text{para } n = N \end{cases} \tag{4.25}$$

Luego, para los sistemas de varios canales en paralelo, la expresión (4.19) queda:

$$p(0) = \frac{1}{\sum_{n=0}^{M-1} \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{M^M}{M!} \cdot \sum_{M}^{N} \left(\frac{\lambda}{M \cdot \mu}\right)^n} \tag{4.26}$$

y desarrollando la segunda serie del denominador:

$$p(0) = \frac{1}{\sum_{n=0}^{M-1} \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^M \frac{\mu}{(M-1)! \cdot (M \cdot \mu - \lambda)} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{M \cdot \mu}\right)^{N-M+1}} \tag{4.27}$$

que, reemplazada en (4.13) y (4.14) nos permite determinar la probabilidad de cualquier estado.

Para los sistemas de un solo canal, tendremos que la (4.26) se transforma en:

$$p(0) = \frac{1-\frac{\lambda}{\mu}}{1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N+1}} \qquad (4.28)$$

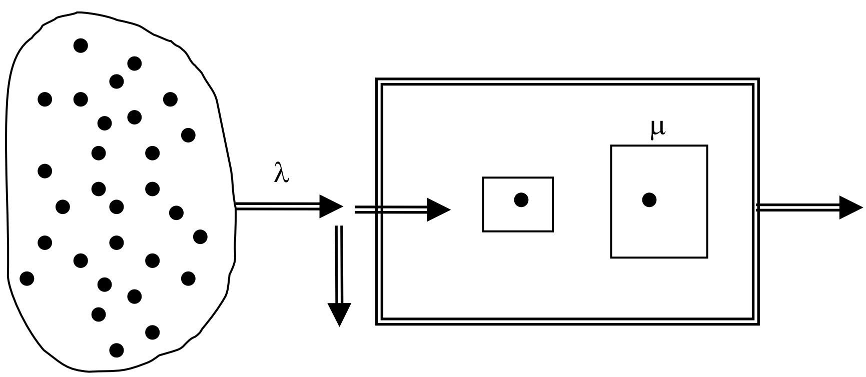
la que, reemplazada en (4.18) permite obtener la probabilidad de cualquier estado.

Los problemas de capacidad limitada, con un número pequeño de estados pueden resolverse sin acudir a las expresiones cuantitativas (4.26) a (4.28), resolviendo directamente la cadena markoviana.

Ejemplo 4.e:

Para un sistema de colas de un solo canal y que admite un solo lugar de espera, con procesos de arribo de clientes Poisson (con media λ=8 cl/h) y de servicio de clientes en el canal también Poisson (con media μ=10 cl/h), se determinarán las probabilidades de estado en régimen permanente.

La representación gráfica de este sistema de colas es la siguiente:



Tendremos:

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & \text{para n} = 0, 1 \\ 0 & \text{para n} = 2 \end{cases}$$

y, dado que se trata de un sistema con un solo canal de atención tendremos que

$$\mu_n = \begin{cases} 0 & \text{para n} = 0 \\ \mu & \text{para n} = 1, 2 \end{cases}$$

Las probabilidades de que un cliente que arriba al sistema ingrese en él y de que un cliente que se está atendiendo en el canal egrese del sistema, en un intervalo de tiempo de tiempo Δt muy pequeño (tanto como para suponer que no se puede producir más de un evento) están dadas, respectivamente, por:

p(ingreso) = $\lambda_n \cdot \Delta t$

$p(\text{egreso}) = \mu_n \cdot \Delta t$

dado que los procesos son poissonianos.

En consecuencia:

✓ Si el sistema se encuentra en el estado 0, tendremos que:

- la probabilidad de que se mantenga en el mismo estado 0 en un intervalo de tiempo Δt (muy chico), correspondiente a un paso del proceso markoviano, será igual a la probabilidad de que no haya ningún ingreso, es decir:

  $p(0,0) = 1-\lambda \cdot \Delta t$

  mientras que

- la probabilidad de que pase al estado 1 es la probabilidad de que haya un ingreso, o sea:

  $p(0,1) = \lambda \cdot \Delta t$.

✓ Si el estado es 1, tendremos que

- la probabilidad de pasar al estado 0 es igual a la probabilidad de que en ese intervalo se produzca un egreso ($\mu \cdot \Delta t$) y ningún ingreso ($1-\lambda \cdot \Delta t$):

  $$p(1,0) = \mu \cdot \Delta t \cdot (1 - \lambda \cdot \Delta t) = \mu \cdot \Delta t$$

  dado que el intervalo Δt es lo suficientemente chico como para suponer que Δt^2 es igual a cero.

- la probabilidad de permanecer en el propio estado 1 es igual a la probabilidad de que no haya ningún ingreso ni ningún egreso

  $$p(1,1) = (1 - \mu \cdot \Delta t) \cdot (1 - \lambda \cdot \Delta t) = 1 - \mu \cdot \Delta t - \lambda \cdot \Delta t$$

  y

- la probabilidad de pasar al estado 2 es igual a la probabilidad de que haya un ingreso a la vez que no se produzca ningún egreso:

  $$p(1,2) = \lambda \cdot \Delta t \cdot (1 - \mu \cdot \Delta t) \cdot (1 - \lambda \cdot \Delta t) = \lambda \cdot \Delta t$$

  Finalmente,

✓ Si el estado del sistema es 2:

- la probabilidad de pasar al estado 1 en un paso es igual a la probabilidad de que se produzca un egreso

  $$p(2,1) = \mu \cdot \Delta t$$

  y

- la probabilidad de permanecer en el mismo estado 2 es igual a la probabilidad de que no se produzca un egreso:

  $$p(2,2) = (1 - \mu \cdot \Delta t)$$

En definitiva, la matriz de transición para el sistema será la siguiente:

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1-\lambda\cdot\Delta t & \lambda\cdot\Delta t & \\ \mu\cdot\Delta t & 1-\lambda\cdot\Delta t-\mu\cdot\Delta t & \lambda\cdot\Delta t \\ & \mu\cdot\Delta t & 1-\mu\cdot\Delta t \end{bmatrix} \end{array}$$

En régimen permanente se cumple que:

$$\begin{bmatrix} p(0) & p(1) & p(2) \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1-\lambda\cdot\Delta t & \lambda\cdot\Delta t & \\ \mu\cdot\Delta t & 1-\lambda\cdot\Delta t-\mu\cdot\Delta t & \lambda\cdot\Delta t \\ & \mu\cdot\Delta t & 1-\mu\cdot\Delta t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(0) & p(1) & p(2) \end{bmatrix}$$

Realizando el producto matricial de dos vectores tendremos:

- $p(0)\cdot(1-\lambda\cdot\Delta t)+p(1)\cdot\mu\cdot\Delta t = p(0)$

  $p(0)-p(0)\cdot\lambda\cdot\Delta t+p(1)\cdot\mu\cdot\Delta t-p(0)=0$

  $-p(0)\cdot\lambda\cdot\Delta t+p(1)\cdot\mu\cdot\Delta t=0$

  $\boxed{p(1)=p(0)\cdot\frac{\lambda}{\mu}}$

- $p(1)\cdot\lambda\cdot\Delta t+p(2)\cdot(1-\mu\cdot\Delta t)=p(2)$

  $p(1)\cdot\lambda\cdot\Delta t+p(2)-p(2)\cdot\mu\cdot\Delta t=p(2)$

  $p(2)=p(1)\cdot\frac{\lambda}{\mu}$

  $\boxed{p(2)=p(0)\cdot\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}$

Considerando ahora la ecuación correspondiente a la suma de las probabilidades, tendremos:

- $p(0)+p(1)+p(2)=1$

  $p(0)+p(0)\cdot\frac{\lambda}{\mu}+p(0)\cdot\frac{\lambda^2}{\mu^2}=1$

  $p(0)\cdot\left[1+\frac{\lambda}{\mu}+\frac{\lambda^2}{\mu^2}\right]=1$

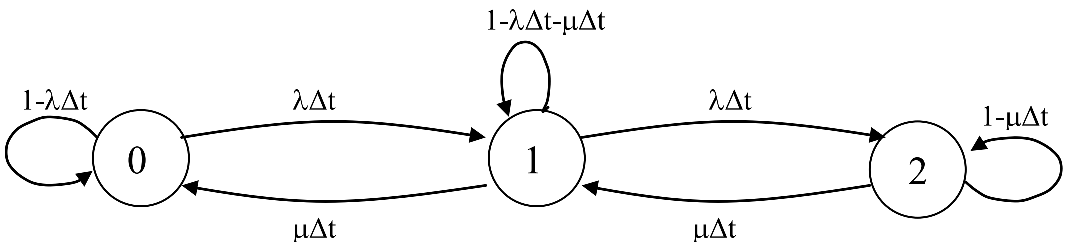
$$\boxed{p(0) = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{\mu^2}}}$$

Como hemos podido observar, los valores de Δt se simplifican al plantear las ecuaciones de estado para el régimen permanente, por lo que se podrían obviar al formular los planteos de las probabilidades de transición.

Teniendo en cuenta las consideraciones expuestas en el capítulo 2, el sistema de ecuaciones linealmente independientes del problema pudo haberse generado directamente a partir del producto matricial:

$$[p(0) \quad p(1) \quad p(2)] \cdot \begin{bmatrix} 1-\lambda & \lambda & 1 \\ \mu & 1-\lambda-\mu & 1 \\ & \mu & 1 \end{bmatrix} = [p(0) \quad p(1) \quad 1]$$

Finalmente, se podría haber arribado al mismo sistema de ecuaciones, aún en forma más sencilla, aplicando el método de suma de flujos:



- NODO 0: $p(0) \cdot \lambda = p(1) \cdot \mu \quad \Rightarrow \quad p(1) = p(0) \cdot \frac{\lambda}{\mu}$
- NODO 2: $p(2) \cdot \mu = p(1) \cdot \lambda \quad \Rightarrow \quad p(2) = p(1) \cdot \frac{\lambda}{\mu} = p(0) \cdot \frac{\lambda^2}{\mu^2}$
- SUMA: $p(0) + p(1) + p(2) = 1 \quad \Rightarrow \quad p(0) = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{\mu^2}}$

Para los datos del problema (λ=8 cl/h y μ=10 cl/h), tendremos el siguiente resultado:

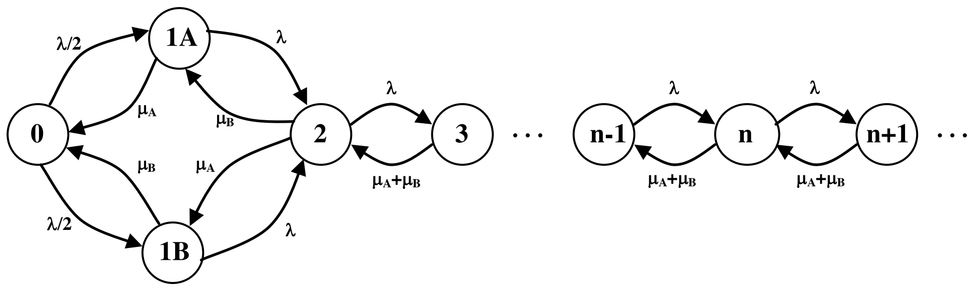
$$p(0) = \frac{1}{1 + 0{,}8 + 0{,}8^2} = 0{,}4098$$

$$p(1) = p(0) \cdot 0{,}8 = 0{,}3278$$

$$p(2) = p(0) \cdot 0{,}8^2 = 0{,}2623$$

4.2.3 Sistemas con distintas velocidades de atención:

Suponiendo un sistema de dos canales (A y B) con diferentes velocidades de atención (μ_A y μ_B), en el cual los clientes desconocen cuál de los dos canales es más rápido, sin restricciones de capacidad y sin impaciencia, tendremos que la cadena markoviana es la siguiente:



Balanceando los nodos, tendremos:

Nodo 0: $p(1A)\cdot\mu_A + p(1B)\cdot\mu_B = p(0)\cdot\lambda$ (4.29)

Nodo 1A: $p(1A)\cdot(\lambda+\mu_A) = p(0)\cdot\lambda/2 + p(2)\cdot\mu_B$ (4.30)

Nodo 1B: $p(1B)\cdot(\lambda+\mu_B) = p(0)\cdot\lambda/2 + p(2)\cdot\mu_A$ (4.31)

Nodo 2: $p(1A)\cdot\lambda + p(1B)\cdot\lambda = p(2)\cdot(\mu_A+\mu_B)$ (4.32)

Nodo 3: $p(2)\cdot\lambda = p(3)\cdot(\mu_A+\mu_B)$ (4.33)

Nodo 4: $p(3)\cdot\lambda = p(4)\cdot(\mu_A+\mu_B)$ (4.34)

y, continuando de esta manera y, por el principio de inducción completa, para un n ≥ 2, tendremos:

Nodo n: $\boxed{p(n-1)\cdot\lambda = p(n)\cdot(\mu_A+\mu_B)}$ (4.35)

La ecuación adicional que se plantea es la de colectividad exhaustiva:

$$\sum_0^{\infty} p(n) = 1$$

que se puede desagregar de la siguiente forma:

$$p(0) + p(1A) + p(1B) + \sum_2^{\infty} p(n) = 1 \qquad (4.36)$$

Para calcular la expresión de la sumatoria, se sabe que, en régimen permanente, la tasa de egreso de clientes del sistema debe ser igual a la tasa de ingreso:

$$\left[p(1A) + \sum_2^{\infty} p(n)\right]\cdot\mu_A + \left[p(1B) + \sum_2^{\infty} p(n)\right]\cdot\mu_B = \lambda \qquad (4.37)$$

$$p(1A)\cdot\mu_A+\sum_2^{\infty}p(n)\cdot\mu_A+p(1B)\cdot\mu_B+\sum_2^{\infty}p(n)\cdot\mu_B=\lambda$$

$$p(0)\cdot\lambda+\sum_2^{\infty}p(n)\cdot(\mu_A+\mu_B)=\lambda \qquad (4.38)$$

$$\sum_2^{\infty}p(n)\cdot(\mu_A+\mu_B)=\lambda\cdot[1-p(0)]$$

$$\sum_2^{\infty}p(n)=\frac{\lambda}{(\mu_A+\mu_B)}\cdot[1-p(0)]$$

Reemplazando esta expresión en (4.31):

$$p(0)+p(1A)+p(1B)+\frac{\lambda}{(\mu_A+\mu_B)}\cdot[1-p(0)]=1 \qquad (4.39)$$

En resumen, se pueden determinar las ecuaciones de estado, entonces, resolviendo primero el sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas constituido por (4.39), y 3 ecuaciones seleccionadas de (4.29), (4.30), (4.31) y (4.32). Luego, aplicando la ecuación generativa de probabilidades de estados (4.35), se calcula el resto de las probabilidades de estados.

Ejemplo 4.f

Suponiendo un sistema en régimen permanente de dos canales A y B, sin restricciones de capacidad y sin impaciencia, al que arriban en promedio 5 clientes/hora, conforme a un proceso Poisson, con velocidades de atención, según procesos Poisson, de μ_A = 15 clientes/hora y μ_B = 10 clientes/hora, resolviendo el sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas arriba indicado con el sistema LINGO, tendremos:

```
LAMBDA = 5;
MUA = 15;
MUB = 10;
p0 + p1A + P1B + LAMBDA/(MUA + MUB)*(1-P0)=1;
P1A* MUA + P1B * MUB = P0 * LAMBDA;
P1A * LAMBDA + P1B * LAMBDA = P2 *(MUA + MUB);
P1B* (LAMBDA+MUB) = P0 * LAMBDA/2 + P2 * MUA;
```

El resultado de este sistema de ecuaciones es:

p(0) = 0,6575342

p(1A) = 0,1095890

p(1B) = 0,1643836

p(2) = 0,0547945

Luego, aplicando (4.35), el resto de las probabilidades serán:

p(3) = 0,0109589

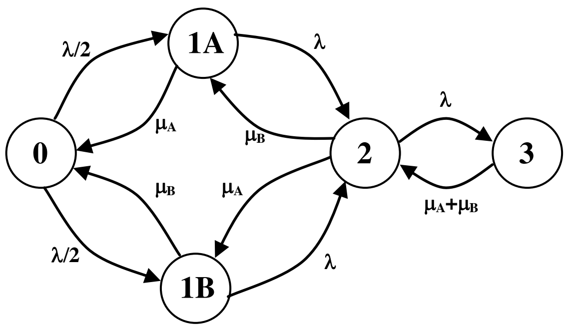
p(4) = 0,0021918

p(5) = 0,0004384, etc.

Para el caso de que el sistema estuviera limitado a una cantidad de clientes igual a N, por tratarse de un sistema de una cantidad finita de estados, no es necesario hacer uso de la ecuación (4.34).

Ejemplo 4.g:

Suponiendo que el problema del ejemplo 4.f puede admitir un máximo de 3 clientes, tendremos que la representación de la cadena es:



Balanceando los nodos con los flujos probabilísticos, se determina el sistema de ecuaciones lineales:

Nodo 0: $p(1A) \cdot \mu_A + p(1B) \cdot \mu_B = p(0) \cdot \lambda$

Nodo 1A: $p(1A) \cdot (\lambda + \mu_A) = p(0) \cdot 0{,}5 \cdot \lambda + p(2) \cdot \mu_B$

Nodo 1B: $p(1B) \cdot (\lambda + \mu_B) = p(0) \cdot 0{,}5 \cdot \lambda + p(2) \cdot \mu_A$

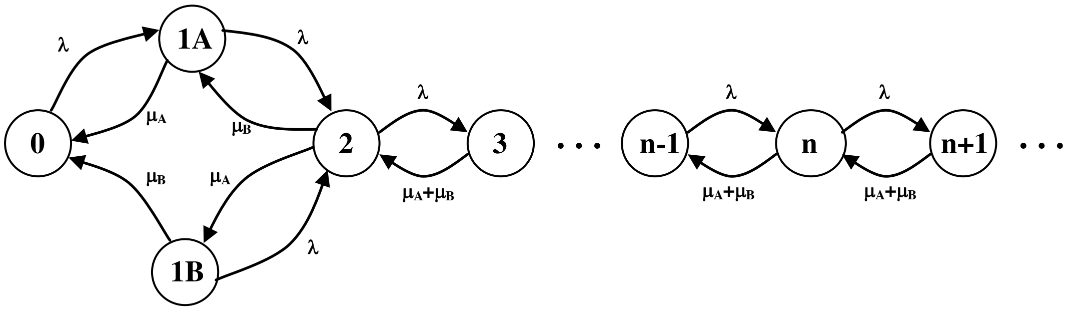
Nodo 3: $p(3) \cdot (\mu_A + \mu_B) = p(2) \cdot \lambda$

Suma: $p(0) + p(1A) + p(1B) + p(2) + p(3) = 1$

La solución correspondiente a este sistema de 5 ecuaciones con 5 incógnitas es:

p(0)	0,6593407
p(1A)	0,1098901
p(1B)	0,1648352
p(2)	0,0549450
p(3)	0,0109890

En los casos anteriores se ha considerado que los clientes no tenían experiencia en el funcionamiento del sistema. Sin embargo, si un cliente conoce el hecho de que un canal atiende más rápidamente que el otro, cuando encuentre que ambos canales están desocupados seleccionará el más rápido. Suponiendo, por ejemplo, que el canal A atiende a una velocidad mayor que la del B, la representación gráfica de la cadena del sistema de capacidad infinita será:



Balanceando los nodos, tendremos:

Nodo 0: $p(1A)\cdot\mu_A + p(1B)\cdot\mu_B = p(0)\cdot\lambda$

Nodo 1A: $p(1A)\cdot(\lambda+\mu_A) = p(0)\cdot\lambda + p(2)\cdot\mu_B$

Nodo 1B: $p(1B)\cdot(\lambda+\mu_B) = p(2)\cdot\mu_A$

Nodo 2: $p(1A)\cdot\lambda + p(1B)\cdot\lambda = p(2)\cdot(\mu_A+\mu_B)$

Nodo 3: $p(2)\cdot\lambda = p(3)\cdot(\mu_A+\mu_B)$

Nodo 4: $p(3)\cdot\lambda = p(4)\cdot(\mu_A+\mu_B)$

y, en forma genérica, para un $n \geq 2$, tendremos:

Nodo n: $p(n-1)\cdot\lambda = p(n)\cdot(\mu_A+\mu_B)$

La ecuación adicional que se plantea es la de colectividad exhaustiva:

$$\sum_0^\infty p(n) = 1$$

que se puede desagregar de la siguiente forma:

$$p(0) + p(1A) + p(1B) + \sum_2^\infty p(n) = 1$$

Para calcular la expresión de la sumatoria, se sabe que en régimen permanente la tasa de egreso de clientes del sistema debe ser igual a la tasa de ingreso:

$$\left[p(1A) + \sum_2^\infty p(n)\right]\cdot\mu_A + \left[p(1B) + \sum_2^\infty p(n)\right]\cdot\mu_B = \lambda$$

$$p(1A)\cdot\mu_A + \sum_2^\infty p(n)\cdot\mu_A + p(1B)\cdot\mu_B + \sum_2^\infty p(n)\cdot\mu_B = \lambda$$

$$\sum_2^\infty p(n)\cdot(\mu_A+\mu_B) + p(1A)\cdot\mu_A + p(1B)\cdot\mu_B = \lambda$$

$$\sum_2^\infty p(n)\cdot(\mu_A+\mu_B) + p(0)\cdot\lambda = \lambda$$

$$\sum_{2}^{\infty} p(n) = \frac{\lambda}{\mu_A + \mu_B} \cdot \left[1 - p(0)\right]$$

Luego:

$$p(0) + p(1A) + p(1B) + \frac{\lambda}{\mu_A + \mu_B} \cdot \left[1 - p(0)\right] = 1$$

CAPÍTULO 5

APLICACIONES

INTRODUCCIÓN

En el capítulo anterior se mostraron algunos ejemplos con relación a problemas de colas, que constituyen una de las aplicaciones más utilizadas de las Cadenas de Markov. En el presente capítulo se expondrán otros ejemplos en diferentes ámbitos de aplicación pero enfocados a problemas de ingeniería industrial y ciencias empresariales.

5.1 APLICACIÓN COMERCIAL ("Brand Switching")

Considerar que en un mercado particular de computadoras personales laptop solo hay tres modelos disponibles: C, A y S. Las compañías fabricantes de cada computadora tienen los siguientes datos con respecto a compras de clientes.

MARCA ACTUAL	Siguiente compra		
	% que compra C	% que compra A	% que compra S
C	20	30	50
A	40	30	30
S	20	40	40

1. ¿Cuál es la probabilidad de que un poseedor de una C tenga una A dentro de dos compras?

2. ¿Cuál es la probabilidad de que el dueño de una A siga con una A dentro de dos compras, y cuál en tres compras?

3. A largo plazo ¿cuál es la probabilidad de que un cliente compre cada una de las tres marcas?

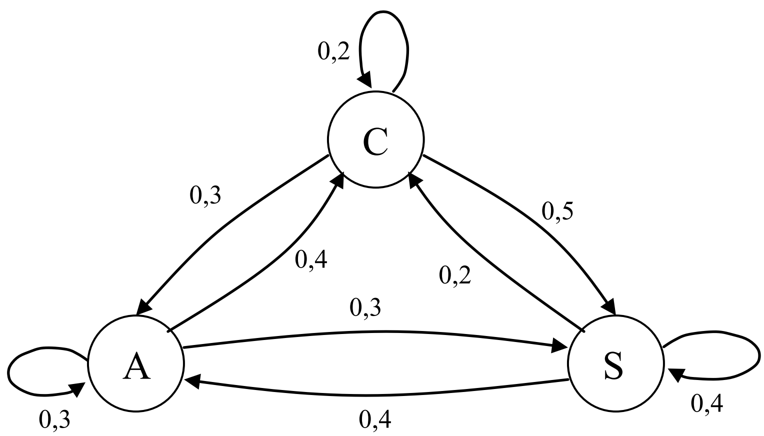
4. Determinar el número esperado de compras antes de que el ahora dueño de una C adquiera una S.

Resolución:

La matriz de transición en un paso del problema es:

$$P = \begin{array}{c} \\ C \\ A \\ S \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C & A & S \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}20 & 0{,}30 & 0{,}50 \\ 0{,}40 & 0{,}30 & 0{,}30 \\ 0{,}20 & 0{,}40 & 0{,}40 \end{bmatrix} \end{array}$$

y el grafo correspondiente:



1. Para un cliente actual de C, el vector de transición en dos pasos, aplicando la ecuación de Chapman-Kolmogorov, es:

$$V_C^{(2)} = V_C^{(1)} \cdot P = \begin{bmatrix} 0{,}20 & 0{,}30 & 0{,}50 \end{bmatrix} \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C & A & S \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}20 & 0{,}30 & 0{,}50 \\ 0{,}40 & 0{,}30 & 0{,}30 \\ 0{,}20 & 0{,}40 & 0{,}40 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{bmatrix} 0{,}26 & \underline{0{,}35} & 0{,}39 \end{bmatrix}$$

Luego, la probabilidad de que tenga una computadora marca A luego de dos pasos es $p_{C,A}^{(2)} = 0{,}35$.

Otra forma, de hallar esta probabilidad es a partir del cuadrado de la matriz de transición:

$$P^2 = \begin{array}{c} \\ C \\ A \\ S \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C & A & S \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}26 & \underline{0{,}35} & 0{,}39 \\ 0{,}26 & 0{,}33 & 0{,}41 \\ 0{,}28 & 0{,}34 & 0{,}38 \end{bmatrix} \end{array}$$

2. De la matriz P^2 se observa que la probabilidad de que un cliente poseedor de una computadora A en la actualidad siga con una de la misma marca luego de 2 compras es del 33%. Para hallar, la probabilidad de que, al cabo de 3 compras, siga teniendo una A, podemos aplicar Chapman-Kolmogorov:

$$V_A^{(3)} = V_A^{(2)} \cdot P = \begin{bmatrix} 0{,}26 & 0{,}33 & 0{,}41 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}20 & 0{,}30 & 0{,}50 \\ 0{,}40 & 0{,}30 & 0{,}30 \\ 0{,}20 & 0{,}40 & 0{,}40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}266 & \underline{0{,}341} & 0{,}393 \end{bmatrix}$$

o también, con la matriz en tres pasos $P^{(3)} = P^3$:

$$P^3 = \begin{array}{c} \\ C \\ A \\ S \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C & A & S \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}270 & 0{,}339 & 0{,}391 \\ 0{,}266 & \underline{0{,}341} & 0{,}393 \\ 0{,}268 & 0{,}338 & 0{,}394 \end{bmatrix} \end{array}$$

Dicha probabilidad es, entonces, 34,10%.

3. Para hallar el porcentaje de participación en el mercado de cada una de las tres marcas, aplicamos el producto matricial para régimen permanente:

$$\begin{bmatrix} p(C) & p(A) & p(S) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}20 & 0{,}30 & 1 \\ 0{,}40 & 0{,}30 & 1 \\ 0{,}20 & 0{,}40 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(C) & p(A) & 1 \end{bmatrix}$$

que nos lleva a un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas, cuya solución es la siguiente:

$p(C) = 0{,}268$

$p(A) = 0{,}339$

$P(S) = 0{,}393$

Al mismo resultado, por supuesto, se habría arribado a partir del planteo de ecuaciones que surge del método de suma de flujos.

4. Para hallar el número de compras que se requiere para que el dueño de una C pase a una S, debemos convertir al estado S en un estado absorbente:

$$P = \begin{array}{c} \\ C \\ A \\ S \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C & A & S \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}20 & 0{,}30 & 0{,}50 \\ 0{,}40 & 0{,}30 & 0{,}30 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Luego se formula la forma canónica de la matriz P:

$$P = \begin{array}{c} \\ S \\ C \\ A \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{c|cc} S & C & A \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0{,}50 & 0{,}20 & 0{,}30 \\ 0{,}30 & 0{,}40 & 0{,}30 \end{array}\right] \end{array}$$

En consecuencia:

$$I - N = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8 & -0,3 \\ -0,4 & 0,7 \end{bmatrix}$$

Calculamos, entonces $(I - N)^{-1}$, por ejemplo por Gauss Jordan:

$$\begin{array}{cc|cc} 0,8 & -0,3 & 1 & 0 \\ -0,4 & 0,7 & 0 & 1 \\ \hline 1 & -0,375 & 1,25 & 0 \\ 0 & 0,55 & 0,5 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1,591 & 0,682 \\ 0 & 1 & 0,909 & 1,818 \end{array}$$

Luego:

$$(I - N)^{-1} = \begin{bmatrix} 1,591 & 0,682 \\ 0,909 & 1,818 \end{bmatrix}$$

$$\bar{n} = \begin{array}{c} A \\ C \end{array} \begin{bmatrix} 1,591 & 0,682 \\ 0,909 & 1,818 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,273 \\ \hline 2,727 \end{bmatrix}$$

Entonces, el número promedio de compras que transcurre hasta que el propietario actual de una C adquiera una S es 2,273.

5.2 PLANEAMIENTO DE PERSONAL

Una firma de ingenieros realiza un estudio de niveles de categoría para proveer promociones adecuadas en el momento oportuno, controlar el pago de haberes, analizar necesidades de empleo, etc. Las categorías de los profesionales de la firma son JR (júnior), SS (semi-senior), SE (senior), AS (asociado) y SO (socio). En base a datos históricos se espera que, anualmente, la proporción de empleados de cada categoría que se dan de baja por renuncias, despidos, jubilaciones o fallecimientos sea el siguiente:

	RE	DE	JU	FA
JR	$13,7\overset{\frown}{7}\%$	$15,5\overset{\frown}{5}\%$	3%	1%
SS	12,5714%	10%	4%	2%
SE	13%	$6,6\overset{\frown}{6}\%$	5%	2%
AS	5%	2%	10%	3%
SO			15%	5%

Actualmente hay 103 ingenieros en la firma (45 JR, 28 SS, 15 SE, 10 AS, 5 SO), y la política de la firma es tomar solamente ingenieros júnior.

1. Averiguar qué cantidad de ingenieros deberán contratarse y qué cantidad deberán promoverse en cada categoría para mantener los niveles estables.

2. Determinar cuál es el tiempo de permanencia promedio de un empleado en la compañía (índice de rotación).

3. Calcular la probabilidad de que un empleado que recién ingresa a la firma llegue a la categoría de socio, y la probabilidad de que sea despedido.

Resolución:

1. Dado que de las causas de bajas interesa determinar solamente los empleados que dejan la empresa por despidos, se puede agrupar a los estados de bajas solamente en dos clases: DE (despidos) y OB (otras bajas). Estos estados son, obviamente, absorbentes.

En primer lugar se deben calcular las probabilidades de transición de una categoría a la superior siguiente, que llamaremos:

P_{SO}: probabilidad de que un asociado sea promovido a socio en un año,

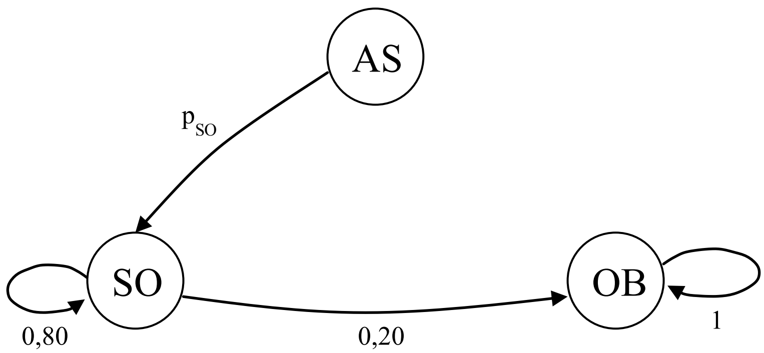
P_{AS}: probabilidad de que un senior sea ascendido a asociado en un año,

P_{SE}: probabilidad de que un semi-senior sea promovido a senior en un año, y

P_{SS}: probabilidad de que un junior sea ascendido a semi-senior en un año.

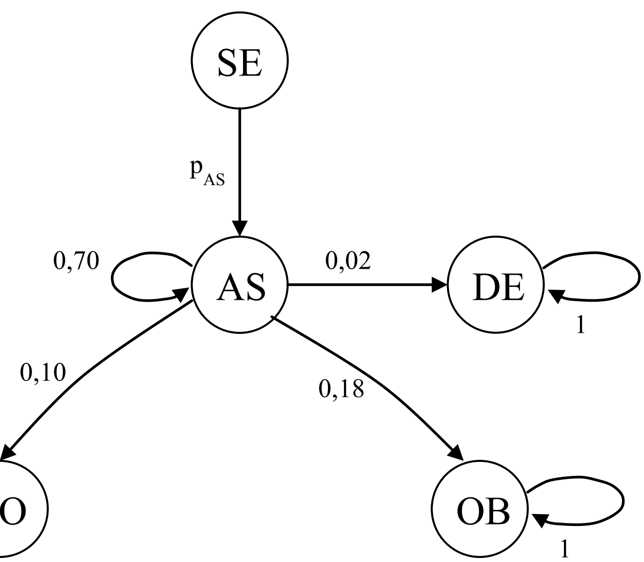
Para ello, se determina primero el flujo probabilístico de cada nodo.

Analizando el nodo de socios SO:



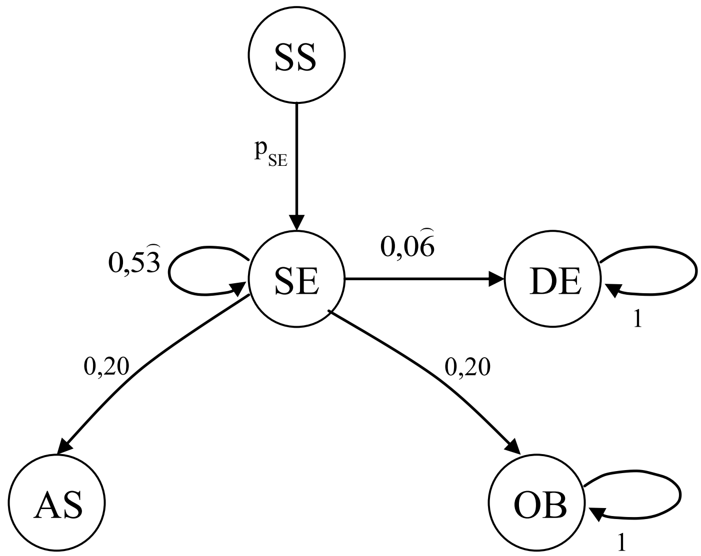
Actualmente hay 5 socios. El 20% de ellos (es decir 1 socio) abandona la empresa por año, y el resto (80%) permanece como socio. De manera que debe promoverse 1 asociado (AS) a categoría de socio por año, es decir 1 sobre 10. Luego, $p_{SO} = 0{,}10$.

Analizando ahora la parte de la cadena vinculada con el estado AS:



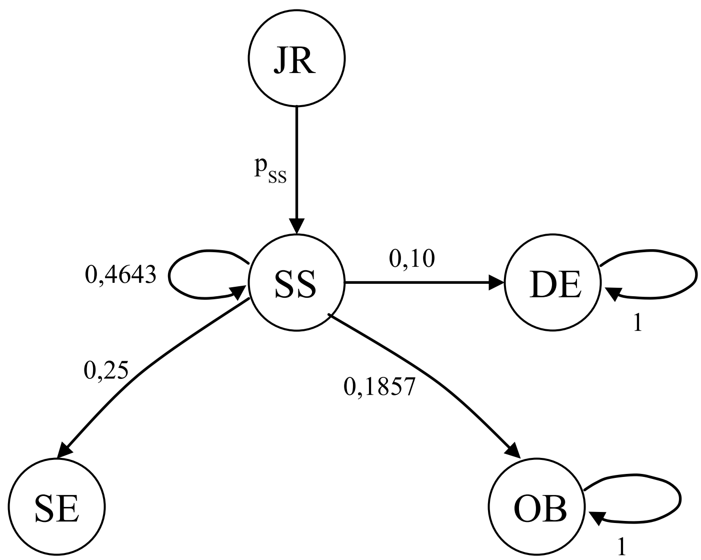
Para mantener la cantidad de 10 asociados, teniendo en cuenta que abandonan esta categoría un total de 3 ingenieros (1 pasa a socio y 2 abandonan), se deben promover de la categoría inferior (SE) también a un total de 3 ingenieros, es decir 3 sobre 15. Luego, $p_{AS} = 0{,}20$. El 70% permanece en la categoría.

Pasando ahora al nodo SE, tendremos:



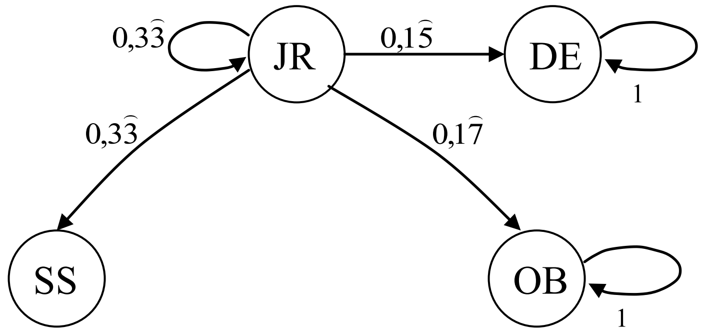
Se deben promover, entonces, 7 semi-senior por año, es decir 7 en 28. Luego, la probabilidad de que un semi-senior promocione a categoría senior es $p_{SE} = 0,25$.

Por su parte, analizando el nodo SS:



Dado que hay 28 semi-senior, de los cuales 5,2 abandonan (18,57%), 2,8 son despedidos (10%) y 7 son promovidos a la categoría superior (25%), se deben ascender 15 ingenieros junior; es decir $p_{SS} = 0,3\widehat{3}$.

Finalmente, analizando el nodo JR:



De los 45 junior, 8 abandonan la firma (17,77%), 7 son despedidos (15,55%), y 15 son promovidos (33,33%) anualmente. Esto significa que 15 de ellos se mantiene en la categoría de júnior (33,33%) y, para mantener la misma dotación, se deben contratar 15 ingenieros para esa categoría por año.

2. La matriz de transición, en su forma canónica, será entonces:

$$
\begin{array}{c}
\\ OB \\ DE \\ JR \\ SS \\ SE \\ AS \\ SO
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc:ccccc}
OB & DE & JR & SS & SE & AS & SO
\end{array} \\
\left[\begin{array}{cc:ccccc}
1 & & & & & & \\
 & 1 & & & & & \\
\hdashline
0,1778 & 0,1556 & 0,3333 & 0,3333 & & & \\
0,1857 & 0,1000 & & 0,4643 & 0,2500 & & \\
0,2000 & 0,0667 & & & 0,5333 & 0,2000 & \\
0,1800 & 0,0200 & & & & 0,7000 & 0,1000 \\
0,2000 & & & & & & 0,8000
\end{array}\right]
\end{array}
$$

La matriz I-N es:

$$
I - N = \begin{bmatrix}
0,6667 & -0,3333 & & & \\
 & 0,5357 & -0,2500 & & \\
 & & 0,4667 & -0,2000 & \\
 & & & 0,3000 & -0,1000 \\
 & & & & 0,2000
\end{bmatrix}
$$

y su inversa:

$$
(I - N)^{-1} = \begin{bmatrix}
1,5000 & 0,8714 & 0,4668 & 0,3112 & 0,1556 \\
 & 1,7431 & 0.9337 & 0,6225 & 0,3112 \\
 & & 2,1427 & 1,4285 & 0,7142 \\
 & & & 3,3333 & 1,6667 \\
 & & & & 5,0000
\end{bmatrix}
$$

Para calcular el índice de permanencia en la firma para un ingeniero recién ingresado:

$$\bar{n}_i = \begin{bmatrix} 1,5000 & 0,8714 & 0,4668 & 0,3112 & 0,1556 \\ & 1,7431 & 0.9337 & 0,6225 & 0,3112 \\ & & 2,1427 & 1,4285 & 0,7142 \\ & & & 3,3333 & 1,6667 \\ & & & & 5,0000 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{3,3050} \\ 3,6105 \\ 4,2854 \\ 5,0000 \\ 5,0000 \end{bmatrix}$$

Es decir, 3,305 años. Por su parte, observamos que un empleado recién promovido a la categoría de semi-senior permanecerá, en promedio, 3,6105 años, mientras que los tiempos esperados para los ascendidos a las categorías de senior, asociado y socio, serán 4,2858, 5 y 5 años, respectivamente.

3. Para determinar la probabilidad de que un empleado que recién ingresa llegue a la máxima categoría (es decir, de socio) se debe considerar el estado SO como un estado absorbente:

$$\begin{array}{c} \\ OB \\ DE \\ SO \\ JR \\ SS \\ SE \\ AS \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc:cccc} OB & DE & SO & JR & SS & SE & AS \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc:cccc} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ \hdashline 0,1778 & 0,1556 & & 0,3333 & 0,3333 & & \\ 0,1857 & 0,1000 & & & 0,4643 & 0,2500 & \\ 0,2000 & 0,0667 & & & & 0,5333 & 0,2000 \\ 0,1800 & 0,02 & 0,1000 & & & & 0,7000 \end{array}\right] \end{array}$$

La matriz (I-N) será:

$$\left(I - N\right) = \begin{bmatrix} 0,6667 & -0,3333 & & \\ & 0,5357 & -0,2500 & \\ & & 0,4667 & -0,2000 \\ & & & 0,3000 \end{bmatrix}$$

y su inversa:

$$\left(I - N\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1,5000 & 0,9333 & 0,5000 & 0,3333 \\ & 1,8667 & 1 & 0,6667 \\ & & 2,1427 & 1,4285 \\ & & & 3,3333 \end{bmatrix}$$

Luego, el producto $(I - N)^{-1} \cdot A$ será:

$$\begin{bmatrix} 1,5000 & 0,9333 & 0,5000 & 0,3333 \\ & 1,8667 & 1 & 0,6667 \\ & & 2,1427 & 1,4285 \\ & & & 3,3333 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,1778 & 0,1556 & \\ 0,1858 & 0,1000 & \\ 0,2000 & 0,0667 & \\ 0,1800 & 0,0200 & 0,1000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5911 & 0,3667 & 0,0333 \\ 0,6667 & 0,2667 & 0,0667 \\ 0,6857 & 0,1715 & 0,1429 \\ 0,6000 & 0,0667 & 0,3333 \end{bmatrix}$$

En consecuencia, la probabilidad de que un ingeniero júnior recién ingresado sea dado de baja por renuncia, jubilación o fallecimiento es del 59,11%, la probabilidad de que sea despedido es del 36,67% y de que alcance la máxima categoría (socio) es de 3,33%.

5.3 GESTIÓN DE INVENTARIOS

La demanda semanal de un repuesto en un proceso productivo tiene la siguiente distribución de probabilidad:

d	p
0	0,6
1	0,3
2	0,1
≥ 3	0

Si el stock inicial es de 3 unidades, y la observación del nivel de inventarios se realiza al finalizar cada semana:

a. ¿Cuál es la probabilidad de que al cabo de dos semanas se haya agotado el stock?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que al cabo de cuatro semanas haya dos o más de dos repuestos en stock?

c. Determinar el número promedio de semanas que transcurren hasta agotar el stock.

d. Calcular el costo total de almacenamiento para cada ciclo de compra, si el costo unitario semanal es de $10.

Llamaremos:

S_0: ninguna unidad en stock al finalizar una semana

S_1: una unidad en stock al finalizar una semana

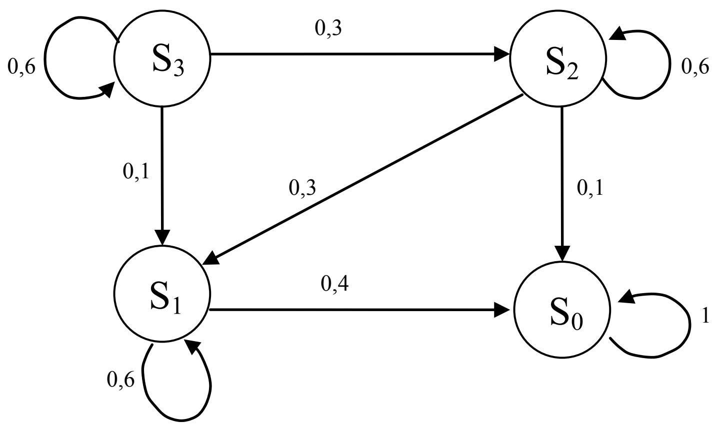
S_2: dos unidades en stock al finalizar una semana

S_3: tres unidades en stock al finalizar una semana

La matriz de transición es:

$$P = \begin{array}{c} \\ S_3 \\ S_2 \\ S_1 \\ S_0 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} S_3 & S_2 & S_1 & S_0 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0,6 & 0,3 & 0,1 & \\ & 0,6 & 0,3 & 0,1 \\ & & 0,6 & 0,4 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

y la representación gráfica:



Los estados S_3, S_2 y S_1 son transitorios. El estado S_0 es absorbente.

a) El estado actual es S_3. Para hallar la probabilidad de que en dos semanas se haya agotado el stock se calcula el cuadrado de la matriz de transición:

$$P^2 = \begin{array}{c} \\ S_3 \\ S_2 \\ S_1 \\ S_0 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} S_3 & S_2 & S_1 & S_0 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0,36 & 0,36 & 0,21 & 0,07 \\ & 0,36 & 0,36 & 0,28 \\ & & 0,36 & 0,64 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Luego:

$$p_{3,0}^{(2)} = 0,07 = 7\%$$

b) La probabilidad de que al cabo de cuatro semanas haya dos o más repuestos en stock es $p_{3,2}^{(4)} + p_{3,3}^{(4)}$. Para determinarla se calcula la matriz de transición en cuatro pasos:

$$P^4 = \begin{array}{c|cccc} & S_3 & S_2 & S_1 & S_0 \\ \hline S_3 & 0{,}13 & 0{,}26 & 0{,}29 & 0{,}32 \\ S_2 & & 0{,}13 & 0{,}26 & 0{,}61 \\ S_1 & & & 0{,}13 & 0{,}87 \\ S_0 & & & & 1 \end{array}$$

Por lo tanto:

$$p_{3,2}^{(4)} + p_{3,3}^{(4)} = 0{,}26 + 0{,}13 = 0{,}39 = 39\%$$

c) Se reagrupa la matriz de transición P para llevarla a la forma canónica:

$$\begin{array}{c|c|ccc} & S_0 & S_3 & S_2 & S_1 \\ \hline S_0 & 1 & & & \\ \hline S_3 & & 0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ S_2 & 0{,}1 & & 0{,}6 & 0{,}3 \\ S_1 & 0{,}4 & & & 0{,}6 \end{array}$$

$$N = \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ & 0{,}6 & 0{,}3 \\ & & 0{,}6 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{I-N} = \begin{bmatrix} 0{,}4 & -0{,}3 & -0{,}1 \\ & 0{,}4 & -0{,}3 \\ & & 0{,}4 \end{bmatrix}$$

$$(I - N)^{-1} = \begin{bmatrix} 2{,}50 & 1{,}875 & 2{,}031 \\ & 2{,}50 & 1{,}875 \\ & & 2{,}50 \end{bmatrix}$$

$$\bar{n} = \begin{array}{c} S_3 \\ S_2 \\ S_1 \end{array} \begin{bmatrix} 2{,}50 & 1{,}875 & 2{,}031 \\ & 2{,}50 & 1{,}875 \\ & & 2{,}50 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{6{,}406} \\ 4{,}375 \\ 2{,}50 \end{bmatrix}$$

En consecuencia, el número promedio de semanas que transcurren hasta agotar el stock es 6,406.

d) Suponiendo que cada ciclo comienza con 3 unidades y termina cuando se agotan las tres unidades, el número de semanas promedio que el sistema está en el estado S_3 (tres unidades en existencias) es 2,50, en el estado S_2 (dos unidades en stock), 1,875 y en el estado S_1 (1 unidad en stock) es 0,781. Luego el costo de almacenamiento por ciclo es:

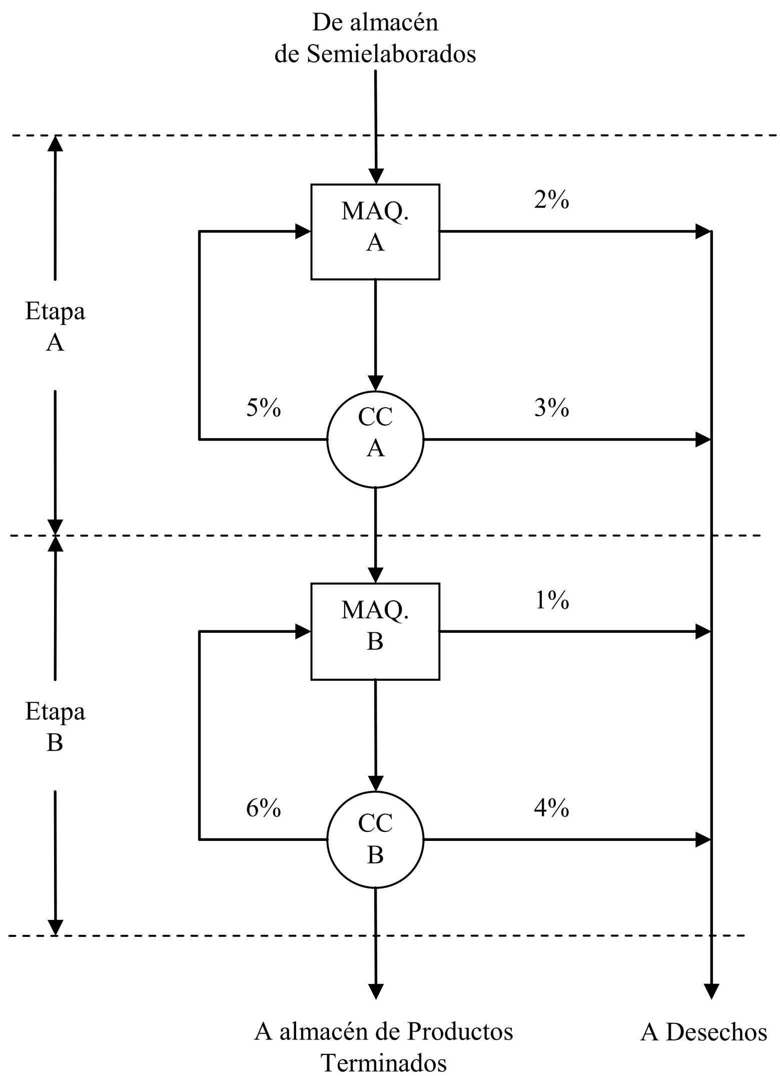
$$\left[1 \text{ un} \cdot 2{,}50 \frac{\text{sem}}{\text{ciclo}} + 2 \text{ un} \cdot 1{,}875 \frac{\text{sem}}{\text{ciclo}} + 3 \text{ un} \cdot 2{,}031 \frac{\text{sem}}{\text{ciclo}}\right] \cdot 10 \frac{\$}{\text{un} \cdot \text{sem}} = 123{,}43 \frac{\$}{\text{ciclo}}$$

5.4 PLANEAMIENTO DE PRODUCCIÓN

En un centro de mecanizado se procesan piezas en dos etapas (Máquina A y Máquina B). Los tiempos promedio de mecanizado de cada pieza son de 3 horas en la Máquina A y de 2 horas en la B. El costo de la hora hombre es de $10.

Luego de cada etapa de elaboración se efectúa una inspección de calidad, tal como se indica en el siguiente gráfico. Los tiempos promedio del control de calidad son de 0,2 horas y 0,1 horas para los centros A y B, respectivamente, y el costo de la hora de los inspectores es de $15.

El costo directo de cada unidad que llega al centro desde el almacén de productos semielaborados es de $40.



Si durante el mecanizado en las máquinas se estropea una pieza, se la desecha sin pasar por control de calidad. En los centros de Control de Calidad se pueden devolver las piezas para ser reprocesadas en las máquinas o se las puede considerar defectuosas y desecharlas. Los porcentajes de piezas estropeadas en proceso, de piezas a reprocesar y de piezas defectuosas a desechar, están indicados en el gráfico.

El costo directo de cada pieza semielaborada que llega al Centro de Mecanizado es de $30, mientras que el costo de oportunidad del material desechado es de $25 por pieza.

Se desea determinar:

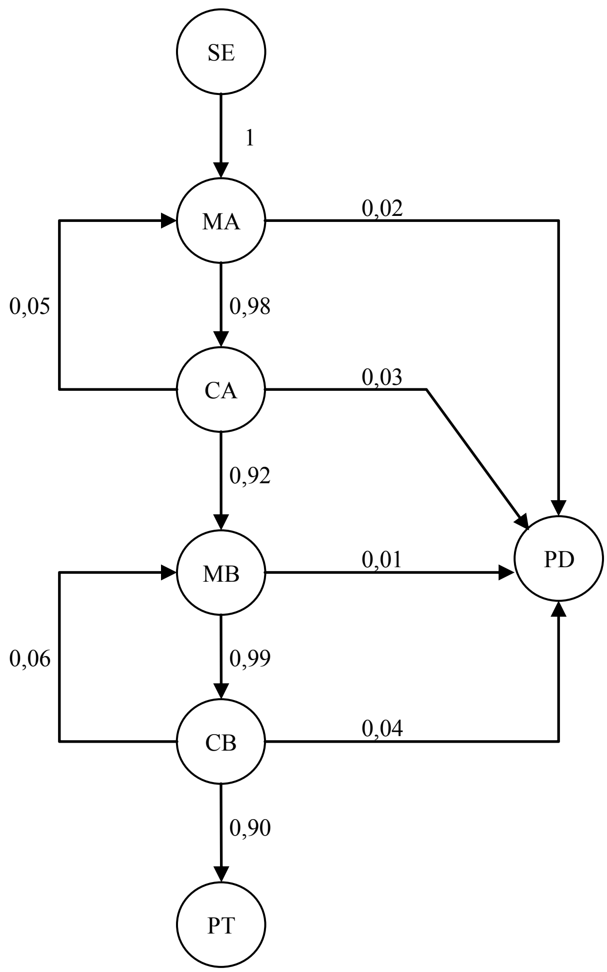
a. la cantidad de piezas semielaboradas a enviar al centro a fin de producir 100 piezas buenas terminadas,

b. el requerimiento de personal para cada pieza terminada, y

c. el costo directo esperado de cada pieza terminada que sale del centro productivo.

<u>Resolución</u>:

El diagrama de la cadena markoviana correspondiente es:



en donde los estados posibles para una pieza son:

SE: en almacén de semielaborados
MA: en procesamiento en máquina A
CA: en control de calidad del sector A
MB: en procesamiento en máquina B
CB: en control de calidad del sector B
PD: en depósito de piezas defectuosas
PT: en almacén de piezas terminada

a) La matriz de transición en un paso del problema es:

$$
\begin{array}{r c}
 & \begin{array}{ccccccc} SE & MA & CA & MB & CB & PD & PT \end{array} \\
\begin{array}{r} SE \\ MA \\ CA \\ P = MB \\ CB \\ PD \\ PT \end{array} &
\left[\begin{array}{ccccccc}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0{,}98 & 0 & 0 & 0{,}02 & 0 \\
0 & 0{,}05 & 0 & 0{,}92 & 0 & 0{,}03 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}99 & 0{,}01 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0{,}06 & 0 & 0{,}04 & 0{,}90 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
\end{array}
$$

Reagrupando:

$$
\begin{array}{r c}
 & \begin{array}{cc:ccccc} PD & PT & SE & MA & CA & MB & CB \end{array} \\
\begin{array}{r} PD \\ PT \\ SE \\ MA \\ CA \\ MB \\ CB \end{array} &
\left[\begin{array}{cc:ccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hdashline
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0{,}02 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 \\
0{,}03 & 0 & 0 & 0{,}05 & 0 & 0{,}92 & 0 \\
0{,}01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}99 \\
0{,}04 & 0{,}90 & 0 & 0 & 0 & 0{,}06 & 0
\end{array}\right]
\end{array}
$$

Luego:

$$
N = \begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 \\
0 & 0.05 & 0 & 0.92 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.99 \\
0 & 0 & 0 & 0.06 & 0
\end{bmatrix}
$$

$$
\mathrm{I}-\mathrm{N}=\begin{bmatrix}1 & -1 & & & \\ & 1 & -0.98 & & \\ & -0.05 & 1 & -0.92 & \\ & & & 1 & -0.99 \\ & & & -0.06 & 1\end{bmatrix}
$$

Por lo tanto:

$$
(\mathrm{I}-\mathrm{N})^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1{,}0515 & 1{,}0305 & 1{,}0079 & 0{,}9978 \\ & 1{,}0515 & 1{,}0305 & 1{,}0079 & 0{,}9978 \\ & 0{,}0526 & 1{,}05152 & 1{,}0285 & 1{,}0182 \\ & & & 1{,}0632 & 1{,}0525 \\ & & & 0{,}0638 & 1{,}0632\end{bmatrix}
$$

Multiplicando esta matriz por la matriz de absorción A, obtendremos la probabilidad de que la pieza termine en cada estado absorbente (pieza defectuosa o pieza terminada) para cada estado no absorbente. En particular interesa saber dichas probabilidades desde el estado MA, que es el de una unidad ingresada desde el almacén de productos intermedios.

$$
(\mathrm{I}-\mathrm{N})^{-1}\cdot \mathrm{A}=\begin{bmatrix}1 & 1{,}0515 & 1{,}0305 & 1{,}0079 & 0{,}9978 \\ & 1{,}0515 & 1{,}0305 & 1{,}0079 & 0{,}9978 \\ & 0{,}0526 & 1{,}0515 & 1{,}0285 & 1{,}0182 \\ & & & 1{,}0632 & 1{,}0525 \\ & & & 0{,}0638 & 1{,}0632\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} & \\ 0{,}02 & \\ 0{,}03 & \\ 0{,}01 & \\ 0{,}04 & 0{,}90\end{bmatrix}=
$$

$$
(\mathrm{I}-\mathrm{N})^{-1}\cdot \mathrm{A}=\begin{bmatrix}0{,}1019 & \underline{0{,}8981} \\ 0{,}1019 & 0{,}8981 \\ 0{,}0836 & 0{,}9164 \\ 0{,}0527 & 0{,}9473 \\ 0{,}0432 & 0{,}9568\end{bmatrix}
$$

Se puede observar, entonces, que la probabilidad de que se encuentra en el almacén de semielaborados y que pasa al sector de mecanizado tiene una probabilidad de 89,81% de terminar como buena. Luego, por cada pieza buena terminada se deben procesar:

$$
\frac{1}{0{,}8991}=1{,}1134 \text{ unidades}
$$

El número esperado de unidades que deben entrar en el proceso para obtener 100 piezas buenas es, entonces:

$$
100\cdot 1{,}1134=111{,}34\cong 112
$$

b) De la matriz $(I-N)^{-1}$ se puede extraer el número de veces que una pieza que entra en el centro productivo pasa por cada operación (n_{E_i}). Este valor debe multiplicarse por 1,1134 para obtener el número de veces que pasa una pieza terminada que sale del centro (n_{S_i}).

De esta forma se puede obtener el tiempo en HH por cada pieza terminada y, en consecuencia, el costo directo por cada pieza terminada, según se indica en la tabla siguiente.

Estado	n_{E_i} (piezas por unidad entrante)	n_{S_i} (piezas por unidad saliente)	HH por unidad procesada	HH por unidad terminada	Costo ($/HH)	Costo ($/unidad terminada)
MA	1,0515	1,1707	3,0	3,5121	10	35,1210
CA	1,0305	1,1474	0,2	0,2295	15	3,4425
MB	1,0079	1,1222	2,0	2,2444	10	22,4440
CB	0,9978	1,1110	0,1	0,1111	15	1,6665
Costo total Mano de Obra ($) por unidad terminada						62,6740

El costo total de material es:

$$30\,\frac{\$}{\text{unidad entrante}}\quad 1{,}1134\,\frac{\text{unidad entrante}}{\text{pieza terminada}}=33{,}4020\,\frac{\$}{\text{pieza terminada}}$$

La venta del material de rezago es:

$$25\,\frac{\$}{\text{pieza defect.}}\cdot 0{,}1019\,\frac{\text{pieza defect.}}{\text{unidad entrante}}\cdot 1{,}1134\,\frac{\text{unidad entrante}}{\text{pieza term.}}=2{,}8364\,\frac{\$}{\text{pieza term.}}$$

En consecuencia, para cada pieza terminada tendremos:

Costo de Mano de Obra	$ 62,6760
Costo de Materiales	$ 33,4020
Venta de Defectuosos	-$ 2,8364
Costo directo	$ 93,2416

5.5 ANÁLISIS DE FALLAS

Al final de cada día de operación una máquina se puede encontrar en alguno de los siguientes estados:

E_0: En perfectas condiciones de operación

E_1: Condición regular de operación

E_2: Malas condiciones de operación

E_3: Inoperable

Los costos de operar la máquina al día siguiente, debido a su estado operativo son los siguientes:

E_0: $ 0

E_1: $ 500

E_2: $ 1.000

Cuando la máquina se encuentra en el estado E_3 se la repara durante el día siguiente para dejarla en perfectas condiciones de operación para el próximo día. El costo de reparación es de $2.000, incurriéndose además en un lucro cesante de $ 5.000 por piezas no producidas durante ese día.

Las probabilidades de transición entre los estados son las siguientes:

ESTADO	E_0	E_1	E_2	E_3
E_0	0,2	0,4	0,3	0,1
E_1		0,5	0,3	0,2
E_2			0,4	0,6

Se desea calcular el costo promedio esperado diario y el número esperado de días promedio de funcionamiento de la máquina.

Resolución:

La matriz de transición es la siguiente:

$$P = \begin{array}{c} \\ E_0 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} E_0 & E_1 & E_2 & E_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0,2 & 0,4 & 0,3 & 0,1 \\ & 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ & & 0,4 & 0,6 \\ 1 & & & \end{bmatrix} \end{array}$$

Por lo tanto, en estado de régimen:

$$\begin{bmatrix} p(0) & p(1) & p(2) & p(3) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}3 & 1 \\ & 0{,}5 & 0{,}3 & 1 \\ & & 0{,}4 & 1 \\ 1 & & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(0) & p(1) & p(2) & 1 \end{bmatrix}$$

Es decir:

- $p(0) \cdot 0{,}2 + p(3) = p(0)$
- $p(0) \cdot 0{,}4 + p(1) \cdot 0{,}5 = p(1)$
- $p(0) \cdot 0{,}3 + p(1) \cdot 0{,}3 + p(2) \cdot 0{,}4 = p(2)$
- $p(0) + p(1) + p(2) + p(3) = 1$

cuyo resultado es:

$p(0) = 0{,}2857$

$p(1) = 0{,}2286$

$p(2) = 0{,}2571$

$p(3) = 0{,}2286$

En consecuencia, para calcular el costo promedio diario se determina el valor esperado con la expresión:

$$\text{Costo} = \sum c_i \cdot p(i)$$

ESTADO	Costo diario	p(i)	
E_0	0	0,2857	0
E_1	500	0,2286	114,3
E_2	1.000	0,2571	257,1
E_3	7.000	0,2286	1.600,2
Costo promedio diario esperado			1.971,6

Finalmente, para calcular la cantidad de ciclos por día, suponemos el estado E_3 absorbente:

$$P = \begin{array}{c} \\ E_0 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} E_0 & E_1 & E_2 & E_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ & 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ & & 0{,}4 & 0{,}6 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ E_3 \\ E_0 \\ E_1 \\ E_2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{c|ccc} E_3 & E_0 & E_1 & E_2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & & & \\ \hline 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}6 & & & 0{,}4 \end{array}\right] \end{array}$$

$$N = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ & 0{,}5 & 0{,}3 \\ & & 0{,}4 \end{bmatrix} \Rightarrow I - N = \begin{bmatrix} 0{,}8 & -0{,}4 & -0{,}3 \\ & 0{,}5 & -0{,}3 \\ & & 0{,}6 \end{bmatrix}$$

Calculando la matriz inversa:

$$[I - N]^{-1} = \begin{bmatrix} 1{,}25 & 1 & 1{,}125 \\ & 2 & 1 \\ & & 1{,}66\widehat{6} \end{bmatrix}$$

$$[I - N]^{-1} \cdot \overline{1} = \begin{bmatrix} 1{,}25 & 1 & 1{,}125 \\ & 2 & 1 \\ & & 1{,}66\widehat{6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.375 \\ 3 \\ 1{,}66\widehat{6} \end{bmatrix}$$

El tiempo esperado de cada ciclo operativo es, entonces, igual a 3,375 días.

5.6 ANÁLISIS DE CUENTAS

El Departamento de Facturación de una empresa determinó la evolución de los créditos de un mes a otro mediante porcentajes, tal como se muestra en la tabla.

Suponiendo que se mantienen en el tiempo los niveles de créditos

a. Determinar la probabilidad de que se cobre una factura en Cuenta Corriente.

b. Calcular el número de meses que transcurren en promedio hasta que se cobra una factura de cada uno de los dos tipos de créditos.

	CUENTA CORRIENTE	CREDITOS DOCUMEN-TADOS	MOROSOS	COBRO	INCOBRABLE
CUENTA CORRIENTE	30%	15%	15%	40%	
CRÉDITOS DOCUMENTADOS		50%	10%	40%	
MOROSOS			20%	60%	20%

Resolución:

La matriz de probabilidades de transición es:

$$P = \begin{array}{c} \\ CC \\ CD \\ MO \\ CO \\ IN \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} CC & CD & MO & CO & IN \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0,30 & 0,15 & 0,15 & 0,40 & \\ & 0,50 & 0,10 & 0,40 & \\ & & 0,20 & 0,60 & 0,20 \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Reordenando:

$$\begin{array}{c} \\ CO \\ IN \\ CC \\ CD \\ MO \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} CO & IN & CC & CD & MO \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc:ccc} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ \hdashline 0,40 & & 0,30 & 0,15 & 0,15 \\ 0,40 & & & 0,50 & 0,10 \\ 0,60 & 0,20 & & & 0,20 \end{array}\right] \end{array}$$

$$N = \begin{bmatrix} 0,30 & 0,15 & 0,15 \\ & 0,50 & 0,10 \\ & & 0,20 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad I - N = \begin{bmatrix} 0,70 & -0,15 & -0,15 \\ & 0,5 & -0,10 \\ & & 0,80 \end{bmatrix}$$

Calculando la matriz inversa:

$$[\mathrm{I}-\mathrm{N}]^{-1} = \begin{bmatrix} 1{,}4286 & 0{,}4286 & 0{,}3214 \\ & 2 & 0{,}25 \\ & & 1{,}25 \end{bmatrix}$$

Multiplicando esta matriz por la matriz de absorción A:

$$[\mathrm{I}-\mathrm{N}]^{-1} \cdot \mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1{,}4286 & 0{,}4286 & 0{,}3214 \\ & 2 & 0{,}25 \\ & & 1{,}25 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}40 & \\ 0{,}40 & \\ 0{,}60 & 0{,}20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}94 & 0{,}06 \\ 0{,}95 & 0{,}05 \\ 0{,}75 & 0{,}25 \end{bmatrix}$$

Esto significa que la probabilidad de que se cobre una factura que actualmente se encuentra en cuentas corrientes es del 94%.

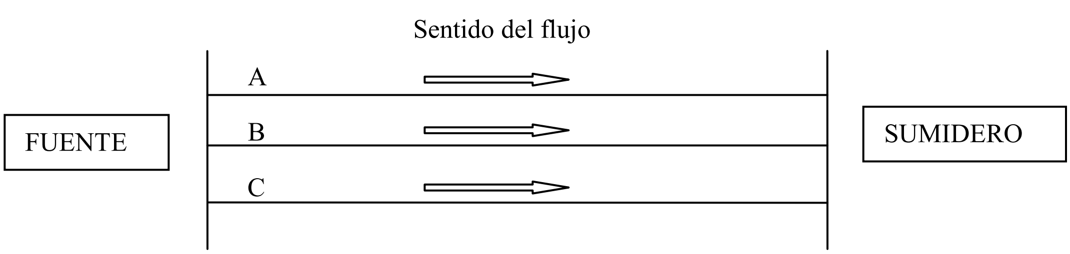
Para calcular el número de meses que pasan, en promedio, hasta que se liquida una cuenta, se procede a calcular el siguiente vector:

$$\overline{\mathrm{n}}_i = [\mathrm{I}-\mathrm{N}]^{-1} \cdot \overline{1} = \begin{bmatrix} 1{,}4286 & 0{,}4286 & 0{,}3214 \\ & 2 & 0{,}25 \\ & & 1{,}25 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}1786 \\ 2{,}2500 \\ 1{,}2500 \end{bmatrix}$$

Se observa que la cantidad de meses que transcurren hasta que se cobra una factura en cuenta corriente es de aproximadamente 2,18, en promedio, mientras que para el cobro de una factura documentada se requieren 2,25 meses.

5.7 ESTUDIO DE CONFIABILIDAD EN UN SISTEMA DE LÍNEAS DE TRANSMISIÓN

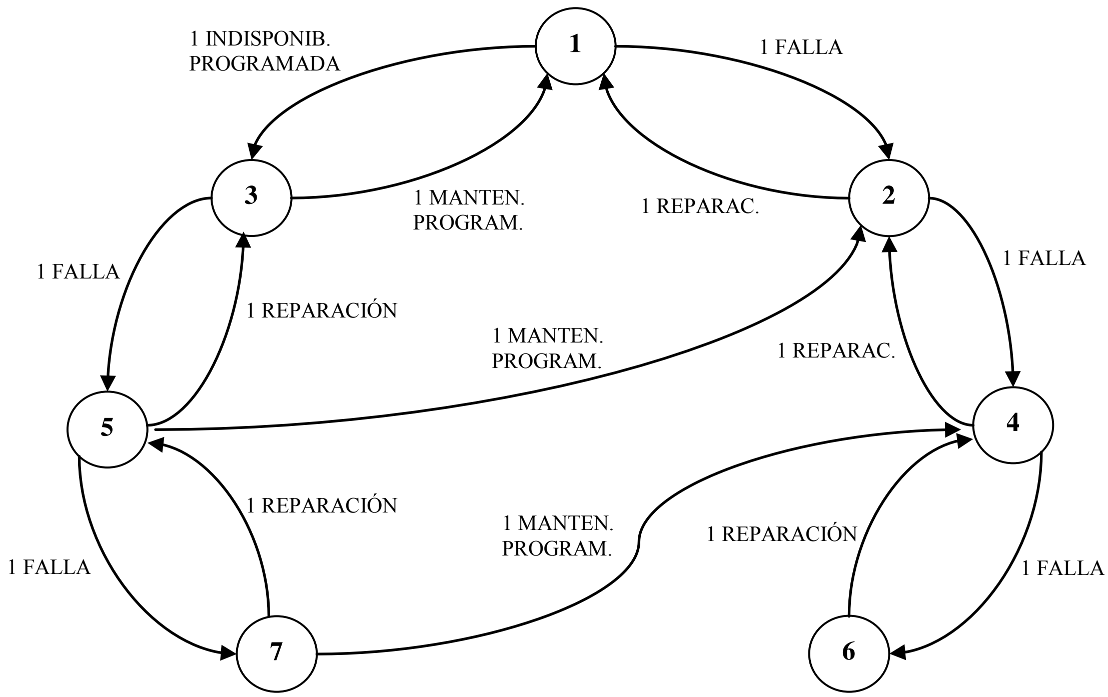
Un sistema está constituido por tres líneas de transmisión de energía o información que operan en paralelo. Cada línea puede encontrarse en servicio o fuera de servicio, ya sea por mantenimiento programado (indisponibilidad programada) o por falla, debido a la acción de un agente externo (indisponibilidad forzada). Además, el régimen de operación no permite retirar una línea por mantenimiento programado cuando existe alguna otra en paralelo fuera de servicio, ya sea por mantenimiento programado o por falla.



En estas condiciones, los estados posibles son:

Estado	Número de líneas en servicio	Número de líneas en falla	Número de líneas en mantenimiento programado
1	3	0	0
2	2	1	0
3	2	0	1
4	1	2	0
5	1	1	1
6	0	3	0
7	0	2	1

y las transiciones entre los estados se pueden expresar mediante el siguiente grafo:



Se puede observar que existen cuatro transiciones básicas:

- Falla
- Reparación
- Indisponibilidad programada
- Mantenimiento

Se considerará la hipótesis de que tanto los regímenes de fallas y de indisponibilidad programada como las duraciones de las reparaciones y de los mantenimientos tienen probabilidades de transición dadas por funciones de distribución exponencial:

$$p_{ij}^{(t)}{}_{\text{Falla forzada}} = \left(1 - e^{-\lambda_{F} \cdot t}\right)$$

$$p_{ij}^{(t)}{}_{\text{Indispon. programada}} = \left(1 - e^{-\lambda_P \cdot t}\right)$$

$$p_{ij}^{(t)}{}_{\text{Reparación}} = \left(1 - e^{-\mu_F \cdot t}\right)$$

$$p_{ij}^{(t)}{}_{\text{Falla forzada}} = \left(1 - e^{-\mu_P \cdot t}\right)$$

De esta manera, el sistema se puede estudiar como una cadena de Markov homogénea con parámetro *t* continuo.

Luego, las respectivas tasas de transición serán:

- $d_{\text{FALLA FORZADA}} = \dfrac{d}{dt}(P_{ij}^{(0)}{}_{\text{F.FORZ.}}) = \lambda_F$ (5.1)
- $d_{\text{INDISP. PROGRA.}} = \dfrac{d}{dt}(P_{ij}^{(0)}{}_{\text{IND.PROGR}}) = \lambda_P$ (5.2)
- $d_{\text{REPARACIÓN}} = \dfrac{d}{dt}(P_{ij}^{(0)}{}_{\text{REPARACIÓN}}) = \mu_F$ (5.3)
- $d_{\text{MANTENIMIENTO}} = \dfrac{d}{dt}(P_{ij}^{(0)}{}_{\text{IND.PROGR}}) = \mu_P$ (5.4)

Los valores anteriores corresponden a las probabilidades de transición por cable. Para evaluar las probabilidades de transición entre los siete estados definidos es necesario afectar a las expresiones (5.1) a (5.4) por el número de líneas que están en condiciones de efectuar la transición. Así, del estado 1 al estado 2 se puede pasar por falla en cualquiera de las tres líneas; luego, la tasa de de 1 a 2 será $3\lambda_F$, y así con las demás. De modo que tomando un Δt suficientemente pequeño como para considerar que no se producirá más de un evento en ese intervalo, las probabilidades de transición son:

$p_{1,2} = 3\ \lambda_F \cdot \Delta t$

$p_{1,3} = 3\ \lambda_P \cdot \Delta t$

$p_{2,4} = p_{3,5} = 2\ \lambda_F \cdot \Delta t$

$p_{4,6} = p_{5,7} = \lambda_F \cdot \Delta t$

$p_{3,1} = p_{5,2} = p_{7,4} = \mu_P \cdot \Delta t$

$p_{2,1} = p_{5,3} = \mu_F \cdot \Delta t$

$p_{4,2} = p_{7,5} = 2\ \mu_F \cdot \Delta t$

$p_{6,4} = 3\ \mu_F \cdot \Delta t$

El resto de las probabilidades de transición son nulas. En consecuencia, el grafo de la cadena markoviana con las tasas de transición se indica en la próxima página.

Por el método de suma de flujos, se puede plantear el siguiente sistema de 7 ecuaciones con 7 incógnitas:

Nodo 1: $p(1)\cdot(3\lambda_P+3\ \lambda_F) = p(3)\cdot \mu_P + p(2)\cdot \mu_F$

Nodo 2: $p(2)\cdot(2\lambda_F+\mu_F) = p(1)\cdot 3\ \lambda_F + p(5)\cdot \mu_P+ p(4)\cdot 2\mu_F$

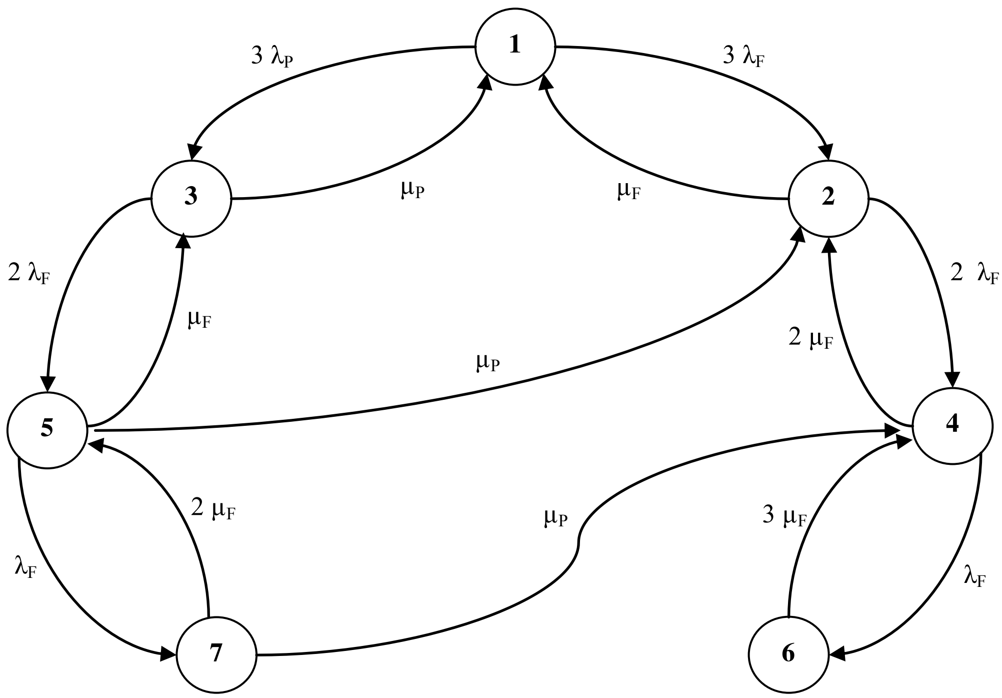
Nodo 3: $p(3)\cdot(2\lambda_F+\mu_P) = p(1)\cdot 3\ \lambda_P + p(5)\cdot \mu_F$

Nodo 5: $p(5)\cdot(\lambda_F+\mu_P+ \mu_F) = p(3)\cdot 2\ \lambda_F + p(7)\cdot 2\mu_F$

Nodo 6: $p(6)\cdot 3\ \mu_F = p(4)\cdot\ \lambda_F$

Nodo 7 $p(7)\cdot(\mu_P+ 2\mu_F) = p(5)\cdot\ \lambda_F$

Suma de probab.: $p(0) + p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6) + p(7) = 1$



Resuelto este sistema puede determinarse, además:

Probabilidad de tres líneas en servicio: p(1)

Probabilidad de dos líneas en servicio: p(2) + p(3)

Probabilidad de una línea en servicio: p(4) + p(5)

Probabilidad de ninguna línea en servicio: p(6) + p(7)

Como ejemplo, se tomarán los siguientes datos: $\lambda_P = 10{,}7$ indisp/cable-año; $\lambda_F = 0{,}4$ fallas/cable-año; $\mu_P = 983{,}5$ manten./cable-año; $\mu_F = 190{,}4$ repar./cable-año.

Utilizando el sistema LINGO, que permite resolver ecuaciones simultáneas, se formula el siguiente sistema:

```
LP = 10.7;
LF = 0.4;
MP = 983.5;
```

```
MF = 190.4;
p1*(3*LP + 3*LF) = P3*MP + P2*MF;
P2*(2*LF + MF) = P1*3*LF + P5*MP + P4*2*MF;
P3*(2*LF + MP) = P1*3LP + P5*MF;
P5*(LF + MP + MF) = P3*2*LF + P7*2*MF;
P6*3*MF = P4*LF;
P7*(MP + 2*MF) = P5*LF;
P0 + P1 + P2 + P3 + P4 + P5 + P6 + P7 = 1;
PTRES= P1;
PDOS = P2 + P3;
PUNA= P4 + P5;
PNINGUNA = P6 + P7;
```

y el resultado es el siguiente:

Variable	Valor
LP	10.70000
LF	0.4000000
MP	983.5000
MF	190.4000
P1	0.9623996
P3	0.3138992 E-01
P2	0.6176048 E-02
P5	0.2138663 E-04
P4	0.1299108 E-04
P7	0.6270361 E-08
P6	0.9097398 E-08
PTRES	0.9623996
PDOS	0.3756597 E-01
PUNA	0.3437772 E-04
PNINGUNA	0.1536776 E-07

5.8 REAPROVISIONAMIENTO DE INVENTARIOS

Una empresa comercial, que trabaja de lunes a viernes, manteniene inventario de un producto que se puede pedir semanalmente. Se conoce la distribución de probabilidades de la demanda d_i, para la semana *i*. Se supone que las d_i son variables aleatorias independientes igualmente distribuidas. Sea x_0 el stock inicial y x_i el número de unidades en stock del producto al final de la semana *i*.

Al finalizar cada viernes la empresa puede emitir una orden de compra al proveedor del producto cuya entrega es inmediata, ya que el lunes a la mañana, antes de comenzar la actividad, está disponible para ser vendido.

La empresa utiliza una política (*s*, *S*). Si el número de unidades en stock al finalizar la semana es menor que *s*, entonces emite una orden hasta completar *S*. En caso contrario, no se pide. Se considera que la demanda insatisfecha de una semana se pierde.

Tomando $s = 1$, $S = 3$, $x_0 = 3$, d_i : distribución Poisson con media $\lambda = 1$:

a) Determinar las probabilidades de transición de un paso.

b) Dado que hay dos unidades en stock al finalizar una semana, ¿cuál es la probabilidad de que haya tres unidades en stock dos semanas más tarde y cuatro semanas más tarde?

c) Considerando que el proceso comienza cuando hay 3 unidades en stock, calcular el tiempo esperado hasta que la empresa se queda sin stock.

d) Calcular las probabilidades de estado en régimen permanente.

<u>Resolución</u>:

Definiremos como variable x_t a la cantidad de unidades al finalizar la semana *i*. Luego, los valores que puede asumir esta variable son:

$x_t = \{0, 1, 2, 3\}$

De la tabla de Poison y de la acumulada G tenemos:

n	0	1	2	3	4	5	6
p(d=n)	0368	0,368	0,184	0,061	0,015	0,003	0,001
$d \geq n$	1,000	0,632	0,264	0,080	0,019	0,004	0,001

Si el stock inicial al momento de la observación es 0, se compran tres unidades. Para terminar con stock 0, en la semana se deben demandar 3 o más unidades, y la probabilidad de que ello ocurra es 1-0,981 = 0,029 → $p_{00} = 0{,}029$. Si el stock inicial es 0, para terminar con stock 1, en la semana se deben demandar 2 unidades → $p_{01} = 0{,}184$. Para terminar con stock 2, se debe demandar 1 unidad → $p_{02} = 0{,}368$, y para terminar con stock 0, no se debe demandar ninguna unidad → $p_{03} = 0{,}368$

Si el stock en el momento de la revisión es 1, no se hace el pedido. Para terminar en 0 se deben demandar 1 o más unidades ($p_{10} = 0{,}632$). Para terminar en 1, la demanda debe ser 0 ($p_{11} = 0{,}368$).

Si el stock en la observación es 2, tendremos que: $p_{20} = 0{,}264$, $p_{21} = 0{,}368$, $p_{22} = 0{,}368$.

Finalmente, si el stock es 3, tendremos que: $p_{30} = 0{,}080$, $p_{31} = 0{,}184$, $p_{32} = 0{,}368$, $p_{33} = 0{,}368$. Luego, la matriz de transición es:

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}080 & 0{,}184 & 0{,}368 & 0{,}368 \\ 0{,}632 & 0{,}368 & 0 & 0 \\ 0{,}264 & 0{,}368 & 0{,}368 & 0 \\ 0{,}080 & 0{,}184 & 0{,}368 & 0{,}368 \end{bmatrix} \end{array}$$

b) Las probabilidades solicitadas pueden determinarse a partir de las matrices P^2 y P^4:

$$P^2 = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}249 & 0{,}286 & 0{,}300 & 0{,}165 \\ 0{,}283 & 0{,}252 & 0{,}233 & 0{,}233 \\ 0{,}351 & 0{,}319 & 0{,}233 & 0{,}097 \\ 0{,}249 & 0{,}286 & 0{,}300 & 0{,}165 \end{bmatrix} \end{array}$$

Luego, $p_{23}^{(2)} = 0{,}097$

$$P^4 = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}289 & 0{,}286 & 0{,}261 & 0{,}164 \\ 0{,}282 & 0{,}285 & 0{,}268 & 0{,}166 \\ 0{,}284 & 0{,}283 & 0{,}263 & 0{,}171 \\ 0{,}289 & 0{,}286 & 0{,}261 & 0{,}164 \end{bmatrix} \end{array}$$

En consecuencia, $p_{23}^{(4)} = 0{,}171$

c) Tomando el estado 0 como absorbente:

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{c|ccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0{,}632 & 0{,}368 & 0 & 0 \\ 0{,}264 & 0{,}368 & 0{,}368 & 0 \\ 0{,}080 & 0{,}184 & 0{,}368 & 0{,}368 \end{array}\right] \end{array}$$

$$I - N = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}632 & 0 & 0 \\ -0{,}368 & 0{,}632 & 0 \\ -0{,}184 & -0{,}368 & 0{,}632 \end{bmatrix} \end{array}$$

cuya inversa es:

$$(I - N)^{-1} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{bmatrix} 1{,}5823 & 0 & 0 \\ 0{,}9213 & 1{,}5823 & 0 \\ 0{,}9971 & 0{,}9213 & 1{,}5823 \end{bmatrix}$$

Luego $n_{0/3} = \; 3{,}5$

d) En régimen permanente tendremos que, por Chapman-Kolmogorov:

$$\begin{bmatrix} p(0) & p(1) & p(2) & p(3) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}080 & 0{,}184 & 0{,}368 & 1 \\ 0{,}632 & 0{,}368 & 0 & 1 \\ 0{,}264 & 0{,}368 & 0{,}368 & 1 \\ 0{,}080 & 0{,}184 & 0{,}368 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(0) & p(1) & p(2) & 1 \end{bmatrix}$$

El sistema de ecuaciones es, entonces:

$$p(0)\cdot 0{,}080 + p(1)\cdot 0{,}632 + p(2)\cdot 0{,}264 + p(3)\cdot 0{,}080 = p(0)$$

$$p(0)\cdot 0{,}184 + p(1)\cdot 0{,}368 + p(2)\cdot 0{,}368 + p(3)\cdot 0{,}184 = p(1)$$

$$p(0)\cdot 0{,}368 + p(2)\cdot 0{,}368 + p(3)\cdot 0{,}368 = p(2)$$

$$p(0) + p(1) + p(2) + p(3) = 1$$

Resolviendo:

$$V^* = \begin{bmatrix} p(0) & p(1) & p(2) & p(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}286 & 0{,}285 & 0{,}263 & 0{,}166 \end{bmatrix}$$

TERMINOLOGÍA

p(i,t) Probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado *i* en el instante *t*.

p(i) Probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado *i* en régimen permanente.

p_{ij}	Probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado *j* dado que en el paso anterior se encontraba en el estado *i* (o probabilidad de transición de *i* a *j* en un paso).
$p_{ij}^{(n)}$	Probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado *j* dado que *n* pasos atrás se encontraba en el estado *i* (o probabilidad de transición de *i* a *j* en *n* pasos).
P	Matriz de transición (o matriz estocástica) de un paso: Cada elemento de la matriz representa la probabilidad de desplazarse de un estado a otro en un paso.
$P^{(n)}$	Matriz de transición (o matriz estocástica) de *n* pasos: Cada elemento de la matriz representa la probabilidad de desplazarse de un estado a otro en *n* transiciones.
V_{ij}	Vector distribución de probabilidades (o vector de transición): Cada elemento de este vector representa la probabilidad de pasar del estado *i* a cada uno de los estados que el proceso puede seguir en un paso.
$V_{ij}^{(n)}$	Vector distribución de probabilidades en *n* pasos: Cada elemento de este vector representa la probabilidad de pasar del estado *i* a cada uno de los estados que el proceso puede seguir en *n* transiciones.
V^*	Vector de probabilidades de estado en régimen permanente o vector de probabilidades invariantes.

ÍNDICE