Contenido

Prefacio XI
Lista de símbolos XV

CAPÍTULO ONCE CINEMÁTICA DE PARTÍCULAS 475
11.1 Introducción a la dinámica 475

Movimiento rectilíneo de partículas 476
11.2 Posición, velocidad y aceleración 476
11.3 Determinación del movimiento de una partícula 479
11.4 Movimiento rectilíneo uniforme 487
11.5 Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado 488
11.6 Movimiento de varias partículas 489
*11.7 Solución gráfica de problemas de movimiento rectilíneo 496
*11.8 Otros métodos gráficos 497

Movimiento curvilíneo de partículas 504
11.9 Vector de posición, velocidad y aceleración 504
11.10 Derivadas de funciones vectoriales 506
11.11 Componentes rectangulares de la velocidad y la aceleración 508
11.12 Movimiento relativo a un sistema de referencia en traslación 509
11.13 Componentes tangencial y normal 520
11.14 Componentes radial y transversal 523
Repaso y resumen 533
Problemas de repaso 537

CAPÍTULO DOCE CINÉTICA DE PARTÍCULAS: SEGUNDA LEY DE NEWTON 541
12.1 Introducción 541
12.2 Segunda ley de Newton del movimiento 542
12.3 Momento lineal de una partícula. Variación del momento lineal 544
12.4 Sistemas de unidades 544
12.5 Ecuaciones de movimiento 547
12.6 Equilibrio dinámico 549

12.7 Momento angular de una partícula. Conservación del momento angular 563
12.8 Ecuaciones de movimiento expresadas en términos de las componentes radial y transversal 564
12.9 Movimiento bajo la acción de una fuerza central. Conservación de la cantidad de movimiento angular 565
12.10 Ley de la gravitación de Newton 566
*12.11 Trayectoria de una partícula bajo la acción de una fuerza central 572
*12.12 Aplicación a la mecánica espacial 573
*12.13 Leyes de Kepler del movimiento planetario 577
Repaso y resumen 582
Problemas de repaso 586

CAPÍTULO TRECE CINÉTICA DE PARTÍCULAS: MÉTODO DE LA ENERGÍA Y DE LOS MOMENTOS 589
13.1 Introducción 589
13.2 Trabajo realizado por una fuerza 590
13.3 Energía cinética de una partícula. Teorema de las fuerzas vivas 594
13.4 Aplicaciones del teorema de las fuerzas vivas 596
13.5 Potencia y rendimiento 597
13.6 Energía potencial 611
*13.7 Fuerzas conservativas 613
13.8 Conservación de la energía 614
13.9 Movimiento bajo la acción de una fuerza central conservativa. Aplicación a la mecánica celeste 616
13.10 Principio del impulso y del momento lineal 630
13.11 Percusiones 632
13.12 Choques 640
13.13 Choque central directo 640
13.14 Choque central oblicuo 643
13.15 Problemas en los que intervienen la energía y el momento lineal 646
Repaso y resumen 658
Problemas de repaso 663

CAPÍTULO CATORCE SISTEMAS DE PARTÍCULAS 668
14.1 Introducción 668
14.2 Aplicación de las leyes de Newton al movimiento de un sistema de partículas. Fuerzas inerciales o efectivas 669
14.3 Momento lineal y angular de un sistema de partículas 672
14.4 Movimiento del centro de masas de un sistema de partículas 673
14.5 Momento angular de un sistema de partículas con respecto a su centro de masas 675

14.6 Conservación del momento lineal y angular en un sistema de partículas 677
14.7 Energía cinética de un sistema de partículas 683
14.8 Teorema de las fuerzas vivas. Conservación de la energía para un sistema de partículas 683
14.9 Principio del impulso y del momento para un sistema de partículas 684
*14.10 Sistemas de masa variable 694
*14.11 Corriente estacionaria de partículas 694
*14.12 Sistemas que aumentan o disminuyen su masa 697
Repaso y resumen 710
Problemas de repaso 714

CAPÍTULO QUINCE CINEMÁTICA DEL SÓLIDO RÍGIDO 718
15.1 Introducción 718
15.2 Traslación 720
15.3 Rotación alrededor de un eje fijo 721
15.4 Ecuaciones que definen la rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje fijo 724
15.5 Movimiento plano 730
15.6 Velocidad absoluta y relativa en el movimiento plano 732
15.7 Centro instantáneo de rotación en el movimiento plano 740
15.8 Aceleración absoluta y relativa en el movimiento plano 748
*15.9 Análisis del movimiento plano mediante un parámetro 750
15.10 Velocidad de variación de un vector con respecto a un sistema de rotación 758
15.11 Movimiento plano de una partícula con relación a un sistema en rotación. Aceleración de Coriolis 760
*15.12 Movimiento con un punto fijo 768
*15.13 Movimiento general 771
*15.14 Movimiento tridimensional de una partícula respecto a un sistema en rotación. Aceleración de Coriolis 780
*15.15 Sistema de referencia en el movimiento general 781
Repaso y resumen 790
Problemas de repaso 796

CAPÍTULO DIECISÉIS MOVIMIENTO PLANO DEL SÓLIDO RÍGIDO: FUERZA Y ACELERACIONES 800
16.1 Introducción 800
16.2 Ecuación del movimiento de un cuerpo rígido 801
16.3 Momento angular de un sólido rígido en movimiento plano 802

16.4 Movimiento plano de un sólido rígido. Principio de d'Alembert 803
*16.5 Una observación acerca de los axiomas de la mecánica de los sólidos rígidos 806
16.6 Solución de problemas relacionados con el movimiento de un sólido rígido 806
16.7 Sistemas de sólidos rígidos 808
16.8 Movimiento plano vinculado 825
Repaso y resumen 845
Problemas de repaso 847

CAPÍTULO DIECISIETE MOVIMIENTO PLANO DEL SÓLIDO RÍGIDO: MÉTODOS DE LA ENERGÍA Y DEL MOMENTO 851
17.1 Introducción 851
17.2 Teorema de las fuerzas vivas para el sólido rígido 852
17.3 Trabajo realizado por las fuerzas que actúan sobre un sólido rígido 853
17.4 Energía cinética de un sólido rígido en movimiento plano 854
17.5 Sistemas de sólidos rígidos 855
17.6 Conservación de la energía 856
17.7 Potencia 857
17.8 Principio del impulso y del momento para el movimiento plano de un sólido rígido 872
17.9 Sistemas de sólidos rígidos 874
17.10 Conservación del momento angular 875
17.11 Percusiones 886
17.12 Choque excéntrico 886
Repaso y resumen 898
Problemas de repaso 901

CAPÍTULO DIECIOCHO CINÉTICA DEL SÓLIDO RÍGIDO EN TRES DIMENSIONES 906
*18.1 Introducción 906
*18.2 Momento angular de un sólido rígido en tres dimensiones 907
*18.3 Aplicación del principio del impulso y del momento al movimiento tridimensional de un sólido rígido 911
*18.4 Energía cinética de un sólido rígido en tres dimensiones 912
*18.5 Movimiento de un sólido rígido en tres dimensiones 922
*18.6 Ecuaciones de Euler del movimiento. Extensión del principio de d'Alembert al movimiento de un sólido rígido en tres dimensiones 923
*18.7 Movimiento de un sólido rígido alrededor de un punto fijo 924
*18.8 Rotación de un sólido rígido alrededor de un eje fijo 925

*18.9 Movimiento de un giróscopo. Ángulos de Euler 936
*18.10 Precesión uniforme de un giróscopo 938
*18.11 Movimiento de un sólido de revolución no sujeto a ninguna fuerza 939
Repaso y resumen 949
Problemas de repaso 954

CAPÍTULO DIECINUEVE VIBRACIONES MECÁNICAS 958

19.1 Introducción 958

Vibraciones sin amortiguamiento 959
19.2 Vibraciones libres de partículas. Movimiento armónico simple 959
19.3 Péndulo simple (solución aproximada) 962
*19.4 Péndulo simple (solución exacta) 963
19.5 Vibraciones libres de sólidos rígidos 969
19.6 Aplicación del principio de la conservación de la energía 977
19.7 Vibraciones forzadas 983

Vibraciones amortiguadas 990
*19.8 Vibraciones libres amortiguadas 990
*19.9 Vibraciones forzadas amortiguadas 993
*19.10 Analogías eléctricas 994
Repaso y resumen 1002
Problemas de repaso 1006

Apéndice A Algunas definiciones y propiedades útiles del álgebra vectorial 1011
Apéndice B Momentos de inercia de masas 1017
ÍNDICE 1043
RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS DE NÚMERO PAR 1049

Fotografía de la portada

Tren de alta velocidad (TGV, *Train a Grande Vitesse*) diseñado y construido por los Ferrocarriles Nacionales Franceses. Cada tren consta de ocho vagones de pasajeros y dos locomotoras de 3.150 kW de potencia que funciona con corriente alterna de 25 kV. Alcanzan velocidades superiores a los 270 km/h (168 mi/h) por una vía especial entre París y Lyón; estos trenes pueden circular por vías normales a velocidad reducida y proporcionan conexiones rápidas y directas entre más de 40 ciudades francesas y suizas. *(Fotografía de Richard Kalvar, Magnum.)*

Prefacio

El objetivo principal de un primer curso de mecánica debe ser desarrollar en el estudiante de ingeniería la capacidad de analizar cualquier problema en una forma lógica y simple, y aplicar principios básicos bien conocidos en su solución. Se espera que este texto, junto con el volumen anterior *Mecánica vectorial para ingenieros: estática,* ayudará al profesor a alcanzar este objetivo. †

El álgebra vectorial se introdujo al principio del primer tomo y se usó en la presentación de los principios básicos de la estática y en la solución de muchos problemas, especialmente de casos en tres dimensiones. En forma similar se introducirá el concepto de la diferenciación de vectores al principio de este volumen; en la exposición de la dinámica se usará el análisis vectorial. Este enfoque conduce a la deducción más concisa de los principios fundamentales y hace posible analizar muchos problemas de cinemática y cinética que no podrían resolverse usando métodos escalares; no obstante, como en este texto se hace hincapié en la correcta comprensión de los principios de la mecánica y sus aplicaciones a la solución de problemas en ingeniería, el análisis vectorial se presenta sólo como una herramienta suplementaria. ‡

Una de las características del enfoque usado en estos volúmenes es que se diferencia claramente entre la mecánica de las *partículas* y la mecánica de los *sólidos rígidos*, lo que permite considerar aplicaciones prácticas sencillas desde el principio y posponer la introducción de conceptos más difíciles. En el libro de estática se trató primero la estática de las partículas y se aplicó inmediatamente el principio del equilibrio a situaciones prácticas en las que intervienen sólo fuerzas concurrentes; después se consideró la estática de los sólidos rígidos; fue entonces cuando se introdujeron los productos vectorial y escalar de dos vectores y se emplearon para definir el momento de una fuerza con respecto a un punto y con respecto a un eje. En este volumen se sigue la misma división: se introducen los conceptos básicos de fuerza, masa y aceleración, los de trabajo y energía y los de impulso y momento lineal, y se aplican primero a problemas sólo con partículas. Así los estudiantes pueden familiarizarse con los tres métodos básicos usados en la dinámica, y aprender sus respectivas ventajas antes de enfrentarse a las dificultades asociadas con el movimiento de los sólidos rígidos.

† Ambos textos están disponibles en un solo volumen, *Mecánica vectorial para ingenieros: estática y dinámica,* cuarta edición.

‡ En un texto paralelo, *Mecánica para ingenieros: dinámica,* tercera edición, se limita el uso del álgebra vectorial a la adición y sustracción de vectores y se omite la diferenciación de vectores.

Como este texto está estructurado para un primer curso de dinámica, los conceptos nuevos se presentan en términos sencillos y cada paso se explica detalladamente. Por otra parte, el estudiar los aspectos más amplios de los problemas considerados y hacer hincapié en los métodos de aplicación general, se logró plena madurez del planteamiento. Por ejemplo, el concepto de la energía potencial se analiza en el caso general de una fuerza conservativa; así mismo también se organizó el estudio del movimiento plano de los cuerpos rígidos, de modo que condujera en forma lógica al estudio de su movimiento general en el espacio. Esto es válido también tanto en cinemática como en cinética, donde el principio de equivalencia de las fuerzas externas y las fuerzas inerciales se aplica directamente al análisis del movimiento en un plano, con lo cual se facilita la transición al estudio del movimiento tridimensional.

Se resaltó el hecho de que la mecánica es esencialmente una ciencia *deductiva* que se basa en unos cuantos principios fundamentales. Las derivaciones se presentan en su orden lógico y con todo el rigor necesario a este nivel. Pero como el proceso de aprendizaje es altamente *inductivo*, se consideraron primero aplicaciones sencillas; en esta forma la dinámica de las partículas precede a la dinámica de los sólidos rígidos y, respecto de éstos, los principios fundamentales de la cinética se aplican primero a la solución de los problemas de casos bidimensionales que el estudiante puede conceptuar más fácilmente (Caps. 16 y 17), mientras que los problemas de casos tridimensionales se dejan para el capítulo 18.

La cuarta edición de *Mecánica vectorial para ingenieros* mantiene unificada la presentación de los principios de la cinética que caracterizaron a las dos ediciones anteriores. Los conceptos de momento lineal y angular se introducen en el capítulo 12, de modo que la segunda ley de Newton de movimiento puede presentarse no sólo en su forma convencional $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, sino también como una ley que relaciona la suma de fuerzas que actúan sobre una partícula y la suma de sus momentos con la derivada temporal del momento lineal y angular de la partícula. Esto permite una introducción adelantada del principio de conservación del momento lineal y una exposición más comprensible del movimiento de una partícula sujeta a una fuerza central (Sec. 12.9). Dos características más importantes aún: que esta presentación puede ampliarse inmediatamente para abarcar el estudio del movimiento de un sistema de partículas (Cap. 14), y conduce a un análisis más conciso y unificado de la cinética de los sólidos rígidos en dos y tres dimensiones (Caps. 16 al 18).

Los diagramas de sólido libre se introdujeron al principio en estática y se usaron no sólo para resolver problemas de equilibrio, sino también para representar la equivalencia de dos sistemas de fuerzas o, en forma más general, de dos sistemas de vectores. La ventaja de este planteamiento se manifiesta en el estudio de la dinámica de los sólidos rígidos, donde se usa para resolver problemas de casos tridimensionales y bidimensionales. Haciendo hincapié en "las ecuaciones de diagrama de sólido libre" y no en las ecuaciones algebraicas de movimiento normales, puede lograrse una comprensión más completa e intuitiva de los principios fundamentales de la dinámica. Esta presentación, que se introdujo por primera vez en 1962 en la primera edición de *Mecánica vectorial para ingenieros,* ha ganado amplia aceptación

entre los maestros de mecánica en Estados Unidos. Por ello, en la resolución de todos los problemas resueltos, en esta edición se prefirió ese método y no el del equilibrio dinámico y las ecuaciones de movimiento.

Se emplean también flechas de color para distinguir entre las fuerzas y los otros elementos de los diagramas de sólido libre. Esto facilita a los estudiantes la identificación de las fuerzas que actúan sobre una cierta partícula o un sólido rígido, y seguir el desarrollo de los problemas resueltos y otros ejemplos dados en el texto.

Por la tendencia actual entre los ingenieros estadounidenses de adoptar el sistema internacional de unidades (unidades métricas del SI), las unidades del SI que se usan con mayor frecuencia en la mecánica se introdujeron en el capítulo 1 de *Estática*, se estudian en el capítulo 12 de este volumen y se usan en todo el texto. Los datos de aproximadamente la mitad de los problemas resueltos y de 60% de los problemas que el estudiante realizará como tareas se han planteado en estas unidades, mientras que el resto se enuncia en unidades del sistema inglés; los autores consideran que esta presentación satisfará mejor las necesidades de los estudiantes que ingresen a la carrera de ingeniería durante el periodo de transición de un sistema de unidades al otro. También debe reconocerse que este paso vincula más elementos que el uso de factores de conversión. Como el sistema de unidades del SI es un sistema absoluto basado en las unidades de tiempo, longitud y masa, mientras que el sistema inglés es un sistema gravitacional que se basa en las unidades de tiempo, longitud y fuerza, se requieren diferentes planteamientos para la solución de muchos problemas. Por ejemplo, cuando se usan unidades del SI, un sólido se especifica generalmente por su masa expresada en kilogramos; en la mayor parte de los problemas de la estática fue necesario determinar el peso del cuerpo en newtons y se requirió un cálculo adicional para este propósito. Por otra parte, cuando se usan las unidades del sistema inglés, un sólido se especifica por su peso en libras y en problemas de dinámica se requiere un cálculo adicional para determinar su masa en slugs (o $lb \cdot s^2/ft$). Es por esto que los autores estiman que los problemas de tarea deben incluir ambos sistemas de unidades, pero, la distribución real de estos problemas entre los dos sistemas de unidades, ha de quedar a criterio del profesor, quien proporcionará un número suficiente de problemas de cada tipo a fin que puedan integrarse cuatro listas completas de problemas de tarea, en los cuales haya de 50% a 75% de problemas en unidades del SI.

Si se desea, pueden seleccionarse también dos listas completas de problemas de tarea a partir de los problemas que usan unidades del SI únicamente, así como otras dos listas de problemas con unidades del sistema inglés.

Se han incluido varias secciones opcionales, indicadas con asteriscos para que el estudiante las distinga con facilidad de las que forman la parte principal del curso básico de dinámica; tales secciones pueden omitirse sin perjudicar la comprensión del resto del texto. Los temas tratados en estas secciones adicionales incluyen métodos gráficos para la solución de problemas de movimiento rectilíneo, la trayectoria de una partícula bajo la acción de una fuerza central, la detección de corrientes de fluido, problemas en los que intervienen la propulsión a chorro y de cohetes, la cinemática y cinética de sólidos

rígidos en tres dimensiones, vibraciones mecánicas amortiguadas y analogías eléctricas. Estos temas pueden ser de especial interés en un curso universitario de dinámica de segundo año.

El material y la mayor parte de los problemas presentados en este volumen no requieren conocimientos matemáticos previos más complejos que los del álgebra, trigonometría, cálculo elemental y los elementos del álgebra vectorial presentados en los capítulos 2 y 3 del volumen de estática.† Sin embargo, los problemas especiales incluidos y ciertas secciones (como las 19.8 y 19.9 acerca de vibraciones amortiguadas) que exigen un conocimiento más avanzado del cálculo, sólo deberán asignarse si el estudiante posee conocimientos matemáticos adecuados.

Cada capítulo comienza con una sección de introducción que fija el propósito y los objetivos del mismo y que describe en términos sencillos el material por estudiar y su aplicación a la solución de problemas de ingeniería. La parte principal del texto se divide en unidades, cada una de las cuales consta de una o varias secciones de teoría, uno o varios problemas resueltos y gran número de problemas para dejarse de tarea. Cada unidad corresponde a un tema bien definido y generalmente puede desarrollarse en una lección; no obstante, es posible que en algunos casos el profesor decida dedicar más de una lección a algún tema específico. Los problemas resueltos están presentados de la misma manera en que los estudiantes resolverán los problemas que les asignen; por ello tienen el doble propósito de ampliar el texto y demostrar el tipo de trabajo limpio y ordenado que deben cultivar los estudiantes en sus propias soluciones. La mayor parte de los problemas para tarea son prácticos y atractivos a los estudiantes de ingeniería; sin embargo, se idearon principalmente para ejemplificar la aplicación de la teoría presentada en el texto y ayudar a que los estudiantes comprendan los principios básicos de la mecánica. Los problemas están agrupados de acuerdo con los elementos teóricos que ilustran y se presentan en orden de dificultad creciente; los que requieren atención especial están indicados con asteriscos. Al final del libro se dan las respuestas a todos los problemas listados con número par.

Los autores agradecen los numerosos comentarios y sugerencias propuestos por quienes han usado las ediciones anteriores de *Mecánica para ingenieros* y de *Mecánica vectorial para ingenieros.*

Ferdinand P. Beer
E. Russell Johnston, Jr.

† Para comodidad del lector se han resumido en el Apéndice A, al final de este volumen, algunas definiciones y propiedades útiles del álgebra de vectores. Además, en el apéndice B se han reproducido las selecciones de la 9.11 a la 9.17 del volumen de Estática, que estudian los momentos de inercia de masas.

Lista de símbolos

$\mathbf{a}, a$	Aceleración
a	Constante; radio; distancia; semieje mayor de una elipse
$\mathbf{a}, a$	Aceleración del centro de masa
$\mathbf{a}_{B/A}$	Aceleración de B relativa a un sistema en translación con A
$\mathbf{a}_{P/\mathcal{F}}$	Aceleración de P relativa a un sistema $\mathcal{F}$ en rotación
$\mathbf{a}_c$	Aceleración de Coriolis
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \ldots$	Reacciones en los soportes y uniones
$A, B, C, \ldots$	Puntos
A	Área
b	Ancho; distancia; semieje menor de una elipse
c	Constante; coeficiente de amortiguamiento viscoso
C	Centro instantáneo de rotación; capacitancia
d	Distancia
$\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_t$	Vectores unitarios a lo largo de la normal y de la tangente
$\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$	Vectores unitarios en las direcciones radial y transversal
e	Coeficiente de restitución; base de los logaritmos naturales
E	Energía mecánica total; voltaje o tensión
f	Frecuencia, función escalar
$\mathbf{F}$	Fuerza; fuerza de rozamiento
g	Aceleración de la gravedad
G	Centro de gravedad; centro de masa; constante de gravitación
h	Momento angular por unidad de masa
$\mathbf{H}_O$	Momento angular con respecto al punto O
$\dot{\mathbf{H}}_G$	Derivada temporal del momento angular $\mathbf{H}_G$ con respecto a un sistema de referencia de orientación fija
$(\dot{\mathbf{H}}_G)_{Gxyz}$	Derivada temporal del momento angular $\mathbf{H}_G$ con respecto a un sistema de referencia giratorio $Gxyz$
$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$	Vectores unitarios a lo largo de los ejes de coordenadas
i	Corriente
$I, I_x, \ldots$	Momento de inercia
$\bar{I}$	Momento de inercia central
$I_{xy}, \ldots$	Producto de inercia
J	Momento polar de inercia

k_x, k_y, k_O	Radio de giro
$\bar{k}$	Radio de giro central
l	Longitud
$\mathbf{L}$	Momento lineal
L	Longitud; inductancia
m	Masa
m'	Masa por unidad de longitud
$\mathbf{M}$	Par; momento
$\mathbf{M}_O$	Momento respecto al punto O
$\mathbf{M}_O^R$	Momento resultante respecto al punto O
M	Módulo de un par o momento; masa de la Tierra
M_{OL}	Momento con respecto al eje OL
n	Dirección normal
$\mathbf{N}$	Componente normal de la reacción
O	Origen de coordenadas
p	Frecuencia circular
$\mathbf{P}$	Fuerza; vector
$\dot{\mathbf{P}}$	Derivada temporal del vector $\mathbf{P}$ con respecto a un sistema de coordenadas de orientación fija
q	Carga eléctrica
$\mathbf{Q}$	Fuerza; vector
$\dot{\mathbf{Q}}$	Derivada temporal del vector $\mathbf{Q}$ con respecto a un sistema de orientación fija
$(\dot{\mathbf{Q}})_{Oxyz}$	Derivada temporal del vector $\mathbf{Q}$ con respecto al sistema $Oxyz$
$\mathbf{r}$	Vector de posición
$\mathbf{r}_{B/A}$	Vector de posición de B relativo a A
r	Radio; distancia; coordenada polar
$\mathbf{R}$	Fuerza resultante; vector resultante; reacción
R	Radio de la Tierra, resistencia
$\mathbf{s}$	Vector de posición
s	Longitud del arco
t	Tiempo; espesor; dirección tangencial
$\mathbf{T}$	Fuerza
T	Tensión; energía cinética
$\mathbf{u}$	Velocidad
u	Variable
U	Trabajo
$\mathbf{v}$, v	Velocidad
$\mathbf{v}$, v	Velocidad del centro de gravedad
$\mathbf{v}_{B/A}$	Velocidad de B relativa a un sistema de referencia en traslación con A
$\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$	Velocidad de P relativa a un sistema giratorio $\mathcal{F}$
$\mathbf{V}$	Producto vectorial
V	Volumen, energía potencial
w	Carga por unidad de longitud
$\mathbf{W}$, W	Peso; carga
x, y, z	Coordenadas rectangulares; distancias
$\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$	Derivadas de las coordenadas x, y, z respecto al tiempo

$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$	Coordenadas rectangulares del centro de gravedad, o centro de masa
$\boldsymbol{\alpha}, \alpha$	Aceleración angular
α, β, γ	Ángulos
γ	Peso específico
δ	Elongación
ε	Excentricidad de una sección cónica o de una órbita
$\boldsymbol{\lambda}$	Vector unitario a lo largo de una línea
η	Eficiencia
θ	Coordenada angular; ángulo de Euler; ángulo; coordenada polar
μ	Coeficiente de rozamiento
ρ	Densidad; radio de curvatura
τ	Periodo; periodo órbita
ϕ	Ángulo de rozamiento; ángulo de Euler; ángulo de fase; ángulo
φ	Diferencia de fase
ψ	Ángulo de Euler
$\boldsymbol{\omega}, \omega$	Velocidad angular
ω	Frecuencia circular de la vibración forzada
$\boldsymbol{\Omega}$	Velocidad angular de un sistema de referencia

CAPÍTULO ONCE

Cinemática de partículas

11.1. Introducción a la dinámica. Los capítulos del 1 al 10 se dedicaron a la *estática*, es decir, al análisis de los cuerpos en reposo. Comenzaremos ahora el estudio de la *dinámica*, que es la parte de la mecánica que se encarga del análisis de los cuerpos en movimiento.

Mientras el estudio de la estática se remonta al tiempo de los filósofos griegos, la primera contribución importante a la dinámica fue hecha por Galileo (1564-1642). Los experimentos de Galileo sobre cuerpos uniformemente acelerados condujeron a Newton (1642-1727) a formular sus leyes fundamentales del movimiento.

La dinámica se divide en dos partes: 1) *cinemática*, que es el estudio de la geometría del movimiento y se usa para relacionar el desplazamiento, la velocidad, la aceleración y el tiempo sin hacer referencia a la causa del movimiento, y 2) *cinética*, que es el estudio de la relación existente entre las fuerzas actuando sobre un cuerpo, su masa y su movimiento; la cinética se usa para predecir el movimiento causado por fuerzas conocidas o para determinar las fuerzas necesarias para producir un cierto movimiento.

En los capítulos del 11 al 14 se estudia la *dinámica de las partículas* y, en especial, el capítulo 11 se dedica al estudio de la *cinemática de las partículas*. El uso de la palabra *partículas* no implica que vayamos a limitar nuestro estudio al de pequeños corpúsculos, sólo quiere decir que en estos primeros capítulos estudiaremos el movimiento de los sólidos —posiblemente tan grandes como automóviles, cohetes o aviones— sin importarnos su tamaño. Analizando a los sólidos como partículas indicamos que sólo consideraremos su movimiento como un todo, despreciando cualquier rotación con respecto a su propio centro de gravedad. Sin embargo, existen casos en que tal rotación no es despreciable y los sólidos no pueden entonces considerarse como partículas. El análisis de tales movimientos se realizará en capítulos posteriores que se encargan de la *dinámica de los sólidos rígidos*.

En la primera parte del capítulo 11 analizaremos el movimiento

rectilíneo de una partícula, es decir, determinaremos para cada instante la posición, velocidad y aceleración de una partícula conforme ésta se mueve a lo largo de una línea recta. Después de haber estudiado el movimiento de una partícula por los métodos generales de análisis, consideraremos dos casos particulares importantes, que son el movimiento uniforme y el movimiento uniformemente acelerado de una partícula (secciones 11.4 y 11.5). Luego estudiaremos en la sección 11.6 el movimiento simultáneo de varias partículas, e introduciremos el concepto de movimiento relativo de una partícula con respecto a otra. La primera parte de este capítulo termina con un estudio de los métodos gráficos de análisis y sus aplicaciones a la solución de varios problemas relacionados con el movimiento rectilíneo de partículas (secciones 11.7 y 11.8).

En la segunda parte de este capítulo analizaremos el movimiento de una partícula cuando se mueve a lo largo de una trayectoria curva. Como la posición, la velocidad y la aceleración de una partícula se definirán como cantidades vectoriales, el concepto de la derivada de una función vectorial se introducirá en la sección 11.10 y se agregará a nuestras herramientas matemáticas. Consideraremos entonces unos ejemplos en donde el movimiento de una partícula se define por las componentes rectangulares de su velocidad y aceleración; en este punto, se analizará el movimiento de un proyectil (sección 11.11). En la sección 11.12 consideraremos el movimiento de una partícula en relación con un sistema de referencia en traslación. Finalmente analizaremos el movimiento curvilíneo de una partícula en términos de componentes distintas a las rectangulares. En la sección 11.13 introduciremos las componentes tangencial y normal de la velocidad y la aceleración de una partícula y, en la sección 11.14, las componentes radial y transversal de su velocidad y aceleración.

MOVIMIENTO RECTILÍNEO DE PARTÍCULAS

11.2. Posición, velocidad y aceleración. Se dice que una partícula que se mueve a lo largo de una línea recta tiene un *movimiento rectilíneo*. En cualquier instante t, la partícula ocupará una cierta posición sobre la línea recta. Para definir la posición P de la partícula, escogemos un origen fijo O sobre la línea recta y una dirección positiva a lo largo de la línea. Medimos la distancia x de O a P y la anotamos con un signo más o con uno de menos, dependiendo si P se alcanza desde O moviéndose a lo largo de la línea en la dirección positiva o negativa. La distancia x, con su signo apropiado, define completamente la posición de la partícula y se le llama *coordenada de posición* de la partícula considerada. Por ejemplo, la coordenada de posición correspondiente a P en la figura 11.1*a* es $x = +5$ m, mientras que la coordenada correspondiente a P' en la figura 11.1*b* es $x' = -2$ m.

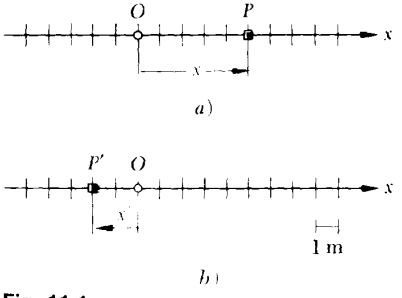


Fig. 11.1

Cuando se conoce la coordenada de posición x de una partícula en todo valor del tiempo t, decimos que se conoce el movimiento de la partícula. La trayectoria del movimiento puede expresarse en la forma de una ecuación en x y t, como $x = 6t^2 - t^3$, o en la forma de una gráfica de x en función de t como se muestra en la figura 11.6. Las unidades que se usan más generalmente para medir la coordenada de posición x son el metro (m) en el sistema de unidades SI,* y el

pie (ft) en el sistema inglés. El tiempo t se medirá generalmente en segundos (s).

Considérese la posición P ocupada por la partícula en el instante t y la correspondiente coordenada x (Fig. 11.2). Sea P' la posición ocupada por la partícula en un instante posterior $t + \Delta t$; la coordenada de posición de P' puede obtenerse agregando a la coordenada x de P el pequeño desplazamiento Δx, el cual será positivo o negativo dependiendo si P' está a la derecha o a la izquierda de P. La *velocidad media* de la partícula en el intervalo de tiempo Δt se define como el cociente del desplazamiento Δx y el intervalo de tiempo Δt

$$\text{Velocidad media} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

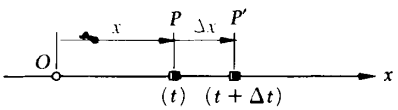


Fig. 11.2

Si se emplean unidades del SI, Δx se expresa en metros y Δt en segundos, de manera que la velocidad media estará expresada en metros por segundo (m/s). Si se trabaja con las unidades del sistema inglés, Δx se expresa en pies y Δt en segundos, así que la velocidad media estará dada en pies por segundo (ft/s).

La *velocidad instantánea* v de la partícula en el instante t se obtiene de la velocidad media, escogiendo intervalos de tiempo Δt y desplazamientos Δx cada vez más cortos

$$\text{Velocidad instantánea} = v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

La velocidad instantánea se expresará también en m/s o ft/s. Observando que el límite del cociente es igual, por definición, a la derivada de x con respecto a t, escribimos

$$v = \frac{dx}{dt} \tag{11.1}$$

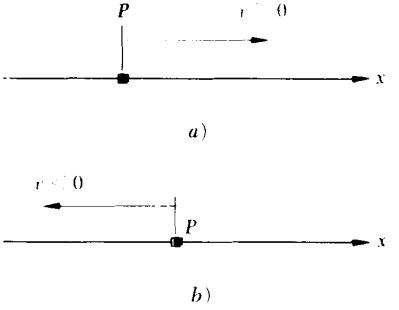


Fig. 11.3

La velocidad v se representa con un número algebraico que puede ser positivo o negativo. † Un valor positivo de v indica que x aumenta, es decir, que la partícula se mueve en la dirección positiva (Fig. 11.3*a*); un valor negativo de v indica que x disminuye, es decir, que la partícula se mueve en la dirección negativa (Fig. 11.3*b*).

Considérese la velocidad v de la partícula en el instante t y también su velocidad $v + \Delta v$ en un instante posterior $t + \Delta t$ (Fig. 11.4). La *aceleración media* de la partícula en el intervalo de tiempo Δt se define por el cociente de Δv y Δt

$$\text{Aceleración media} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

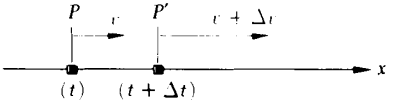


Fig. 11.4

• Compárese con la sección 1.3.

† Como veremos en la sección 11.9, la velocidad es realmente una cantidad vectorial. Sin embargo, como aquí estamos considerando el movimiento rectilíneo de una partícula donde la velocidad de ésta tiene una dirección conocida y fija, necesitamos especificar únicamente el sentido y el módulo de la velocidad; esto puede hacerse en forma conveniente usando una cantidad escalar con un signo + o −. La misma consideración se aplicará a la aceleración de una partícula en el movimiento rectilíneo.

Si se emplean unidades del SI, Δv estará expresada en m/s y Δt en segundos, así que la aceleración media estará en m/s^2. Si se emplean unidades del sistema inglés, Δv estará en ft/s y Δt en segundos; por tanto, la aceleración media se expresará en ft/s^2.

La *aceleración instantánea* a de la partícula en el instante t se obtiene de la aceleración media escogiendo valores de Δt y Δv cada vez más pequeños

$$\text{Aceleración instantánea} = a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

La aceleración instantánea también se expresará en m/s^2 o ft/s^2. El límite del cociente es, por definición, la derivada de v con respecto a t y mide la variación de la velocidad en el tiempo. Escribimos

$$a = \frac{dv}{dt} \tag{11.2}$$

o sea, sustituyendo v de (11.1),

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} \tag{11.3}$$

La aceleración a se representa por un número algebraico que puede ser positivo o negativo.† Un valor positivo de a indica que la velocidad (es decir, el número algebraico v) aumenta. Esto puede significar que la partícula se está moviendo más rápido en la dirección positiva (Fig. 11.5*a*) o que se está moviendo más despacio en la dirección negativa (Fig. 11.5*b*); en ambos casos Δv es positiva. Un valor negativo de a indica que la velocidad disminuye, ya sea que la partícula se esté moviendo más lentamente en la dirección positiva (Fig. 11.5*c*) o que se esté moviendo más rápido en la dirección negativa (Fig. 11.5*d*).

El término deceleración se emplea algunas veces para referirse a a cuando la velocidad de la partícula (es decir, la magnitud de v) disminuye; entonces la partícula se está moviendo más lentamente. Por ejemplo, la partícula de la figura 11.5 decelera en las partes b y c, mientras que en las partes a y d está realmente acelerada (es decir, se mueve más rápido).

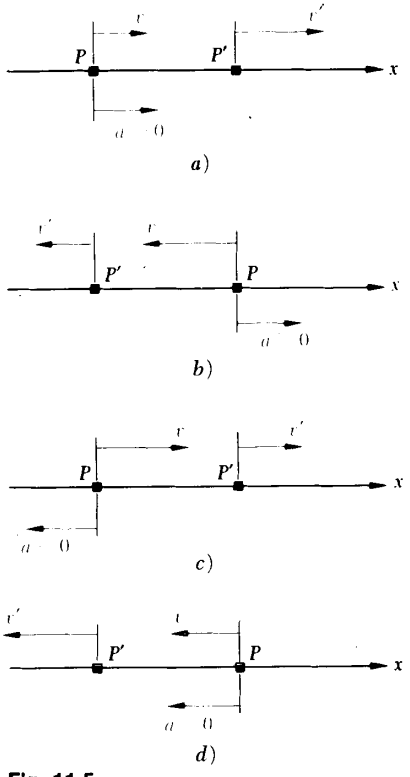


Fig. 11.5

Puede obtenerse otra expresión para la aceleración eliminando la diferencial dt en las ecuaciones (11.1) y (11.2). Despejando dt en (11.1) obtenemos $dt = dx/v$ y sustituyéndolo en (11.2), escribimos

$$a = v\frac{dv}{dx} \tag{11.4}$$

†Véase la nota al pie de la página 435.

Ejemplo. Considérese una partícula que se mueve en línea recta y supóngase que su posición está definida por la ecuación

$$x = 6t^2 - t^3$$

donde t se expresa en segundos y x en metros. La velocidad v a cualquier tiempo t se obtiene derivando x con respecto a t

$$v = \frac{dx}{dt} = 12t - 3t^2$$

La aceleración a se obtiene derivando otra vez con respecto a t

$$a = \frac{dv}{dt} = 12 - 6t$$

La coordenada de posición, la velocidad y la aceleración se han dibujado en función de t en la figura 11.6. Las curvas obtenidas se conocen como las *curvas del movimiento*. Debe tenerse presente, sin embargo, que la partícula no se mueve a lo largo de ninguna de estas curvas, sino en línea recta. Como la derivada de una función mide la pendiente de la curva correspondiente, la pendiente de la curva x-t a un cierto tiempo es igual al valor de v en ese tiempo y la pendiente de la curva v-t es igual al valor de a. Como $a = 0$ para $t = 2$ s, la pendiente de la curva de v-t debe ser cero en $t = 2$ s; la velocidad alcanza un máximo en ese instante. También, como $v = 0$ en $t = 0$ y en $t = 4$ s, la tangente a la curva x-t debe ser horizontal en esos dos valores de t.

Un estudio de las tres curvas de movimiento de la figura 11.6 muestra que el movimiento de la partícula desde $t = 0$ hasta $t = \infty$ puede dividirse en cuatro etapas:

1. La partícula parte del origen, $x = 0$, desde el reposo y con una aceleración positiva. Con esta aceleración la partícula adquiere una velocidad positiva y se mueve en la dirección positiva. Desde $t = 0$ hasta $t = 2$ s, x, v y a son todas positivas.

2. En $t = 2$ s, la aceleración es cero; la velocidad ha alcanzado su máximo valor. Desde $t = 2$ s hasta $t = 4$ s, v es positiva pero a es negativa; la partícula continúa moviéndose en la dirección positiva, pero cada vez más lentamente: la partícula está decelerando.

3. En $t = 4$ s, la velocidad es cero; la coordenada de posición x ha alcanzado su máximo valor. A partir de entonces tanto v como a son negativas; la partícula está acelerada y se mueve en la dirección negativa aumentando su velocidad.

4. En $t = 6$ s, la partícula pasa por el origen; su coordenada x es entonces cero mientras que la distancia total recorrida desde el comienzo del movimiento es de 64 m. Para valores de t mayores de 6 s, x, v y a serán todas negativas. La partícula continúa moviéndose en la dirección negativa, alejándose de O cada vez más rápido.

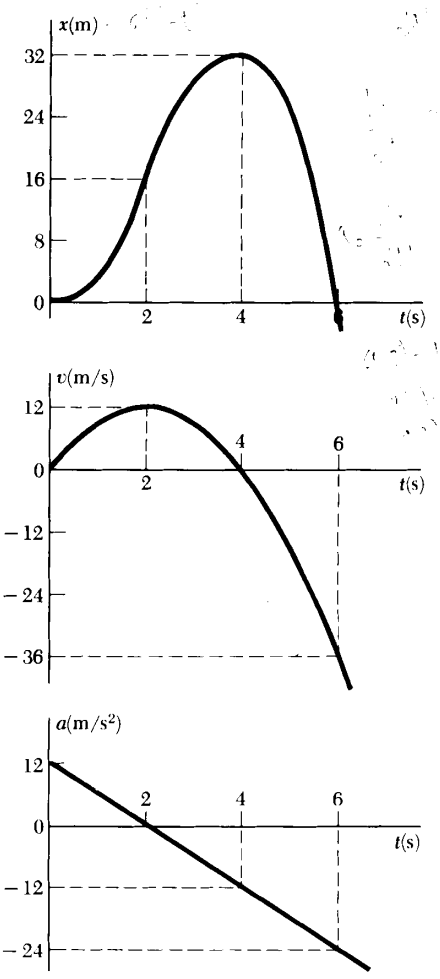


Fig. 11.6

11.3. Determinación del movimiento de una partícula. Vimos en la sección anterior que el movimiento de una partícula se conoce cuando se sabe su posición para cualquier valor del tiempo t, pero en la práctica muy raramente se define un movimiento por una relación entre x y t. Con mayor frecuencia las condiciones del movimiento se especificarán por el tipo de aceleración que posee la partícula. Por ejemplo, un cuerpo en caída libre tendrá una aceleración constan-

te dirigida hacia abajo e igual a 9.81m/s^2, o 32.2 ft/s^2; una masa unida a un resorte que ha sido estirado tendrá una aceleración proporcional a la elongación instantánea del resorte medida desde la posición de equilibrio, etc. En general, la aceleración de la partícula puede expresarse como una función de una o más de las variables x, v y t. Para determinar la coordenada de posición x en términos de t será necesario entonces realizar dos integraciones sucesivas.

Consideraremos tres clases comunes de movimiento

1. $a = f(t)$. *La aceleración es una función conocida de* t. Despejando dv de (11.2) y sustituyendo $f(t)$ en lugar de a, escribimos

$$dv = a\,dt$$
$$dv = f(t)\,dt$$

Integrando ambos miembros obtenemos la ecuación

$$\int dv = \int f(t)\,dt$$

que define a v en función de t. Debe notarse que se introducirá una constante arbitraria como resultado de la integración. Esto se debe al hecho de que hay muchos movimientos que corresponden a la aceleración dada $a = f(t)$. Para definir unívocamente al movimiento de la partícula es necesario especificar las *condiciones iniciales* del movimiento, es decir, el valor v_0 de la velocidad y el valor x_0 de la coordenada de posición en $t = 0$. Sustituyendo las integrales indefinidas por *integrales definidas* con límites inferiores correspondientes a las condiciones iniciales $t = 0$ y $v = v_0$ y los límites superiores correspondientes a $t = t$ y $v = v$, escribimos

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t f(t)\,dt$$

$$v - v_0 = \int_0^t f(t)\,dt$$

que nos da a v en función de t.

Despejamos ahora dx de (11.1):

$$dx = v\,dt$$

y sustituimos la expresión que acabamos de obtener para v. Entonces integramos ambos miembros: el izquierdo con respecto a x desde $x = x_0$ hasta $x = x$ y de la derecha con respecta a t desde $t = 0$ hasta $t = t$. La coordenada de posición x se obtiene así en función de t; el movimiento esta completamente determinado.

Se estudiarán dos casos particulares importantes con mayor detalle en las secciones 11.4 y 11.5: el primero cuando $a = 0$, correspondiente a un *movimiento uniforme* y el segundo cuando a = constante, que corresponde a un *movimiento uniformemente acelerado.*

2. $a = f(x)$. *La aceleración es una función conocida de x.* Reordenando la ecuación (11.4) y sustituyendo $f(x)$ por a, escribimos

$$v\,dv = a\,dx$$
$$v\,dv = f(x)\,dx$$

Como cada miembro contiene sólo una variable, podemos integrar la ecuación. Si de nuevo v_0 y x_0 representan los valores iniciales de la velocidad y de la coordenada de posición, respectivamente, obtenemos

$$\int_{v_0}^{v} v\,dv = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$$

$$\tfrac{1}{2}v^2 - \tfrac{1}{2}v_0^2 = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$$

que expresa a v en términos de x. Despejamos dt en (11.1):

$$dt = \frac{dx}{v}$$

y sustituimos la expresión que acabamos de obtener para v. Entonces podemos integrar ambos miembros y obtener la relación deseada entre x y t.

3. $a = f(v)$. *La aceleración es una función conocida de v.* En ese caso podemos sustituir $f(v)$ en lugar de a, ya sea en (11.2) o en (11.4), para obtener cualquiera de las relaciones siguientes:

$$f(v) = \frac{dv}{dt} \qquad f(v) = v\frac{dv}{dx}$$

$$dt = \frac{dv}{f(v)} \qquad dx = \frac{v\,dv}{f(v)}$$

La integración de la primera ecuación dará una relación entre v y t; la integración de la segunda ecuación nos proporcionará una relación entre v y x. Cualquiera de estas relaciones puede usarse con la ecuación (11.1) para obtener la relación entre x y t que caracteriza al movimiento de la partícula.

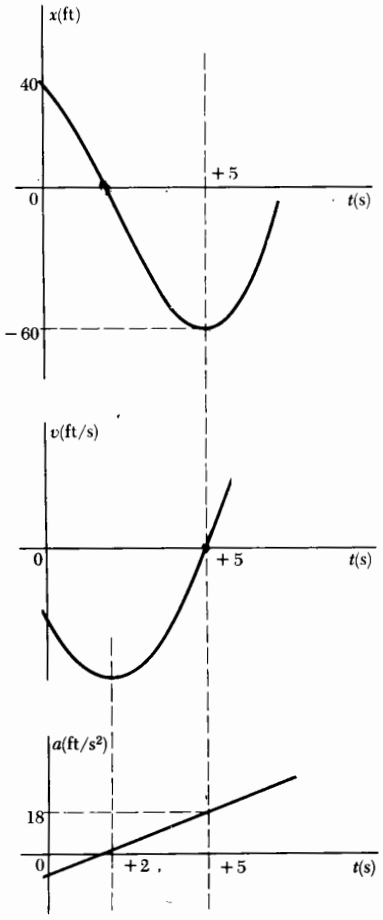
Problemas

11.1 El movimiento de una partícula está definido por la relación $x = t^4 - 12t^2 - 40$, donde x está expresada en metros y t en segundos. Determínense la posición, velocidad y aceleración cuando $t = 2$ s.

11.2 El movimiento de una partícula está definido por la relación $x = t^3 - 9t^2 + 24t^-6$, donde x está expresada en metros y t

PROBLEMA RESUELTO 11.1

La posición de una partícula que se mueve en línea recta está definida por la relación $x = t^3 - 6t^2 - 15t + 40$, en la que x está expresada en pies y t en segundos. Determínense: *a*) el tiempo para el cual la velocidad será cero, *b*) la posición y la distancia recorrida por la partícula en ese tiempo, *c*) la aceleración de la partícula en ese instante, y *d*) la distancia recorrida por la partícula desde $t = 4$ s hasta $t = 6$ s.



Solución. Las ecuaciones de movimiento son

$$x = t^3 - 6t^2 - 15t + 40 \tag{1}$$

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 12t - 15 \tag{2}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 6t - 12 \tag{3}$$

a) ***El tiempo en el cual*** $v = 0$. Hacemos $v = 0$ en (2):

$$3t^2 - 12t - 15 = 0 \qquad t = -1 \text{ s} \qquad \text{y} \qquad t = +5 \text{ s} \blacktriangleleft$$

Sólo la raíz $t = +5$ s corresponde a un tiempo posterior al inicio del movimiento: para $t < 5$ s, $v < 0$, la partícula se mueve en la dirección negativa; para $t > 5$ s, $v > 0$, la partícula se mueve en la dirección positiva.

b) ***La posición y la distancia recorrida cuando*** $v = 0$. Tomando $t = +5$ s en (1), tenemos

$$x_5 = (5)^3 - 6(5)^2 - 15(5) + 40 \qquad x_5 = -60 \text{ ft} \blacktriangleleft$$

La posición inicial en $t = 0$ era $x_0 = +40$ ft. Como $v \neq 0$ durante el intervalo $t = 0$ a $t = 5$ s, tenemos

$$\text{Distancia recorrida} = x_5 - x_0 = -60 \text{ ft} - 40 \text{ ft} = -100 \text{ ft}$$

Distancia recorrida = 100 ft en la dirección negativa ◄

c) ***La aceleración cuando*** $v = 0$. Con $t = +5$ s en (3):

$$a_5 = 6(5) - 12 \qquad a_5 = +18 \text{ ft/s}^2 \blacktriangleleft$$

d) ***La distancia recorrida desde*** $t = 4$ ***s hasta*** $t = 6$ ***s.*** Puesto que la partícula se mueve en la dirección negativa de $t = 4$ s a $t = 5$ s y en la dirección positiva de $t = 5$ s a $t = 6$ s, podemos calcular en forma separada la distancia recorrida durante cada uno de estos intervalos de tiempo.

De $t = 4$ s a $t = 5$ s: $x_5 = -60$ ft

$$x_4 = (4)^3 - 6(4)^2 - 15(4) + 40 = -52 \text{ ft}$$

$$\text{Distancia recorrida} = x_5 - x_4 = -60 \text{ ft} - (-52 \text{ ft}) = -8 \text{ ft}$$

= 8 ft en la dirección negativa

De $t = 5$ s a $t = 6$ s: $x_5 = -60$ ft

$$x_6 = (6)^3 - 6(6)^2 - 15(6) + 40 = -50 \text{ ft}$$

$$\text{Distancia recorrida} = x_6 - x_5 = -50 \text{ ft} - (-60 \text{ ft}) = +10 \text{ ft}$$

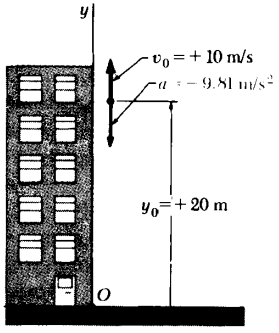
= 10 ft en la dirección positiva

La distancia total recorrida desde $t = 4$ s hasta $t = 6$ s es

$$8 \text{ ft} + 10 \text{ ft} = 18 \text{ ft} \blacktriangleleft$$

PROBLEMA RESUELTO 11.2

Una pelota se lanza con una velocidad de 10 m/s dirigida verticalmente hacia arriba desde una ventana localizada a 20 m del suelo. Sabiendo que la aceleración de la pelota es constante e igual a 9.81 m/s² hacia abajo, determínense: *a*) la velocidad v y la altura y de la pelota con respecto al suelo para cualquier tiempo t; *b*) la máxima altura alcanzada por la pelota y el valor correspondiente de t; *c*) el tiempo en el que la pelota golpeará el suelo y su velocidad correspondiente. Trácense las curvas v-t y y-t.



a) ***La velocidad y la altura.*** El eje y que mide la coordenada de posición (o altura) se escoge por su origen O sobre el suelo y su sentido positivo hacia arriba. El valor de la aceleración y los valores iniciales de v y y son los indicados. Sustituyendo el valor de a en $a = dv/dt$ y tomando en cuenta que en $t = 0$, $v_0 = +10$ m/s, tenemos

$$\frac{dv}{dt} = a = -9.81 \text{ m/s}^2$$

$$\int_{v_0=10}^{v} dv = -\int_0^t 9.81\, dt$$

$$[v]_{10}^{v} = -[9.81t]_0^t$$

$$v - 10 = -9.81t$$

$$v = 10 - 9.81t \qquad \blacktriangleleft$$

Sustituyendo este valor de v en la expresión $v = dy/dt$ con la condición de que en $t = 0$, $y_0 = 20$ m, encontramos

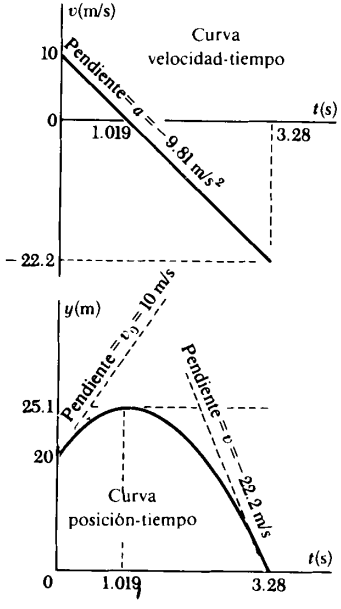
$$\frac{dy}{dt} = v = 10 - 9.81t$$

$$\int_{y_0=20}^{y} dy = \int_0^t (10 - 9.81t)\, dt$$

$$[y]_{20}^{y} = [10t - 4.905t^2]_0^t$$

$$y - 20 = 10t - 4.905t^2$$

$$y = 20 + 10t - 4.905t^2 \qquad \blacktriangleleft$$



b) ***Máxima altura.*** Cuando la pelota alcanza su máxima altura tenemos $v = 0$. Sustituyéndola en (1), obtenemos

$$10 - 9.81t = 0 \qquad t = 1.019 \text{ s} \qquad \blacktriangleleft$$

Usando este valor de $t = 1.019$ s en (2) tenemos

$$y = 20 + 10(1.019) - 4.905(1.019)^2 \qquad y = 25.1 \text{ m} \qquad \blacktriangleleft$$

c) ***La bola golpea en el piso.*** Cuando la bola pega en el suelo, tenemos $y = 0$. Sustituyendo en (2) obtenemos

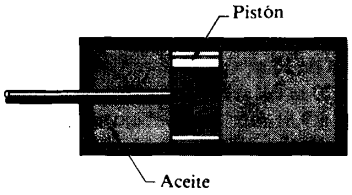
$$20 + 10t - 4.905t^2 = 0 \qquad t = -1.243 \text{ s} \qquad t = +3.28 \text{ s} \qquad \blacktriangleleft$$

Sólo la raiz $t = +3.28$ s corresponde a un tiempo después de que el movimiento se inició, y sustituyendo este valor de t en (1), tenemos

$$v = 10 - 9.81(3.28) = -22.2 \text{ m/s} \qquad v = 22.2 \text{ m/s} \downarrow \qquad \blacktriangleleft$$

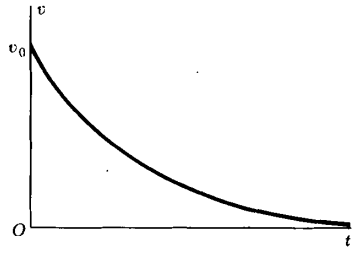
2693110

PROBLEMA RESUELTO 11.3



El mecanismo de freno usado para reducir el retroceso en algunos cañones consiste esencialmente en un émbolo que se fija al cañón y que puede moverse en un cilindro fijo lleno de aceite. Como el cañón retrocede con una velocidad inicial v_0, el pistón se mueve y el aceite es forzado a través de los orificios en el émbolo de tal modo que éste y el cañón se desaceleren en proporción a su velocidad, es decir, $a = -kv$. Exprésense: *a*) v en términos de t; *b*) x en términos de t; *c*) v en términos de x. Dibújense las curvas de movimiento correspondientes.

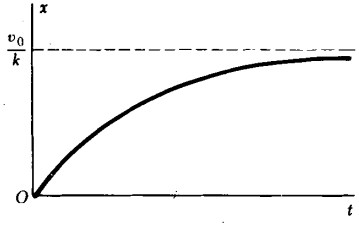
a) v ***en términos de*** t. Sustituyendo $-kv$ por a en la fórmula fundamental que define a la aceleración, $a = dv/dt$, escribimos



$$-kv = \frac{dv}{dt} \qquad \frac{dv}{v} = -k\,dt \qquad \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = -k\int_0^t dt$$

$$\ln\frac{v}{v_0} = -kt \qquad v = v_0e^{-kt} \blacktriangleleft$$

b) x ***en términos de*** t. Sustituyendo la expresión que acabamos de obtener para v en $v = dx/dt$ tenemos



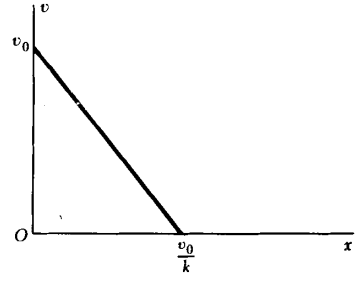
$$v_0e^{-kt} = \frac{dx}{dt}$$

$$\int_0^x dx = v_0\int_0^t e^{-kt}\,dt$$

$$x = -\frac{v_0}{k}[e^{-kt}]_0^t = -\frac{v_0}{k}(e^{-kt} - 1)$$

$$x = \frac{v_0}{k}(1 - e^{-kt}) \blacktriangleleft$$

c) v ***en términos de*** x. Sustituyendo $-kv$ para a en $a = v\,dv/dx$ podemos escribir



$$-kv = \boxed{v\frac{dv}{dx}}$$

$$dv = -k\,dx$$

$$\int_{v_0}^{v} dv = -k\int_0^x dx$$

$$v - v_0 = -kx \qquad v = v_0 - kx \blacktriangleleft$$

Comprobación. La parte *c* pudo haberse resuelto eliminando t de las respuestas obtenidas en las partes *a* y *b*. Este método puede usarse entonces como una comprobación. De la parte *a* obtenemos $e^{-kt} = v/v_0$; que al sustituirla en la respuesta de la parte *b*, nos da

$$x = \frac{v_0}{k}(1 - e^{-kt}) = \frac{v_0}{k}\left(1 - \frac{v}{v_0}\right) \qquad v = v_0 - kx \quad \text{(comprobaciones)}$$

en segundos. Determínense la posición, velocidad y aceleración cuando $t = 5$ s.

11.3 La relación que define el movimiento de una partícula es $x = 2t^3 - 8t^2 + 5t + 15$ con x expresada en pulgadas y t en segundos. Determínense la posición, velocidad y aceleración en $t = 3$ s.

11.4 El movimiento de una partícula está definido por la relación $x = 2t^3 - 6t^2 + 10$, donde x está expresada en pies y t en segundos. Determínense el tiempo, la posición y la aceleración cuando $v = 0$.

11.5 El movimiento de una partícula se define por la relación $x = t^3 - 12t^2 + 36t + 30$ con x expresada en metros y t en segundos. Calcúlense el tiempo, la posición y la aceleración cuando $v = 0$.

11.6 El movimiento de una partícula está definido por la relación $x = t^3 - 6t^2 + 9t + 5$, con x expresada en metros y t en segundos. Determínense: *a*) t para velocidad cero y *b*) la posición, aceleración y la distancia total recorrida cuando $t = 5$ s.

11.7 El movimiento de una partícula está definido por la relación $x = 2t^3 - 15t^2 + 24t + 4$, con x expresada en metros y t en segundos. Determínense *a*) t para que la velocidad sea cero y *b*) la posición y la distancia total recorrida cuando la aceleración es cero.

11.8 La aceleración de una partícula está definida por la relación $a = -4$ pies/ s^2. Sabiendo que $v = +24$ ft/s y $x = 0$ cuando $t = 0$, determínense la velocidad, la posición y la distancia total recorrida cuando $t = 8$ s.

11.9 La aceleración de una partícula es directamente proporcional al tiempo t. Para $t = 0$, la velocidad de la partícula es $v = -12$ m/s. Sabiendo que $v = 0$ y $x = 15$ m para $t = 4$ s, escríbanse las ecuaciones del movimiento de la partícula.

11.10 La relación que define a la aceleración de una partícula es $a = 9 - 3t^2$. Las condiciones iniciales de la partícula son: $t = 0$, con $v = 0$ y $x = 5$ m. Determínense *a*) el tiempo para el cual la velocidad es otra vez cero, *b*) la posición y la velocidad cuando $t = 4$ s y *c*) la distancia total recorrida por la partícula desde $t = 0$ hasta $t = 4$ s.

11.11 La aceleración de una partícula se define por la relación $a = kt^2$. *a*) Sabiendo que $v = -32$ ft/s cuando $t = 0$ y que $v = +32$ ft/s cuando $t = 4$s, determínese el valor de la constante k. *b*) Escríbanse las ecuaciones de movimiento sabiendo también que $x = 0$ cuando $t = 4$ s.

11.12 La aceleración de una partícula se define por la relación $a = -kx^{-2}$. La partícula está inicialmente en $x = 800$ mm sin velocidad inicial y se observa que su velocidad es 6 m/s cuando $x = 500$ mm. Determínense *a*) el valor de k y *b*) la velocidad de la partícula cuando $x = 250$ mm.

11.13 La aceleración de una partícula está definida por la relación $a = -k/x$. Se ha encontrado experimentalmente que $v = 5$ m/s cuando $x = 200$ mm y que $v = 3$ m/s cuando $x = 400$ mm. Determínese *a*) la velocidad de la partícula cuando $x = 500$ mm, *b*) la posición de la partícula cuando su velocidad es cero.

11.14 La aceleración de una partícula en oscilación se define por la relación $a = -kx$. Encuéntrense *a*) el valor de k de tal modo que $v = 15$ in/s cuando $x = 0$ y $x = 3$ in cuando $v = 0$ y *b*) la velocidad de la partícula cuando $x = 2$ in.

11.15 La relación que define la aceleración de una partícula es $a = 25 - 3x^2$, donde a se expresa en in/s^2 y x en pulgadas. La partícula parte de la posición $x = 0$ desde el reposo. Determínense *a*) la velocidad cuando $x = 2$ in, *b*) la posición donde la velocidad es nuevamente cero y *c*) la posición donde la velocidad es máxima.

11.16 La aceleración de una partícula está definida por la relación $a = -4x(1 + kx^2)$, donde a está expresada en m/s^2 y x en metros. Sabiendo que $v = 17$ m/s cuando $x = 0$, determínese la velocidad cuando $x = 4$ m, para *a*) $k = 0$ y *b*) $k = 0.015$, *c*) $k = -0.015$.

11.17 La aceleración de una partícula está definida por la relación $a = -60x^{-1.5}$, donde a se expresa en m/s^2 y x en metros. Sabiendo que la partícula está inicialmente en reposo en $x = 4$ m, determínese la velocidad de la partícula cuando *a*) $x = 2$ m, *b*) $x = 1$ m y *c*) $x = 100$ mm.

11.18 La relación que define la aceleración de una partícula es $a = -0.4v$ donde a está expresada en in/s^2 y v en in/s. Sabiendo que para $t = 0$ la velocidad es 30 in/s, determínense *a*) la distancia que la partícula viajará antes de detenerse y *b*) el tiempo necesario para que la partícula se pare, *c*) el tiempo requerido para que la velocidad de la partícula se reduzca al 1 % de su valor inicial.

11.19 La aceleración de una partícula está definida por la relación $a = -kv^2$, donde a se expresa en ft/s^2 y v en ft/s. La partícula parte de $x = 0$ con una velocidad de 25 ft/s y cuando $x = 40$ ft se encuentra que la velocidad es 20 ft/s. Determínese la distancia que la partícula viajará: *a*) antes de que su velocidad disminuya a 10 ft/s y *b*) antes de pararse.

11.20 Resuélvase el problema 11.19 suponiendo que la aceleración de la partícula está definida por la relación $a = -kv^3$.

11.21 La aceleración de una partícula que cae a través de la atmósfera está definida por la relación $a = g(1 - k^2v^2)$. Sabiendo que la partícula parte del reposo en $t = 0$, *a*) muéstrese que la velocidad en el tiempo t es $v = (1/k)\tanh(kgt)$, *b*) escríbase una ecuación que defina la velocidad de la partícula para cualquier valor de la distancia x que haya caído. *c*) ¿Por qué? $v_t = 1/k$ se llama velocidad terminal?

11.22 La aceleración de una partícula se define por medio de la relación $a = -0.02v^{1.75}$, donde a está expresada en m/s^2 y v en m/s. Sabiendo que la velocidad inicial de la partícula es 15 m/s en $x = 0$, determínense *a*) la posición donde la velocidad es 14 m/s y *b*) la velocidad de la partícula cuando $x = 100$ m.

11.23 La aceleración de una partícula está definida por la relación $a = kv^{1.5}$. La partícula parte de $t = 0$ en $x = 0$ con una velocidad inicial v_0. *a*) Demuéstrese que la velocidad y la coordenada de posición a cualquier tiempo t están relacionadas por la ecuación $(x/t) = \sqrt{v_0 v}$. *b*) Sabiendo que para $v_0 = 25$ m/s la partícula se para des-

pués de haber recorrido 50 m, determínese la velocidad de la partícula y el tiempo cuando $x = 30$ m.

11.24 La velocidad de una partícula está definida por la relación $v = 8 - 0.02x$, donde v se expresa en m/s y x en metros. Si $x = 0$ para $t = 0$, determínense *a*) la distancia recorrida antes de que la partícula se pare, *b*) la aceleración en $t = 0$ y *c*) el tiempo cuando $x = 100$ m.

11.25 Un proyectil entra a un medio resistente en $x = 0$ con una velocidad inicial $v_0 = 1200$ ft/s y viaja 4 in antes de pararse. Suponiendo que la velocidad del proyectil está definida por la relación $v = v_0 - kx$, donde v se expresa en ft/s y x en pies, determínense: *a*) la aceleración inicial del proyectil y *b*) el tiempo que tardó el proyectil en penetrar 3.75 in en el medio resistivo.

11.26 La aceleración de la gravedad a una altura y sobre la superficie de la tierra puede expresarse como

$$a = \frac{-9.81}{\left(1 + \dfrac{y}{6.37 \times 10^6}\right)^2}$$

donde a se mide en m/s^2 y y en metros. Usando esta expresión calcúlese la altura alcanzada por una bala disparada verticalmente hacia arriba sobre la superficie de la Tierra con las siguientes velocidades iniciales; *a*) 200 m/s, *b*) 2000 m/s y *c*) 11.18 km/s.

11.27 La aceleración de una partícula que está cayendo hacia la Tierra, debida a la gravedad, es $a = -gR^2/r^2$, donde r es la distancia desde el centro de la Tierra a la partícula, R es el radio de la Tierra y g es la aceleración de la gravedad en la superficie de la tierra. Obténgase una expresión para la velocidad de escape, es decir, para la velocidad mínima con la cual debe lanzarse una partícula verticalmente hacia arriba desde la superficie de la Tierra para que no regrese a ésta. (*Sugerencia.* $v = 0$ para $r = \infty$.)

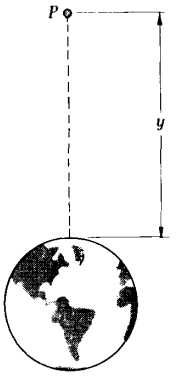


Fig. P11.26

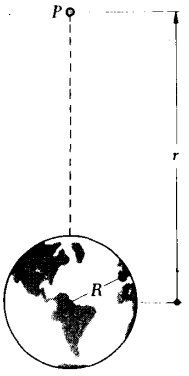


Fig. P11.27

11.28 La aceleración de una partícula es $a = k\ sen\ (\pi t/T)$. Si tanto la velocidad como la coordenada de posición de la partícula son cero cuando $t = 0$, determínense: *a*) las ecuaciones de movimiento, *b*) la máxima velocidad, *c*) la posición para $t = 2T$ y *d*) la velocidad media en el intervalo de $t = 0$ a $t = 2T$.

11.29 La aceleración de un collarín que se mueve en una línea recta está definida por la relación $a = 50\ sen\ \frac{1}{2}\pi t$, donde a está expresada en mm/s^2 y t en segundos. Sabiendo que $x = 0$ y $v = 0$ cuando $t = 0$, determínense *a*) la velocidad máxima del collarín, *b*) su posición en $t = 4$ s y *c*) su velocidad media en el intervalo $0 < t < 4$ s.

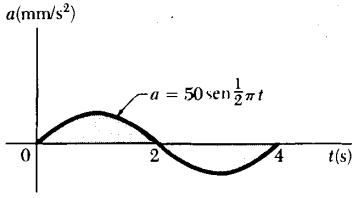


Fig. P11.29

11.4. Movimiento rectilíneo uniforme. El movimiento rectilíneo uniforme es un tipo de movimiento en línea recta que se encuentra con frecuencia en aplicaciones prácticas. En este movimiento la aceleración a de la partícula es cero para cualquier valor de t. Por consiguiente, la velocidad v es constante y la ecuación (11.1) se transforma en

$$\frac{dx}{dt} = v = \text{constante}$$

La coordenada de posición x se obtiene integrando esta ecuación. Sea x_0 al valor inicial de x, escribimos

$$\int_{x_0}^{x} dx = v \int_0^t dt$$
$$x - x_0 = vt$$
$$\boldsymbol{x = x_0 + vt} \tag{11.5}$$

Esta ecuación puede aplicarse *sólo si se sabe que la velocidad de la partícula es constante.*

11.5. Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado. El movimiento rectilíneo uniformemente acelerado es otro tipo común de movimiento. En este movimiento la aceleración a de la partícula es constante y la ecuación (11.2) se transforma en

$$\frac{dv}{dt} = a = \text{constante}$$

La velocidad v de la partícula se obtiene integrando esta ecuación:

$$\int_{v_0}^{v} dv = a \int_0^t dt$$
$$v - v_0 = at$$
$$\boldsymbol{v = v_0 + at} \tag{11.6}$$

donde v_0 es la velocidad inicial. Sustituyendo este valor de v en (11.1), escribimos

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + at$$

Sea x_0 el valor inicial de x e integrando, tenemos

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t (v_0 + at)\, dt$$
$$x - x_0 = v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2$$
$$\boldsymbol{x = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2} \tag{11.7}$$

También podemos usar la ecuación (11.4) y escribir

$$v \frac{dv}{dx} = a = \text{constante}$$
$$v\, dv = a\, dx$$

Integrando ambos miembros encontramos que

$$\int_{v_0}^{v} v\, dv = a \int_{x_0}^{x} dx$$
$$\tfrac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = a(x - x_0)$$
$$\boldsymbol{v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)} \tag{11.8}$$

Las tres ecuaciones que hemos obtenido nos proporcionan relaciones útiles entre la coordenada de posición, la velocidad y el tiempo en el caso de un movimiento uniformemente acelerado, al sustituir los valores adecuados de a, v_0, y x_0. El origen O del eje x debe definirse primero y escogerse una dirección positiva a lo largo del eje; esta dirección se usará para determinar los signos de a, v_0 y x_0. La ecuación (11.6) relaciona a v y a t y debe usarse cuando se desea el valor de v correspondiente a un valor dado de t, o inversamente. La ecuación (11.7) relaciona a x y a t; la ecuación (11.8) relaciona a v y a x. Una aplicación importante del movimiento uniformemente acelerado es el movimiento de un *sólido en caída libre*. La aceleración de un sólido en caída libre (usualmente representada por g) es igual a 9.81 m/s² o 32.2 ft/s².

Es importante recordar que las tres ecuaciones anteriores pueden usarse *sólo cuando se sabe que la aceleración de la partícula es constante*. Si la aceleración de la partícula es variable, su movimiento debe determinarse de las ecuaciones fundamentales, de la (11.1) a la (11.4), de acuerdo con los métodos descritos en la sección 11.3.

11.6. Movimiento de varias partículas. Cuando varias partículas se mueven independientemente a lo largo de la misma línea, pueden escribirse ecuaciones de movimiento independiente para cada partícula. Siempre que sea posible, el tiempo debe registrarse desde el mismo instante inicial para todas las partículas y los desplazamientos deben medirse desde el mismo origen y en la misma dirección. En otras palabras, debe usarse un mismo reloj y una misma cinta de medir.

Movimiento relativo de dos partículas. Imaginemos dos partículas, A y B, moviéndose a lo largo de la misma línea recta (Fig. 11.7). Si las coordenadas de posición x_A y x_B se miden desde el mismo origen, la diferencia $x_B - x_A$ define a la *coordenada de posición relativa de B respecto de A* y se representa por $x_{B/A}$. Escribimos

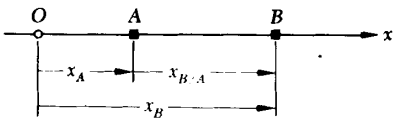


Fig. 11.7

$$x_{B/A} = x_B - x_A \qquad \text{o} \qquad x_B = x_A + x_{B/A} \tag{11.9}$$

Un signo positivo para $x_{B/A}$ significa que B está a la derecha de A; un signo negativo quiere decir que B está a la izquierda de A, independientemente de la posición de A y de B respecto del origen.

La derivada temporal de $x_{B/A}$ es la *velocidad relativa de B respecto de A* y se representa por $v_{B/A}$. Al derivar la ecuación (11.9) podemos escribir

$$v_{B/A} = v_B - v_A \qquad \text{o} \qquad v_B = v_A + v_{B/A} \tag{11.10}$$

Un signo positivo para $v_{B/A}$ significa que *desde A se observa que B* se mueve en dirección positiva; un signo negativo significa que se le ve moverse en la dirección negativa.

La derivada temporal de $v_{B/A}$ se conoce como la *aceleración re-*

lativa de B respecto de A y se representa por $a_{B/A}$. Derivando (11.1 obtenemos †

$$a_{B/A} = a_B - a_A \qquad \text{o} \qquad a_B = a_A + a_{B/A} \qquad (11.1$$

Movimientos interdependientes. En algunos casos la pc sición de una partícula dependerá de la posición de otra o de otra varias partículas. Se dice entonces que los movimientos son interde pendientes. Por ejemplo, la posición del bloque B en la figura 11. depende de la posición del bloque A. Como la cuerda $ACDEFG$ e de longitud constante y puesto que las longitudes de las porcione CD y EF de la cuerda, que pasan sobre las poleas, permanecen cons tantes, la suma de las longitudes de los segmentos AC, DE y FG e constante. Observando que la longitud del segmento AC difiere d x_A sólo por una constante y que, en forma semejante, las longitude de los segmentos DE y FG difieren de x_B sólo por una constante escribimos

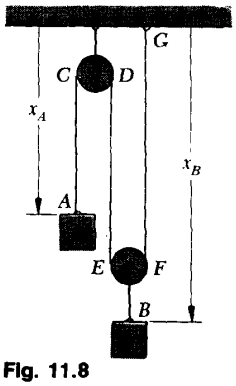


Fig. 11.8

$$x_A + 2x_B = \text{constante}$$

Puesto que sólo una de las dos coordenadas x_A y x_B puede escogers arbitrariamente, decimos que el sistema mostrado en la figura 11.8 tiene *un grado de libertad*. De la relación entre las coordenadas de posición x_A y x_B se sigue que, si a x_A se le da un incremento Δx_A, es decir, si el bloque A se baja por una cantidad Δx_A, la coordenada x_B recibirá un incremento $\Delta x_B = -\frac{1}{2}\Delta x_A$; es decir, el bloque B se elevará la mitad de la misma cantidad; lo cual puede comprobarse fácilmente de la figura 11.8.

En el caso de los tres bloques de la figura 11.9 podemos observar otra vez que la longitud de la cuerda que pasa sobre las poleas es constante, de modo que debe satisfacerse la siguiente relación para las coordenadas de posición de los tres bloques:

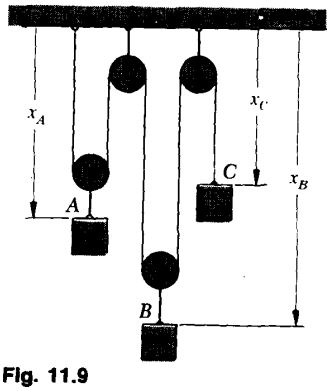


Fig. 11.9

$$2x_A + 2x_B + x_C = \text{constante}$$

Como dos de las coordenadas pueden escogerse arbitrariamente, decimos que el sistema mostrado en la figura 11.9 tiene *dos grados de libertad*.

Cuando la relación existente entre las coordenadas de posición de varias partículas es *lineal*, se cumple una relación semejante entre las velocidades y entre las aceleraciones de las partículas. En el caso de los bloques de la figura 11.9, por ejemplo, se deriva dos veces la ecuación obtenida y escribimos

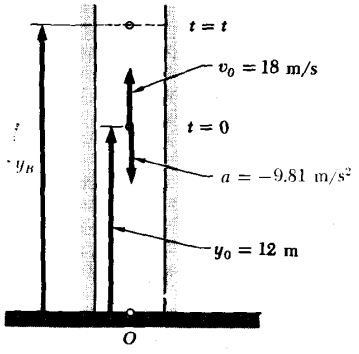
$$2\frac{dx_A}{dt} + 2\frac{dx_B}{dt} + \frac{dx_C}{dt} = 0 \qquad \text{o} \qquad 2v_A + 2v_B + v_C = 0$$

$$2\frac{dv_A}{dt} + 2\frac{dv_B}{dt} + \frac{dv_C}{dt} = 0 \qquad \text{o} \qquad 2a_A + 2a_B + a_C = 0$$

† Nótese que el producto de los subíndices A y B/A empleados en el miembro derecho de las ecuaciones (11.9), (11.10) y (11.11) es igual al subíndice B usado en su miembro izquierdo.

PROBLEMA RESUELTO 11.4

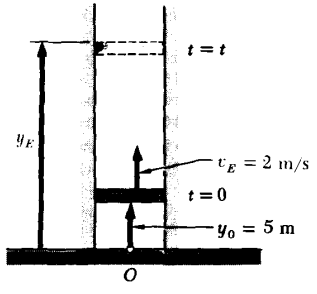
Se lanza una pelota verticalmente hacia arriba desde un nivel de 12 m en el pozo de un ascensor, con una velocidad inicial de 18 m/s. En el mismo instante un ascensor de plataforma abierta pasa el nivel de 5 m, moviéndose hacia arriba con una velocidad constante de 2 m/s. Determínense: *a*) cuándo y dónde golpeará la pelota al ascensor, *b*) la velocidad relativa de la pelota respecto al ascensor cuando la pelota lo golpea.



Movimiento de la pelota. Como la pelota tiene una aceleración constante, su movimiento es *uniformemente acelerado*. Colocando el origen *O* del eje *y* al nivel del piso y escogiendo su dirección positiva hacia arriba, encontramos que la posición inicial es $y_0 = +12$ m, la velocidad inicial es $v_0 = +18$ m/s, y la aceleración es $a = -9.81$ m/s². Sustituyendo estos valores en las ecuaciones para el movimiento uniformemente acelerado escribimos

$$v_B = v_0 + at \qquad v_B = 18 - 9.81t \tag{1}$$

$$y_B = y_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2 \qquad y_B = 12 + 18t - 4.905t^2 \tag{2}$$



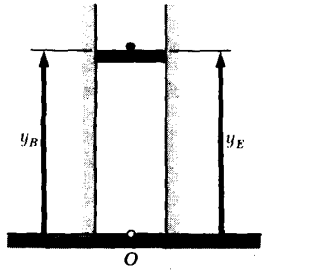
Movimiento del ascensor. Como el ascensor tiene una velocidad constante, su movimiento es *uniforme*. Una vez más escogemos el origen *O* en el nivel del piso y consideramos la dirección positiva hacia arriba; entonces $y_0 = +5$ m y escribimos

$$v_E = +2 \text{ m/s} \tag{3}$$

$$y_E = y_0 + v_E t \qquad y_E = 5 + 2t \tag{4}$$

La bola pega en el ascensor. Notamos primero que usamos el mismo tiempo *t* y el mismo origen *O* para escribir las ecuaciones de movimiento de la pelota y del ascensor. De la figura vemos que cuando la pelota pega en el ascensor,

$$y_E = y_B \tag{5}$$



Sustituyendo los valores de y_E y y_B de (2) y (4) en (5), tenemos

$$5 + 2t = 12 + 18t - 4.905t^2$$

$$t = -0.39 \text{ s} \qquad \text{y} \qquad t = 3.65 \text{ s}$$ ◄

Únicamente la raíz $t = 3.65$ s corresponde a un tiempo posterior a la iniciación del movimiento. Sustituyendo este valor en (4) obtenemos

$$y_E = 5 + 2(3.65) = 12.30 \text{ m}$$

Elevación desde el suelo $= 12.30$ m ◄

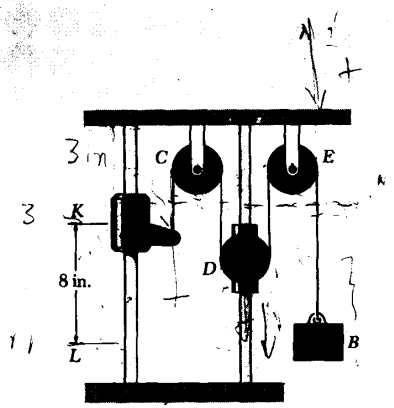
La velocidad relativa de la pelota respecto del ascensor es

$$v_{B/E} = v_B - v_E = (18 - 9.81t) - 2 = 16 - 9.81t$$

Cuando la pelota pega en el ascensor al tiempo $t = 3.65$ s, tenemos

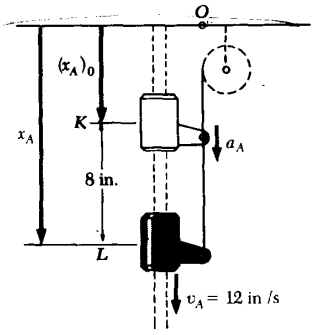
$$v_{B/E} = 16 - 9.81(3.65) \qquad v_{B/E} = -19.81 \text{ m/s}$$ ◄

El signo negativo nos indica que se observa desde el ascensor a la pelota, que se mueve en sentido negativo (hacia abajo).



PROBLEMA RESUELTO 11.5

El collar A y el bloque B están unidos con un cable que pasa sobre las tres poleas C, D y E, como se indica. Las poleas C y E están fijas mientras que la polea D está unida a un collar del que se tira hacia abajo con velocidad constante de 3 in/s. En $t = 0$, el collar A empieza a moverse hacia abajo desde la posición K con una aceleración constante y sin velocidad inicial. Sabiendo que la velocidad del collar A es de 12 in/s cuando pasa por el punto L, determínense el cambio en elevación, velocidad y aceleración del bloque B cuando el collar A pasa por L.



Movimiento del collar A. Colocamos el origen O en la superficie horizontal superior y escogemos la dirección positiva hacia abajo. Observamos que cuando $t = 0$, el collar A está en la posición K y $(v_A)_0 = 0$. Como $v_A = 12$ in/s y $x_A - (x_A)_0 = 8$ in cuando el collar pasa por L, escribimos

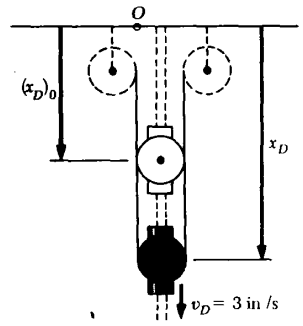
$$v_A^2 = (v_A)_0^2 + 2a_A[x_A - (x_A)_0] \qquad (12)^2 = 0 + 2a_A(8)$$
$$a_A = 9 \text{ in/s}$$

El tiempo en el que el collar A llega al punto L, se obtiene al escribir

$$v_A = (v_A)_0 + a_A t \qquad 12 = 0 + 9t \qquad t = 1.333 \text{ s}$$

Movimiento de la polea D. Tomando en cuenta que la dirección positiva es hacia abajo, escribimos

$$a_D = 0 \qquad v_D = 3 \text{ in./s} \qquad x_D = (x_D)_0 + v_D t = (x_D)_0 + 3t$$



Cuando el collar A está en L, en $t = 1.333$ s, tenemos

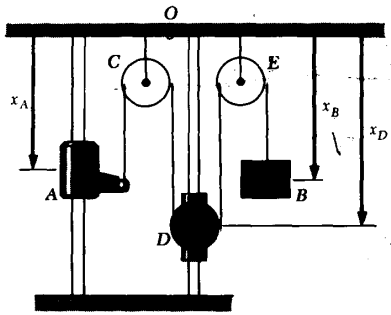
$$x_D = (x_D)_0 + 3(1.333) = (x_D)_0 + 4$$

Por tanto

$$x_D - (x_D)_0 = 4 \text{ in.}$$

Movimiento del bloque B. Notamos que la longitud total del cable $ACDEB$ difiere de la cantidad $(x_A + 2x_D + x_B)$ sólo por una constante. Como la longitud del cable es constante durante el movimiento, esta cantidad debe permanecer constante también. En consecuencia, considerando los tiempos $t = 0$ y $t = 1.333$ s, escribimos

$$x_A + 2x_D + x_B = (x_A)_0 + 2(x_D)_0 + (x_B)_0 \qquad (1)$$
$$[x_A - (x_A)_0] + 2[x_D - (x_D)_0] + [x_B - (x_B)_0] = 0 \qquad (2)$$



Pero como sabemos que $x_A - (x_A)_0 = 8$ in y que $x_D - (x_D)_0 = 4$ in, sustituyendo estos valores en (2), encontramos

$$8 + 2(4) + [x_B - (x_B)_0] = 0 \qquad x_B - (x_B)_0 = -16 \text{ in.}$$

De esta manera: Cambio en la elevación de $B = 16$ in ↑ ◄

Derivando (1) dos veces, obtenemos las ecuaciones que relacionan a las velocidades y a las aceleraciones de A, B y D. Sustituyendo los valores de las velocidades y las aceleraciones de A y D cuando $t = 1.333$ s, obtenemos

$$v_A + 2v_D + v_B = 0: \qquad 12 + 2(3) + v_B = 0$$
$$v_B = -18 \text{ in./s} \qquad v_B = 18 \text{ in /s} \uparrow \blacktriangleleft$$

$$a_A + 2a_D + a_B = 0: \qquad 9 + 2(0) + a_B = 0$$
$$a_B = -9 \text{ in./s}^2 \qquad a_B = 9 \text{ in /s}^2 \uparrow \blacktriangleleft$$

Problemas

11.30 Se lanza una piedra verticalmente hacia arriba desde un punto sobre un puente situado 40 m sobre el agua. Si la piedra golpea 4 s después de soltarse, determínense *a*) la velocidad con la cual se lanzó hacia arriba y *b*) la velocidad con que golpeó el agua.

11.31 Una automovilista viaja a 54 km/h cuando observa que un semáforo a 240 m adelante de ella cambia a rojo. El semáforo está programado para permanecer con la luz roja 24 s. Si la automovilista desea pasar por el semáforo sin pararse, justamente cuando se cambia a verde otra vez, determínense *a*) la deceleración uniforme que debe aplicarle al vehículo y *b*) la velocidad del automóvil al pasar el semáforo.

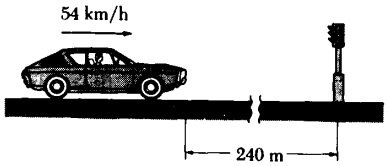


Fig. P11.31

11.32 Un automóvil recorre 1200 ft en 30s con aceleración constante de 1.8 ft/s^2. Determíñense *a*) su velocidad inicial, *b*) su velocidad final y *c*) la distancia recorrida durante los primeros 10s.

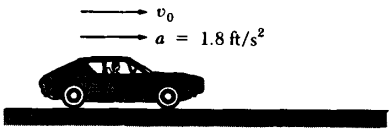


Fig. P11.32

11.33 Una piedra se deja caer desde un ascensor que se mueve hacia arriba con una velocidad de 15 ft/s, y alcanza el fondo del pozo en 3 s. *a*) ¿A qué altura se encontraba el ascensor cuando se dejó caer la piedra? *b*) ¿con qué velocidad cae la piedra al fondo del pozo?

11.34 Un autobús tiene una aceleración de 0.75 m/s^2 al moverse de *A* a *B*. Sabiendo que su velocidad era v_0 = 27 km/h al pasar por el punto *A*, determínense: *a*) el tiempo requerido por el autobús para llegar al punto *B* y *b*) la velocidad correspondiente con la que pasa por *B*.

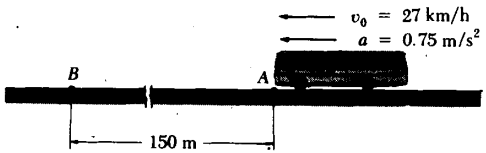


Fig. P11.34

11.35 Resuélvase el problema 11.34 si la velocidad del autobús al pasar por *A* fuese de 18 km/h.

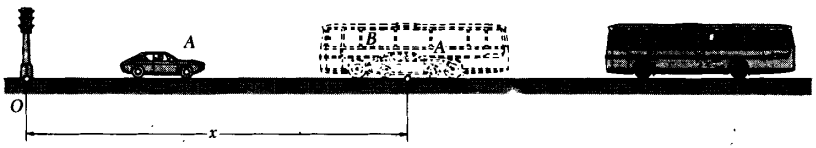


Fig. P11.36

11.36 El automóvil A sale de *0* con una aceleración uniforme de 0.75 m/s^2. Poco tiempo después es alcanzado por un autobús que se mueve en la dirección opuesta con una velocidad constante de 6 m/s. Sabiendo que el autobús *B* pasa por el punto *0* 20 s después que el automóvil *A* salió de allí, determínense cuándo y dónde se cruzaron los vehículos.

11.37 Dos automóviles *A* y *B* viajan en la misma dirección en líneas contiguas de la carretera. El automóvil *B* se para cuando es rebasado por *A*, el cual va a una velocidad constante de 15 mi/h. Si dos segundos después el automóvil *B* inicia su movimiento con una aceleración de 3 ft/s^2, determínense *a*) cuándo y dónde *B* rebasará a *A*, y *b*) la velocidad de *B* en ese momento.

11.38 Los automóviles A y B circulan en carriles adyacentes en una carretera, y en $t = 0$ tienen las posiciones y velocidades mostradas. Sabiendo que el automóvil A tiene una aceleración constante de 1.8 ft/s^2 y que B tiene una deceleración constante de 1.2 ft/s^2, determínense: *a*) cuándo y dónde A rebasará a B, y *b*) la velocidad de cada automóvil en ese instante.

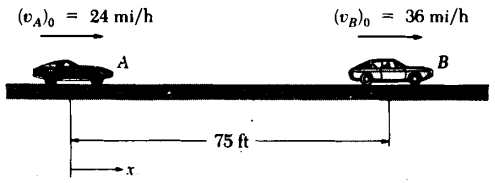


Fig. P11.38

11.39 Un elevador de plataforma abierta baja al pozo de una mina con una velocidad constante v_e cuando la plataforma del elevador pega y desprende una piedra. *a*) Suponiendo que la piedra empieza a caer sin velocidad inicial, demuéstrese que la piedra pegará a la plataforma con una velocidad relativa de magnitud v_e. *b*) Si v_e = 7.5 m/s, determínese cuándo y dónde pegará la piedra a la plataforma del elevador.

11.40 El ascensor mostrado en la figura adjunta se mueve hacia arriba a la velocidad constante de 5 m/s. Determínese *a*) la velocidad del cable C, *b*) la velocidad del contrapeso W, *c*) la velocidad relativa del cable C con respecto al ascensor y *d*) la velocidad relativa del contrapeso W con respecto al ascensor.

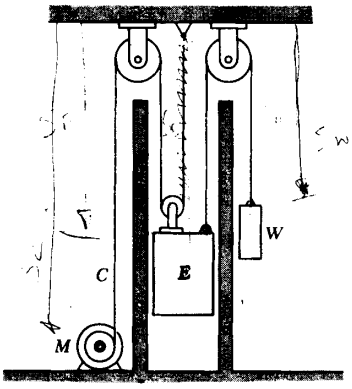


Fig. P11.40 y P11.41

11.41 El ascensor mostrado parte del reposo y se mueve hacia arriba con una aceleración constante. Si el contrapeso W recorre 10 m en 5 s, determínense: *a*) las aceleraciones del ascensor y del cable C y *b*) la velocidad del elevador después de 5 s.

11.42 El bloque deslizante B se mueve a la derecha con una velocidad constante de 18 in/s. Determínense *a*) la velocidad del bloque A, *b*) la velocidad de la porción D del cable, *c*) la velocidad relativa de A respecto de B y *d*) la velocidad relativa de la porción C respecto de la porción D.

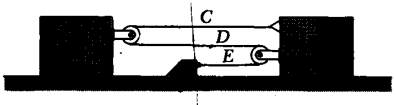


Fig. P11.42 y P11.43

11.43 El bloque deslizante A parte del reposo y se mueve hacia la izquierda con una aceleración constante. Si se sabe que la velocidad del bloque B es 12 in/s después de moverse 24 in, determínense: *a*) las aceleraciones de A y B, y *b*) la velocidad y la posición de A después de 5 s.

11.44 El collarín A parte del reposo y se mueve hacia la izquierda con una aceleración constante. Sabiendo que 6 s después la velocidad relativa del collarín B respecto del collarín A es 450 mm/s, determínense: *a*) las aceleraciones de A y B, y *b*) la posición y la velocidad de B 8 s después.

11.45 En la posición mostrada el collar B se mueve a la izquierda con una velocidad de 100 mm/s. Determínense: *a*) la velocidad del collarín A, *b*) la velocidad de la porción C del cable y *c*) la velocidad relativa de la porción C del cable respecto del collarín B.

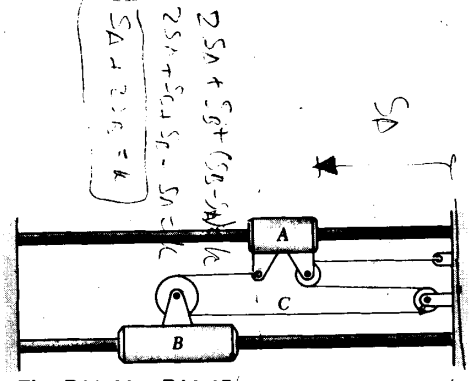


Fig. P11.44 y P11.45

11.46 En condiciones normales de operación la cinta es transferida entre los carretes aquí mostrados con una velocidad de 720 mm/s. En $t = 0$, la porción A de la cinta se mueve a la derecha con una velocidad de 600 mm/s y tiene una aceleración constante. Sabiendo que la porción B de la cinta tiene una velocidad constante de 720 mm/s y que la velocidad de la porción A alcanza 720 mm/s en $t = 6$ s, determínense *a*) la aceleración y velocidad del compensador C en $t = 4$ s, *b*) la distancia a la que C se habrá desplazado en $t = 6$ s.

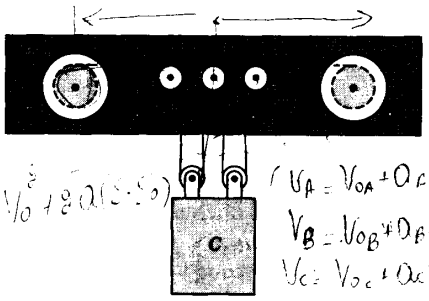


Fig. P11.46 y P11.47

11.47 Las porciones A y B de la cinta aquí mostrada parten del reposo en $t = 0$ y ambas se aceleran uniformemente hasta que alcanzan una velocidad de 720 mm/s, cada porción de la cinta se mueve entonces con una velocidad constante de 720 mm/s. Sabiendo que las porciones A y B alcanzan la velocidad de 720 mm/s en 18 s y 16 s, respectivamente, determínense: *a*) la aceleración y la velocidad del compensador C en $t = 10$ s y *b*) la distancia C que habrá recorrido cuando ambas porciones de la cinta alcanzan su velocidad final.

11.48 El collarín A parte del reposo cuando $t = 0$ y se mueve hacia arriba con una aceleración constante de 3.6 in/s^2. Sabiendo que el collarín B se mueve hacia abajo con una velocidad constante de 16 in/s, determínense: *a*) el tiempo al cual la velocidad del bloque C es cero y *b*) la posición correspondiente del bloque C.

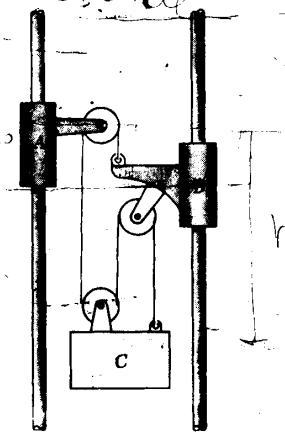


Fig. P11.48 y P11.49

11.49 Los collarines A y B parten del reposo y se mueven con las siguientes aceleraciones: $a_A = 2.5t$ in/s^2 hacia arriba y $a^B = 15$ in/s^2 hacia abajo. Determínense *a*) el tiempo en que la velocidad del bloque C es otra vez cero y *b*) la distancia que el bloque C habrá recorrido en ese tiempo.

11.50 Los tres bloques que se indican están igualmente espaciados horizontalmente y se mueven verticalmente con velocidades constantes. Sabiendo que en el inicio están al mismo nivel y que la velocidad de C respecto de B es 200 mm/s hacia abajo, determínese la velocidad de cada bloque de manera que los tres bloques permanezcan alineados durante su movimiento.

11.51 Los tres bloques aquí mostrados se mueven con velocidades constantes. Encuéntrese la velocidad de cada bloque si la velocidad relativa de A respecto de C es 120 mm/s hacia arriba y que la velocidad relativa de B respecto de A es 40 mm/s hacia arriba.

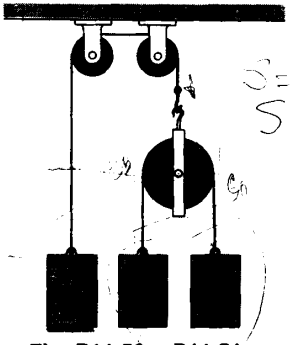


Fig. P11.50 y P11.51

***11.7. Solución gráfica de problemas de movimiento rectilíneo.** Se observó en la sección 11.2 que las fórmulas fundamentales

$$v = \frac{dx}{dt} \qquad \text{y} \qquad a = \frac{dv}{dt}$$

tienen un significado geométrico. La primera fórmula expresa que la velocidad en cualquier instante es igual a la pendiente de la curva x-t en el mismo instante (Fig. 11.10). La segunda fórmula expresa que la aceleración es igual a la pendiente de la curva v-t. De estas dos propiedades pueden obtenerse gráficamente las curvas v-t y a-t de un movimiento cuando se conoce la curva x-t.

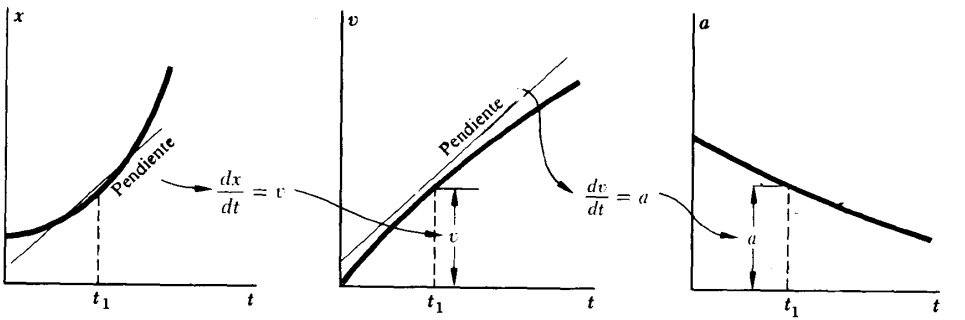


Fig. 11.10

Al integrar las dos fórmulas fundamentales desde un tiempo t_1 hasta un tiempo t_2, escribimos

$$x_2 - x_1 = \int_{t_1}^{t_2} v\,dt \qquad \text{y} \qquad v_2 - v_1 = \int_{t_1}^{t_2} a\,dt \qquad (11.12)$$

La primera fórmula expresa que el área medida bajo la curva $v - t$ desde t_1 hasta t_2 es igual al cambio en x durante ese intervalo (Fig. 11.11). La segunda expresa de manera similar que el área medida bajo la curva a-t desde t_1 hasta t_2 es igual al cambio en v durante el mismo intervalo. Estas dos propiedades pueden emplearse para determinar gráficamente la curva $x - t$ de un movimiento cuando se conoce su curva $v - t$ o la curva $a - t$ (véase el problema resuelto 11.6).

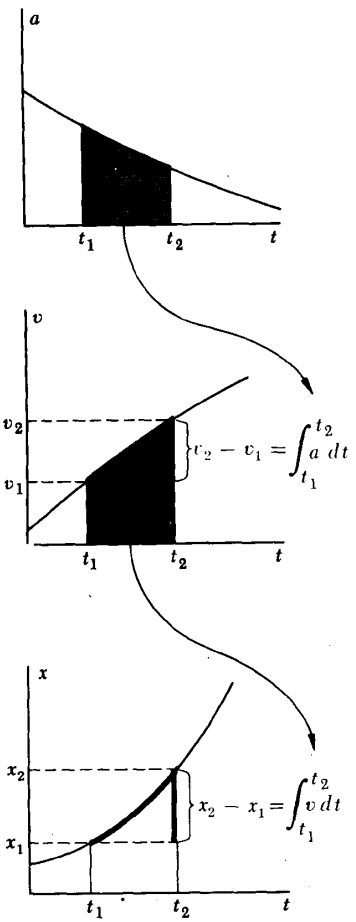


Fig. 11.11

Las soluciones gráficas son especialmente útiles cuando el movimiento que se considera se define a partir de datos experimentales y cuando x, v y a no son funciones analíticas de t. También pueden aprovecharse cuando el movimiento consta de diferentes partes y cuando su análisis requiere que se escriba una ecuación distinta para cada una de sus partes. No obstante, al usar una solución gráfica se debe tener cuidado en reconocer: 1) que el área bajo la curva $v - t$ mide al *cambio en* x, y no a x misma y, de modo similar, que el área bajo la curva a-t mide al cambio en v; 2) que mientras un área por encima del eje t corresponde a un incremento en x o en v, un área localizada bajo el eje t mide una disminución en x o en v.

Será útil recordar, al dibujar curvas de movimiento, que si la velocidad es constante estará representada por una línea recta horizontal; la coordenada de posición x será entonces una función lineal de t y estará representada por una línea recta oblicua. Si la aceleración es constante

y distinta de cero, estará representada por una línea recta horizontal; v será entonces una función lineal de t, representada por una línea recta oblicua y x estará expresada como un polinomio de segundo grado en t, representado por una parábola. Si la aceleración es una función lineal de t, la velocidad y la coordenada de posición serán iguales, respectivamente, a polinomios de segundo y tercer grados; a estará representada entonces por una línea recta oblicua, v por una parábola y x por una cúbica. En general, si la aceleración es un polinomio de grado n en t, la velocidad será un polinomio de grado $n + 1$ y la coordenada de posición un polinomio de grado $n + 2$; estos polinomios están representados por curvas de movimiento del grado correspondiente.

***11.8. Otros métodos gráficos.** Puede utilizarse otra solución gráfica para determinar directamente de la curva a-t la posición de una partícula en un instante dado. Sean x_0 y v_0, respectivamente los valores de x y v a $t = 0$, y x_1 y v_1 sus valores a $t = t_1$, y observando que el área bajo la curva v-t puede dividirse en un rectángulo de área $v_0 t_1$ y elementos diferenciales horizontales de área $(t_1 - t)\,dv$ (Fig. 11.12a), escribimos

$$x_1 - x_0 = \text{ área bajo la curva } v\text{-}t = v_0 t_1 + \int_{v_0}^{v_1} (t_1 - t)\,dv$$

Al sustituir $dv = a\,dt$ en la integral, obtenemos

$$x_1 - x_0 = v_0 t_1 + \int_0^{t_1} (t_1 - t) a\,dt$$

En la figura 11.12b, notamos que la integral representa el momento de primer orden del área bajo la curva a-t respecto de la línea $t = t_1$ que limita el área de la derecha. A este método de solución se le llama, por consiguiente, *método del momento-área*. Si se conoce la abscisa $\bar{t}$ del centro de gravedad C del área, puede obtenerse la coordenada de posición x_1 escribiendo

$$x_1 = x_0 + v_0 t_1 + (\text{ área bajo la curva } a\text{-}t\,)(t_1 - \bar{t}) \qquad (11.13)$$

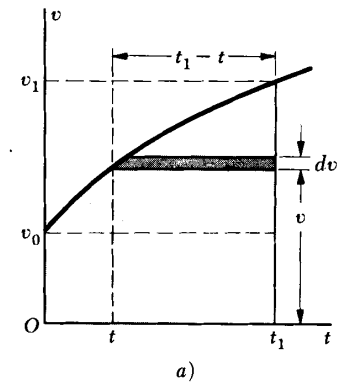
Si el área bajo la curva a-t es compuesta, el último término en (11.13) puede obtenerse multiplicando a cada componente del área por la distancia de su centro de gravedad a la línea $t = t_1$. Las áreas por arriba del eje t deben considerarse como positivas y las de abajo del eje t como negativas.

Algunas veces se emplea otro tipo de curva de movimiento, la curva v-x. Si se ha representado esta curva (Fig. 11.13), la aceleración a puede obtenerse para cualquier tiempo trazando la normal a la curva y *midiendo la subnormal BC*. De hecho, observando que el ángulo entre AC y AB es igual al ángulo θ entre la horizontal y la tangente en A (cuya pendiente es $\tan\theta = dv/dx$), escribimos

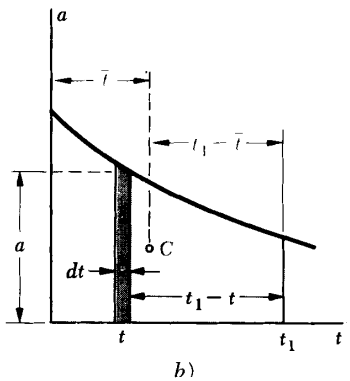
$$BC = AB \tan\theta = v\frac{dv}{dx}$$

y entonces, recordando la fórmula (11.4),

$$BC = a$$



a)



b)

Fig. 11.12

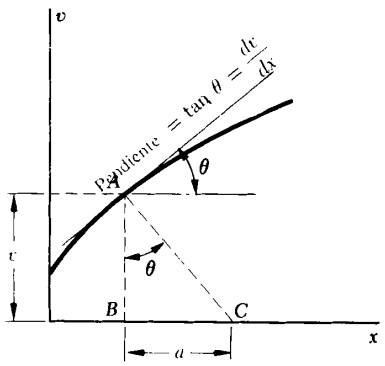
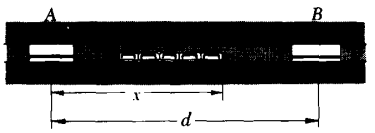
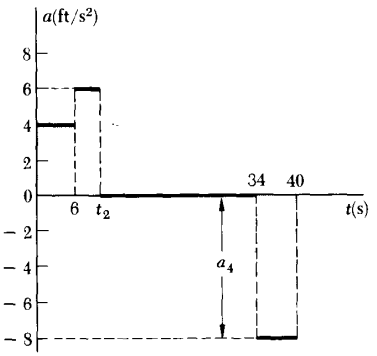


Fig. 11.13

PROBLEMA RESUELTO 11.6



Un tren subterráneo sale de la estación A; acelera a razón de 4 ft/s^2 durante 6 s y luego 6 ft/s^2 hasta que alcanza la velocidad de 48 ft/s. El tren mantiene la misma velocidad hasta que se acerca a la estación B, donde se aplican los frenos, dándole al tren una desaceleración constante hasta pararlo en 6 s. El tiempo total de recorrido de A hasta B es 40 s. Trácense las curvas a-t, v-t, y x-t, y determínese la distancia entre las estaciones A y B.



Curva aceleración-tiempo. Como la aceleración es constante o cero, la curva a-t está formada por segmentos de líneas horizontales. Los valores de t_2 y a_4 se determinan en la forma siguiente:

$0 < t < 6$: El cambio en v = al área bajo la curva a-t

$$v_6 - 0 = (6\text{ s})(4\text{ ft/s}^2) = 24\text{ ft/s}$$

$6 < t < t_2$: Como la velocidad aumenta de 24 a 48 ft/s.

El cambio en v = área bajo la curva a-t

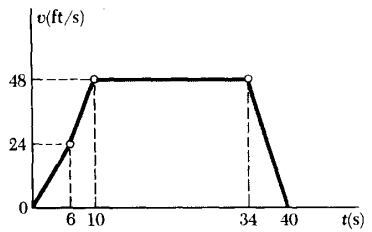
$$48 - 24 = (t_2 - 6)(6\text{ ft/s}^2) \qquad t_2 = 10\text{ s}$$

$t_2 < t < 34$: Como aquí la velocidad es constante, la aceleración es cero.

$34 < t < 40$: el cambio en v = área bajo la curva a-t.

$$0 - 48 = (6\text{ s})a_4 \qquad a_4 = -8\text{ ft/s}^2$$

Siendo la aceleración negativa, el área correspondiente queda abajo del eje t; esta área representa una disminución en la velocidad.



Curva velocidad-tiempo. Puesto que la aceleración es constante o cero, la curva v-t está formada por segmentos de línea recta que unen a los puntos determinados arriba.

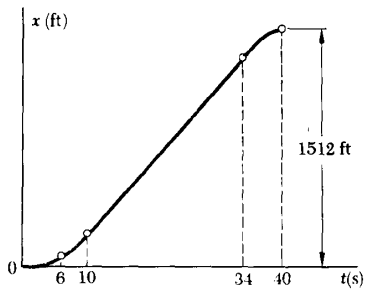
El cambio en x = área bajo la curva v-t

$0 < t < 6$: $x_6 - 0 = \frac{1}{2}(6)(24) = 72\text{ ft}$

$6 < t < 10$: $x_{10} - x_6 = \frac{1}{2}(4)(24 + 48) = 144\text{ ft}$

$10 < t < 34$: $x_{34} - x_{10} = (24)(48) = 1152\text{ ft}$

$34 < t < 40$: $x_{40} - x_{34} = \frac{1}{2}(6)(48) = 144\text{ ft}$



Sumando los cambios en x obtenemos la distancia de A a B:

$$d = x_{40} - 0 = 1512\text{ ft}$$

$$d = 1512\text{ ft} \blacktriangleleft$$

Curva posición-tiempo. Los puntos determinados arriba deben unirse por tres arcos de parábola y un segmento de línea recta. La construcción de la curva x-t se hará más fácilmente y con mayor exactitud si tenemos en mente que, para cualquier valor de t, la pendiente de la tangente a la curva x-t es igual al valor de v en ese instante.

Problemas

11.52 Una partícula se mueve en línea recta con la aceleración mostrada en la figura. Sabiendo que parte del origen con $v_0 = -18$ ft/s, *a*) dibuje las curvas $v-t$ y $x-t$ para $0 < t < 20$ s, *b*) determínense su velocidad, su posición y la distancia total recorrida 12 s después.

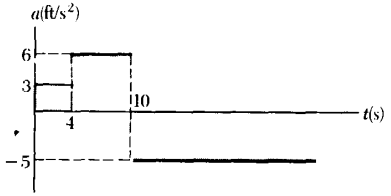


Fig. P11.52

11.53 Para la partícula y el movimiento del problema 11.52 trácense las curvas v–t y x–t para $< t < 20$ s y determínense *a*) el valor máximo de la velocidad de la partícula y *b*) el valor máximo de su coordenada de posición.

11.54 Una partícula se mueve en una línea recta con la velocidad mostrada en la figura. Sabiendo que $x = -16$ m para $t = 0$, dibújense las curvas $a-t$ y $x-t$ para $0 < t < 40$ s y determínense *a*) el máximo valor de la coordenada de posición de la partícula, *b*) los valores de t en los que la partícula está a una distancia de 36 m del origen.

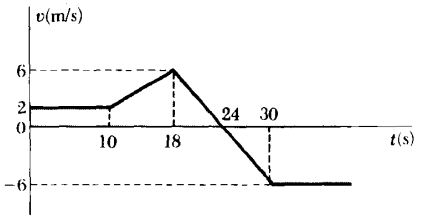


Fig. P11.54

11.55 Para la partícula y el movimiento del problema 11.54 grafíquense las curvas $a-t$ y $x-t$ para $0 < t < 40$ s y determínense *a*) la distancia total recorrida por la partícula durante el periodo de $t = 0$ a $t = 30$ s y *b*) los dos valores de t cuando la partícula pasa por el origen.

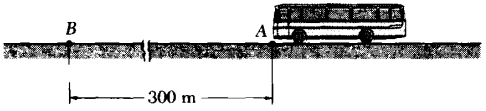


Fig. P11.56

11.56 Un autobús sale del punto A desde el reposo y acelera a razón de 0.8 m/s² hasta que alcanza una velocidad de 12 m/s. Continúa a 12 m/s hasta que aplica los frenos; alcanza el reposo en el punto B, 42 m después del punto donde los frenos se aplicaron. Suponiendo deceleración uniforme y sabiendo que la distancia entre A y B es 300 m, determínese el tiempo que tardó el autobús en avanzar de A a B.

11.57 Una serie de señales de tránsito se programa de tal manera que un automóvil que avance con una velocidad constante de 45 km/h llegará a cada semáforo justamente en el cambio a luz verde. Un automovilista pierde la luz verde y está parado en el semáforo A, sabiendo que el siguiente semáforo B está a 325 m adelante y que la máxima aceleración del automóvil es 1.5 m/s², determínese qué debe hacer para mantener la máxima velocidad tan baja como sea posible y llegar al semáforo B justamente cuando se ponga en verde. ¿Cuál es la máxima velocidad alcanzada?

11.58 El disparo de un mortero causa que su cañón retroceda 40 in antes de que un mecanismo de frenado lo pare. Por medio de un registro fotográfico de alta velocidad, se encuentra que el máximo valor de la velocidad de retroceso es 270 in/s y que ésta se alcanza 0.02s después del disparo. Supóngase que el periodo de retroceso consta de dos fases, durante las cuales la aceleración tiene un valor constante positivo a_1 y un valor constante negativo a_2, respectivamente. Determínense *a*) los valores de a_1 y a_2 y *b*) la posición del cañón después de 0.02 s del disparo, *c*) el tiempo en el cual la velocidad del cañón es cero.

11.59 Durante una operación de acabado, la base una cepilladora industrial se mueve alternativamente 30 in a la derecha y 30 in a la izquierda. La velocidad de la base está limitada a un valor máximo de 6 in/s a la derecha y 12 in/s a la izquierda; la aceleración es sucesivamente igual a 6 in/s^2 a la derecha, cero, 6 in/s^2 a la izquierda, cero, etc. Determínese el tiempo necesario para que la base realice un ciclo completo y dibújense las curvas $v-t$ y $x-t$.

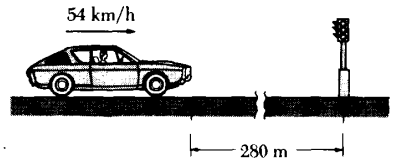


Fig. P11.60

11.60 Una automovilista viaja a 54 km/h cuando observa que la luz de un semáforo a 280 m adelante se pone en rojo. Sabe que el semáforo está programado para estar en rojo durante 28 s. ¿Qué debe hacer para pasar el semáforo a 54 km/h en el momento exacto en que se ponga la luz verde otra vez? Trácese la curva $v-t$, seleccionando la solución para la cual se tengan los valores más pequeños posibles de deceleración y aceleración, y determínense: *a*) la deceleración y la aceleración en m/s^2 y *b*) la velocidad mínima alcanzada en km/h.

11.61 Resuélvase el problema 11.60 sabiendo que la aceleración del automóvil no puede exceder de 0.6 m/s^2.

11.62 Un automóvil en reposo es alcanzado por un camión que viaja a una velocidad constante de 54 km/h. El automóvil empieza a correr con aceleración uniforme durante 10 s hasta que alcanza una velocidad de 90 km/h. Si el automóvil mantiene entonces una velocidad constante de 90 km/h, determínese cuándo y dónde alcanzará el camión, suponiendo que el automóvil arranca: *a*) justamente cuando el camión lo pasa y *b*) 3 s después de que el camión lo rebase.

11.63 Un automóvil y un camión mantienen una velocidad constante de 35 mi/h; el automóvil está 40 ft atrás del camión. El chofer del automóvil desea rebasar al camión, es decir, desea colocar su automóvil en *B*, 40 ft adelante de él y después continuar a la velocidad de 35 mi/h. La aceleración máxima del automóvil es 5 ft/s^2 y la deceleración máxima obtenida al aplicar los frenos es 20 ft/s^2. ¿Cuál es el tiempo más corto en el que el chofer puede completar la operación de rebasar al camión sin exceder en ningún momento la velocidad de 50 mi/h? Trácese la curva $v-t$.

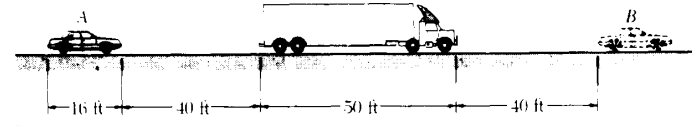


Fig. P11.63

11.64 Resuélvase el problema 11.63 suponiendo que el chofer no pone atención alguna al límite de velocidad mientras está rebasando y se concentra en llegar a la posición *B* y continúa con una velocidad de 35 mi/h en el mínimo tiempo posible. ¿Cuál es la máxima velocidad que alcanza? Dibújese la curva $v-t$.

11.65 Un automóvil y un camión viajan a una velocidad constante v_0; el automóvil se encuentra a 30 ft atrás del camión. El conductor del camión frena repentinamente haciendo que su vehículo decelere uniformemente a 9 ft/s^2. Dos segundos después el conductor del automóvil frena y apenas alcanza a evitar una colisión por detrás. Determínese la deceleración uniforme del vehículo si: *a*) $v_0 =$ 60 mi/h y *b*) $v_0 = 45$ mi/h.

11.66 El automóvil *A* viaja con una velocidad constante v_A y se acerca al automóvil *B* que viaja en la misma dirección con una velocidad constante de 72 km/h. El conductor del automóvil *B* ve al automóvil *A* cuando éste está todavía a 60 m detrás de él y acelera entonces a 0.75 m/s^2 para evitar ser rebasado o golpeado por el coche *A*. Se sabe que lo más próximo que pueden estar *A* y *B* es 6 m; determínese la velocidad v_A del automóvil *A*.

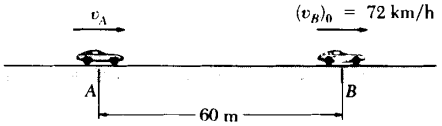


Fig. P11.66

11.67 Un elevador de carga *F* que se mueve hacia arriba con una velocidad constante de 5 m/s rebasa un elevador de pasajeros *P* que se encuentra detenido. Tres segundos después, el ascensor de pasajeros inicia su subida con una aceleración de 1.25 m/s^2. Cuando el ascensor de pasajeros alcanza una velocidad de 10 m/s, continúa con velocidad constante. Trácense las curvas $v-t$ e $y-t$ y a partir de ellas determínense el tiempo y la distancia requeridas por el ascensor de pasajeros para rebasar al ascensor de carga.

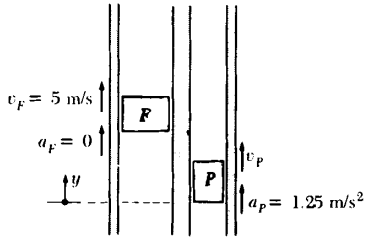


Fig. P11.67

11.68 El registro de aceleración aquí mostrado se obtuvo de un avión pequeño que viaja en línea recta. Si $x = 0$ y $v = 60$ m/s en $t = 0$, determínense: *a*) la velocidad y la posición del avión para $t = 20$ s y *b*) su velocidad media durante el intervalo 6 s $< t <$ 14 s.

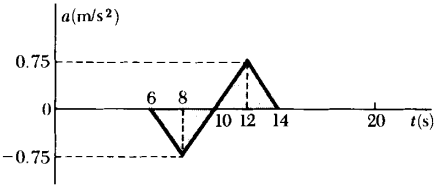


Fig. P11.68

11.69 La aceleración de una partícula varía uniformemente de $a = 90$ in/s^2 para $t = 0$ a $a = -90$ in/s^2 para $t = 6$ s. Si se sabe que $x = 0$ y $v = 0$ cuando $t = 0$, determínense *a*) la velocidad máxima de la partícula, *b*) su posición en $t = 6$ s y *c*) su velocidad media durante el intervalo $0 < t < 6$ s. Trácense las curvas $a-t$, $v-t$ y $x-t$ del movimiento.

11.70 A la derivada temporal de la aceleración se la conoce como sacudida; cambios grandes o bruscos de la aceleración producen malestar a los pasajeros en los ascensores. Si la sacudida de un ascensor se limita a ± 1.6 ft/s^2/s, determínense *a*) el mínimo tiempo que se necesita a partir del reposo para elevarse 50 ft y parar y *b*) la correspondiente velocidad media del ascensor.

11.71 Para mantener a los pasajeros confortablemente la aceleración de un ascensor se limita a $\pm$ 1.5 m/s^2 y la sacudida, o derivada temporal de la aceleración se limita a $\pm$ 0.5 m/s^2/s. Si el elevador parte del reposo, determínense *a*) el mínimo tiempo necesario para alcanzar una velocidad constante de 8 m/s, *b*) la distancia recorrida en ese tiempo y *c*) la correspondiente velocidad media del ascensor.

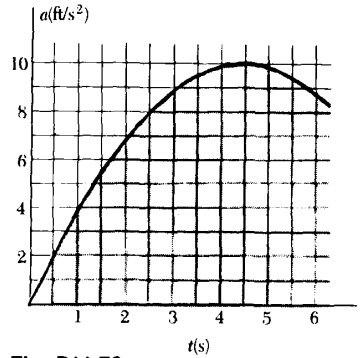


Fig. P11.72

11.72 El registro de aceleración mostrado en la figura se obtuvo de un camión que viajaba sobre una carretera rectilínea. Si se sabe que la velocidad inicial del camión era 15 mi/h, determínense *a*) la velocidad en t = 6 s, *b*) la distancia que recorrió el camión durante la prueba de 6 s.

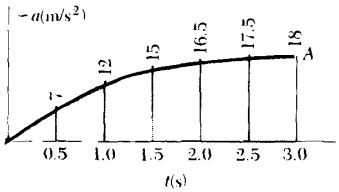


Fig. P11.73

11.73 Un aeroplano de entrenamiento aterriza sobre un transporte aeronáutico y se pone en reposo en 3 s por medio de un engrane de fijación del transporte. Un acelerómetro fijo al aeroplano proporciona el registro de aceleración que se muestra. Determínense por medios aproximados *a*) la velocidad inicial del aeroplano relativa a la plataforma y *b*) la distancia que viaja el aeroplano a lo largo de la plataforma antes de alcanzar el reposo.

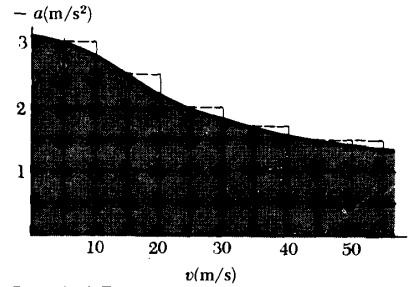


Fig. P11.74

11.74 La deceleración máxima posible de un tren de pasajeros bajo condiciones de emergencia se determinó experimentalmente; los resultados se muestran en la figura (curva sólida). Si se aplican los frenos cuando el tren viaja a 90 km/h, determínense en forma aproximada: *a*) el tiempo necesario para que el tren se pare y *b*) la distancia recorrida en ese lapso.

11.75 La curva v–x mostrada en la figura se obtuvo experimentalmente durante el movimiento de la base de una cepilladora industrial. Determínese en forma aproximada la aceleración: *a*) cuando $x = 3$ in y *b*) cuando $v = 10$ in/s.

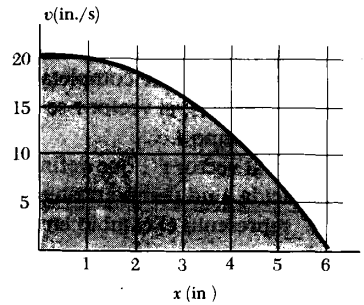


Fig. P11.75

11.76 Empleando el método de la sección 11.8, obténgase la fórmula $x = x_o + v_0t + \frac{1}{2}at^2$ para la coordenada de posición de una partícula en un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

11.77 La aceleración de un objeto sometido a una onda de presión debida a una gran explosión se define por la curva aquí mostrada. El objeto está inicialmente en reposo y vuelve a quedar en reposo al tiempo t_1. Usando el método de la sección 11.8, determínense *a*) el tiempo t_1 y *b*) la distancia hasta la cual es impulsado el objeto por la onda de presión.

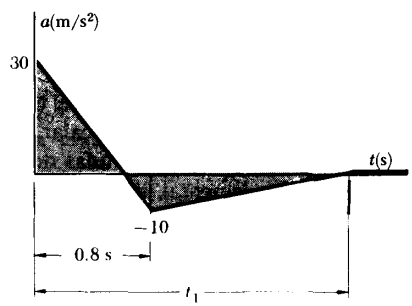


Fig. P11.77

11.78 Para la partícula del problema 11.54, trácese la curva a–t y, empleando el método de la sección 11.8, determínense: *a*) la posición de la partícula en $t = 20$ s y *b*) el máximo valor de su coordenada de posición.

11.79 Con el método de la sección 11.8 determínese la posición de la partícula del problema 11.52 cuando $t = 14$ s.

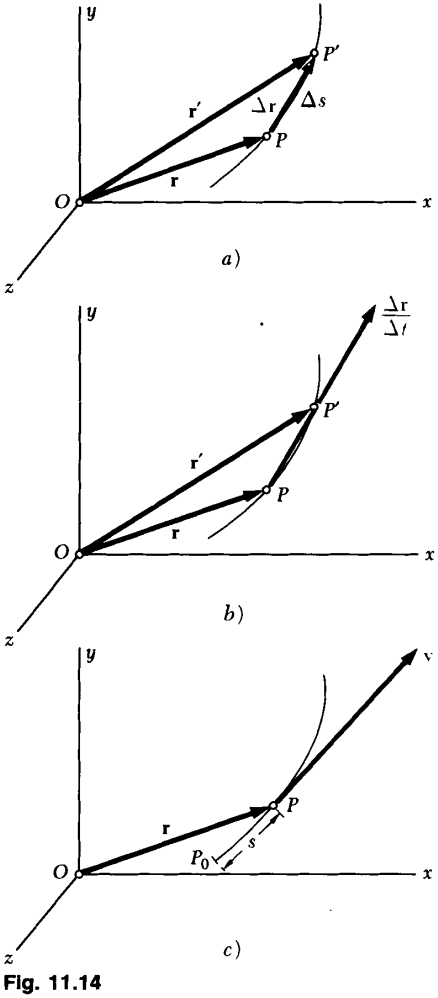


Fig. 11.14

11.9. Vector de posición, velocidad y aceleración. Cuando una partícula no se desplaza en línea recta, decimos que dicha partícula describe un *movimiento curvilíneo*. Para definir la posición P que ocupa la partícula para un cierto tiempo t, seleccionamos un sistema de referencia fijo, como los ejes x, y y z mostrados en la figura 11.14*a* y trazamos el vector $\mathbf{r}$ que une al origen O y al punto P. Como el vector $\mathbf{r}$ está caracterizado por su magnitud r y su dirección respecto de los ejes de referencia, define completamente la posición de la partícula respecto de estos ejes; el vector $\mathbf{r}$ se llama *vector de posición* de la partícula en el tiempo t.

Consideremos ahora al vector $\mathbf{r}'$, que define la posición P' ocupada por la misma partícula a un tiempo posterior $t + \Delta t$. El vector $\Delta\mathbf{r}$ que une a P y a P' representa el cambio en el vector de posición durante el intervalo de tiempo Δt, ya que, como puede comprobarse fácilmente en la figura 11.14*a*, el vector $\mathbf{r}'$ se obtiene sumando los vectores $\mathbf{r}$ y $\Delta\mathbf{r}$ de acuerdo con la regla del triángulo. Notamos que $\Delta\mathbf{r}$ representa un cambio en la *dirección* así como un cambio en el módulo del vector de posición $\mathbf{r}$. La *velocidad media* de la partícula en el intervalo de tiempo Δt se define como el cociente de $\Delta\mathbf{r}$ y Δt. Como $\Delta\mathbf{r}$ es un vector y Δt es un escalar, el cociente $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$ es un vector unido a P, de la misma dirección que $\Delta\mathbf{r}$ y de módulo igual a la de $\Delta\mathbf{r}$ entre Δt (Fig. 11.14*b*).

La *velocidad instantánea* de la partícula al tiempo t se obtiene escogiendo intervalos de tiempo Δt cada vez más cortos y vectores $\Delta\mathbf{r}$ cada vez más pequeños. De esta manera la velocidad instantánea se representa por el vector

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \tag{11.14}$$

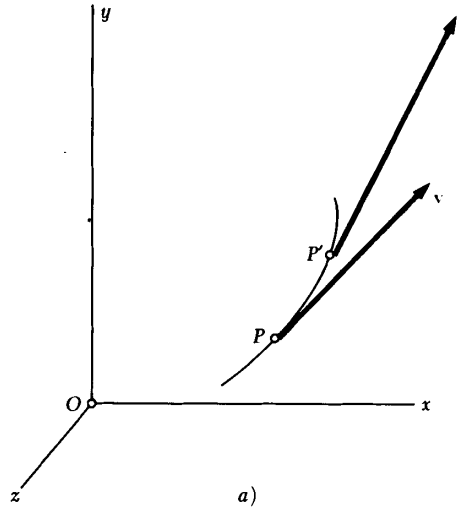
Conforme Δt y $\Delta\mathbf{r}$ se hacen más pequeños, los puntos P y P' quedan más cercanos, de manera que el vector $\mathbf{v}$ que se obtiene en el límite debe ser, por consiguiente, tangente a la trayectoria de la partícula (Fig. 11.14*c*).

Como el vector de posición $\mathbf{r}$ depende del tiempo t, podemos llamarlo *función vectorial* de la variable escalar t y representarlo por $\mathbf{r}(t)$. Extendiendo el concepto de derivadas de una función escalar introducida en el cálculo elemental, llamaremos al límite del cociente $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$ la *derivada* de la función vectorial $\mathbf{r}(t)$. Escribimos

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \tag{11.15}$$

A la magnitud v del vector $\mathbf{v}$ se le llama la *velocidad* de la partícula. Puede obtenerse sustituyendo para el vector $\Delta\mathbf{r}$ en la fórmula (11.14) su módulo representado por el segmento de línea recta PP'. Pero la longitud del segmento PP' se acerca a la longitud de Δs del arco PP' conforme Δt disminuye (Fig. 11.14*a*), y podemos escribir

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{PP'}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \qquad v = \frac{ds}{dt} \tag{11.16}$$



a)

La velocidad v puede obtenerse entonces derivando respecto de t la longitud s del arco descrito por la partícula.

Consideremos la velocidad $\mathbf{v}$ de la partícula al tiempo t y también su velocidad $\mathbf{v}'$ a un tiempo posterior $t + \Delta t$ (Fig. 11.15*a*). Tracemos ambos vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{v}'$ desde el mismo origen O' (Fig. 11.15*b*). El vector $\Delta\mathbf{v}$ que une a A y Q' representa el cambio en la velocidad de la partícula durante el intervalo de tiempo Δt, ya que el vector $\mathbf{v}'$ puede obtenerse sumando los vectores $\mathbf{v}$ y $\Delta\mathbf{v}$. Debemos notar que $\Delta\mathbf{v}$ representa un cambio en la *dirección* de la velocidad así como un cambio en el módulo. La *aceleración media* de la partícula en el intervalo de tiempo Δt se define como el cociente de $\Delta\mathbf{v}$ y Δt. Como $\Delta\mathbf{v}$ es un vector y Δt un escalar, el cociente $\Delta\mathbf{v}/\Delta t$ es un vector de la misma dirección que $\Delta\mathbf{v}$.

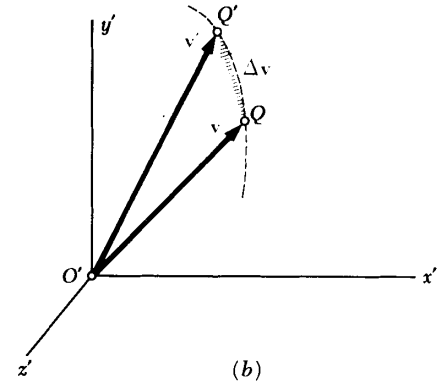
La *aceleración instantánea* de la partícula en el tiempo t se obtiene escogiendo valores de Δt y $\Delta\mathbf{v}$ cada vez más pequeños. De manera que la aceleración instantánea se representa con el vector

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} \tag{11.17}$$

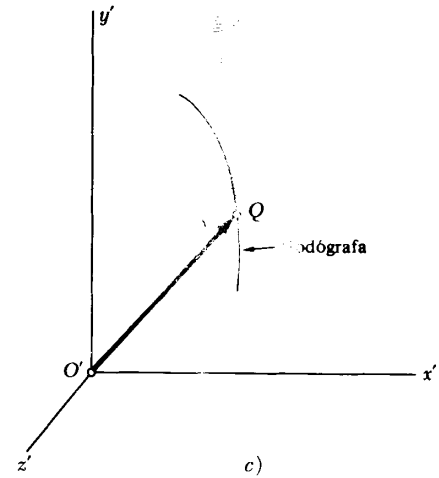
Como la velocidad $\mathbf{v}$ es una función vectorial $\mathbf{v}(t)$ del tiempo t, podemos llamar al límite del cociente $\Delta\mathbf{v}/\Delta t$ la derivada de $\mathbf{v}$ con respecto a t. Escribimos

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \tag{11.18}$$

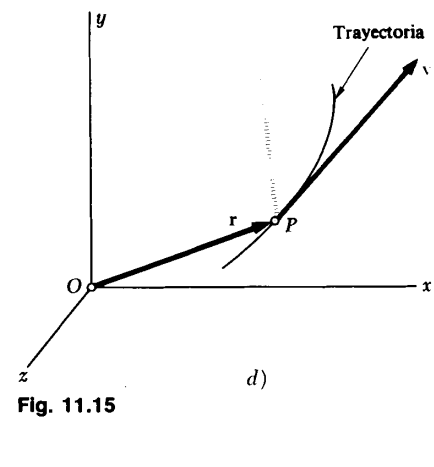
Observamos que la aceleración $\mathbf{a}$ es tangente a la curva descrita por la punta Q del vector $\mathbf{v}$ cuando este último se traza desde un origen O' (Fig. 11.15*c*) y que, en general, la aceleración *no* es tangente a la trayectoria de la partícula (Fig. 11.15*d*). La curva descrita por la punta de $\mathbf{v}$ como se muestra en la figura 11.15*c* se llama la *hodógrafa* del movimiento.



(b)

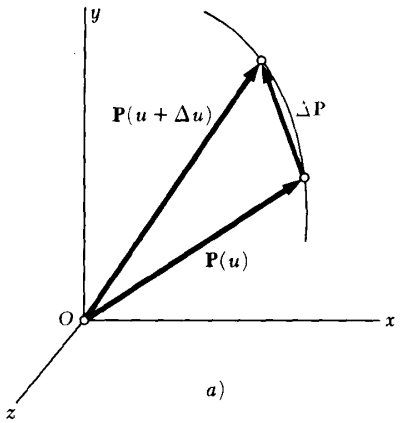


c)

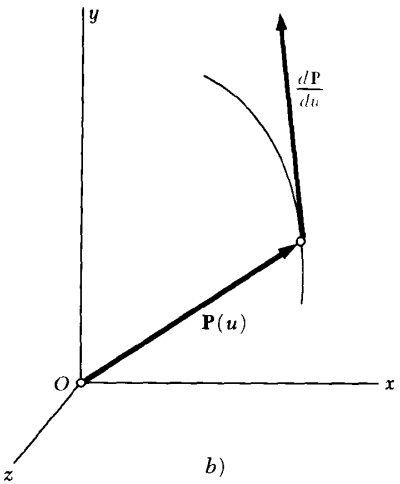


d)

Fig. 11.15



a)



b)

Fig. 11.16

11.10. Derivadas de funciones vectoriales. Vimos en la sección anterior que la velocidad **v** de una partícula en movimiento curvilíneo puede representarse con la derivada de la función vectorial $\mathbf{r}(t)$ que caracteriza a la posición de la partícula. En forma semejante, la aceleración **a** de la partícula puede representarse con la derivada de la función vectorial $\mathbf{v}(t)$. En esta sección daremos una definición formal de la derivada de una función vectorial y estableceremos algunas reglas que se siguen en la derivación de sumas y productos de funciones vectoriales.

Sea $\mathbf{P}(u)$ una función vectorial de la variable escalar u. Lo que quiere decir que el escalar u define completamente la magnitud y la dirección del vector **P**. Si el vector **P** se traza desde un origen fijo O y se permite que el escalar u varíe, la punta de **P** describirá una cierta curva en el espacio. Consideremos los vectores **P** correspondientes a los valores u y $u + \Delta u$ de la variable escalar, respectivamente (Fig. 11.16*a*). Sea $\Delta\mathbf{P}$ el vector que une las puntas de los dos vectores dados; escribimos

$$\Delta\mathbf{P} = \mathbf{P}(u + \Delta u) - \mathbf{P}(u)$$

Dividiendo todo entre Δu y haciendo Δu tender a cero, *definimos la derivada de la función vectorial* $\mathbf{P}(u)$:

$$\frac{d\mathbf{P}}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta\mathbf{P}}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\mathbf{P}(u + \Delta u) - \mathbf{P}(u)}{\Delta u} \tag{11.19}$$

Conforme Δu tiende a cero, la línea de acción de $\Delta\mathbf{P}$ se vuelve tangente de la curva de la figura 11.16*a*. Entonces, la derivada $d\mathbf{P}/du$ de la función vectorial $\mathbf{P}(u)$ *es tangente a la curva descrita por la punta de* $\mathbf{P}(u)$ (Fig. 11.16*b*).

Mostraremos ahora que las reglas normales para la derivación de las sumas y productos de funciones escalares pueden extenderse a las funciones vectoriales. Consideremos primero la *suma de dos funciones vectoriales* $\mathbf{P}(u)$ y $\mathbf{Q}(u)$ de la misma variable escalar u. De la definición dada en (11.19) la derivada del vector $\mathbf{P} + \mathbf{Q}$ es

$$\frac{d(\mathbf{P} + \mathbf{Q})}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta(\mathbf{P} + \mathbf{Q})}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0} \left(\frac{\Delta\mathbf{P}}{\Delta u} + \frac{\Delta\mathbf{Q}}{\Delta u} \right)$$

o como el límite de la suma es igual a la suma de los límites de sus términos,

$$\frac{d(\mathbf{P} + \mathbf{Q})}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta\mathbf{P}}{\Delta u} + \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta\mathbf{Q}}{\Delta u}$$

$$\frac{d(\mathbf{P} + \mathbf{Q})}{du} = \frac{d\mathbf{P}}{du} + \frac{d\mathbf{Q}}{du} \tag{11.20}$$

Ahora consideraremos el *producto de una función escalar* $f(u)$ *y de una función vectorial* $\mathbf{P}(u)$ de la misma variable escalar u. La derivada del vector $f\mathbf{P}$ es

$$\frac{d(f\mathbf{P})}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{(f + \Delta f)(\mathbf{P} + \Delta\mathbf{P}) - f\mathbf{P}}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta u}\mathbf{P} + f\frac{\Delta\mathbf{P}}{\Delta u} \right)$$

o, recordando las propiedades de los límites de sumas y productos,

$$\frac{d(f\mathbf{P})}{du} = \frac{df}{du}\mathbf{P} + f\frac{d\mathbf{P}}{du} \tag{11.21}$$

Las derivadas del *producto escalar* y del *producto vectorial* de dos funciones vectoriales $\mathbf{P}(u)$ y $\mathbf{Q}(u)$ pueden obtenerse en forma semejante. Tenemos

$$\frac{d(\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q})}{du} = \frac{d\mathbf{P}}{du}\cdot\mathbf{Q} + \mathbf{P}\cdot\frac{d\mathbf{Q}}{du} \tag{11.22}$$

$$\frac{d(\mathbf{P}\times\mathbf{Q})}{du} = \frac{d\mathbf{P}}{du}\times\mathbf{Q} + \mathbf{P}\times\frac{d\mathbf{Q}}{du} \tag{11.23}$$†

Usaremos las propiedades que acabamos de establecer para determinar las *componentes rectangulares de la derivada de una función vectorial* $\mathbf{P}(u)$. Descomponiendo a $\mathbf{P}$ en sus componentes a lo largo de ejes rectangulares fijos x, y, z, escribimos

$$\mathbf{P} = P_x\mathbf{i} + P_y\mathbf{j} + P_z\mathbf{k} \tag{11.24}$$

donde P_x, P_y, P_z son las componentes rectangulares escalares del vector $\mathbf{P}$, con $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ los vectores unitarios que corresponden, respectivamente, a los ejes x, y y z (sección 2.12). De (11.20), la derivada de $\mathbf{P}$ es igual a la suma de las derivadas de los sumandos en el miembro de la derecha. Como cada uno de estos sumandos es el producto de una función escalar y de una función vectorial, usaremos (11.21). Pero los vectores unitarios $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ tienen una magnitud constante (igual a 1) y direcciones fijas. Por lo que sus derivadas son cero y podemos escribir

$$\frac{d\mathbf{P}}{du} = \frac{dP_x}{du}\mathbf{i} + \frac{dP_y}{du}\mathbf{j} + \frac{dP_z}{du}\mathbf{k} \tag{11.25}$$

Como los coeficientes de los vectores unitarios son, por definición, las componentes escalares del vector $d\mathbf{P}/du$, concluimos que *las componentes rectangulares escalares de la derivada* $d\mathbf{P}/du$ *de la función vectorial* $\mathbf{P}(u)$ se obtienen al derivar las componentes escalares de $\mathbf{P}$ correspondientes.

Derivada temporal de un vector. Cuando el vector $\mathbf{P}$ es una función del tiempo t, su derivada $d\mathbf{P}/dt$ representa la *derivada temporal* de $\mathbf{P}$ respecto del sistema de referencia $Oxyz$. Descomponiendo a $\mathbf{P}$ en sus componentes rectangulares, tenemos, por (11.25),

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{dP_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{dP_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{dP_z}{dt}\mathbf{k}$$

o, empleando puntos para indicar la diferenciación respecto al tiempo t,

$$\dot{\mathbf{P}} = \dot{P}_x\mathbf{i} + \dot{P}_y\mathbf{j} + \dot{P}_z\mathbf{k} \tag{11.25'}$$

† Como el producto vectorial no es conmutativo (sección 3.4), debe mantenerse el orden de los factores en (11.23).

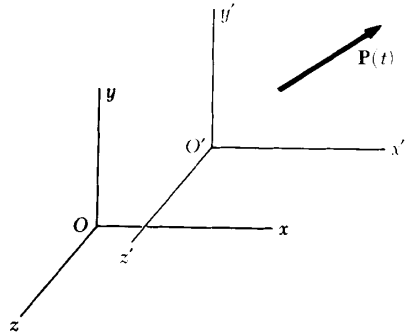
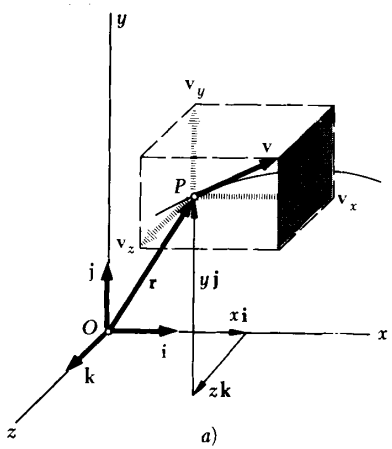
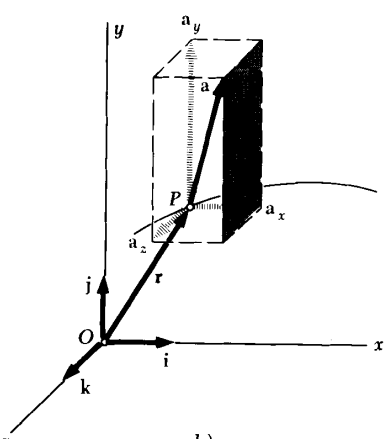


Fig. 11.17



a)



b)

Fig. 11.18

Como se estudiará en la sección 15.10, la derivada temporal de un vector, vista desde un *sistema de referencia en movimiento*, es, en general, diferente de su derivada temporal cuando se le observa desde un sistema de referencia fijo. Sin embargo, si el sistema de referencia en movimiento $O'x'y'z'$ está en *traslación*, es decir, si sus ejes permanecen paralelos a los ejes correspondientes del sistema fijo $Oxyz$ (Fig. 11.17), se emplean los mismos vectores unitarios **i, j, k** en ambos sistemas de referencia y, por consiguiente, el vector **P** tiene en cualquier instante las mismas componentes P_x, P_y, P_z en ambos sistemas. De (11.25') se sigue que la derivada temporal $\dot{\mathbf{P}}$ es la misma respecto de los sistemas $Oxyz$ y $O'x'y'z'$. Por consiguiente establecemos que *la derivada temporal de un vector es la misma respecto de un sistema fijo y respecto de un sistema en movimiento de traslación.* Esta propiedad simplificará grandemente nuestro trabajo, ya que trataremos principalmente con sistemas de referencia en traslación.

11.11. Componentes rectangulares de la velocidad y la aceleración. Cuando la posición P de una partícula está definida en cualquier instante por sus coordenadas rectangulares x, y y z, es conveniente descomponer la velocidad **v** y la aceleración **a** de la partícula en sus componentes rectangulares (Fig. 11.18).

Expresando al vector de posición **r** de la partícula en sus componentes rectangulares, escribimos

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \tag{11.26}$$

donde las coordenadas x, y, z son funciones de t. Al derivar dos veces obtenemos

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k} \tag{11.27}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k} \tag{11.28}$$

aquí $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ y $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$ representan, respectivamente, la primera y la segunda derivadas de x, y y z respecto a t. De (11.27) y (11.28) se deduce que las componentes escalares de la velocidad y de la aceleración son

$$v_x = \dot{x} \qquad v_y = \dot{y} \qquad v_z = \dot{z} \tag{11.29}$$

$$a_x = \ddot{x} \qquad a_y = \ddot{y} \qquad a_z = \ddot{z} \tag{11.30}$$

Un valor positivo de v_x indica que la componente vectorial $\mathbf{v}_x$ se dirige a la derecha, un valor negativo indica que su dirección es a la izquierda; el sentido de cada una de las otras componentes vectoriales puede determinarse en una forma semejante del signo de la componente escalar correspondiente. Si se desea, pueden obtenerse los módulos y las direcciones de la velocidad y de la aceleración a partir de sus componentes escalares empleando los métodos de las secciones 2.7 y 2.12.

El uso de las componentes rectangulares para describir la posición, la velocidad y la aceleración de una partícula es particularmente

efectivo cuando la componente a_x de la aceleración depende sólo de t, x y/o v_x, y cuando en forma semejante a_y depende sólo de t, y y/o v_y y a_z de t, z y/o v_z. Entonces las ecuaciones (11.30) pueden integrarse independientemente, y también las ecuaciones (11.29). En otras palabras, el movimiento de la partícula en la dirección x, su movimiento en la dirección y y su movimiento en la dirección z pueden considerarse separadamente.

Por ejemplo, en el caso del *movimiento de un proyectil*, puede demostrarse (véase sección 12.5) que las componentes de la aceleración son

$$a_x = \ddot{x} = 0 \qquad a_y = \ddot{y} = -g \qquad a_z = \ddot{z} = 0$$

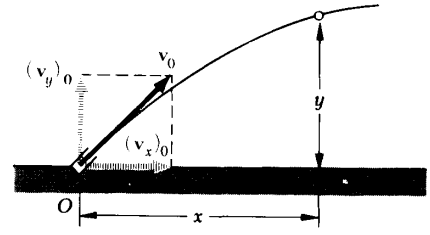
cuando se desprecia la resistencia del aire. Representando con x_0, y_0, z_0 a las coordenadas del cañón y con $(v_x)_0$, $(v_y)_0$, $(v_z)_0$ a las componentes de la velocidad inicial v_0 del proyectil, integramos dos veces en t y obtenemos

$$\begin{aligned} v_x &= \dot{x} = (v_x)_0 & v_y &= \dot{y} = (v_y)_0 - gt & v_z &= \dot{z} = (v_z)_0 \\ x &= x_0 + (v_x)_0 t & y &= y_0 + (v_y)_0 t - \tfrac{1}{2}gt^2 & z &= z_0 + (v_z)_0 t \end{aligned}$$

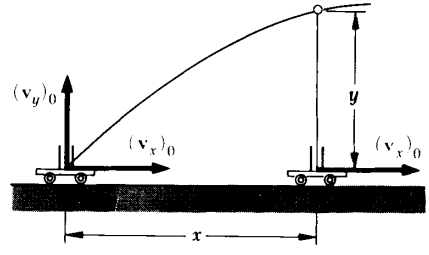
Si el proyectil se dispara en el plano xy desde el origen O, tenemos $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ y $(v_z)_0 = 0$, y las ecuaciones de movimiento se reducen a

$$\begin{aligned} v_x &= (v_x)_0 & v_y &= (v_y)_0 - gt & v_z &= 0 \\ x &= (v_x)_0 t & y &= (v_y)_0 t - \tfrac{1}{2}gt^2 & z &= 0 \end{aligned}$$

Estas ecuaciones muestran que el proyectil permanece en el plano xy y que su movimiento en la dirección horizontal es uniforme, mientras que su movimiento en la dirección vertical es uniformemente acelerado. De manera que el movimiento de un proyectil puede sustituirse por dos movimientos rectilíneos independientes que son fáciles de representar si suponemos que el proyectil se dispara verticalmente con una velocidad inicial $(\mathbf{v}_y)_0$ desde una plataforma y avanza con una velocidad horizontal constante $(\mathbf{v}_x)_0$ (Fig. 11.19). La coordenada x del proyectil es igual en cualquier instante a la distancia recorrida por la plataforma, mientras que su coordenada y puede calcularse como si el proyectil se estuviese moviendo a lo largo de una línea vertical.



a) Movimiento de un proyectil



b) Movimientos rectilíneos equivalentes

Fig. 11.19

Puede observarse que las ecuaciones que definen a las coordenadas x y y de un proyectil en cualquier instante son las ecuaciones paramétricas de una parábola. Entonces la trayectoria del proyectil es *parabólica*, pero este resultado deja de ser válido cuando la resistencia del aire o la variación de la aceleración de la gravedad con la altura se toma en cuenta.

11.12. Movimiento relativo a un sistema de referencia en traslación. En la sección anterior se usó un solo sistema de referencia para describir el movimiento de una partícula. En muchos casos este sistema fue vinculado a la Tierra y se consideró como sistema fijo. Ahora analizaremos situaciones en las que es conveniente usar simultáneamente varios sistemas de referencia. Si uno de ellos está unido a la Tierra lo llamaremos *sistema de referencia fijo* y nos referiremos a los otros como *sistemas de referencia en movimiento*, pero debe entenderse que la selección de un sistema de referencia fijo es arbitraria.

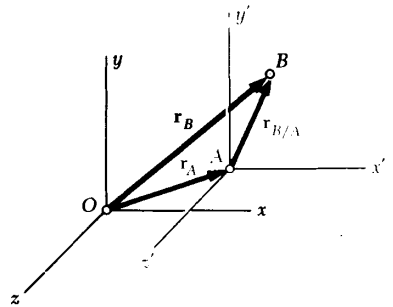


Fig. 11.20

Cualquier sistema de referencia puede designarse como "fijo"; todos los otros que no estén rígidamente vinculados a tal sistema se describirán como sistemas "en movimiento".

Consideremos dos partículas A y B que avanzan en el espacio (Fig. 11.20); los vectores $\mathbf{r}_A$ y $\mathbf{r}_B$ definen sus posiciones en cualquier instante con respecto al sistema de referencia fijo $Oxyz$. Consideremos ahora un sistema de ejes x', y', z' con origen en A y paralelo a los ejes x, y, z. Mientras el origen de estos ejes se mueve, su orientación sigue siendo la misma; el sistema de referencia $Ax'y'z'$ está en *translación* con respecto de $Oxyz$. El vector $\mathbf{r}_{B/A}$ que une a A y a B define *la posición de B relativa al sistema en movimiento* $Ax'y'z'$ (o, en forma breve, *la posición de B relativa a A*).

De la figura 11.20 notamos que el vector de posición $\mathbf{r}_B$ de la partícula B es la suma del vector de posición $\mathbf{r}_A$ de la partícula A y del vector de posición $\mathbf{r}_{B/A}$ de B relativa a A; escribimos

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A} \tag{11.31}$$

Al derivar (11.31) respecto de t dentro del sistema de referencia fijo e indicando con puntos las derivadas temporales, tenemos

$$\dot{\mathbf{r}}_B = \dot{\mathbf{r}}_A + \dot{\mathbf{r}}_{B/A} \tag{11.32}$$

Las derivadas $\dot{\mathbf{r}}_A$ y $\dot{\mathbf{r}}_B$ representan a las velocidades $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$ de las partículas A y B, respectivamente. La derivada $\dot{\mathbf{r}}_{B/A}$ representa a la derivada temporal de $\mathbf{r}_{B/A}$ respecto del sistema $Ax'y'z'$ también respecto del sistema fijo, ya que $Ax'y'z'$ está en translación (sección 11.10). Por consiguiente, esta derivada define a *la velocidad* $\mathbf{v}_{B/A}$ de B *relativa al sistema* $Ax'y'z'$ (o, por brevedad, *a la velocidad* $\mathbf{v}_{B/A}$ de B *relativa a* A); escribimos

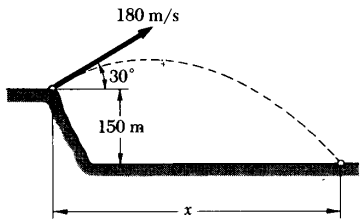
$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} \tag{11.33}$$

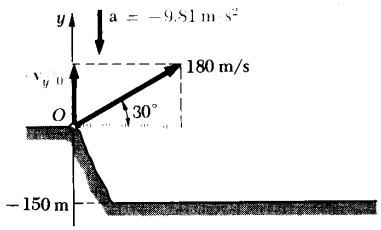
Al derivar la ecuación (11.33) respecto de t y empleando la derivada $\bar{\mathbf{v}}_{B/A}$ para definir *la aceleración* $\mathbf{a}_{B/A}$ *de B relativa al sistema* $Ax'y'z'$ (o, en forma breve, *la aceleración* $\mathbf{a}_{B/A}$ *de B relativa a A*), se obtiene

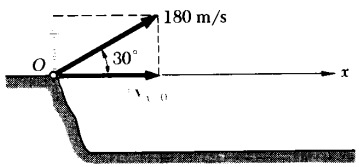
$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A} \tag{11.34}$$

Al movimiento de B con respecto al sistema fijo $Oxyz$ se le llama el *movimiento absoluto de B*. Las ecuaciones obtenidas en esta sección muestran que *el movimiento absoluto de B puede obtenerse combinando el movimiento de A y el movimiento relativo de B con respecto al sistema de referencia en movimiento vinculado a A*. Por ejemplo, la ecuación (11.33) expresa que la velocidad absoluta $\mathbf{v}_B$ de la partícula B puede obtenerse sumando vectorialmente la velocidad de A y la velocidad de B relativa al sistema $Ax'y'z'$. La ecuación (11.34) expresa una propiedad semejante en términos de las aceleraciones.† Debemos recordar, sin embargo, que *el sistema* $Ax'y'z'$ *está en translación*; es decir, mientras se mueve con A mantiene la misma orientación. Como veremos posteriormente (sección 15.14), deben usarse diferentes relaciones en el caso de un sistema de referencia en rotación.

† Nótese que el producto de los subíndices A y B/A que se empleó en el miembro derecho de las ecuaciones (11.31) a la (11.34) es igual al subíndice B que aparece en su miembro izquierdo.







PROBLEMA RESUELTO 11.7

Desde el borde de un acantilado de 150 m se dispara un pro
locidad inicial de 180 m/s, a un ángulo de 30° con la horizc
do la resistencia del aire, encuéntrense: *a*) la distancia horiz
punto donde el proyectil pega en el suelo, *b*) la máxima elev
el proyectil respecto al suelo.

Solución. Consideraremos de forma separada los mc
y horizontal.

Movimiento vertical. Movimiento uniformemente ac
tido positivo del eje y es hacia arriba y colocando el origen
nemos

$$(v_y)_0 = (180 \text{ m/s}) \operatorname{sen} 30° = +90 \text{ m/s}$$
$$a = -9.81 \text{ m/s}^2$$

Sustituyendo en las ecuaciones de movimiento uniformeme
contramos

$$v_y = (v_y)_0 + at \qquad v_y = 90 - 9.81t$$
$$y = (v_y)_0 t + \tfrac{1}{2}at^2 \qquad y = 90t - 4.90t^2$$
$$v_y^2 = (v_y)_0^2 + 2ay \qquad v_y^2 = 8100 - 19.62y$$

Movimiento horizontal. Movimiento uniforme. To
positivo del eje x hacia la derecha, tenemos

$$(v_x)_0 = (180 \text{ m/s}) \cos 30° = +155.9 \text{ m}$$

Sustituyendo en la ecuación del movimiento uniforme ob

$$x = (v_x)_0 t \qquad x = 155.9t$$

a) **Distancia horizontal.** Cuando el proyectil pega e

$$y = -150 \text{ m}$$

Usando este valor en la ecuación (2) para el movimiento v

$$-150 = 90t - 4.90t^2 \qquad t^2 - 18.37t - 30.6 = 0$$

Usando $t = 19.91$ s en la ecuación (4) para el movimiento hor

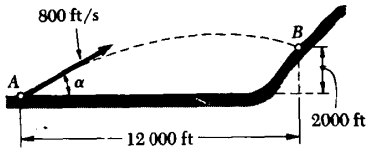
$$x = 155.9(19.91)$$

b) **Elevación máxima.** Cuando el proyectil alcanza
ción $v_y = 0$; sustituyendo este valor en la ecuación (3) p
vertical, escribimos

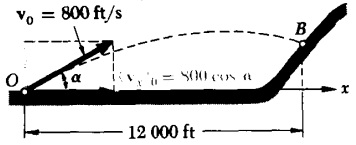
$$0 = 8100 - 19.62y \qquad y = 413 \text{ m}$$

Elevación máxima con respecto al suelo = 150 m +

PROBLEMA RESUELTO 11.8



Se dispara un proyectil con una velocidad inicial de 800 ft/s a un blanco *B* localizado a 2000 ft por arriba del cañón *A* y a una distancia horizontal de 12 000 ft. Despreciando la resistencia del aire, determínese el valor del ángulo de disparo α.



Solución. Consideremos por separado los movimientos horizontal y vertical.

Movimiento horizontal. Colocando el origen de coordenadas en el cañón, tenemos

$$(v_x)_0 = 800 \cos \alpha$$

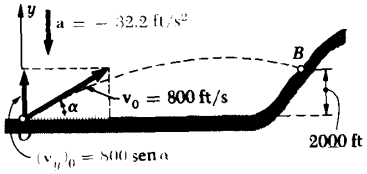
Sustituyendo en la ecuación de movimiento horizontal uniforme, obtenemos

$$x = (v_x)_0 t \qquad x = (800 \cos \alpha)t$$

El tiempo que requiere el proyectil para recorrer una distancia horizontal de 12 000 ft se obtiene haciendo x igual a 12 000 ft.

$$12\,000 = (800 \cos \alpha)t$$

$$t = \frac{12\,000}{800 \cos \alpha} = \frac{15}{\cos \alpha}$$



Movimiento vertical

$$(v_y)_0 = 800 \operatorname{sen} \alpha \qquad a = -32.2 \text{ ft/s}^2$$

Sustituyendo en la ecuación del movimiento vertical uniformemente acelerado, obtenemos

$$y = (v_y)_0 t + \tfrac{1}{2}at^2 \qquad y = (800 \operatorname{sen} \alpha)t - 16.1t^2$$

El proyectil da en el blanco. Cuando $x = 12\,000$ ft, debemos tener $y = 2000$ ft. Sustituyendo el valor de y y haciendo t igual al valor encontrado arriba, escribimos

$$2000 = 800 \operatorname{sen} \alpha \frac{15}{\cos \alpha} - 16.1 \left(\frac{15}{\cos \alpha}\right)^2$$

Como $1/\cos^2 \alpha = \sec^2 \alpha = 1 + \tan^2 \alpha$, tenemos

$$2000 = 800(15) \tan \alpha - 16.1(15^2)(1 + \tan^2 \alpha)$$

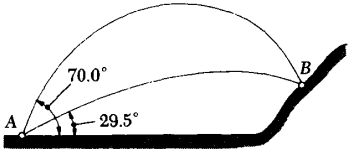
$$3622 \tan^2 \alpha - 12\,000 \tan \alpha + 5622 = 0$$

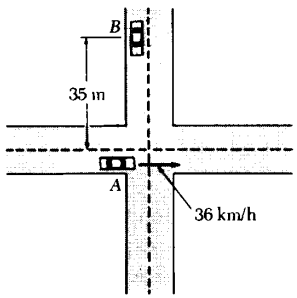
Resolviendo esta ecuación cuadrática para $\tan \alpha$, encontramos

$$\tan \alpha = 0.565 \qquad \text{y} \qquad \tan \alpha = 2.75$$

$$\alpha = 29.5° \qquad \text{y} \qquad \alpha = 70.0°$$

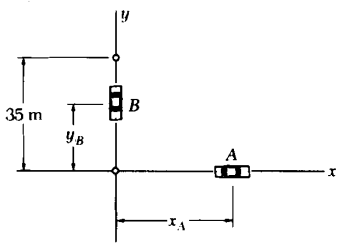
El proyectil dará en el blanco para cualquiera de estos dos ángulos de disparo (véase figura).





PROBLEMA RESUELTO 11.9

El automóvil A viaja hacia el Este con velocidad constante de 36 km/h. Cuando el automóvil A cruza la intersección mostrada, el automóvil B empieza a moverse a 35 m hacia el Norte de la intersección y se dirige hacia el Sur con una aceleración constante de 1.2 m/s^2. Determínense la posición, la velocidad y la aceleración de B relativas a A, cinco segundos después de que A atraviesa la intersección.



Solución. Escogemos los ejes x y y con origen en la intersección de las dos calles y con sentidos positivos dirigidos al Este y al Norte, respectivamente.

Movimiento del automóvil A. En primer lugar, expresamos la velocidad en m/s:

$$v_A = \left(36\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)\left(\frac{1000\text{ m}}{1\text{ km}}\right)\left(\frac{1\text{ h}}{3600\text{ s}}\right) = 10\text{ m/s}$$

Como el movimiento de A es uniforme, escribimos, para cualquier tiempo t,

$$a_A = 0$$
$$v_A = +10\text{ m/s}$$
$$x_A = (x_A)_0 + v_A t = 0 + 10t$$

Para t = 5 s, tenemos

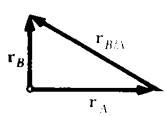
$$a_A = 0 \qquad \mathbf{a}_A = 0$$
$$v_A = +10\text{ m/s} \qquad \mathbf{v}_A = 10\text{ m/s} \rightarrow$$
$$x_A = +(10\text{ m/s})(5\text{ s}) = +50\text{ m} \qquad \mathbf{r}_A = 50\text{ m} \rightarrow$$

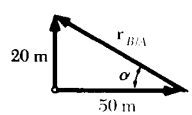
Movimiento del automóvil B. Notamos que el movimiento de B es uniformemente acelerado y escribimos

$$a_B = -1.2\text{ m/s}^2$$
$$v_B = (v_B)_0 + at = 0 - 1.2t$$
$$y_B = (y_B)_0 + (v_B)_0 t + \tfrac{1}{2}a_B t^2 = 35 + 0 - \tfrac{1}{2}(1.2)t^2$$

Para t = 5 s tenemos:

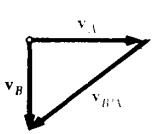
$$a_B = -1.2\text{ m/s}^2 \qquad \mathbf{a}_B = 1.2\text{ m/s}^2 \downarrow$$
$$v_B = -(1.2\text{ m/s}^2)(5\text{ s}) = -6\text{ m/s} \qquad \mathbf{v}_B = 6\text{ m/s} \downarrow$$
$$y_B = 35 - \tfrac{1}{2}(1.2\text{ m/s}^2)(5\text{ s})^2 = +20\text{ m} \qquad \mathbf{r}_B = 20\text{ m} \uparrow$$

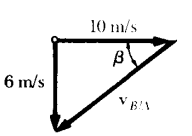




Movimiento de B relativo a A. Trazamos el triángulo correspondiente a la ecuación vectorial $\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A}$ y obtenemos la magnitud y la dirección del vector de posición de B relativo a A.

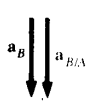
$$r_{B/A} = 53.9\text{ m} \qquad \alpha = 21.8° \qquad \mathbf{r}_{B/A} = 53.9\text{ m} \measuredangle 21.8° \blacktriangleleft$$

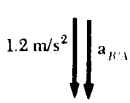




Procediendo en forma semejante encontramos la velocidad y la aceleración de B relativas a A.

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$$
$$v_{B/A} = 11.66\text{ m/s} \qquad \beta = 31.0° \qquad \mathbf{v}_{B/A} = 11.66\text{ m/s} \measuredangle 31.0° \blacktriangleleft$$





$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$
$$\mathbf{a}_{B/A} = 1.2\text{ m/s}^2 \downarrow \blacktriangleleft$$

Problemas

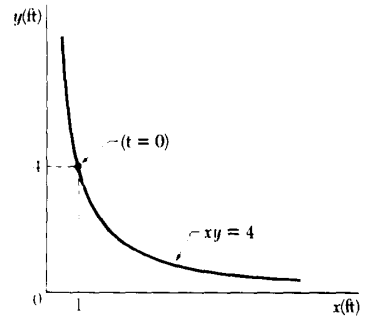


Fig. P11.81

Nota: Despréciese la resistencia del aire en los problemas relacionados con proyectiles.

11.80 El movimiento de una partícula está definido por las ecuaciones $x = 2t^3 - 8t^2$ y $y = 3t^2 - 12t$, donde x y y se expresan en pulgadas y t en segundos. Determínense la velocidad y la aceleración: *a*) cuando $t = 1$ s, *b*) $t = 2$ s y *c*) $t = 3$ s.

11.81 Las ecuaciones que definen el movimiento de una partícula son $x = (t + 1)^2$ y $y = 4(t + 1)^{-2}$, donde x y y se expresan en pies y t en segundos. Demuéstrese que la trayectoria de la partícula es parte de la hipérbola rectangular mostrada y determínese la velocidad y la aceleración cuando *a*) $t = 0$ y *b*) $t = \frac{1}{2}$ s.

11.82 El movimiento de una partícula se define por medio de las ecuaciones $x = t^2 - 8t + 7$ y $y = 0.5t^2 + 2t - 4$, donde x y y se expresan en metros y t en segundos. Determínense *a*) la magnitud de la mínima velocidad alcanzada por la partícula y *b*) el tiempo, posición y dirección de la velocidad correspondientes.

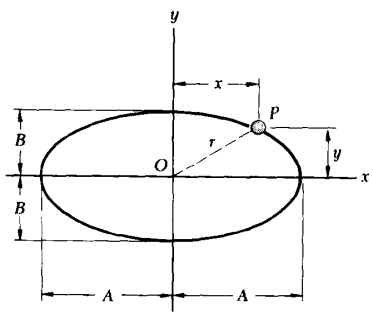


Fig. P11.84

11.83 El movimiento de una partícula se define por las ecuaciones $x = 48 \text{ sen } \frac{1}{2}\pi t$ y $y = 15t^2$, donde x y y se expresan en metros y t en segundos. Determínense la velocidad y aceleración de la partícula cuando *a*) $t = 1$ s, *b*) $t = 2$ s.

11.84 Una partícula se mueve en una trayectoria elíptica definida por el vector de posición $\mathbf{r} = (A \cos pt)\mathbf{i} + (B \text{ sen } pt)\mathbf{j}$. Demuéstrese que la aceleración *a*) se dirige hacia el origen y *b*) es proporcional a la distancia del origen a la partícula.

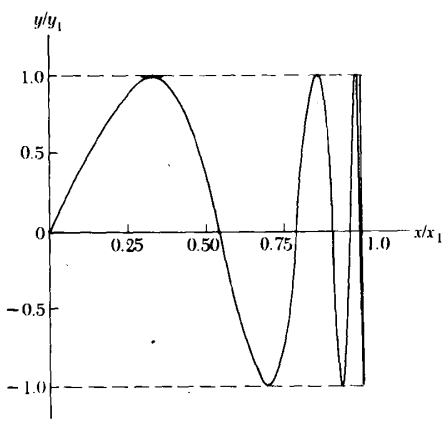


Fig. P11.85

11.85 El movimiento de una partícula vibratoria está definido por el vector de posición $\mathbf{r} = [x_1(1-e^{-\pi t})]\mathbf{i} + (y_1 \text{sen} 4\pi t)\mathbf{j}$, donde t se expresa en segundos. Para $x_1 = 16$ in y $y_1 = 3$ in, determínense la velocidad y aceleración cuando *a*) $t = 0$, *b*) $t = 0.125$ s.

11.86 El movimiento tridimensional de una partícula está definido por el vector de posición $\mathbf{r} = (R\text{sen } pt)\mathbf{i} + (ct)\mathbf{j} + (R\text{cos } pt)\mathbf{k}$. Determínense los módulos de la velocidad y la aceleración de la partícula. La curva descrita en el espacio por la partícula es una hélice.

11.87 El movimiento de una partícula, en tres dimensiones, está definido por el vector de posición $\mathbf{r} = At\mathbf{i} + ABt^3\mathbf{j} + Bt^2\mathbf{k}$, donde $\mathbf{r}$ está expresado en metros y t en segundos. Demuéstrese que la curva descrita en el espacio por la partícula se encuentra en el espacio sobre el paraboloide hiperbólico $y = xz$. Para $A = 1$, $B = 2$, determínense los módulos de la velocidad y la aceleración cuando *a*) $t = 0$ y *b*) $t = 2$ s.

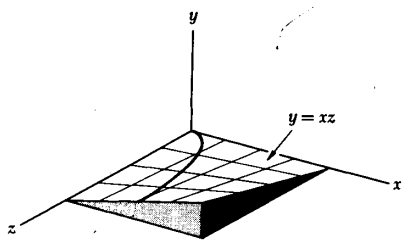


Fig. P11.87

11.88 Un hombre, que está de pie sobre un puente 30 m por encima del nivel del agua, arroja una piedra en dirección horizontal. Si se sabe que la piedra toca el agua 40 m a partir del punto sobre el agua directamente por debajo del hombre, determínense *a*) la velocidad inicial de la piedra y *b*) la distancia a la cual tocaría la piedra el agua si se hubiera arrojado con la misma velocidad desde un puente 10 m más bajo.

11.89 Un jugador de frontón lanza una pelota desde A con una velocidad horizontal v_0. Sabiendo que $d = 15$ ft, determínense *a*) el valor de v_0 para el cual la pelota pegará en la esquina C y *b*) el intervalo de valores v_0 para los cuales la pelota pegará en la región BCD de la esquina.

11.90 Resuélvase el problema 11.89 suponiendo que la distancia del punto A a la pared es $d = 25$ ft.

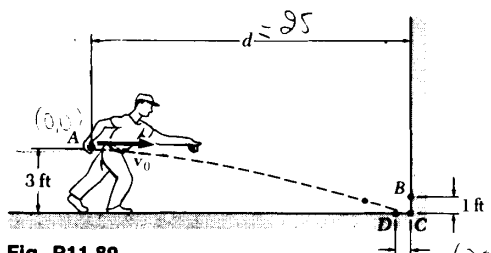


Fig. P11.89

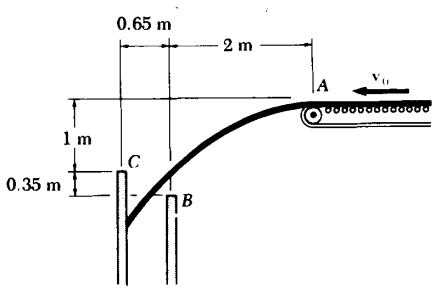


Fig. P11.91

11.91 Se descarga arena en A desde una banda transportadora horizontal con una velocidad inicial v_0. Determínese el intervalo de valores de v_0 para los que la arena caerá en el conducto vertical mostrado en la figura.

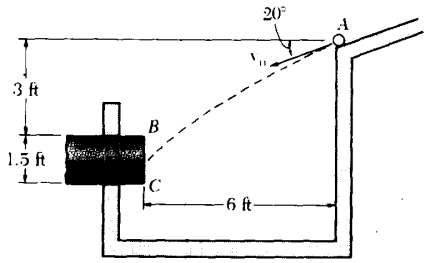


Fig. P11.92

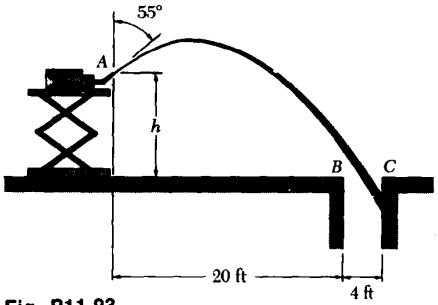


Fig. P11.93

11.92 Después de deslizarse por un declive de 20° una esfera tiene una velocidad v_0 en el punto A. Determínese el rango de valores de v_0 para el cual la esfera entrará en el tubo horizontal que se indica.

11.93 Una bomba se localiza cerca del borde de la plataforma horizontal aquí mostrada. La boquilla en A descarga agua con una velocidad inicial de 25 ft/s a un ángulo de 55° con la vertical. Determínese el intervalo de valores de la altura h para el cual el agua entrará en la abertura BC.

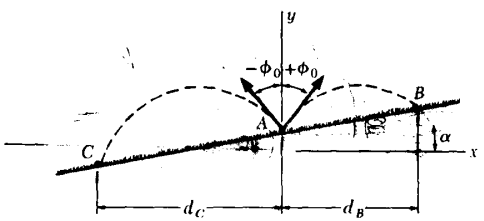


Fig. P11.94

11.94 Un aspersor de agua oscilatorio se opera en el punto A sobre un plano inclinado que forma un ángulo α con la horizontal. El aspersor descarga el agua con una velocidad inicial v_0 con un ángulo ϕ con la vertical que varía de $-\phi_0$ a $+\phi_0$. Sabiendo que $v_0 = 8$ m/s, $\phi = 40°$ y $\alpha = 10°$, determínese la distancia horizontal entre el aspersor y los puntos B y C que delimitan el área regada.

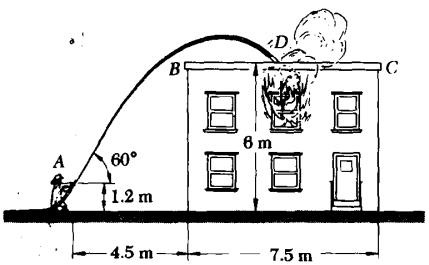


Fig. P11.95

11.95 Una boquilla en A descarga agua con una velocidad inicial de 12 m/s a un ángulo de 60° con la horizontal. Determínese en qué lugar del techo cae el chorro de agua. Compruébese que el chorro librará la orilla del techo.

11.96 En el problema 11.95 encuéntrese el intervalo de valores de la velocidad inicial para el cual el agua caerá en el techo.

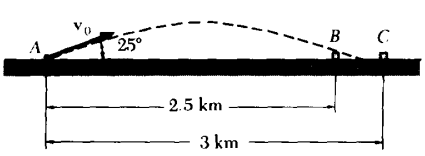


Fig. P11.97

11.97 Un proyectil es disparado con una velocidad inicial v_0 a un ángulo de 25° con la horizontal. Determínese el valor de v_0 que se requiere para que el proyectil pegue en: *a*) el punto A y *b*) el punto C.

11.98 Desde una banda transportadora se descarga arena en A y cae en la punta de un montículo formado en B. Sabiendo que la banda transportadora forma un ángulo $\alpha = 20°$ con la horizontal, determínese la velocidad v_0 de la banda.

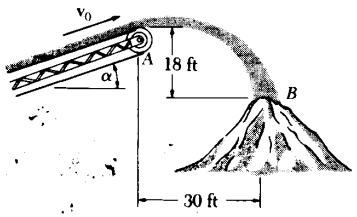


Fig. P11.98, P11.100, y P11.101

11.99 Una pelota lanzada a una plataforma en A rebota con una velocidad v_0 a un ángulo de 70° con la horizontal. Determínese el intervalo de valores de v_0 para el cual la pelota entrará por la abertura BC.

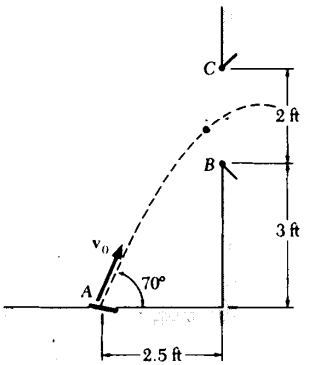


Fig. P11.99

11.100 Sabiendo que la banda transportadora se mueve a una velocidad constante $v_0 = 25$ ft/s, determínese el ángulo α para el cual la arena es depositada sobre el montículo en B.

*11.101 Si la banda transportadora se mueve con velocidad constante v_0, determínense *a*) el valor más pequeño de v_0 para el que la arena se depositará sobre el montículo en B y *b*) el valor correspondiente de α.

*11.102 Un jugador lanza una pelota con una velocidad inicial v_0 de 18 m/s desde el punto A. *a*) Determínese la altura máxima h a la cual golpeará la pelota la pared y *b*) el ángulo α correspondiente.

11.103 Un jugador lanza una pelota con una velocidad inicial v_0 de 18 m/s desde el punto A. Sabiendo que la pelota golpea la pared en una altura $h = 13.5$ m sobre el piso, determínese el ángulo α.

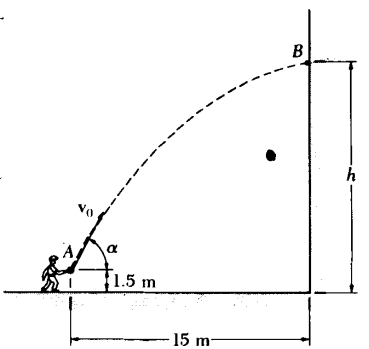


Fig. P11.102 y P11.103

11.104 Un jugador lanza una pelota con una velocidad inicial v_0 de 16 m/s desde un punto A localizado a 1.5 m arriba del piso. Si $h = 3.5$ m, determínese el ángulo α para el cual la pelota pegará en el punto B de la pared.

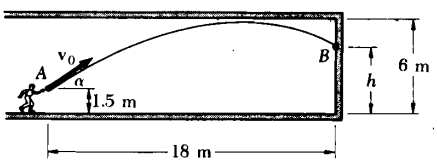


Fig. P11.104 y P11.105

11.105 Un jugador lanza una pelota con una velocidad inicial v_0 de 16 m/s desde un punto A localizado a 1.5 m arriba del piso. Sabiendo que el techo del gimnasio tiene una altura de 6 m, determínese el punto B más alto al que puede pegar la pelota en la pared a 18 m de distancia.

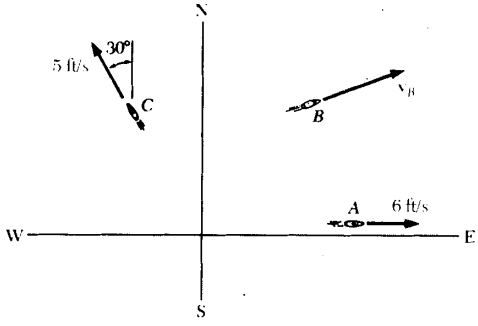


Fig. P11.106

11.106 Las velocidades de las lanchas A y C son las indicadas y la velocidad relativa de la lancha B respecto de A es $\mathbf{v}_{B/A} = 4$ ft/s $\measuredangle 50°$. Determínense: *a*) $\mathbf{v}_{A/C}$, *b*) $\mathbf{v}_{C/B}$ y *c*) el cambio en la posición de B con respecto a C durante un intervalo de 10 s. Muéstrese también que para cualquier movimiento $\mathbf{v}_{B/A} + \mathbf{v}_{C/B} + \mathbf{v}_{A/C} = 0$.

11.107 Los instrumentos en un aeroplano indican que con respecto al aire el aeroplano se mueve al norte con una velocidad de 500 km/h. Al mismo tiempo un radar situado en tierra indica que el aeroplano se mueve a una velocidad de 530 km/h en una dirección 5° al este del norte. Determínense el módulo y la dirección de la velocidad del aire.

11.108 El aeroplano A vuela en dirección este a 700 km/h mientras que el aeroplano B vuela a 500 km/h en la misma altitud y en una dirección al oeste del sur. Si la velocidad de B respecto de A es 1125 km/h, determínese la dirección de la ruta de B.

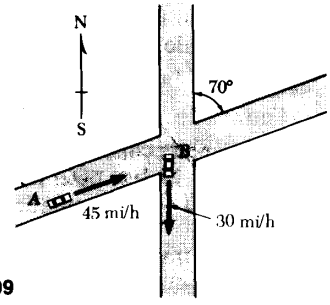


Fig. P11.109

11.109 Tres segundos después de que el automóvil B atraviesa la intersección señalada el automóvil A cruza la misma intersección. Sabiendo que la velocidad de cada automóvil es constante, determínense *a*) la velocidad relativa de B respecto de A, *b*) el cambio de la posición de B respecto de A durante un intervalo de 4 s y *c*) la distancia entre los dos automóviles 2 s después de que A pasó por la intersección.

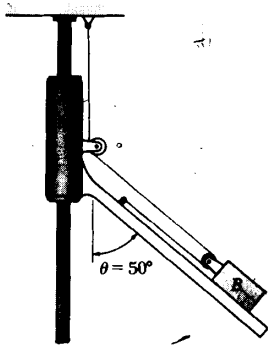


Fig. P11.110

11.110 Si en el instante que se indica el ensamble A tiene una velocidad de 9 in/s y una aceleración de 15 in/s^2 ambas dirigidas hacia abajo, determínense *a*) la velocidad del bloque B y *b*) la aceleración del bloque B.

11.111 El pasador P se mueve con una velocidad constante de 7.5 in/s en un sentido contrario a las manecillas del reloj por una ranura circular que se ha perforado en el bloque deslizante A mostrado. Sabiendo que el bloque se mueve hacia abajo con una velocidad constante de 5 in/s, determínese la velocidad del pasador cuando *a*) $\theta = 30°$ y *b*) $\theta = 120°$.

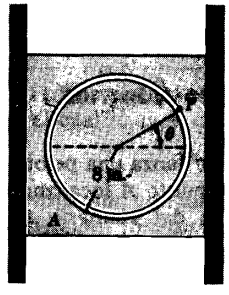


Fig. P11.111

11.112 y 11.113 En $t = 0$ la cuña A empieza a moverse a la izquierda con una aceleración constante de 80 mm/s^2 y el bloque B empieza a deslizarse por la cuña hacia la derecha con una aceleración constante de 120 mm/s^2 relativa a la cuña. Determínense *a*) la aceleración del bloque B y *b*) la velocidad del bloque B cuando $t = 3$ s.

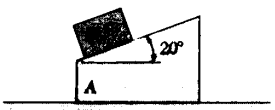


Fig. P11.112

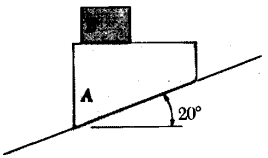


Fig. P11.113

11.114 La banda transportadora A se mueve con una velocidad constante y descarga arena sobre la banda B como se indica. Si la velocidad de la banda B es 8 ft/s, determínese la velocidad de la arena relativa a la banda B en el momento que cae sobre ella.

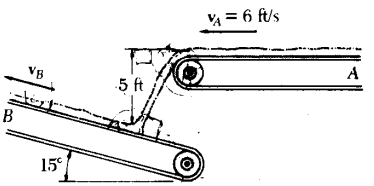


Fig. P11.114 y P11.115

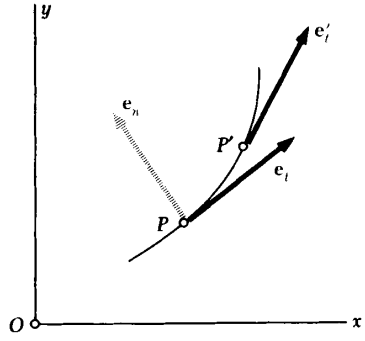
11.115 Determínese la velocidad requerida de la banda B si la velocidad relativa con que la arena golpea la banda debe ser *a*) vertical y *b*) tan pequeña como sea posible.

11.116 Desde un barco que navega hacia el este a 9 km/h, el viento parece soplar del sur. Desde que el barco ha cambiado su curso y rapidez, y que se está moviendo hacia el norte a 6 km/h el viento parece soplar desde el suroeste. Suponiendo que la velocidad del viento es constante durante el periodo de observación, determínense el módulo y dirección de la velocidad real del viento.

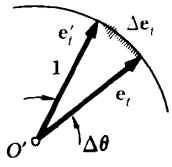
11.117 Una lancha pequeña de motor mantiene una rapidez constante de 1.5 m/s relativa al agua, al estar maniobrando en una corriente de marea. Cuando la lancha se dirige hacia el este, se observa desde la playa que se mueve hacia el sur y cuando se dirige hacia el noroeste se le ve moverse hacia el oeste. Determínese la velocidad y dirección de la corriente.

11.118 Durante una tormenta la trayectoria de las gotas de agua parecen formar un ángulo de 30° con la vertical y dirigirse hacia la izquierda al ser observadas desde una ventana lateral de un tren que se mueve con una velocidad de 10 mi/h. Después de que la velocidad del tren ha aumentado a 16 mi/h el ángulo entre la vertical y la trayectoria de las gotas parece ser de 45°. Si el tren se hubiera frenado, ¿a qué ángulo y con qué velocidad se observaría caer a las gotas?

11.119 Conforme aumente la velocidad del tren del problema 11.118, el ángulo entre la vertical y la trayectoria de las gotas se hace igual a 60°. Determínese la velocidad del tren en ese momento.



a)



b)

Fig. 11.21

11.13. Componentes tangencial y normal. En la sección 11.9 vimos que la velocidad de una partícula es un vector tangente a la trayectoria de la partícula, pero que, en general, la aceleración no es tangente a la trayectoria. Algunas veces es conveniente descomponer el vector aceleración en componentes dirigidas respectivamente a lo largo de la tangente y normal a la trayectoria de la partícula.

Movimiento de una partícula en un plano. Consideraremos primero a una partícula que se mueve a lo largo de una curva contenida en el plano de la figura. Sea P la posición de la partícula en un instante dado. Unimos a P un vector unitario $\mathbf{e}_t$ tangente a la trayectoria de la partícula y con sentido hacia la dirección del movimiento (Fig. 11.21*a*). Sea $\mathbf{e}'_t$ el vector unitario correspondiente a la posición P' de la partícula un instante después. Trazando ambos vectores desde el mismo origen O' definimos el vector $\Delta\mathbf{e}_t = \mathbf{e}'_t - \mathbf{e}_t$ (Fig. 11.21*b*). Como $\mathbf{e}_t$ y $\mathbf{e}'_t$ son de módulo unidad, sus extremos se encuentran sobre un círculo de radio 1. Representando por $\Delta\theta$ el ángulo por $\mathbf{e}_t$ y $\mathbf{e}'_t$, encontramos que la magnitud de $\Delta\mathbf{e}_t$ es 2 sen $(\Delta\theta/2)$. Considerando ahora el vector $\Delta\mathbf{e}_t/\Delta\theta$, notamos que conforme $\Delta\theta$ tiende a cero, este vector se vuelve tangente al círculo unitario de la figura 11.21*b*, es decir, perpendicular a $\mathbf{e}_t$, y que su magnitud se aproxima a

$$\lim_{\Delta\theta\to 0} \frac{2 \operatorname{sen}(\Delta\theta/2)}{\Delta\theta} = \lim_{\Delta\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\Delta\theta/2)}{\Delta\theta/2} = 1$$

Entonces, el vector obtenido en el límite es un vector unitario a lo largo de la normal a la trayectoria de la partícula, en la dirección hacia la cual $\mathbf{e}_t$ cambia. Representando este vector por $\mathbf{e}_n$, escribimos

$$\mathbf{e}_n = \lim_{\Delta\theta\to 0} \frac{\Delta\mathbf{e}_t}{\Delta\theta}$$

$$\mathbf{e}_n = \frac{d\mathbf{e}_t}{d\theta} \tag{11.35}$$

Como la velocidad $\mathbf{v}$ de la partícula es tangente a la trayectoria, podemos expresarlo como el producto del escalar v y el vector unitario $\mathbf{e}_t$. Tenemos

$$\mathbf{v} = v\mathbf{e}_t \tag{11.36}$$

Para obtener la aceleración de la partícula derivamos (11.36) respecto a t. Aplicando la regla para la derivación del producto de un escalar y de una función vectorial (sección 11.10), escribimos

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\mathbf{e}_t + v\frac{d\mathbf{e}_t}{dt} \tag{11.37}$$

Pero

$$\frac{d\mathbf{e}_t}{dt} = \frac{d\mathbf{e}_t}{d\theta}\frac{d\theta}{ds}\frac{ds}{dt}$$

Recordando de (11.16) que $ds/dt = v$, de (11.35) que $d\mathbf{e}_t/d\theta = \mathbf{e}_n$ y del cálculo elemental que $d\theta/ds$ es igual a $1/\rho$, donde ρ es el radio de curvatura de la trayectoria en P(Fig. 11.22), tenemos

$$\frac{d\mathbf{e}_t}{dt} = \frac{v}{\rho}\mathbf{e}_n \tag{11.38}$$

Sustituyendo en (11.37), tenemos

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\mathbf{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{e}_n \tag{11.39}$$

Así que las componentes escalares de la aceleración son

$$a_t = \frac{dv}{dt} \qquad a_n = \frac{v^2}{\rho} \tag{11.40}$$

Las relaciones obtenidas expresan que *la componente tangencial* de la aceleración es igual a la *derivada temporal de la velocidad de la partícula,* mientras que la *componente normal* es igual al *cuadrado de la velocidad dividido entre el radio de curvatura de la trayectoria en P.* Dependiendo si la velocidad de la partícula aumenta o disminuye, a_t es positiva o negativa y la componente vectorial $\mathbf{a}_t$ apunta en la dirección del movimiento o en contra de éste. Por su parte, la componente vectorial $\mathbf{a}_n$ *siempre se dirige hacia el centro de la curvatura C de la trayectoria* (Fig. 11.23).

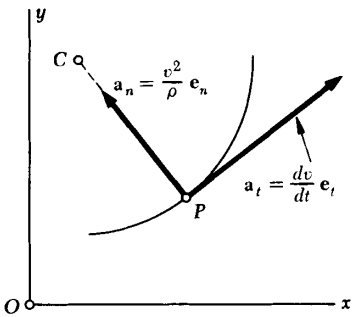


Fig. 11.23

De lo anterior aparece que la componente tangencial de la aceleración refleja un cambio en la velocidad de la partícula mientras que su componente normal refleja un cambio en la dirección del movimiento de la partícula. La aceleración de la partícula será cero sólo si ambas componentes son cero. Entonces la aceleración de una partícula, que se mueve con velocidad constante en trayectoria curva, no será cero a menos que la partícula pase por un punto de inflexión de la curva (donde el radio de curvatura es infinito) o a menos que la curva sea una línea recta.

El hecho de que la componente normal de la aceleración dependa del radio de curvatura de la trayectoria seguida por la partícula, se toma en consideración en el diseño de estructuras o mecanismos tan diferentes como las alas de aviones, las vías de ferrocarril y las levas. Para evitar cambios repentinos en la aceleración de las partículas de aire que fluyen por un ala, los perfiles de las alas se diseñan sin ningún cambio brusco en curvatura. Se tiene un cuidado semejante en el diseño de las curvas de vías de los ferrocarriles, para evitar cambios bruscos en la aceleración de los vagones (que podrían dañar el equipo

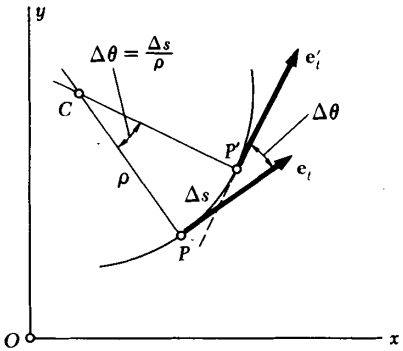


Fig. 11.22



y ser desagradables para los pasajeros). Por ejemplo, a una sección recta de vía nunca le sigue una sección circular inmediatamente después. Se usan secciones especiales de transición para ayudar a pasar suavemente, desde un radio infinito de curvatura de la sección recta, al radio finito de una vía circular. Del mismo modo, en el diseño de levas de alta velocidad se evitan cambios bruscos de aceleración usando curvas de transición que producen un cambio continuo en la aceleración.

Movimiento de una partícula en el espacio. Las relaciones (11.39) y (11.40) se satisfacen también en el caso de una partícula que se mueve a lo largo de una curva en el espacio. Pero como existe un número infinito de líneas rectas que son perpendiculares a la tangente en un punto P dado de una curva en el espacio, se necesita definir con mayor precisión la dirección del vector unitario $\mathbf{e}_n$.

Consideremos nuevamente los vectores unitarios $\mathbf{e}_t$ y $\mathbf{e}'_t$ tangente a la trayectoria de la partícula en dos puntos próximos P y P' (Fig. 11.24*a*), y al vector $\Delta\mathbf{e}_t$ que representa a la diferencia entre $\mathbf{e}_t$ y $\mathbf{e}'_t$ (Fig. 11.24*b*).

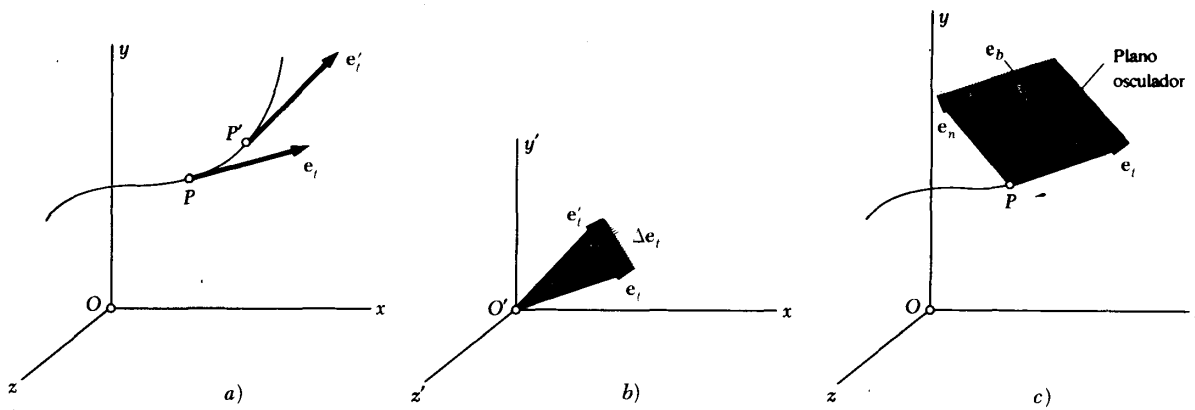


Fig. 11.24

Imaginemos ahora un plano que pasa por P (Fig. 11.24*a*) paralelo al plano definido por los vectores $\mathbf{e}_t$, $\mathbf{e}'_t$ y $\Delta\mathbf{e}_t$ (Fig. 11.24*b*). Este plano contiene a la tangente a la curva en P y es paralela a la tangente en P'. Si dejamos que P' tienda a P obtenemos en el límite, el plano que se ajusta a la curva más próxima de P. A este plano se le llama *plano osculador* en P.† De esta definición se sigue que el plano osculador contiene al vector unitario $\mathbf{e}_n$, ya que este vector representa el límite del vector $\Delta\mathbf{e}_t/\Delta\theta$. La normal definida por $\mathbf{e}_n$ está entonces contenida en el plano osculador, y se le llama *normal principal* en P. El vector unitario $\mathbf{e}_b = \mathbf{e}_t \times \mathbf{e}_n$ que completa la triada derecha $\mathbf{e}_t$, $\mathbf{e}_n$, $\mathbf{e}_b$ (Fig. 11.24*c*) define a la *binormal* en P. La binormal es entonces perpendicular al plano osculador. Concluimos que, como se estableció en (11.39), la aceleración de la partícula en P puede descomponerse en dos componentes, una a lo largo de la tangente y otra a lo largo de la normal principal en P. La aceleración no tiene componente a lo largo de la binormal.

† Del latín *osculari*, contener.

11.14. Componentes radial y transversal. En algunos problemas de movimiento en un plano la posición de la partícula P se define por sus coordenadas polares r y θ (Fig. 11.25*a*). Entonces es conveniente descomponer la velocidad y la aceleración de la partícula en sus componentes paralela y perpendicular, respectivamente, a la línea OP. A estas componentes se les llama *componentes radial* y *transversal*.

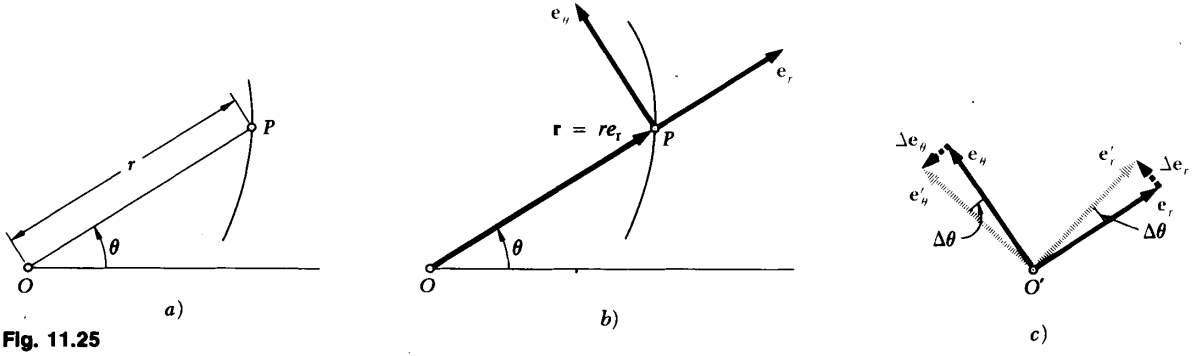


Fig. 11.25

Unimos a P dos vectores unitarios $\mathbf{e}_r$ y $\mathbf{e}_\theta$ (Fig. 11.25*b*). El vector $\mathbf{e}_r$ se dirige a lo largo de OP y el vector $\mathbf{e}_\theta$ se obtiene girando $\mathbf{e}_r$ un ángulo de 90° en movimiento retrógrado. El vector unitario $\mathbf{e}_r$ define la dirección *radial*, es decir, la dirección en la que P se movería si r fuese a aumentar manteniendo θ constante; el vector unitario $\mathbf{e}_\theta$ define la dirección *transversal*, es decir, la dirección en la que P se movería si θ aumentara manteniendo r constante. Siguiendo un procedimiento similar al empleado en la sección 11.13 para determinar la derivada del vector unitario $\mathbf{e}_t$ obtenemos las relaciones

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{d\theta} = \mathbf{e}_\theta \qquad \frac{d\mathbf{e}_\theta}{d\theta} = -\mathbf{e}_r \tag{11.41}$$

donde $-\mathbf{e}_r$ representa a un vector unitario de sentido opuesto al de $\mathbf{e}_r$ (Fig. 11.25*c*). Empleando la regla de la cadena para la derivación, expresamos a las derivadas temporales de los vectores unitarios $\mathbf{e}_r$ y $\mathbf{e}_\theta$ en la forma siguiente:

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \frac{d\mathbf{e}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \mathbf{e}_\theta\frac{d\theta}{dt} \qquad \frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} = \frac{d\mathbf{e}_\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -\mathbf{e}_r\frac{d\theta}{dt}$$

o, usando puntos para indicar la derivación respecto a t,

$$\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\theta}\mathbf{e}_\theta \qquad \dot{\mathbf{e}}_\theta = -\dot{\theta}\mathbf{e}_r \tag{11.42}$$

Para obtener la velocidad $\mathbf{v}$ de la partícula P, expresamos el vector de posición $\mathbf{r}$ de P como el producto del escalar r y el vector unitario $\mathbf{e}_r$ y derivamos respecto de t:

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt}(r\mathbf{e}_r) = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\mathbf{e}}_r$$

o, recordando la primera de las relaciones (11.42),

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta \tag{11.43}$$

Si se deriva otra vez respecto de t para obtener la aceleración, escribimos

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \ddot{r}\mathbf{e}_r + \dot{r}\dot{\mathbf{e}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\mathbf{e}}_\theta$$

o, sustituyendo los valores de $\dot{\mathbf{e}}_r$ y $\dot{\mathbf{e}}_\theta$ de (11.42) y sacando factor común $\mathbf{e}_r$ y $\mathbf{e}_\theta$,

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta \tag{11.44}$$

Las componentes escalares de la velocidad y de la aceleración en las direcciones radial y transversal son por consiguiente

$$v_r = \dot{r} \qquad v_\theta = r\dot{\theta} \tag{11.45}$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \qquad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \tag{11.46}$$

Es importante notar que a_r *no* es igual a la derivada temporal de v_r y que a_θ *tampoco* es igual a la derivada temporal de v_θ.

En el caso de una partícula que se mueve en un círculo de centro O, tenemos que r = constante, $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ y las fórmulas (11.43) y (11.44) se reducen, respectivamente, a

$$\mathbf{v} = r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta \qquad \mathbf{a} = -r\dot{\theta}^2\mathbf{e}_r + r\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta \tag{11.47}$$

Extensión al movimiento de una partícula en el espacio: coordenadas cilíndricas. Algunas veces, la posición en el espacio de una partícula P se define por sus coordenadas cilíndricas R, θ y z (Fig. 11.26*a*). En esos casos es conveniente usar los vectores unitarios $\mathbf{e}_R$, $\mathbf{e}_\theta$, y $\mathbf{k}$ mostrados en la figura 11.26*b*. Descomponiendo al vector de posición $\mathbf{r}$ de la partícula P en sus componentes a lo largo de estos vectores unitarios, escribimos

$$\mathbf{r} = R\mathbf{e}_R + z\mathbf{k} \tag{11.48}$$

Observando que $\mathbf{e}_R$ y $\mathbf{e}_\theta$ definen a las direcciones radial y transversal respectivamente en el plano horizontal xy, y que el vector $\mathbf{k}$ que define la dirección *axial* es constante tanto en la dirección como en módulo, comprobamos fácilmente que

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{R}\mathbf{e}_R + R\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{z}\mathbf{k} \tag{11.49}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = (\ddot{R} - R\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_R + (R\ddot{\theta} + 2\dot{R}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta + \ddot{z}\mathbf{k} \tag{11.50}$$

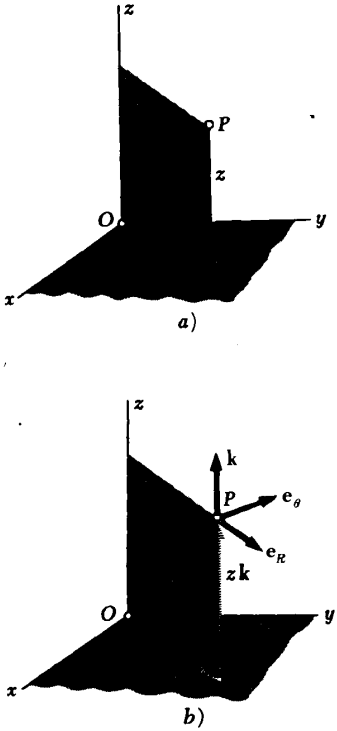
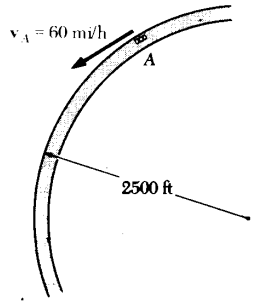


Fig. 11.26



PROBLEMA RESUELTO 11.10

Un automovilista está viajando sobre una sección curva de una autopista, de radio 2 500 ft, a la velocidad de 50 mi/h. El automovilista frena repentinamente haciendo que el automóvil decelere uniformemente. Sabiendo que 8 s después la velocidad se ha reducido a 45 mi/h, determínese la aceleración del automóvil inmediatamente después de que se aplican los frenos.

Componente tangencial de la aceleración. En primer lugar expresamos las velocidades en ft/s.

$$60 \text{ mi/h} = \left(60 \frac{\text{mi}}{\text{h}}\right)\left(\frac{5280 \text{ ft}}{1 \text{ mi}}\right)\left(\frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}}\right) = 88 \text{ ft/s}$$

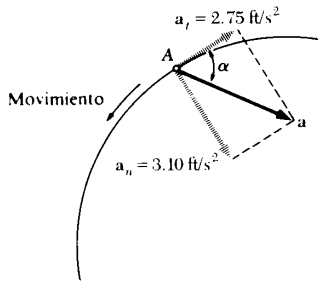
$$45 \text{ mi/h} = 66 \text{ ft/s}$$

Como el automóvil desacelera uniformemente, tenemos

$$a_t = a_t \text{ media} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{66 \text{ ft/s} - 88 \text{ ft/s}}{8 \text{ s}} = -2.75 \text{ ft/s}^2$$

Componente normal de la aceleración. Inmediatamente después que los frenos se han aplicado, la velocidad sigue siendo 88 ft/s, de manera que

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(88 \text{ ft/s})^2}{2500 \text{ ft}} = 3.10 \text{ ft/s}^2$$



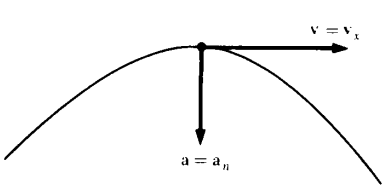
Módulo y dirección de la aceleración. El módulo y la dirección de la **a** resultante de las componentes $\mathbf{a}_n$ y $\mathbf{a}_t$ son

$$\tan \alpha = \frac{a_n}{a_t} = \frac{3.10 \text{ ft/s}^2}{2.75 \text{ ft/s}^2} \qquad \alpha = 48.4° \blacktriangleleft$$

$$a = \frac{a_n}{\text{sen } \alpha} = \frac{3.10 \text{ ft/s}^2}{\text{sen } 48.4°} \qquad a = 4.14 \text{ ft/s}^2 \blacktriangleleft$$

PROBLEMA RESUELTO 11.11

Determínese el radio de curvatura mínimo de la trayectoria descrita por el proyectil considerado en el problema resuelto 11.7.

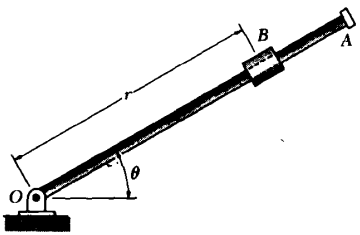


Solución. Como $a_n = v^2/\rho$, tenemos $\rho = v^2/a_n$. El radio será pequeño cuando v sea pequeña o cuando a_n sea grande. La velocidad v es mínima en la parte más alta de la trayectoria, ya que $v_y = 0$ en ese punto; a_n es máxima en ese mismo punto porque la dirección de la vertical coincide con la dirección de la normal. Por consiguiente, el mínimo radio de curvatura se tiene en la parte más alta de la trayectoria. En este punto tenemos

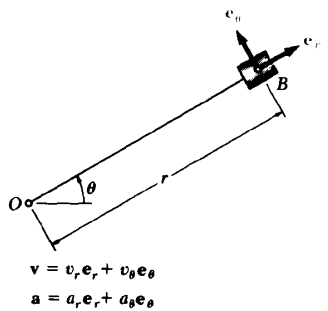
$$v = v_x = 155.9 \text{ m/s} \qquad a_n = a = 9.81 \text{ m/s}^2$$

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{(155.9 \text{ m/s})^2}{9.81 \text{ m/s}^2} \qquad \rho = 2480 \text{ m} \blacktriangleleft$$

PROBLEMA RESUELTO 11.12



El giro de la barra OA de 0.9 m con respecto de O está definido por la relación $\theta = 0.15t^2$, donde θ se expresa en radianes y t en segundos. El collarín B resbala a lo largo del brazo en tal forma que su distancia desde O es $r = 0.9 - 0.12t^2$, con r expresada en metros y t en segundos. Después de que la barra OA ha girado 30°, determinense: *a*) la velocidad total del collarín, *b*) la aceleración total del collarín y *c*) la aceleración relativa del collarín con respecto a la barra.

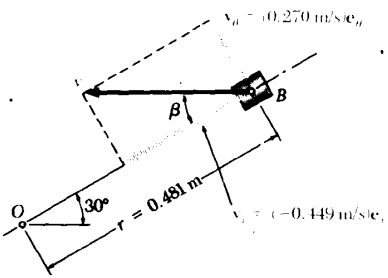


Solución. Encontramos primero el tiempo t en el que $\theta = 30° = 0.524$ rad en la expresión para θ, obtenemos

$$\theta = 0.15t^2 \qquad 0.524 = 0.15t^2 \qquad t = 1.869 \text{ s}$$

Ecuaciones de movimiento. Sustituyendo $t = 1.869$ s en las expresiones para r, θ y sus primeras y segundas derivadas, tenemos

$$\begin{aligned} r &= 0.9 - 0.12t^2 = 0.481 \text{ m} & \theta &= 0.15t^2 = 0.524 \text{ rad} \\ \dot{r} &= -0.24t = -0.449 \text{ m/s} & \dot{\theta} &= 0.30t = 0.561 \text{ rad/s} \\ \ddot{r} &= -0.24 = -0.240 \text{ m/s}^2 & \ddot{\theta} &= 0.30 = 0.300 \text{ rad/s}^2 \end{aligned}$$

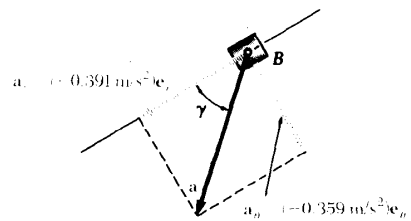


a) *Velocidad de B.* Usando las ecuaciones (11.45) obtenemos los valores de v_r y v_θ cuando $t = 1.869$ s.

$$\begin{aligned} v_r &= \dot{r} = -0.449 \text{ m/s} \\ v_\theta &= r\dot{\theta} = 0.481(0.561) = 0.270 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Resolviendo el triángulo rectángulo mostrado obtenemos el módulo y la dirección de la velocidad,

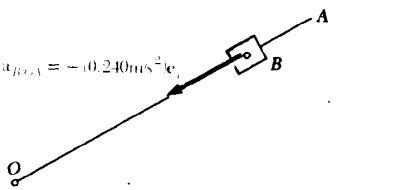
$$v = 0.524 \text{ m/s} \qquad \beta = 31.0° \quad \blacktriangleleft$$



b) *Aceleración de B.* Haciendo uso de las ecuaciones (11.46) obtenemos

$$\begin{aligned} a_r &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ &= -0.240 - 0.481(0.561)^2 = -0.391 \text{ m/s}^2 \\ a_\theta &= r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \\ &= 0.481(0.300) + 2(-0.449)(0.561) = -0.359 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

$$a = 0.531 \text{ m/s}^2 \qquad \gamma = 42.6° \quad \blacktriangleleft$$



c) *Aceleración de B con respecto a la barra OA.* Notamos que el movimiento del collarín con respecto al brazo es rectilíneo y está definido por la coordenada r. Escribimos

$$a_{B/OA} = \ddot{r} = -0.240 \text{ m/s}^2$$

$$a_{B/OA} = 0.240 \text{ m/s}^2 \text{ hacia } O. \quad \blacktriangleleft$$

Problemas

11.120 ¿Cuál es el radio mínimo que puede usarse en una curva de una carretera para que la componente normal de la aceleración de un coche que se mueve a 45 mi/h no exceda 2.4 ft/s²?

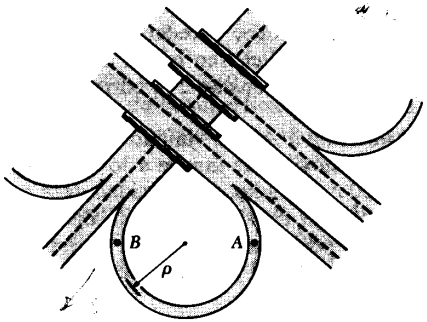


Fig. P11.121

11.121 Un automovilista conduce por la rampa de una salida circular de una autopista a una velocidad constante v_0. Si el odómetro indica una distancia de 0.8 km entre el punto A donde el automóvil se dirige hacia el sur y el punto B donde va hacia el norte, determínese la velocidad v_0 para la cual la componente normal de la aceleración es 0.1 g.

11.122 Determínese la velocidad periférica de la cabina de pruebas centrífuga A para la cual la componente normal de la aceleración es 10 g.

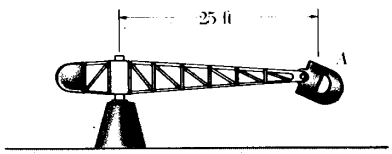


Fig. P11.122

11.123 Una cinta de computadora se mueve sobre dos tambores con una velocidad constante v_0. Si la componente normal de la aceleración de la porción de la cinta en contacto con el tambor B es 480 ft/s², determínense *a*) la velocidad v_0 y *b*) la componente normal de la aceleración de la porción de la cinta en contacto con el tambor A.

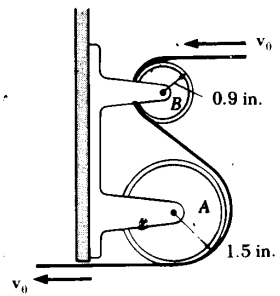


Fig. P11.123

11.124 Un automovilista está viajando sobre una porción curva de una carretera de 350 m de radio con una velocidad de 72 km/h. Se aplican repentinamente los frenos ocasionando una disminución en la velocidad a razón de 1.25 m/s². Determínese el módulo de la aceleración total del automóvil *a*) inmediatamente después de que los frenos se aplicaron y *b*) 4 s después.

11.125 Un autobús parte del reposo sobre una curva de 300 m de radio y acelera uniformemente a $a_t = 0.75$ m/s². Determínense la distancia y el tiempo que el autobús viajará antes de que el módulo de su aceleración total sea de 0.9 m/s².

11.126 La velocidad de un automóvil de carreras se incrementa de manera constante, de 60 mi/h a 75 mi/h, durante una distancia de 600 ft a lo largo de una curva de 800 ft de radio. Determínese el módulo de la aceleración total del automóvil después de recorrer 400 ft a lo largo de la curva.

11.127 Un tren monorraíl parte del reposo sobre una curva de radio 1200 ft y acelera uniformemente a una tasa a_t. Si la aceleración total máxima del tren no debe exceder 4 ft/s², determínense *a*) la mínima distancia en la cual el tren puede alcanzar la velocidad de 45 mi/h y *b*) la aceleración constante a_t correspondiente.

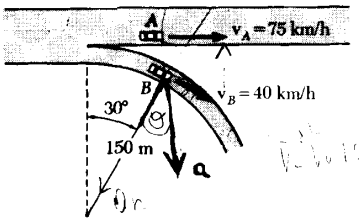


Fig. P11.128

11.128 El automóvil *A* está viajando por una carretera recta, mientras que el automóvil *B* se mueve a lo largo de una rampa de salida circular de 150 m de radio. La velocidad de *A* está aumentando a razón de 1.5 m/s² y la rapidez de *B* está disminuyendo a razón de 0.9 m/s². Para la posición que aquí se muestra, determínese *a*) la velocidad de *A* relativa a *B* y *b*) la aceleración de *A* relativa a *B*.

11.129 Resuélvase el problema 11.128 suponiendo que la velocidad de *B* es de 20 km/h y que está decelerando a razón de 0.9 m/s².

11.130 Una boquilla descarga un chorro de agua en la dirección indicada con una velocidad inicial de 25 ft/s. Determínese el radio de curvatura del chorro *a*) cuando sale de la boquilla y *b*) en la máxima altura del chorro.

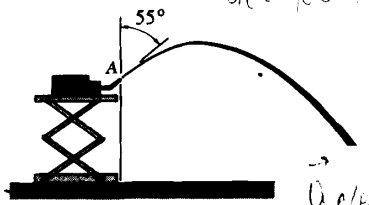


Fig. P11.130

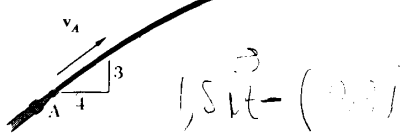


Fig. P11.131

11.131 De las medidas de una fotografía se encontró que al salir de la boquilla en *A* el chorro de agua tenía un radio de curvatura de 35 m. Determínense *a*) la velocidad inicial v_A del chorro y *b*) el radio de curvatura del chorro en su máxima altura.

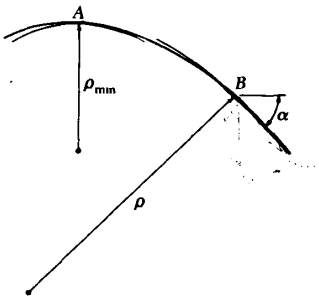


Fig. P11.133

11.132 Determínese el radio de curvatura de la trayectoria descrita por el proyectil del problema de repaso 11.7 *a*) cuando el proyectil sale del cañón y *b*) en la máxima elevación del proyectil.

11.133 *a*) Demuéstrese que el radio de curvatura de la trayectoria de un proyectil alcanza su valor mínimo en el punto más alto *A* de la trayectoria. *b*) Simbolizando con α el ángulo formado por la trayectoria y la horizontal en un punto *B* dado, demuéstrese que el radio de curvatura de la trayectoria B es $\rho = \rho_{min}/\cos^3 \alpha$.

*11.134 Determínese el radio de curvatura de la hélice del problema 11.86.

*11.135 Determínese el radio de curvatura de la trayectoria descrita por la partícula del problema 11.87 para *a*) $t = 0$, *b*) $t = 2$ s.

11.136 Un satélite viajará indefinidamente en una órbita circular alrededor de la Tierra si la componente normal de su aceleración igual a $g(R/r)^2$, donde $g = 32.2$ ft/s^2, R = radio de la Tierra = 3960 mi y r = distancia del centro de la Tierra al satélite. Determínese la altura por arriba de la superficie de la Tierra a la que viaja el satélite indefinidamente alrededor de la Tierra con una velocidad de 16 000 mi/h.

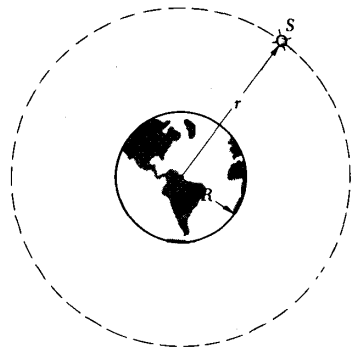


Fig. P11.136

11.137 Determínese la velocidad de un transporte espacial que recorre una órbita circular a 140 mi de la superficie de la Tierra. (Véase la información en el problema 11.136.)

11.138 Demuéstrese que la velocidad de un satélite de la Tierra que describe una órbita circular es inversamente proporcional a la raíz cuadrada del radio de su órbita. Si el radio de la Tierra es de 6370 km y $g = 9.81$ m/s^2, determínese el tiempo mínimo requerido por el satélite para dar una vuelta a la Tierra. (Véase la información del problema 11.136.)

11.139 Suponiendo que la órbita de la Luna es un círculo de radio 384×10^3 km, determínese la velocidad de la Luna en relación con la Tierra. (Véase la información contenida en los problemas 11.136 y 11.138.)

11.140 La rotación de la barra OA con respecto de O está definida por la relación $\theta = 2t^2$, donde θ se expresa en radianes y t en segundos. El collarín B resbala por la barra en tal forma que su distancia desde O es $r = 60t^2 - 20t^3$, donde r se expresa en pulgadas y t en segundos. Cuando $t = 1$ s, determínense *a*) su velocidad, *b*) su aceleración total y *c*) su aceleración en relación con la barra.

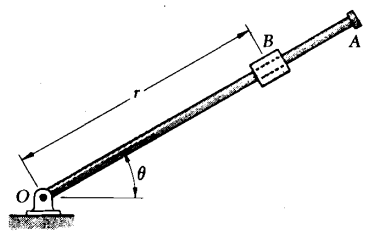


Fig. P11.140 y P11.141

11.141 La rotación de la barra OA respecto de O se define por la relación $\theta = \frac{1}{2}\pi(4t - 3t^2)$, donde θ se expresa en radianes y t en segundos. El collarín B se desliza a lo largo de la barra de manera tal que su distancia desde O es $r = 1.25t^2 - 0.9t^3$, donde r se expresa en metros y t en segundos. Para $t = 1$ s, determínense: *a*) su velocidad, *b*) su aceleración total y *c*) su aceleración relativa a la barra.

11.142 El movimiento bidimensional de una partícula se define por las relaciones $r = 2b \cos \omega t$ y $\theta = \omega t$, donde b y ω son constantes. Determínense *a*) la velocidad y la aceleración de la partícula en cualquier instante y *b*) el radio de curvatura de su trayectoria. ¿Qué conclusión se puede obtener respecto a la trayectoria de la partícula?

11.143 La trayectoria de una partícula es una espiral de Arquímedes. El movimiento de la partícula se define por las relaciones $r = 10t$, $\theta = 2\pi t$, donde r se expresa en pulgadas, t en segundos y θ en radianes. Determínense la velocidad y la aceleración de la partícula cuando *a*) $t = 0$ y *b*) $t = 0.25$ s.

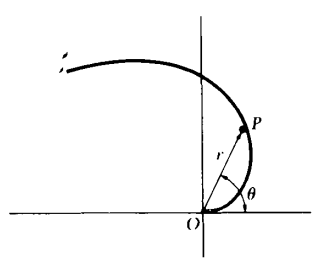


Fig. P11.143

11.144 Conforme el círculo B rota sobre el círculo fijo A, el punto P describe un cardioide definido por las relaciones $r = 2b\,(1 + \cos \frac{1}{2}\pi t)$ y $\theta = \frac{1}{2}\pi t$, donde t se expresa en segundos. Determínense la velocidad y la aceleración de P cuando *a*) $t = 0$ y *b*) $t = 1$ s.

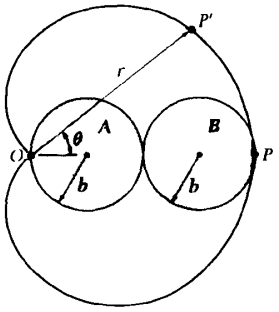


Fig. P11.144

11.145 Resuélvase el problema 11.144, cuando *a*) $t = 0.5$ s, *b*) $t = 2$ s.

11.146 Se lanza un cohete verticalmente desde una plataforma de lanzamiento en B; su vuelo es seguido por el radar desde el punto A. Determínese la velocidad del cohete en términos de b, θ y $\dot{\theta}$.

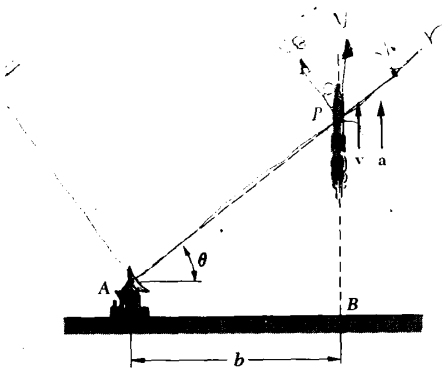


Fig. P11.146 y P11.150

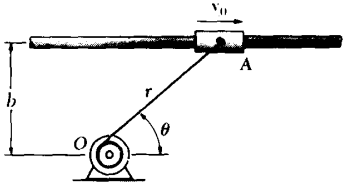


Fig. P11.147

11.147 Un alambre OA conecta el collarín A y un carrete situado en O. Si el collarín se mueve a la derecha con una velocidad constante v_0, determínese $\dot{\theta}$ en términos de v_0, b y θ.

11.148 Determínese la aceleración del cohete del problema 11.146 en términos de b, θ, $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$.

11.149 En el problema 11.147, determínese $\ddot{\theta}$ en términos de v_0, b y θ.

11.150 Un cohete de prueba se dispara verticalmente desde una plataforma de lanzamiento en B. Cuando el cohete está en el punto P, el ángulo de elevación es $\theta = 47.0°$ y 0.5 s después es $\theta = 48.0°$ s. Sabiendo que $b = 4$ km, determínese aproximadamente la velocidad del cohete durante el intervalo de 0.5 s.

11.151 Un aeroplano pasa sobre una estación de radar en A y continúa volando hacia el este. Cuando el avión está en P su distancia y ángulo de elevación son, respectivamente, $r = 12\,600$ ft y $\theta = 31.2°$. Dos segundos después la estación de radar localiza el avión en $r = 13\,600$ ft y $\theta = 28.3°$. Determínense en forma aproximada la velocidad y el ángulo de descenso α del avión durante el intervalo de 2 s.

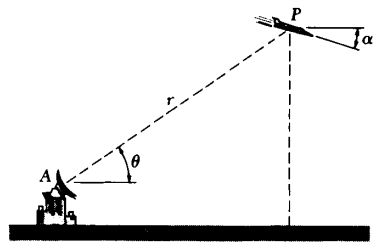
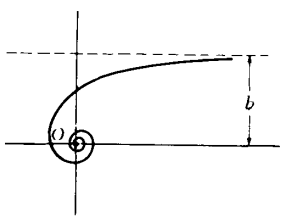


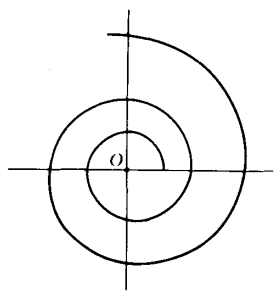
Fig. P11.151

√ 11.152 y 11.153 Una partícula se mueve a lo largo de la espiral aquí mostrada; determínese la magnitud de la velocidad de la partícula en términos de b, θ y $\dot{\theta}$.



Espiral hiperbólica $r\theta = b$

Fig. P11.152 y P11.154



Espiral logarítmica $r = e^{b\theta}$

Fig. P11.153 y P11.155

11.154 y 11.155 Una partícula se mueve a lo largo de la espiral mostrada en la figura. Sabiendo que $\dot{\theta}$ es constante y representando esta constante por ω, determínese el módulo de la aceleración de la partícula en términos de b, θ y ω.

11.156 Conforme gira la barra OA, el pasador P se mueve a lo largo de la parábola BCD. Sabiendo que la ecuación de la parábola es $r = 2b/(1 + \cos\theta)$ y que $\theta = kt$, determínense la velocidad y la aceleración de P cuando *a*) $\theta = 0$ y *b*) $\theta = 90°$.

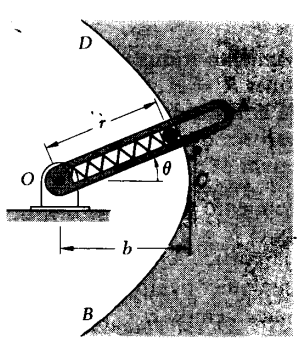


Fig. P11.156

11.157 El pasador en B puede resbalar libremente a lo largo de la ranura circular DE y a lo largo de la barra giratoria OC. Suponiendo que la barra OC gira con velocidad constante $\dot{\theta}$, *a*) demuéstrese que la aceleración del pasador B es de módulo constante y *b*) determínese la dirección de la aceleración del pasador B.

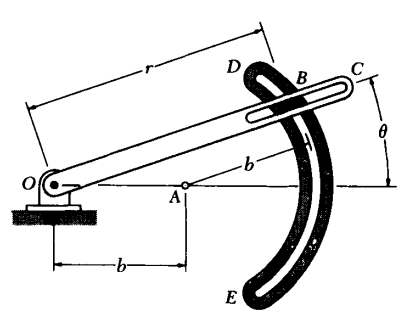


Fig. P11.157

11.158 El movimiento de una partícula sobre la superficie de un cilindro circular recto está definido por las relaciones $R = A$, $\theta = 2\pi t$ y $z = B$ sen $2\pi nt$, donde A y B son constantes y n es un entero. Determínense los módulos de la velocidad y de la aceleración de la partícula en cualquier tiempo t.

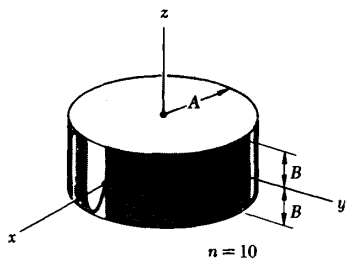


Fig. P11.158

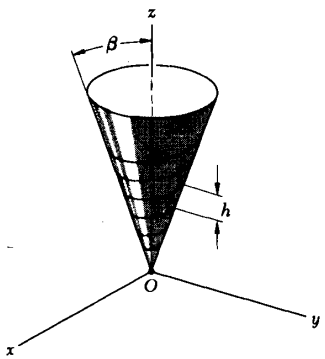


Fig. P11.160

11.159 En el caso de que $n = 1$ del problema 11.158, *a*) demuéstrese que la trayectoria de la partícula está contenida en un plano y *b*) determínense los radios máximo y mínimo de curvatura de la trayectoria.

11.160 El movimiento de una partícula sobre la superficie de un cono circular recto está definido por las relaciones $R = ht \tan \beta$, $\theta = 2\pi t$ y $z = ht$, donde β es el ángulo del vértice del cono y h es la distancia que sube la partícula en un paso alrededor del cono. Determínense los módulos de la velocidad y de la aceleración para cualquier tiempo t.

11.161 El movimiento tridimensional de una partícula está definido por las relaciones $R = A(1 - e^{-t})$, $\theta = 2\pi t$ y $z = B(1 - e^{-t})$. Determínense los módulos de la velocidad y de la aceleración cuando *a*) $t = 0$ y *b*) $= t = \infty$.

11.162 El movimiento tridimensional de una partícula está definido por las relaciones $R = A$, $\theta = 2\pi t$ y $z = A \text{ sen}^2 \pi t$. Determínense los módulos de la velocidad y de la aceleración para cualquier tiempo t.

11.163 El movimiento tridimensional de una partícula está definido por las relaciones $R = 2k \cos t$, $\theta = t$ y $z = Pt$. Determínense: *a*) la trayectoria de la partícula, *b*) los módulos de la velocidad y de la aceleración para cualquier tiempo t y *c*) el radio de curvatura de la trayectoria en cualquier tiempo t.

*11.164 Para la hélice del problema 11.86, determínese el ángulo que forma el plano osculador con el eje y.

*11.165 Determínese la dirección de la binormal de la trayectoria descrita por la partícula del problema 11.87 cuando *a*) $t = 0$ y *b*) $t = 2$s.

Repaso y resumen

Coordenada de posición de una partícula en movimiento rectilíneo

En la primera mitad del capítulo se analizó el *movimiento rectilíneo de una partícula* es decir, el movimiento de una partícula a lo largo de una línea recta. Para definir la posición P de la partícula sobre esa línea, se escoge un origen fijo O y una dirección positiva (fig. 11.27). La distancia x desde O a P, con el signo apropiado, define por completo la posición de la partícula sobre la línea y se llama *coordenada de posición* de la partícula (sección 11.2).

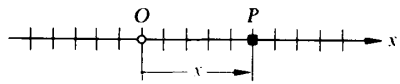


Fig. 11.27

Velocidad y aceleración en movimiento rectilíneo

La *velocidad* v de la partícula se demostró que era igual a la derivada con respecto al tiempo de la coordenada de posición x,

$$v = \frac{dx}{dt} \tag{11.1}$$

y la *aceleración* a se obtuvo al derivar v con respecto a t,

$$a = \frac{dv}{dt} \tag{11.2}$$

o

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} \tag{11.3}$$

También se mencionó que a se podría expresar como

$$a = v\frac{dv}{dx} \tag{11.4}$$

Se señaló que la velocidad v y la aceleración a se representaban con números algebraicos que pueden ser positivos o negativos. Un valor positivo de v indica que la partícula se mueve en la dirección positiva y un valor negativo que se mueve en la dirección negativa. Sin embargo, un valor positivo de a puede significar que la partícula se acelera verdaderamente (es decir, se mueve más rápido) en la dirección positiva o que se decelera (es decir, se mueve más lentamente) en la dirección negativa. Un valor negativo de a está sujeto a interpretaciones similares (problema resuelto 11.1).

Determinación de la velocidad y aceleración por integración

En la mayoría de los problemas, las condiciones de movimiento de una partícula se definen por el tipo de aceleración que tiene la partícula y por sus condiciones iniciales (sección 11.3). La velocidad y posición de la partícula se pueden obtener al integrar dos de las ecuaciones de la (11.1) a la (11.4). Según el tipo de aceleración relacionada se seleccionan las ecuaciones (problemas resueltos 11.2 y 11.3).

Movimiento rectilíneo uniforme

Frecuentemente se trata con dos tipos de movimiento: el *movimiento rectilíneo uniforme* (sección 11.4), en el cual la velocidad v es constante, donde se tiene

$$x = x_0 + vt \tag{11.5}$$

Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado

y el *movimiento rectilíneo uniformemente acelerado* (sección 11.5) en el cual la aceleración a de la partícula es constante y se tiene

$$v = v_0 + at \tag{11.6}$$

$$x = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2 \tag{11.7}$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \tag{11.8}$$

Movimiento relativo de dos partículas

Cuando dos partículas A y B se mueven a lo largo de la misma línea recta, puede ser deseable considerar el *movimiento de B respecto de A* (sección 11.6)

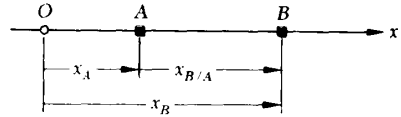


Fig. 11.28

Al simbolizar por $x_{B/A}$ la *coordenada de posición relativa* de B respecto de A (fig. 11.28), se tiene

$$x_B = x_A + x_{B/A} \tag{11.9}$$

Derivando la ecuación (11.9) dos veces respecto a t, se obtiene sucesivamente

$$v_B = v_A + v_{B/A} \tag{11.10}$$

$$a_B = a_A + a_{B/A} \tag{11.11}$$

donde $v_{B/A}$, y $a_{B/A}$ representan, respectivamente, la *velocidad y la aceleración relativa* de B respecto de A.

Bloques conectados por cuerdas inextensibles de longitud constante

Cuando varios bloques se *conectan por medio de cuerdas de longitud constante*, es posible escribir una relación lineal entre sus coordenadas de posición. Se pueden obtener relaciones similares entre sus velocidades y sus aceleraciones y utilizarlas para analizar su movimiento (problema resuelto 11.5).

Soluciones gráficas

A menudo es conveniente usar *soluciones gráficas* para problemas relacionados con el movimiento rectilíneo de una partícula (secciones 11.7 y 11.8). La solución gráfica usada más comúnmente se refiere a las curvas x–t, v–t y a–t (sección 11.7; problema resuelto 11.6). Se demostró que en cualquier tiempo t,

v = pendiente de la curva x–t
a = pendiente de la curva v–t

mientras que, sobre cualquier intervalo de tiempo t_1 a t_2 dado,

$v_2 - v_1$ = área bajo la curva a–t
$x_2 - x_1$ = área bajo la curva v–t

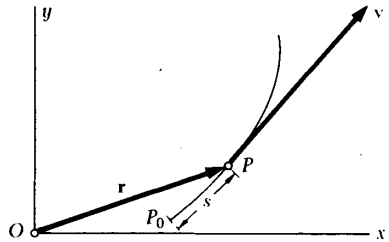


Fig. 11.29

Vector posición y velocidad en movimiento curvilíneo

En la segunda mitad del capítulo, se analizó el *movimiento curvilíneo de una partícula*, es decir, el movimiento de una partícula a lo largo de una trayectoria curva. La posición P de la partícula en cualquier momento dado (sección 11.9) se definió por el *vector de posición* $\mathbf{r}$ que une el origen O de las coordenadas y el punto P (fig. 11.29). La *velocidad* $\mathbf{v}$ de la partícula se definió por la relación

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \tag{11.15}$$

y se encontró que era un *vector tangente a la trayectoria* de la partícula y de magnitud v igual a la derivada con respecto al tiempo, de la longitud s del arco descrito por la partícula:

$$v = \frac{ds}{dt} \tag{11.16}$$

Aceleración en movimiento curvilíneo

La *aceleración* $\mathbf{a}$ de la partícula se definió por la relación

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \tag{11.18}$$

y se señaló que, en general, *la aceleración no es tangente a la trayectoria de la partícula.*

Derivadas de funciones vectoriales

Antes de considerar los componentes de la velocidad y la aceleración se repasó la definición formal de la derivada de una función vectorial y se establecieron unas cuantas reglas para obtener derivadas de sumas y productos de funciones vectoriales. Después se demostró que la derivada temporal de un vector es la misma respecto de un marco fijo y respecto de un marco en traslación (sección 11.10).

Componentes rectangulares de la velocidad y la aceleración

Expresando por x, y y z las coordenadas rectangulares de una partícula P, se encontró que los componentes rectangulares de la velocidad y la aceleración de P eran iguales, respectivamente, a la primera y segunda derivadas respecto de t de las coordenadas correspondientes

$$v_x = \dot{x} \qquad v_y = \dot{y} \qquad v_z = \dot{z} \tag{11.29}$$

$$a_x = \ddot{x} \qquad a_y = \ddot{y} \qquad a_z = \ddot{z} \tag{11.30}$$

Movimientos componentes

Cuando la componente a_x de la aceleración sólo depende de t, x y/o de v_x y cuando de manera similar a_y sólo depende de t, y y/o v_y y a_z de t, z y/o v_z las ecuaciones (11.30) se pueden integrar independientemente. Entonces el análisis de un movimiento curvilíneo se puede reducir al análisis de tres movimientos componentes rectilíneos independientes (sección 11.11). Este enfoque es particularmente eficaz en el estudio del movimiento de proyectiles (problemas resueltos 11.7 y 11.8).

Movimiento relativo de dos partículas

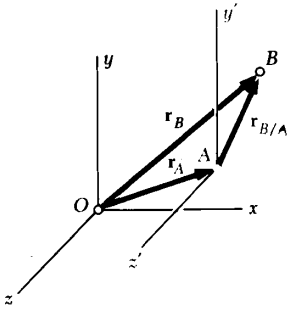


Fig. 11.30

Para dos partículas A y B que se mueven en el espacio (Fig. 11.30) se consideró el movimiento relativo de B respecto de A, o de manera más precisa, respecto a un marco en movimiento ligado a A y en traslación con A (sección 11.12). Expresando por $\mathbf{r}_{B/A}$ el *vector de posición relativo* de B respecto de A (Fig. 11.30), se tuvo

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A} \tag{11.31}$$

Expresando por $\mathbf{v}_{B/A}$ y por $\mathbf{a}_{B/A}$, respectivamente, la *velocidad y la aceleración relativas* de B respecto de A, también se demostró que

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} \tag{11.33}$$

y

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A} \tag{11.34}$$

Componentes tangencial y normal

A menudo es conveniente descomponer la velocidad y la aceleración de la partícula P en componentes diferentes de los componentes rectangulares x, y y z. Para una partícula P que se mueve a lo largo de una trayectoria contenida en un plano, se ligan a P vectores unitarios $\mathbf{e}_t$ tangenciales a la trayectoria y $\mathbf{e}_n$ normales a la trayectoria y dirigidos hacia el centro de curvatura de la trayectoria (sección 11.13). Entonces se expresaron la velocidad y la aceleración de la partícula en términos de los componentes normales y tangenciales. Se escribió

$$\mathbf{v} = v\mathbf{e}_t \tag{11.36}$$

y

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\mathbf{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{e}_n \tag{11.39}$$

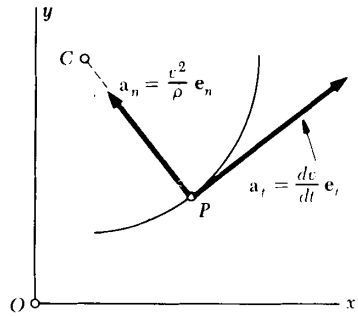


Fig. 11.31

Movimiento curvilíneo en el espacio

donde v es la velocidad de la partícula y ρ el radio de curvatura de su trayectoria (problemas resueltos 11.10 y 11.11). Se observó que mientras la velocidad $\mathbf{v}$ se dirige a lo largo de la tangente a la trayectoria, la aceleración $\boldsymbol{a}$ consiste de un componente $\mathbf{a}_t$ dirigido a lo largo de la tangente a la trayectoria y de un componente $\mathbf{a}_n$ dirigido hacia el centro de la curvatura de la trayectoría (Fig. 11.31).

Para una partícula P que se mueve a lo largo de una curva en el espacio se definió el plano que más se ajusta a la curva en la vecindad de P como *plano osculador*. Este plano contiene a los vectores unitarios $\mathbf{e}_t$ y $\mathbf{e}_n$, los cuales definen respectivamente, a la tangente y a la normal principal de la curva. El vector unitario $\mathbf{e}_b$ que es perpendicular al plano osculador define a la *binormal*.

Cuando la posición de una partícula P que se mueve en un plano se define por sus coordenadas polares r y θ es conveniente utilizar los componentes radial y transversal, dirigidos, respectivamente, a lo largo del vector de posición $\mathbf{r}$ de la partícula y en una dirección obtenida al rotar $\mathbf{r}$ 90° en sentido contrario a las manecillas del reloj (sección 11.14). Se ligaron a P los vectores unitarios $\mathbf{e}_r$ y $\mathbf{e}_\theta$ dirigidos, respectivamente, en direcciones radial y transversal (fig. 11.32). Entonces se expresaron la velocidad y la aceleración de la partícula en términos de los componentes radial y transversal.

Componentes radial y transversal

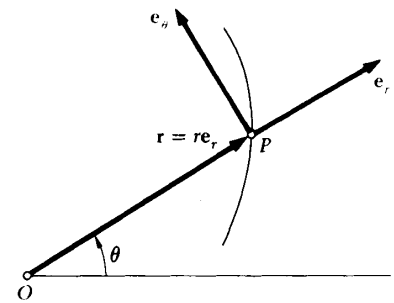


Fig. 11.32

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta \tag{11.43}$$

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta \tag{11.44}$$

donde los puntos se usan para indicar derivadas con respecto al tiempo. Los componentes escalares de la velocidad y la aceleración en direcciones radial y transversal son por lo tanto

$$v_r = \dot{r} \qquad v_\theta = r\dot{\theta} \tag{11.45}$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \qquad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \tag{11.46}$$

Es importante notar que a_r *no* es igual a la derivada respecto al tiempo de v_r y que a_θ *no* es igual a la derivada respecto al tiempo de v_θ (problema resuelto 11.12).

El capítulo finalizó con comentarios sobre el uso de coordenadas cilíndricas para definir la posición y el movimiento de una partícula en el espacio.

Problemas de repaso

11.166 La velocidad de un automóvil de carreras aumenta a razón constante desde 54 km/h hasta 90 km/h en una distancia de 150 m a lo largo de una curva de 240 m de radio. Determínense el módulo de la aceleración total del automóvil después de que ha recorrido 100 m en la curva.

11.167 El módulo en m/s^2 de la desaceleración debida a la resistencia del aire de la ojiva de un pequeño cohete experimental se sabe que es $0.0005\,v^2$ donde v se expresa en m/s. Si la ojiva se proyecta verticalmente desde el piso con una velocidad inicial de 150 m/s, determínese la máxima altura que alcanzará. [*Sugerencia.* La aceleración total es $-(g + 0.0005v^2)$ donde $g = 9.81$ m/s^2.]

11.168 El movimiento de una partícula vibratoria se define por el vector de posición $\mathbf{r} = (8\text{sen } \pi t)\mathbf{i} - (2\cos 2\pi t)\mathbf{j}$, donde $\mathbf{r}$ se expresa en pulgadas y t en segundos. *a*) Determínense la velocidad y la aceleración cuando $t = 1$ s. *b*) Demuéstrese que la trayectoria de la partícula es parabólica.

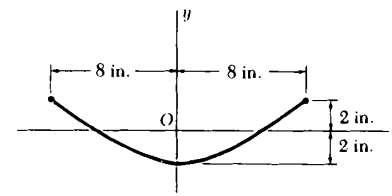


Fig. P11.168

11.169 Una boquilla descarga un chorro de agua con una velocidad de inicial de $v_0 = 40$ ft/s hacia el extremo de un tubo horizontal de diámetro interior $d = 4$ ft. Determínese la máxima distancia x a la que puede llegar el chorro de agua.

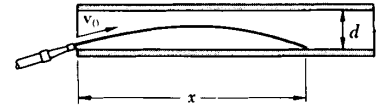


Fig. P11.169

11.170 Dos aeroplanos A y B vuelan a la misma altitud; el aeroplano A se dirige hacia el este con una velocidad constante de 800 km/h, mientras que el B vuela al suroeste con una velocidad constante de 500 km/h. Determínese el cambio en la posición del aeroplano B relativo al aeroplano A, que tiene lugar durante un intervalo de 3 min.

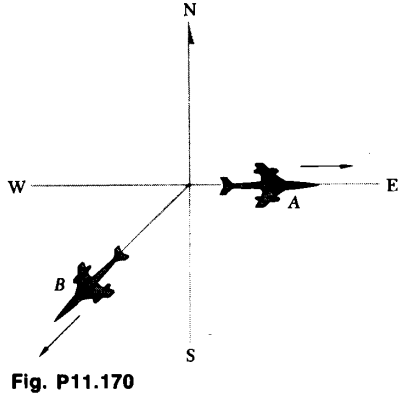


Fig. P11.170

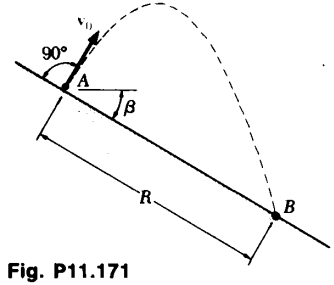


Fig. P11.171

11.171 Una pelota se lanza desde el punto A con una velocidad v_0 perpendicular al plano mostrado en la figura. Si la pelota golpea en B al plano, determínese el alcance R en términos de v_0 y β.

11.172 En el problema 11.171, determínese el alcance R cuando $v_0 = 10$ m/s y $\beta = 30°$.

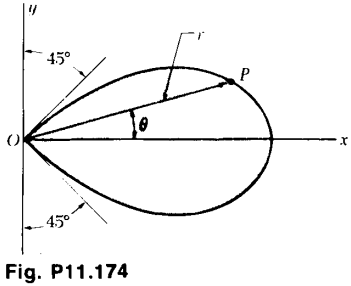


Fig. P11.174

11.173 Se observa que caen gotas de agua de una llave en intervalos constantes de tiempo. Cuando cualquier gota B empieza a caer libremente, la gota predecesora A ha caído 250 mm. Determínese la distancia que habrá caído la gota A en el momento en que la distancia entre A y B se haya incrementado a 750 mm.

11.174 El movimiento de la partícula P se define por las relaciones $r = 6 \cos 2\pi t$ y $\theta = \pi t$, donde r se expresa en pulgadas, t en segundos y θ en radianes. Determínese la velocidad y la aceleración de la partícula cuando *a*) $t = 0$, *b*) $t = 0.25$ s.

11.175 Una motocicleta y un automóvil van a una velocidad constante de 40 mi/h; la motocicleta se encuentra a 60 ft atrás del automóvil. El motociclista desea rebasarla, es decir, desea colocar su motocicleta en *B*, 60 ft adelante del automóvil y después restablecer la velocidad de 40 mi/h. La aceleración máxima de la motocicleta es 5 ft/s^2 y la desaceleración máxima que se obtiene al aplicar los frenos es 15 ft/s^2. ¿Cuál es el tiempo mínimo en el cual puede completar el motociclista la operación de rebase si no excede en ningún momento una velocidad de 55 mi/h? Trácese una curva *v-t*.

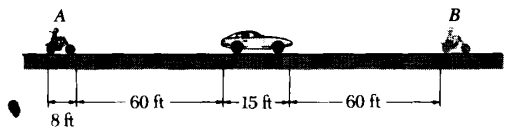


Fig. P11.175

11.176 Si se sabe que el bloque *A* se mueve hacia abajo a la izquierda con velocidad constante de 80 mm/s, determínense *a*) la velocidad del bloque *B*, *b*) el cambio en la posición del bloque *A* relativo al bloque *B* que tiene lugar en 4 s.

11.177 En $t = 0$ el bloque *A* parte del reposo y se mueve hacia abajo a la izquierda con una aceleración constante de 48 mm/s^2. Determínense *a*) la aceleración del bloque *B*, *b*) la velocidad del bloque *B* relativa al bloque *A* cuando $t = 5$ s.

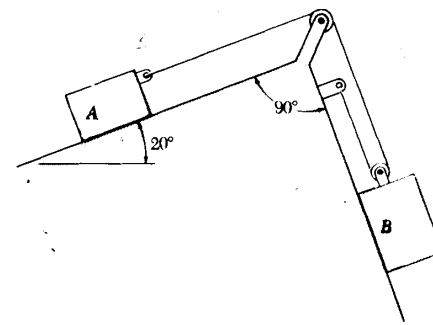


Fig. P11.176 y P11.177

Los siguientes problemas están diseñados para ser resueltos con un ordenador.

11.C1 Se deberán realizar varios lanzamientos de prueba del cohete experimental del problema 11.167. Elabórese un programa de ordenador y con dicho programa calcúlese, para valores de velocidad inicial de 0 a 400 m/s en intervalos de 25 m/s, la máxima altura alcanzada por la ojiva cónica del cohete y su velocidad conforme regresa al piso.

11.C2 Una boquilla en *A* descarga agua con una velocidad inicial v_0 a un ángulo de 60° con la horizontal. Elabórese un programa de ordenador y úsese para determinar dónde golpea el chorro de agua al piso o al edificio para valores de v_0 de 4 m/s a 16 m/s en intervalos de 1 m/s.

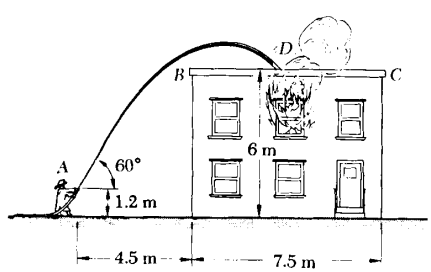


Fig. P11.C2

11.C3 Un rifle situado en un aeroplano dispara un proyectil con una velocidad v_0 a un ángulo α con la horizontal. Después de ser disparado, el proyectil está sujeto a la aceleración de gravedad $g = -32.2$ ft/s^2, dirigida verticalmente hacia abajo y a una deceleración debida a la resistencia del aire $a_t = -kv^2$ en una dirección opuesta a la de su velocidad v. Exprésense los componentes horizontal y vertical de la aceleración a_x y a_y del proyectil en términos de g, k y de los componentes v_x y v_y de su velocidad. Considerando intervalos sucesivos de tiempo Δt y suponiendo que la aceleración permanece constante en cada intervalo de tiempo, úsese la expresión obtenida para a_x y a_y para elaborar un programa de ordenador que calcule en cualquier instante la posición del proyectil sobre su trayectoria. Sabiendo que $v_0 = 1200$ ft/s, $\alpha = 40°$ y usando intervalos de tiempo $\Delta t = 0.5$ s, determínese el alcance del proyectil e imprímanse las coordenadas del proyectil a lo largo de su trayectoria en intervalos de 5 s, suponiendo *a*) $k = 0$, *b*) $k = 2 \times 10^{-6}$ ft^{-1}, *c*) $k = 10 \times 10^{-6}$ ft^{-1} y *d*) $k = 20 \times 10^{-6}$ ft^{-1}.

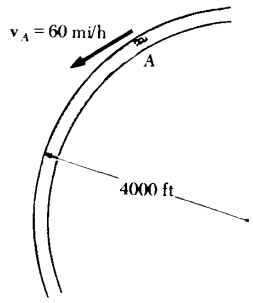


Fig. P11.C4

11.C4 Conforme un tren entra a una curva de radio 4000 ft con velocidad de 60 mi/h, se aplican los frenos lo suficiente para causar que el módulo de la aceleración total del tren sea 2.5 ft/s^2. Un segundo después ya no se aplican más los frenos de tal manera que de nuevo la aceleración total es 2.5 ft/s^2. Esta posición del freno se mantiene por 1 s cuando de nuevo se aplican más fuerte los frenos de manera que la aceleración total es nuevamente 2.5 ft/s^2. Si este procedimiento se repite cada segundo, determínese el tiempo total requerido para hacer que pare el tren.

CAPÍTULO DOCE

Cinética de partículas: Segunda Ley de Newton

12.1. Introducción. La primera y tercera leyes de Newton del movimiento se usaron ampliamente en estática para estudiar a los cuerpos en reposo y las fuerzas que actuaban sobre ellos. Estas dos leyes se emplean también en dinámica; de hecho son suficientes para el estudio del movimiento de los cuerpos cuando no hay aceleración. Pero cuando los cuerpos están acelerados, es decir, cuando la magnitud o la dirección de su velocidad cambia, es necesario usar la segunda ley de Newton para relacionar el movimiento del cuerpo con las fuerzas que actúan sobre él.

En este capítulo estudiaremos la segunda ley de Newton y la aplicaremos al análisis del movimiento de las partículas. Como exponemos en la sección 12.2, si la resultante de las fuerzas que actúan sobre una partícula es distinta de cero, ésta tendrá una aceleración proporcional al módulo de la fuerza resultante y en la dirección de esta fuerza resultante. Es más, la razón entre el módulo de la fuerza resultante y la aceleración resultante puede usarse para definir la *masa* de la partícula.

En la sección 12.3 definiremos *el momento lineal* de una partícula como el producto $\mathbf{L} = m\mathbf{v}$ de la masa m y la velocidad $\mathbf{v}$ de la partícula y demostraremos que la segunda ley de Newton puede expresarse en otra forma que relaciona a la derivada temporal del momento lineal con la resultante de las fuerzas que actúan sobre esa partícula.

En la sección 12.4 se hace hincapié en la necesidad de utilizar unidades consistentes en la solución de los problemas de dinámica y se hace un repaso de los dos sistemas de unidades empleados en este texto, que son el sistema internacional de unidades (unidades del SI) y el sistema inglés.

En las secciones 12.5 y 12.6 y en los problemas resueltos que le siguen se aplica la segunda ley de Newton a la solución de problemas

en ingeniería, usando tanto las componentes rectangulares como las componentes tangencial y normal de las fuerzas y las aceleraciones que intervienen. Recordamos que un cuerpo real —posiblemente tan grande como un automóvil, un cohete o un avión— puede ser considerado como una partícula para el análisis de su movimiento, siempre que el efecto de una rotación del cuerpo con respecto a su centro de gravedad pueda omitirse.

La segunda parte del capítulo se dedica a la solución de problemas en términos de las componentes radial y transversal, poniendo de relieve el movimiento de una partícula sujeta a una fuerza central. En la sección 12.7 definiremos el momento angular $\mathbf{H}_O$ de una partícula respecto a un punto O como $\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$. De la segunda ley de Newton se deduce que la derivada temporal del momento angular $\mathbf{H}_O$ de una partícula es igual a la suma de los momentos respecto de O de las fuerzas que actúan sobre esa partícula.

La sección 12.9 estudia el movimiento de una partícula sujeta a una *fuerza central*, es decir, bajo una fuerza dirigida hacia adentro o hacia afuera de un punto fijo O. Como tal fuerza tiene momento cero con respecto a O, se deduce que el momento angular de la partícula respecto de O se conserva. Esta propiedad simplifica el análisis del movimiento de una partícula sujeta a una fuerza central y se aplicará a la solución de problemas relacionados con el movimiento orbital de cuerpos sujetos a la atracción gravitacional (Sec. 12.10).

Las secciones 12.11 a la 12.13 son opcionales; presentan un estudio más amplio del movimiento orbital y contienen un número de problemas relacionados con la mecánica del espacio.

12.2. Segunda ley de Newton del movimiento. Esta ley puede enunciarse como sigue:

Si la fuerza resultante que actúa sobre una partícula es distinta de cero, la partícula tendrá una aceleración proporcional al módulo de la resultante y en la dirección de esta fuerza resultante.

La segunda ley de Newton de movimiento puede comprenderse mejor si imaginamos el siguiente experimento: una partícula está sujeta a una fuerza $\mathbf{F}_1$ de dirección constante y de módulo constante F_1. Bajo la acción de esa fuerza, se observará que la partícula se mueve en una línea recta y *en la dirección de la fuerza* (Fig. 12.1*a*). Determinando la dirección de la partícula en diferentes instantes encontramos que su aceleración tiene una magnitud constante a_1. Si se repite el experimento con las fuerzas $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, etc., de módulo o dirección diferente (Fig. 12.1*b* y *c*); siempre encontramos que la partícula se mueve en la dirección de la fuerza que actúa sobre ella y que los módulos a_1, a_2, a_3, etc., de las aceleraciones son proporcionales a los módulos F_1, F_2, F_3, etc., de las fuerzas correspondientes.

$$\frac{F_1}{a_1} = \frac{F_2}{a_2} = \frac{F_3}{a_3} = \cdots = \text{constante}$$

El valor constante obtenido para la razón entre los módulos de las fuerzas y las aceleraciones es una característica de la partícula

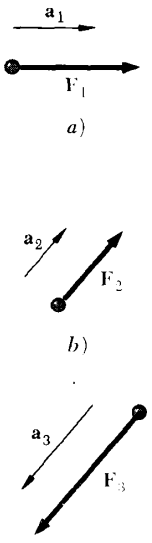


Fig. 12.1

en consideración. Se le llama la *masa* de la partícula y se representa por m. Cuando una partícula de masa m está sujeta a una fuerza $\mathbf{F}$, esta fuerza y la aceleración $\mathbf{a}$ de la partícula deben satisfacer la relación

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \tag{12.1}$$

Esta expresión proporciona una formulación completa de la segunda ley de Newton; expresa no sólo que los módulos de $\mathbf{F}$ y $\mathbf{a}$ son proporcionales, sino también (como m es un escalar positivo) que los vectores $\mathbf{F}$ y $\mathbf{a}$ tienen la misma dirección (Fig. 12.2). Debemos mencionar que la ecuación (12.1) sigue siendo válida cuando $\mathbf{F}$ no es una constante sino que varía con t en módulo o dirección. Los módulos de $\mathbf{F}$ y $\mathbf{a}$ siguen siendo proporcionales y los dos vectores tienen la misma dirección en cualquier instante, pero en general no serán tangentes a la trayectoria de la partícula.

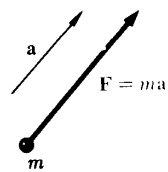


Fig. 12.2

Cuando una partícula se somete simultáneamente a varias fuerzas, la ecuación (12.1) debe sustituirse por

$$\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a} \tag{12.2}$$

donde $\Sigma\mathbf{F}$ representa la suma o resultante de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula.

Debe hacerse notar que el sistema de ejes respecto de los cuales se determina la aceleración $\mathbf{a}$ no es arbitrario. Estos ejes deben tener una orientación constante con respecto a las estrellas, y sus orígenes deben estar ya sea fijos al Sol † o moverse con una velocidad constante respecto a éste. A tal sistema de ejes se le llama *sistema de referencia newtoniano.* ‡ Un sistema de ejes fijo a la Tierra *no* constituye un sistema de referencia newtoniano porque la Tierra gira respecto a las estrellas y está acelerado respecto al Sol. Sin embargo, en muchas aplicaciones en la ingeniería, la aceleración $\mathbf{a}$ puede determinarse respecto de ejes fijos a la Tierra y las ecuaciones (12.1) y (12.2) pueden usarse sin error apreciable. Por otra parte, estas ecuaciones no se cumplen si $\mathbf{a}$ representa una aceleración relativa medida respecto de ejes en movimiento, como ejes unidos a un vehículo acelerado o a una pieza de maquinaria en rotación.

Podemos observar que si la resultante de las fuerzas $\Sigma\mathbf{F}$ que actúan sobre la partícula es cero, de la ecuación (12.2) se deduce que la aceleración $\mathbf{a}$ de la partícula es también cero. Si la partícula está inicialmente en reposo ($\mathbf{v}_0 = 0$) respecto al sistema de referencia newtoniano empleado, continuará en reposo ($\mathbf{v} = 0$). Si se encontraba originalmente moviéndose con una velocidad $\mathbf{v}_0$, la partícula mantendrá una velocidad constante $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$, es decir, se moverá con una velocidad constante v_0 en línea recta. Como recordamos, esto es lo que nos dice la primera ley de Newton (sección 2.10), así que la primera ley de Newton es un caso particular de la segunda ley de Newton y puede omitirse de los principios fundamentales de la mecánica.

† Con mayor exactitud, al centro de masa del sistema solar.

‡ Como las estrellas no están realmente fijas, una definición más rigurosa de un sistema de referencia newtoniano (también llamado *sistema inercial*) es *uno respecto del cual se satisface la ecuación* (12.2).

12.3. Momento lineal de una partícula. Derivada temporal del momento lineal. Sustituyendo la aceleración **a** por la derivada $d\mathbf{v}/dt$ en la ecuación (12.2), escribimos

$$\Sigma \mathbf{F} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

o, como la masa m de la partícula es constante,

$$\Sigma \mathbf{F} = \frac{\mathbf{d}}{dt}(m\mathbf{v}) \tag{12.3}$$

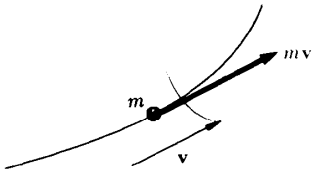


Fig. 12.3

Al vector $m\mathbf{v}$ se le llama *momento lineal de la partícula*. Tiene la misma dirección que la velocidad de la partícula y su módulo es igual al producto de la masa m por la velocidad v de la partícula (Fig. 12.3). La ecuación (12.3) expresa que *la resultante de las fuerzas que actúan sobre una partícula es igual a la derivada temporal del momento lineal de la partícula*. En esta forma fue formulada originalmente por Newton la segunda ley del movimiento. Representando por **L** la cantidad de movimiento de la partícula,

$$\mathbf{L} = m\mathbf{v} \tag{12.4}$$

y por **L** a su derivada respecto de t, podemos escribir la ecuación (12.3) en la forma opcional

$$\Sigma \mathbf{F} = \dot{\mathbf{L}} \tag{12.5}$$

Debe tomarse en cuenta que en las ecuaciones de la (12.3) a la (12.5) se ha supuesto que la masa m permanece constante. Por lo tanto las ecuaciones (12.3) o (12.5) no deben usarse para resolver problemas relacionados con el movimiento de cuerpos como los cohetes, los cuales ganan o pierden masa. Los problemas de ese tipo se considerarán en la sección 14.12.†

De la ecuación (12.3) tenemos que la velocidad de variación del momento lineal $m\mathbf{v}$ es nula cuando $\Sigma \mathbf{F} = 0$. Entonces, *si la fuerza resultante que actúa sobre una partícula es nula, el momento lineal de la partícula permanece constante tanto en módulo como en dirección.* Este es el principio de *conservación del momento lineal de una partícula*, que puede identificarse como otra forma de plantear la primera ley de Newton (sección 2.10).

12.4. Sistemas de unidades. Al emplear la ecuación fundamental $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ las unidades de fuerza, masa, longitud y tiempo no pueden escogerse arbitrariamente. Si son arbitrarias, el módulo de la fuerza **F** necesaria para imprimir una aceleración **a** a la masa m *no* será igual numéricamente al producto ma, será sólo proporcional a este producto. Entonces, podemos escoger tres de las cuatro unidades

† Por otra parte, las ecuaciones (12.3) y (12.5) se cumplen en la *mecánica relativista* donde la masa m de la partícula se supone que varía con la velocidad de la partícula.

arbitrariamente pero debemos tomar la cuarta unidad de manera que la ecuación $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ se satisfaga. Así las unidades forman un sistema de unidades cinéticas congruentes.

Usualmente se emplean dos sistemas de unidades cinéticas congruentes, que son el sistema internacional de unidades (unidades del SI †) y el sistema inglés. Como ambos sistemas ya han sido estudiados en detalle en la sección 1.3, sólo los describiremos brevemente aquí.

Sistema internacional de unidades (Unidades del SI). En este sistema las unidades básicas son las unidades de longitud, masa y tiempo, y se llaman respectivamente *metro* (m), *kilogramo* (kg) y *segundo* (s); las tres se definen arbitrariamente (sección 1.3). La unidad de fuerza es una unidad derivada llamada *newton* (N), y se define como la fuerza que produce una aceleración de 1 m/s² a una masa de 1 kg (Fig. 12.4). De la ecuación (12.1) escribimos

$$1\text{ N} = (1\text{ kg})(1\text{ m/s}^2) = 1\text{ kg}\cdot\text{m/s}^2$$

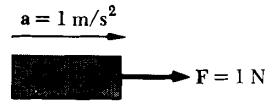


Fig. 12.4

Se dice que el SI forma un sistema *absoluto* de unidades, lo que significa que las tres unidades básicas son independientes del lugar donde se toman las medidas. El metro, el kilogramo y el segundo pueden usarse en cualquier lugar de la Tierra; pueden emplearse también en otro planeta, donde tendrían siempre el mismo significado.

El *peso* **W** de un cuerpo, o la *fuerza de gravedad* ejercida sobre ese cuerpo, debe, como cualquier otra fuerza, expresarse en newtons. Como un cuerpo sujeto a su propio peso adquiere una aceleración igual a la aceleración de la gravedad g, de la segunda ley de Newton se deduce que el módulo W del peso del cuerpo de masa m es

$$W = mg \tag{12.6}$$

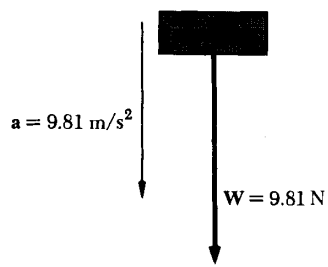


Fig. 12.5

Recordando que $g = 9.81$ m/s², encontramos que el peso de un cuerpo de masa 1 kg (Fig. 12.5) es

$$W = (1\text{ kg})(9.81\text{ m/s}^2) = 9.81\text{ N}$$

Con frecuencia se emplean múltiplos y submúltiplos de las unidades de longitud, masa y fuerza en aplicaciones de la ingeniería. Estas son, respectivamente, el *kilómetro* (km) y el *milímetro* (mm); el *megagramo* ‡ (Mg) y el *gramo* (g); y el *kilonewton* (kN). Por definición,

$$1\text{ km} = 1000\text{ m} \qquad 1\text{ mm} = 0.001\text{ m}$$
$$1\text{ Mg} = 1000\text{ kg} \qquad 1\text{ g} = 0.001\text{ kg}$$
$$1\text{ kN} = 1000\text{ N}$$

La conversión de estas unidades a metros, kilogramos y newtons, respectivamente, puede efectuarse simplemente recorriendo el punto decimal tres lugares a la derecha o a la izquierda.

Las unidades distintas de las unidades de masa, longitud y tiempo pueden expresarse en términos de esas tres unidades básicas. Por ejemplo, la unidad de la cantidad de movimiento o momento lineal

† SI son siglas del *Système International d'Unités* (Francia).

‡ También conocida como una *tonelada métrica*.

puede obtenerse recordando la definición del momento lineal y escribiendo

$$mv = (\text{kg})(\text{m/s}) = \text{kg}\cdot\text{m/s}$$

Unidades del sistema inglés. La mayoría de los ingenieros estadounidenses usan un sistema en el cual las unidades básicas son las de longitud, fuerza y tiempo. Estas unidades son, respectivamente, el *pie* (ft), la *libra* (lb) y el *segundo* (s). El segundo es el mismo que la unidad correspondiente en el SI. El pie se define como 0.3048 m. La libra está definida como el *peso* de un patrón de platino llamado *libra estándar*, que se conserva en el National Bureau of Standards en Washington, cuya masa es de 0.453 592 43 kg. Como el peso de un cuerpo depende de la atracción gravitacional de la Tierra, que varía con la ubicación del mismo, está especificado que la libra estándar debe colocarse al nivel del mar y a la latitud de 45° para definir correctamente la fuerza de 1 lb. Naturalmente que las unidades del sistema inglés no forman un sistema de unidades absoluto. Por su dependencia con la atracción gravitacional de la Tierra, se dice que forman un sistema de unidades *gravitacional*.

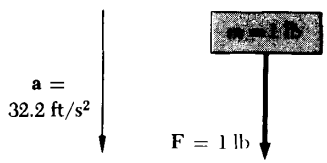


Fig. 12.6

Aunque la libra estándar sirve también como la unidad de masa en operaciones comerciales en Estados Unidos, no puede usarse en cálculos de ingeniería, ya que tal unidad no sería consistente con las unidades básicas definidas en el párrafo anterior. De hecho, al estar sujeta a una fuerza de 1 lb, es decir, cuando actúa sobre ella su propio peso, la libra estándar recibe la aceleración de la gravedad, $g = 32.2$ ft/s² (Fig. 12.6), no la unidad de aceleración requerida por la ecuación (12.1). La unidad de masa consistente con el pie, la libra y el segundo es la masa, que recibe la aceleración de 1 ft/s² cuando se le aplica una fuerza de 1 lb (Fig. 12.7). Esta unidad, llamada algunas veces *slug*, puede derivarse de la ecuación $F = ma$ después de sustituir 1 lb y 1 ft/s² para F y a, respectivamente. Escribimos

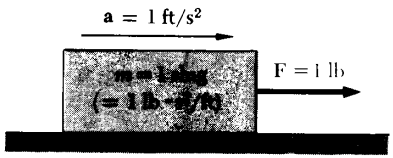


Fig. 12.7

$$F = ma \qquad 1 \text{ lb} = (1 \text{ slug})(1 \text{ ft/s}^2)$$

y obtenemos

$$1 \text{ slug} = \frac{1 \text{ lb}}{1 \text{ ft/s}^2} = 1 \text{ lb}\cdot\text{s}^2/\text{ft}$$

Comparando las figuras 12.6 y 12.7 concluimos que el slug es una masa 32.2 veces mayor que la masa de la libra estándar.

El hecho de que los cuerpos estén caracterizados en el sistema de unidades inglés por sus pesos en libras en lugar de que lo estén por sus masas en slugs fue conveniente para el estudio de la estática, donde estuvimos tratando constantemente con pesos y otras fuerzas y sólo ocasionalmente con masas. Pero en el estudio de la cinética, donde intervienen fuerzas, masas y aceleración, tendremos que expresar repetidamente la masa m de un cuerpo en slugs, cuyo peso se haya dado en libras. Recordando la ecuación (12.6), escribiremos

$$m = \frac{W}{g} \tag{12.7}$$

donde g es la aceleración de la gravedad ($g = 32.2$ ft/s²).

Todas las otras unidades distintas de las unidades de fuerza, lon-

gitud y tiempo pueden expresarse en términos de estas tres unidades básicas. Por ejemplo, la unidad de momento lineal puede obtenerse recordando la definición de momento lineal y escribiendo

$$mv = (\text{lb}\cdot\text{s}^2/\text{ft})(\text{ft/s}) = \text{lb}\cdot\text{s}$$

La conversión de las unidades del sistema inglés a las unidades del SI y viceversa se estudió en la sección 1.4. Recordaremos los factores de conversión obtenidos para las unidades de longitud, fuerza y masa respectivamente:

Longitud	$1 \text{ ft} = 0.3048 \text{ m}$
Fuerza	$1 \text{ lb} = 4.448 \text{ N}$
Masa	$1 \text{ slug} = 1 \text{ lb}\cdot\text{s}^2/\text{ft} = 14.59 \text{ kg}$

Si bien no puede usarse como unidad de masa congruente, recordaremos que la masa de la libra estándar es por definición

$$1 \text{ libra-masa} = 0.4536 \text{ kg}$$

Esta constante puede usarse para determinar la *masa* en unidades del SI (kilogramos) de un cuerpo que ha sido caracterizado por su *peso* en unidades inglesas (libras).

12.5. Ecuaciones de movimiento. Considérese una partícula de masa m sujeta a varias fuerzas. De la sección 12.2 recordamos que la segunda ley de Newton puede expresarse escribiendo la ecuación

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a} \tag{12.2}$$

que relaciona a las fuerzas que actúan sobre la partícula y el vector $m\mathbf{a}$ (Fig. 12.8). Sin embargo, para resolver problemas en los que interviene el movimiento de la partícula, se encontrará más conveniente sustituir la ecuación (12.2) por ecuaciones equivalentes en términos de cantidades escalares.

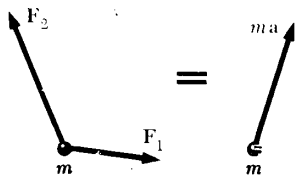


Fig. 12.8

Componentes rectangulares. Descomponiendo cada fuerza **F** y la aceleración **a** en sus componentes rectangulares, escribimos

$$\Sigma(F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}) = m(a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k})$$

de donde se sigue que

$$\Sigma F_x = ma_x \qquad \Sigma F_y = ma_y \qquad \Sigma F_z = ma_z \tag{12.8}$$

Recordando de la sección 11.11 que las componentes de la ac ción son iguales a las segundas derivadas de las coordenadas partícula tenemos

$$\Sigma F_x = m\ddot{x} \qquad \Sigma F_y = m\ddot{y} \qquad \Sigma F_z = m\ddot{z} \qquad (1$$

Considérese como un ejemplo el movimiento de un proyect se desprecia la resistencia del aire, la única fuerza que actúa sol proyectil, después de que ha sido disparado, es su peso $\mathbf{W} = -$ Las ecuaciones que definen el movimiento del proyectil son p tanto

$$m\ddot{x} = 0 \qquad m\ddot{y} = -W \qquad m\ddot{z} = 0$$

y las componentes de la aceleración del proyectil son

$$\ddot{x} = 0 \qquad \ddot{y} = -\frac{W}{m} = -g \qquad \ddot{z} = 0$$

donde g es 9.81 m/s^2, o 32.2 ft/s^2. Las ecuaciones obtenidas pu integrarse en forma independiente, como se mostró en la sección 1 para obtener la velocidad y el desplazamiento del proyectil en c quier instante.

Cuando un problema contiene dos o más cuerpos, las ecuacion movimiento deben escribirse para cada uno de los cuerpos (vé problemas resueltos 12.3 y 12.4). También recordemos de la sección que todas las aceleraciones deben medirse respecto a un sistem referencia newtoniano. En la mayor parte de las aplicacione ingeniería, las aceleraciones pueden determinarse respecto de ejes a la Tierra, pero las aceleraciones relativas medidas respecto a eje movimiento, como ejes fijos a un cuerpo acelerado, no pueden su tuirse por $\mathbf{a}$ en las ecuaciones de movimiento.

Componentes tangencial y normal. Descomponiendo fuerzas y la aceleración de la partícula en sus componentes a lo la de la tangente a la trayectoria (en la dirección del movimiento)

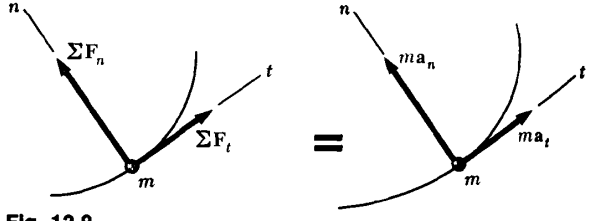


Fig. 12.9

normal (hacia el interior de la trayectoria) (Fig. 12.9), y sustituye en la ecuación (12.2), obtenemos las dos ecuaciones escalares

$$\Sigma F_t = ma_t \qquad \Sigma F_n = ma_n \qquad (12$$

Sustituyendo a_t y a_n de las ecuaciones (11.40), tenemos

$$\Sigma F_t = m\frac{dv}{dt} \qquad \Sigma F_n = m\frac{v^2}{\rho} \qquad (12.$$

Las ecuaciones obtenidas pueden resolverse para dos incógnitas.

12.6. Equilibrio dinámico. Volviendo a la ecuación (12.2) y trasponiendo el miembro derecho, escribimos la segunda ley de Newton en otra forma

$$\Sigma \mathbf{F} - m\mathbf{a} = 0 \qquad (12.10)$$

que expresa que si agregamos el vector $-m\mathbf{a}$ a las fuerzas que actúan sobre la partícula, *obtenemos un sistema nulo de vectores* (Fig. 12.10). El vector $-m\mathbf{a}$, de módulo ma y de *sentido opuesto* al de la aceleración se llama *vector de inercia*. Así pues, puede considerarse que la partícula está en equilibrio bajo las fuerzas dadas y el vector de inercia. Se dice que la partícula está en *equilibrio dinámico* y que el problema en consideración puede resolverse por los métodos desarrollados anteriormente en la estática.

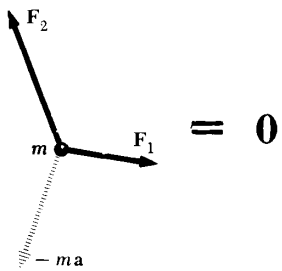


Fig. 12.10

En el caso de fuerzas coplanarias, podemos trazar todos los vectores como muestra la figura 12.10, *incluyendo el vector de inercia*, para formar un polígono vectorial cerrado. O podemos escribir que las sumas de las componentes de todos los vectores en la figura 12.10, incluyendo nuevamente el vector de inercia, son cero. Por consiguiente, usando componentes rectangulares, escribimos

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \textbf{incluyendo el vector de inercia} \qquad (12.11)$$

Cuando se usan las componentes tangenciales y normal, es más conveniente representar el vector de inercia por sus dos componentes $-m\mathbf{a}_t$ y $-m\mathbf{a}_n$ en el diagrama mismo (Fig. 12.11). La componente tangencial del vector de inercia proporciona una medida de la resistencia que la partícula ofrece o presenta a un cambio en la velocidad, mientras que su componente normal (también llamada *fuerza centrífuga*) representa la tendencia de la partícula a salir de su trayectoria curva. Debemos notar que cualquiera de estas dos componentes puede ser cero bajo condiciones especiales: 1) si la partícula parte del reposo, su velocidad inicial es cero y la componente normal de su vector de inercia es cero en $t = 0$; 2) si la partícula se mueve con velocidad constante a lo largo de su trayectoria, la componente tangencial del vector de inercia es cero y sólo su componente normal necesita considerarse. Como los vectores de inercia miden la resistencia que las partículas ofrecen cuando tratamos de ponerlas en movimiento o cuando tratamos de cambiar las condiciones de su movimiento, a estos vectores se les llama con frecuencia *fuerzas de inercia*. Pero las fuerzas inerciales no son como las fuerzas encontradas en estática, que pueden ser de contacto o fuerzas gravitacionales (pesos), por lo que muchos investigadores se oponen al uso de la palabra "**fuerza**" cuando se habla del vector $-m\mathbf{a}$ o incluso evitan el concepto de equilibrio dinámico. Otros señalan que las fuerzas inerciales y las fuerzas reales, como las fuerzas gravitacionales, afectan nuestros sentidos en la misma forma y no pueden distinguirse por medios físicos. Un hombre subiendo en el ascensor que está acelerando hacia arriba sentirá que su peso ha aumentado repentinamente, y ninguna medida dentro del ascensor puede decir si el ascensor está realmente acelerado, o si la fuerza de atracción ejercida por la Tierra ha cambiado de repente.

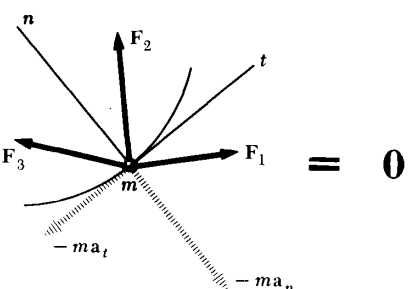
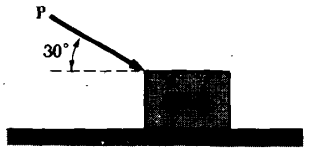


Fig. 12.11

En los problemas resueltos de este texto se aplica directamente la segunda ley de Newton, como se ilustra en las figuras 12.8 y 12.9, en lugar de utilizar el método de equilibrio dinámico.

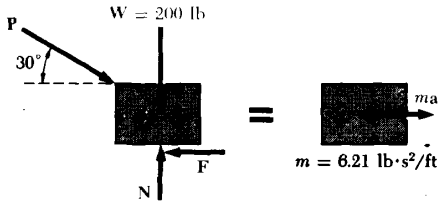


PROBLEMA RESUELTO 12.1

Un bloque de 200 lb descansa sobre un plano horizontal. Encuéntrese el módulo de la fuerza **P** necesaria para imprimirle al bloque una aceleración de 10 ft/s² hacia la derecha. El coeficiente de rozamiento dinámico entre el bloque y el plano es $\mu_k = 0.25$.

Solución. La masa del bloque es

$$m = \frac{W}{g} = \frac{200 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2} = 6.21 \text{ lb}\cdot\text{s}^2/\text{ft}$$



Como $F = \mu_k N = 0.25N$ y $a = 2.5$ ft/s², y usando el hecho de que las fuerzas que actúan sobre el bloque son equivalentes al vector $m\mathbf{a}$, escribimos

$$\stackrel{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = ma: \quad P\cos 30° - 0.25N = (6.21 \text{ lb}\cdot\text{s}^2/\text{ft})(10 \text{ ft/s}^2)$$

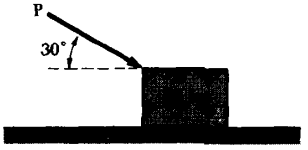
$$P\cos 30° - 0.25N = 62.1 \text{ lb} \qquad (1)$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad N - P\,\text{sen}\,30° - 200 \text{ lb} = 0 \qquad (2)$$

Despejando N de (2) e incorporando el resultado en (1), obtenemos

$$N = P\,\text{sen}\,30° + 200 \text{ lb}$$

$$P\cos 30° - 0.25(P\,\text{sen}\,30° + 200 \text{ lb}) = 62.1 \text{ lb} \qquad P = 151 \text{ lb} \blacleft$$

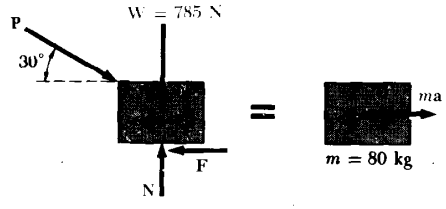


PROBLEMA RESUELTO 12.2

Un bloque de 80 kg descansa sobre un plano horizontal. Encuéntrese el módulo de la fuerza **P** necesaria para imprimirle al bloque una aceleración de 2.5 m/s² a la derecha. El coeficiente de rozamiento dinámico entre el bloque y el plano es $\mu_k = 0.25$.

Solución. El peso del bloque es

$$W = mg = (80 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 785 \text{ N}$$



Notamos que $F = \mu_k N = 0.25N$ y que $a = 10$ m/s². Como las fuerzas que actúan sobre el bloque son equivalentes al vector $m\mathbf{a}$, escribimos

$$\stackrel{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = ma: \quad P\cos 30° - 0.25N = (80 \text{ kg})(2.5 \text{ m/s}^2)$$

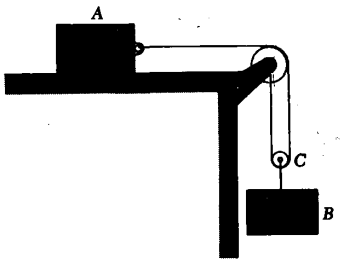
$$P\cos 30° - 0.25N = 200 \text{ N} \qquad (1)$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad N - P\,\text{sen}\,30° - 785 \text{ N} = 0 \qquad (2)$$

Despejando N de (2) y sustituyéndola en (1), obtenemos

$$N = P\,\text{sen}\,30° + 785 \text{ N}$$

$$P\cos 30° - 0.25(P\,\text{sen}\,30° + 785 \text{ N}) = 200 \text{ N} \qquad P = 535 \text{ N} \blacleft$$



PROBLEMA RESUELTO 12.3

Los dos bloques mostrados en la figura parten del reposo. El plano horizontal y la polea no tienen rozamiento y se supone que la polea es de masa despreciable. Determínese la aceleración de cada bloque y la tensión en cada cuerda.

Cinemática. Nos damos cuenta de que si el bloque A se mueve una distancia x_A a la derecha, el bloque B se mueve hacia abajo una distancia

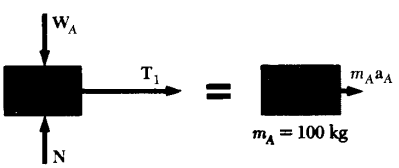
$$x_B = \tfrac{1}{2}x_A$$

Derivando dos veces respecto de t, tenemos

$$a_B = \tfrac{1}{2}a_A \tag{1}$$

Cinética. Aplicaremos la segunda ley de Newton en forma sucesiva al bloque A, al bloque B y a la polea C.

El bloque A. Representando con T_1 la tensión en la cuerda ACD, escribimos

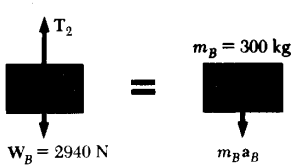


$$\stackrel{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = m_A a_A: \qquad T_1 = 100a_A \tag{2}$$

El bloque B. Observando que el peso del bloque B es

$$W_B = m_B g = (300\text{ kg})(9.81\text{ m/s}^2) = 2940\text{ N}$$

y representando con T_2 la tensión en la cuerda BC, escribimos

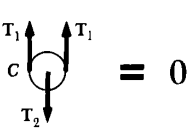


$$+\downarrow \Sigma F_y = m_B a_B: \qquad 2940 - T_2 = 300a_B$$

o, sustituyendo a_B de (1), tenemos

$$2940 - T_2 = 300(\tfrac{1}{2}a_A)$$
$$T_2 = 2940 - 150a_A \tag{3}$$

La polea C. Como m_C se supone igual a cero, podemos escribir



$$+\downarrow \Sigma F_y = m_C a_C = 0: \qquad T_2 - 2T_1 = 0 \tag{4}$$

Sustituyendo los valores de T_1 y T_2 de (2) y (3), respectivamente, en (4), escribimos

$$2940 - 150a_A - 2(100a_A) = 0$$
$$2940 - 350a_A = 0 \qquad a_A = 8.40\text{ m/s}^2 \blacktriangleleft$$

Introduciendo el valor obtenido para a_A en (1) y (2) tenemos

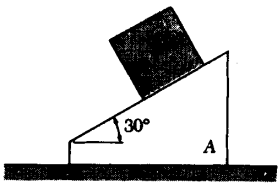
$$a_B = \tfrac{1}{2}a_A = \tfrac{1}{2}(8.40\text{ m/s}^2) \qquad a_B = 4.20\text{ m/s}^2 \blacktriangleleft$$
$$T_1 = 100a_A = (100\text{ kg})(8.40\text{ m/s}^2) \qquad T_1 = 840\text{ N} \blacktriangleleft$$

De (4) podemos escribir

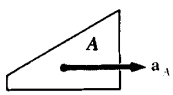
$$T_2 = 2T_1 \qquad T_2 = 2(840\text{ N}) \qquad T_2 = 1680\text{ N} \blacktriangleleft$$

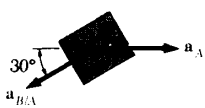
Notamos que el valor obtenido para T_2 *no* es igual al peso del bloque B.

PROBLEMA RESUELTO 12.4



El bloque B de 12 lb parte del reposo y desliza sobre la cuña A de 30 lb que está sobre una superficie horizontal. Despreciando el rozamiento, determínense: *a*) la aceleración de la cuña, *b*) la aceleración del bloque relativa a la cuña.





Cinemática. Examinaremos primero las aceleraciones de la cuña y del bloque.

La cuña A. Como ésta está restringida a moverse sobre la superficie horizontal, su aceleración $\mathbf{a}_A$ es horizontal. Supondremos que está dirigida hacia la derecha.

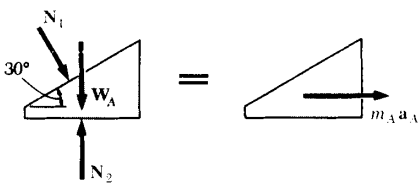
El bloque B. La aceleración $\mathbf{a}_B$ del bloque B puede expresarse como la suma de la aceleración de A y de la aceleración de B relativa a A. Tenemos

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$

donde $\mathbf{a}_{B/A}$ está a lo largo de la superficie inclinada de la cuña.

Cinética. Trazaremos los diagramas de sólido libre de la cuña y del bloque y aplicaremos la segunda ley de Newton.

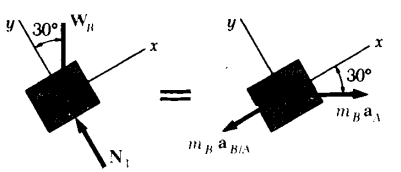
La cuña A. Representamos por $\mathbf{N}_1$ y $\mathbf{N}_2$ las fuerzas ejercidas por el bloque y la superficie horizontal sobre la cuña A, respectivamente.



$$\stackrel{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = m_A a_A: \qquad N_1 \operatorname{sen} 30° = m_A a_A$$

$$0.5 N_1 = (W_A/g) a_A \tag{1}$$

El bloque B. Usando los ejes coordenados mostrados en la figura y descomponiendo $\mathbf{a}_B$ en sus componentes $\mathbf{a}_A$ y $\mathbf{a}_{B/A}$ escribimos



$$+\nearrow \Sigma F_x = m_B a_x: \qquad -W_B \operatorname{sen} 30° = m_B a_A \cos 30° - m_B a_{B/A}$$

$$-W_B \operatorname{sen} 30° = (W_B/g)(a_A \cos 30° - a_{B/A})$$

$$a_{B/A} = a_A \cos 30° + g \operatorname{sen} 30° \tag{2}$$

$$+\nwarrow \Sigma F_y = m_B a_y: \quad N_1 - W_B \cos 30° = -m_B a_A \operatorname{sen} 30°$$

$$N_1 - W_B \cos 30° = -(W_B/g) a_A \operatorname{sen} 30° \tag{3}$$

a) Aceleración de la cuña A. Sustituyendo N_1 de la ecuación (1) y en la ecuación (3), tenemos

$$2(W_A/g) a_A - W_B \cos 30° = -(W_B/g) a_A \operatorname{sen} 30°$$

Resolviendo para a_A y sustituyendo los datos numéricos, escribimos

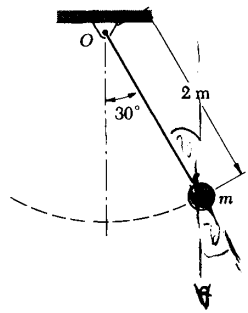
$$a_A = \frac{W_B \cos 30°}{2W_A + W_B \operatorname{sen} 30°} g = \frac{(12 \text{ lb}) \cos 30°}{2(30 \text{ lb}) + (12 \text{ lb}) \operatorname{sen} 30°} (32.2 \text{ ft/s}^2)$$

$$a_A = +5.07 \text{ ft/s}^2 \qquad \mathbf{a}_A = 5.07 \text{ ft/s}^2 \rightarrow \blacktriangleleft$$

b) Aceleración el bloque B relativa a A. Sustituyendo el valor obtenido para a_A en la ecuación (2), tenemos

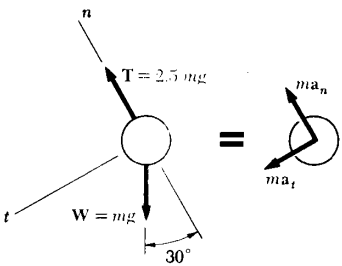
$$a_{B/A} = (5.07 \text{ ft/s}^2) \cos 30° + (32.2 \text{ ft/s}^2) \operatorname{sen} 30°$$

$$a_{B/A} = +20.5 \text{ ft/s}^2 \qquad \mathbf{a}_{B/A} = 20.5 \text{ ft/s}^2 \measuredangle 30° \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESUELTO 12.5

La plomada de un péndulo de 2 m describe un arco de círculo en un plano vertical. Si la tensión en la cuerda es 2.5 veces el peso de la plomada para la posición indicada en la figura, encuéntrense la velocidad y la aceleración de la plomada en esa posición.



Solución. El peso de la plomada es $W = mg$; la tensión en la cuerda es entonces $2.5\ mg$. Como $\mathbf{a}_n$ está dirigida hacia O y suponiendo $\mathbf{a}_t$ como se muestra en la figura, aplicamos la segunda ley de Newton y obtenemos

$$+\swarrow \Sigma F_t = ma_t: \qquad mg \operatorname{sen} 30° = ma_t$$

$$a_t = g \operatorname{sen} 30° = +4.90 \text{ m/s}^2 \qquad a_t = 4.90 \text{ m/s}^2 \swarrow$$

$$+\nwarrow \Sigma F_n = ma_n: \quad 2.5\,mg - mg \cos 30° = ma_n$$

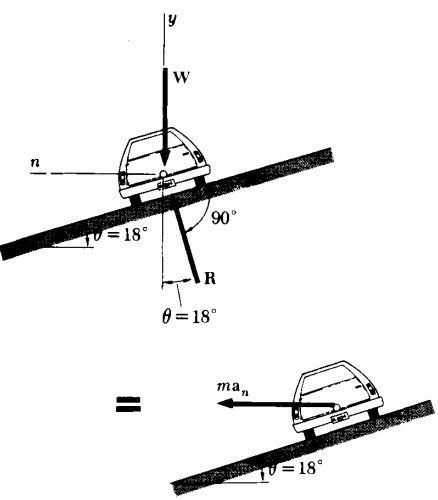
$$a_n = 1.634\,g = +16.03 \text{ m/s}^2 \qquad a_n = 16.03 \text{ m/s}^2 \nwarrow$$

Como $a_n = v^2/\rho$, tenemos $v^2 = \rho a_n = (2 \text{ m})(16.03 \text{ m/s}^2)$

$$v = \pm 5.66 \text{ m/s} \qquad v = 5.66 \text{ m/s} \swarrow\nearrow \text{ (hacia arriba o hacia abajo)}$$

PROBLEMA RESUELTO 12.6

Determínese la velocidad máxima permitida en una curva en una carretera de radio $\rho = 400$ ft peraltada con un ángulo $\theta = 18°$. La velocidad máxima permitida en una curva peraltada en un camino es la velocidad con la que un vehículo debe transitar para que no exista fuerza de rozamiento lateral en sus neumáticos.



Solución. Un automóvil viaja en una trayectoria circular *horizontal* de radio ρ. La componente normal $\mathbf{a}_n$ de la aceleración se dirige hacia el centro de la trayectoria; su magnitud es $a_n = v^2/\rho$, donde v es la velocidad del vehículo en ft/s. La masa m del auto es W/g, donde W es el peso del auto. Como no debe ejercerse ninguna fuerza de rozamiento lateral sobre el auto, la reacción **R** del camino se muestra perpendicular a la carretera. Aplicando la segunda ley de Newton, escribimos

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \qquad R \cos\theta - W = 0 \qquad R = \frac{W}{\cos\theta} \tag{1}$$

$$\overset{+}{\leftarrow} \Sigma F_n = ma_n: \qquad R \operatorname{sen}\theta = \frac{W}{g} a_n \tag{2}$$

Usando el valor de R de (1) en (2) y recordando que $a_n = v^2/\rho$,

$$\frac{W}{\cos\theta} \operatorname{sen}\theta = \frac{W}{g}\frac{v^2}{\rho} \qquad v^2 = g\rho \tan\theta$$

Reemplazando los datos, $\rho = 400$ ft y $\theta = 18°$ en esta ecuación, obtenemos

$$v^2 = (32.2 \text{ ft/s}^2)(400 \text{ ft}) \tan 18°$$

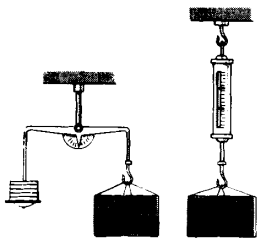
$$v = 64.7 \text{ ft/s} \qquad v = 44.1 \text{ mi/h}$$

Problemas

12.1 El valor de g a cualquier latitud ϕ puede obtenerse con la fórmula

$$g = 32.09(1 + 0.0053 \operatorname{sen}^2 \phi) \text{ ft/s}^2$$

que considera el efecto de la rotación de la Tierra, así como que la Tierra no es realmente esférica. Determínese con cuatro cifras significativas: *a*) el peso en libras, *b*) la masa en libras y *c*) la masa en $\text{lb.s}^2/\text{ft}$ a las latitudes de 0°, 45° y 90° de una barra de plata cuya masa oficial es 5 lb.



(*a*) (*b*)

Fig. P12.3

12.2 La aceleración de la gravedad en la Luna es de 1.62 m/s^2. Determínese: *a*) el peso en newtons y *b*) la masa en kilogramos en la Luna, de un lingote de oro cuya masa se ha especificado oficialmente ser de 2 kg.

12.3 Se pesan dos cajas sobre las básculas aquí mostradas la báscula *a* es una báscula de brazo y la báscula *b* es una de resorte. Las básculas están unidas al techo de un ascensor. Cuando el ascensor está en reposo cada báscula indica una masa de 15 kg. Si la báscula de resorte indica una masa de 20 kg, determínense *a*) la aceleración en el elevador y *b*) la masa indicada por la báscula de brazo.

12.4 Un satélite de 500 kg ha sido colocado en una órbita circular a 1200 km de la superficie de la Tierra. La aceleración de la gravedad a esta altura es de 6.95 m/s^2. Determínese la cantidad de movimiento lineal del satélite, sabiendo que su velocidad orbital es de 26.1×10^3 km/h.

12.5 Determínese la velocidad teórica máxima a que puede ir un automóvil para que pueda frenar en una distancia de 60 m, sabiendo que el coeficiente de rozamiento estático es de 0.80 entre los neumáticos y el pavimento, que el 60% del peso del vehículo se distribuye sobre sus neumáticos delanteros y que el 40% restante se encuentra en sus neumáticos traseros, suponiendo *a*) tracción en las cuatro ruedas, *b*) tracción delantera y *c*) tracción trasera.

12.6 Un automovilista viajando a una velocidad de 108 km/h aplica repentinamente los frenos y se para después de patinar 75 m. Determínese *a*) el tiempo que necesitó el vehículo para parar, *b*) el coeficiente de rozamiento entre los neumáticos y el pavimento.

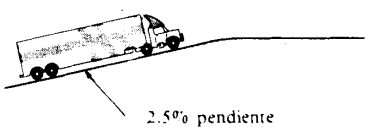


Fig. P12.7

12.7 Un camión está subiendo por una larga pendiente de 2.5% a una velocidad constante de 45 mi/h. Si el conductor no modifica su aceleración o cambia de velocidad cuando el auto llega a lo alto de la colina, ¿cuál será su aceleración al empezar su movimiento en plano?

12.8 Un automóvil de 2800 lb se mueve hacia abajo con una pendiente de 4° a una velocidad de 55 mi/h cuando se aplican los frenos, ocasionando una fuerza de frenado total de 1500 lb sobre el automóvil. Determínese la distancia recorrida por el automóvil antes de parar.

12.9 Los dos bloques mostrados están originalmente en reposo. Despreciando las masas de las poleas y el efecto del rozamiento de ellas y entre el bloque A y el plano inclinado, determínese *a*) la aceleración de cada bloque, *b*) la tensión en el cable.

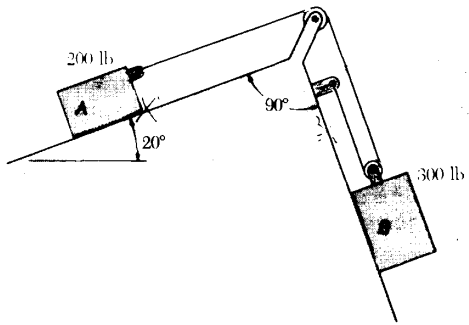


Fig. P12.9

12.10 Resuélvase el problema 12.9 suponiendo que los coeficientes de rozamiento entre los bloques y el plano inclinado son $\mu_s = 0.25$ y $\mu_k = 0.20$.

12.11 Un tren ligero que consta de dos coches viaja a 90 km/h cuando le son aplicados los frenos a ambos coches. Si la masa del coche A es de 25 Mg y la del coche B es de 20 Mg y la fuerza de frenado es de 30 kN sobre cada coche, determínese *a*) la distancia que viaja el tren antes de parar y *b*) la fuerza en la unión entre los coches mientras el tren decrementa su velocidad.

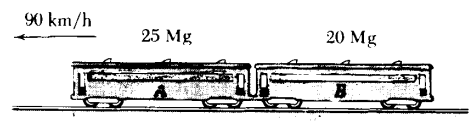


Fig. P12.11

12.12 Resuélvase el problema 12.11 suponiendo que los frenos del coche B fallan.

12.13 El bloque A tiene una masa de 25 kg y el bloque B de 15 kg. Los coeficientes de fricción entre todas las superficies de contacto son $\mu_s = 0.20$ y $\mu_k = 0.15$. Sabiendo que $\theta = 25°$ y el módulo de la fuerza **P** aplicada al bloque A es de 250 N, determínense *a*) la aceleración del bloque A y *b*) la tensión en el cable.

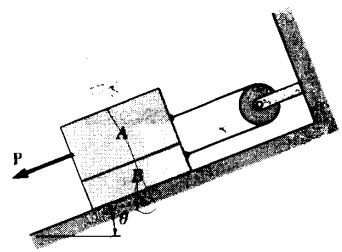


Fig. P12.13

12.14 Resuélvase el problema 12.13 suponiendo que la fuerza **P** de 250 N se aplica al bloque B en lugar de al bloque A

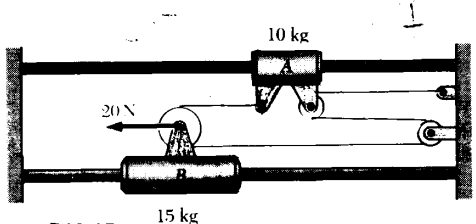


Fig. P12.15

12.15 Si se sabe que el sistema mostrado en la figura parte del reposo, encuéntrese la velocidad para $t = 1.2$ s de *a*) el collarín A y *b*) el collarín B. Despréciense las masas de las poleas y el efecto del rozamiento.

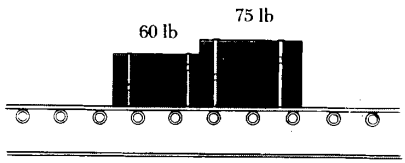


Fig. P12.16

12.16 Dos paquetes están colocados sobre una banda transportadora que está en reposo. El coeficiente de rozamiento cinético es de 0.20 entre la banda y el paquete A y de 0.10 entre la banda y el paquete B. Si se pone en movimiento repentinamente la banda hacia la derecha y ocurre corrimiento entre la banda y los paquetes, determínense *a*) la aceleración de los paquetes y *b*) la fuerza ejercida por el paquete A sobre el paquete B.

12.17 Cada uno de los sistemas mostrados en la figura se encuentra inicialmente en reposo, suponiendo que las poleas no tienen peso y despreciando el rozamiento del eje, determínense para cada sistema *a*) la aceleración del bloque A, *b*) la velocidad del bloque después de 2 s y *c*) la velocidad del bloque A después de que ha recorrido 8 ft.

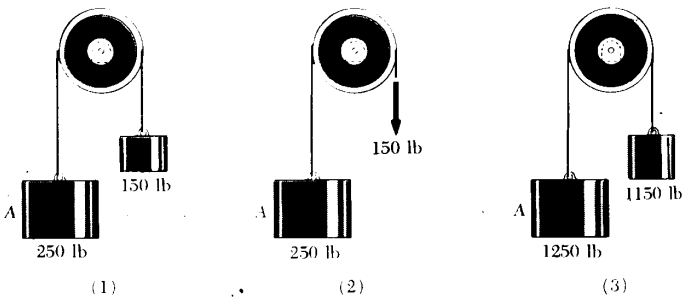


Fig. P12.17

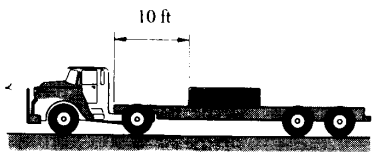


Fig. P12.18

12.18 Los coeficientes de rozamiento entre la carga y la plataforma del remolque mostrados en la figura son $\mu_s = 0.40$ y $\mu_k = 0.30$. Sabiendo que la velocidad del vehículo es de 45 mi/h, determínese la distancia más corta en el que éste puede parar sin que la carga se recorra.

12.19 El remolque del problema 12.18 está viajando a 60 mi/h cuando el conductor hace una parada de emergencia ocasionando que el vehículo patine hasta pararse en 4 s. Determínense *a*) si la carga se recorrerá en la plataforma y *b*) si ocurre, encuéntrese la velocidad relativa con la que llegará a la orilla delantera del remolque.

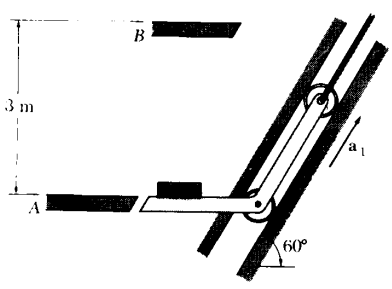


Fig. P12.20

12.20 En un proceso de fabricación, los discos se mueven desde el nivel A hasta el nivel B por el brazo levantador mostrado en la figura. El brazo parte del nivel A sin velocidad inicial, se mueve primero con aceleración constante a_1 en la forma indicada por la figura, después con una desaceleración constante a_2 y se para en el nivel B. Sabiendo que el coeficiente de fricción estática entre los discos y el brazo es 0.30, determínese la máxima aceleración permitida a_1 y el máximo valor de la desaceleración a_2 para que los discos no resbalen.

12.21 Si se desea mover los discos del problema 12.20 desde el nivel A hasta el nivel B en el tiempo más corto posible sin resbalar, determínese *a*) la máxima velocidad alcanzada por el brazo levantador y *b*) el tiempo necesario para mover cada disco.

12.22 Un barco de masa total m se ancla a la mitad de un río que fluye con una velocidad constante v_0. El componente horizontal de la fuerza ejercida sobre el barco por la cadena del ancla es $\mathbf{T}_0$. Si la cadena del ancla se rompe repentinamente, determínese el tiempo necesario para que el barco alcance una velocidad igual *a)* $\frac{1}{2}v_0$. Supóngase que la resistencia friccional del agua es proporcional a la velocidad del barco relativa al agua.

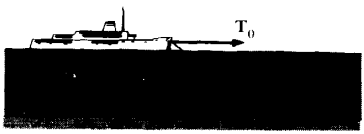


Fig. P12.22

12.23 Un aeroplano tiene una masa de 25 Mg y sus motores desarrollan un empuje total de 40 kN durante el despegue. Si la resistencia del aire **D** ejercida sobre el avión tiene un módulo $D = 2.25v^2$, donde v se expresa en m/s y D en newtons y si el avión inicia el vuelo a una velocidad de 240 km/h, determínese la longitud de la pista de aterrizaje necesaria para que el avión despegue.

12.24 Para el avión del problema 12.23 determínese el tiempo necesario para el despegue.

12.25 Se aplica una fuerza constante **P** a un émbolo y a una barra de masa total m para hacerlas moverse en un cilindro lleno de aceite. Conforme el émbolo se mueve, el aceite es forzado a través de orificios en el émbolo y ejerce sobre éste una fuerza adicional de magnitud kv, proporcional a la velocidad v del émbolo y de sentido opuesto a su movimiento. Exprese la distancia x recorrida por el émbolo en función del tiempo t, suponiendo que el émbolo parte del reposo en $t = 0$ y $x = 0$.



Fig. P12.25

12.26 El bloque A pesa 30 lb y los bloques B y C pesan 15 lb cada uno. Si $P = 3$ lb y los bloques parten del reposo, determínense para $t = 4$ s, la velocidad *a)* de B relativa a A y *b)* de C relativa a A. Despréciense los pesos de las poleas y el efecto del rozamiento.

12.27 El bloque A pesa 30 lb y los bloques B y C pesan 15 lb cada uno. Si se sabe que los bloques parten del reposo y que B se mueve 12 ft en 2 s, determínense *a)* el módulo de la fuerza **P**, *b)* la tensión en la cuerda AD. Despréciense los pesos de las poleas y el efecto del rozamiento.

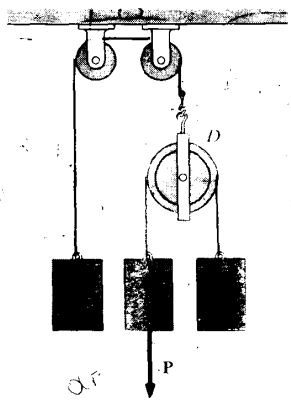


Fig. P12.26 y P12.27

12.28 Los coeficientes de rozamiento entre los bloques A y C y las superficies horizontales son $\mu_s = 0.24$ $\mu_k = 0.20$. Si $m_A = 5$ kg, $m_B = 10$ kg, y $m_C = 10$ kg, determínese *a)* la tensión en la cuerda y *b)* la aceleración de cada bloque.

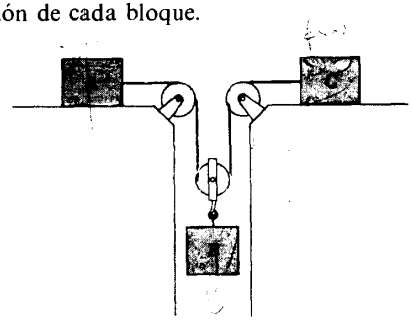


Fig. P12.28

12.29 Resuélvase el problema 12.28 suponiendo que $m_A = 5$ kg, $m_B = 10$ kg, $m_C = 20$ kg.

12.30 Un bloque B de 15 lb descansa en la forma indicada sobre la superficie superior de una cuña de A de 25 lb. Despreciando el rozamiento, determínense *a*) la aceleración de A y *b*) la aceleración de B relativa a A, inmediatamente después que el sistema se suelta desde el reposo.

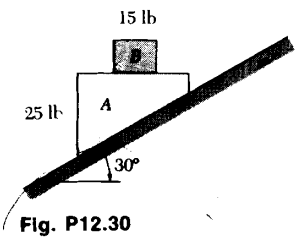


Fig. P12.30

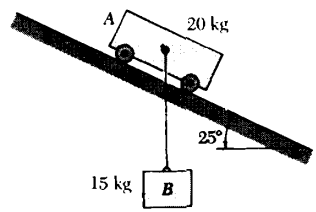


Fig. P12.31

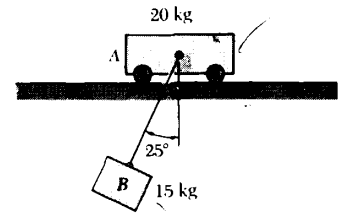
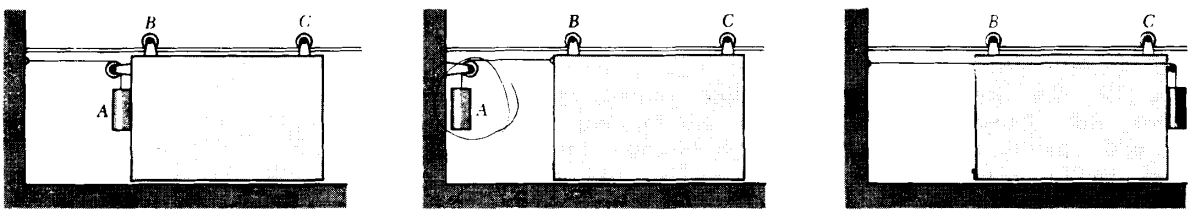


Fig. 12.32

12.31 y 12.32 Un bloque B de 15 kg está suspendido por una cuerda de 2.5 m sujeta a una carretilla A de 20 kg. Despreciando el rozamiento, determínese *a*) la aceleración de la carretilla y *b*) la tensión en la cuerda inmediatamente después de que el sistema se suelta desde el reposo en la posición mostrada.



a) *b*) *c*)

Fig. P12.33

12.33 Un panel deslizante de 40 lb es sostenido por rodillos en B y C. Un contrapeso A de 25 lb está unido a un cable en la forma indicada y en los casos *a* y *c* de la figura está inicialmente en contacto con la orilla vertical del panel. Despreciando el rozamiento, determínese en cada caso la aceleración del panel y la tensión en la cuerda inmediatamente después de que el sistema se suelta desde el reposo.

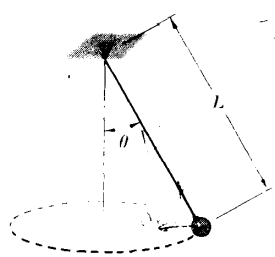


Fig. P12.34 y P12.35

12.34 Una pelota de 4 lb gira en un círculo horizontal en la forma indicada. Sabiendo que $L = 3$ ft y que la máxima tensión permitida en la cuerda es de 10 lb, determínense *a*) la velocidad máxima permitida, *b*) el valor correspondiente del ángulo θ.

12.35 Una pelota de 2 kg gira en un círculo horizontal como se indica con una velocidad constante de 15 m/s. Si $L = 600$ mm, determínense *a*) el ángulo θ que la cuerda forma con la vertical y *b*) la tensión en la cuerda.

12.36 y 12.37 Un solo alambre *ACB* pasa a través de un anillo en *C* unido a una esfera que gira con velocidad constante *v* en el círculo horizontal que se muestra en la figura. Si la tensión es la misma en ambas porciones del alambre, determínese la velocidad *v*.

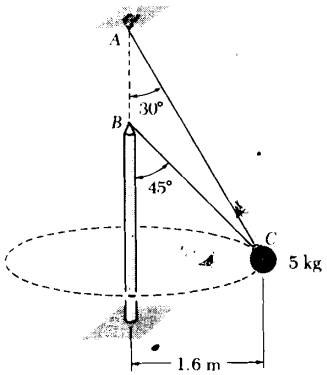


Fig. P12.36, P12.38, P12.39 y P12.41

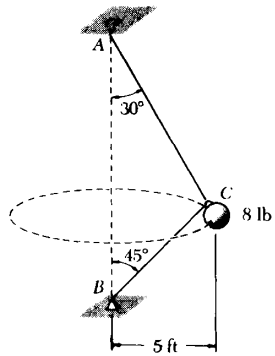


Fig. P12.37 y P12.40

12.38 Los dos alambres *AC* y *BC* están amarrados en *C* de una esfera que gira con una velocidad constante *v* en el círculo horizontal indicado. Determínese el intervalo de valores de *v* para el cual ambos alambres permanecen tensos.

12.39 Los dos alambres *AC* y *BC* están unidos en *C* de una esfera que gira con una velocidad constante *v* en el círculo horizontal mostrado. Determínese el intervalo de valores permitido de *v* para que la tensión en cualquiera de los alambres no exceda 40 N.

12.40 Dos alambres *AC* y *BC* están amarrados en *C* de una esfera que gira con velocidad constante *v* en el círculo horizontal que se muestra aquí. Determínese el intervalo de valores de *v* permitido, si se quiere que ambos alambres permanezcan tensos y que la tensión en cualquiera de ellos no exceda 15 lb.

12.41 Dos alambres *AC* y *BC* están amarrados en *C* de una esfera que gira con velocidad constante *v* en el círculo horizontal que se muestra aquí. Determínese el intervalo de valores de *v* permitido si se quiere que ambos alambres permanezcan tensos y que la tensión en cualquiera de ellos no exceda 60 N.

12.42 Una esfera pequeña de peso *W* se sostiene en la forma indicada por dos alambres *AB* y *CD*. Si se corta el alambre *AB*, determínese la tensión en el otro alambre *a*) antes de que *AB* se corte y *b*) inmediatamente después de que *AB* ha sido cortado.

12.43 Resuélvase el problema 12.42 suponiendo que se corta el alambre *CD* en lugar del alambre *AB*.

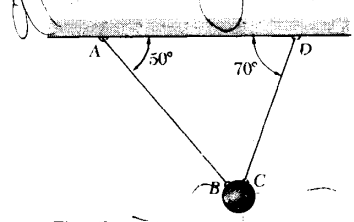


Fig. P12.42

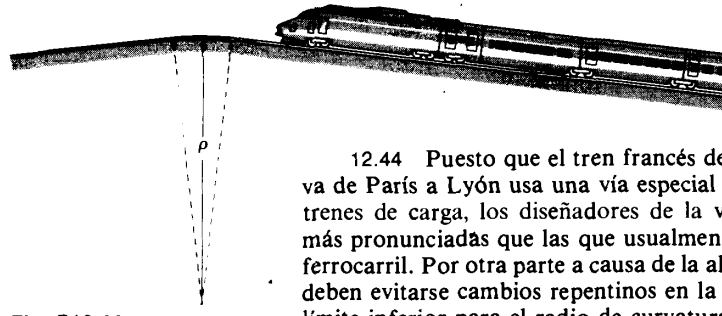


Fig. P12.44

12.44 Puesto que el tren francés de alta velocidad (TGV) que va de París a Lyón usa una vía especial que prohíbe el paso de los trenes de carga, los diseñadores de la vía pueden usar pendientes más pronunciadas que las que usualmente se permiten para vías de ferrocarril. Por otra parte a causa de la alta velocidad a la que viajan deben evitarse cambios repentinos en la inclinación y establecer un límite inferior para el radio de curvatura P del perfil vertical de la vía; *a*) si la máxima velocidad del tren en recorridos de pruebas fue de 382 km/h, determínese el valor más pequeño permitido de P para que el tren no se salga de la vía a esa velocidad; *b*) tomando el valor de P encontrado en la parte *a*, determínese la fuerza ejercida por el asiento de un pasajero de 75 kg en la cima y en el fondo de una colina cuando el tren va a 300 km/h.

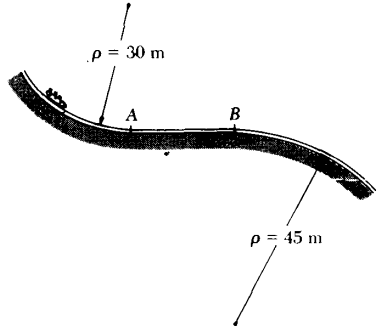


Fig. P12.45

12.45 La vía de la montaña rusa que se muestra en la figura está contenida en un plano vertical. La porción de la vía entre A y B es recta y horizontal mientras que las porciones a la izquierda de A y a la derecha de B tienen los radios de curvatura indicados. Un vehículo se desplaza con una velocidad de 72 km/h cuando se aplican repentinamente los frenos ocasionando que las ruedas del vehículo patinen sobre la vía ($\mu_k = 0.20$). Determínese la deceleración inicial del vehículo si los frenos se aplicaron cuando el vehículo *a*) ha llegado casi al punto A, *b*) está viajando entre A y B, *c*) acaba de pasar por B.

12.46 Un piloto de 160 lb vuela un pequeño avión en un circuito vertical de 500 ft de radio. Determínese la velocidad del avión en los puntos A y B, sabiendo que en el punto A el piloto no experimenta peso y que en el punto B el piloto aparenta pesar 550 lb.

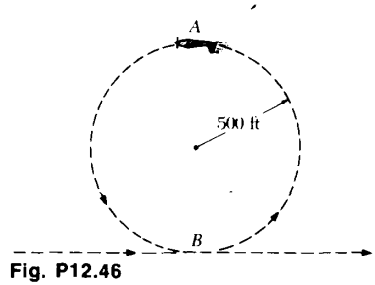


Fig. P12.46

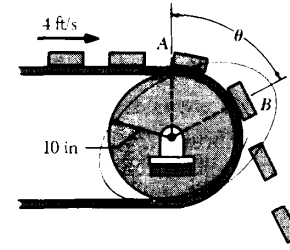


Fig. P12.47

12.47 Una serie de paquetes pequeños cada uno de los cuales pesa ¾ lb son descargados desde una banda transportadora en la forma indicada. Si se conoce que el coeficiente de rozamiento estático entre cada paquete y la banda transportadora es de 0.40, determínese *a*) la fuerza que ejerce la banda sobre un paquete inmediatamente después de que éste ha pasado por el punto A, *b*) el ángulo θ que define al punto B donde los paquetes empiezan a deslizar con relación a la banda.

12.48 Un bloque B de 250 g cabe dentro de una cavidad hecha en el brazo OA que gira en plano vertical con una velocidad constante de manera que $v = 3$ m/s. Se sabe que el resorte ejerce sobre el bloque B una fuerza de módulo $P = 1.5$ N y despreciando el efecto del rozamiento, determínese el intervalo de valores de θ para el cual el bloque B está en contacto con la cara de la cavidad más cercana al eje de rotación O.

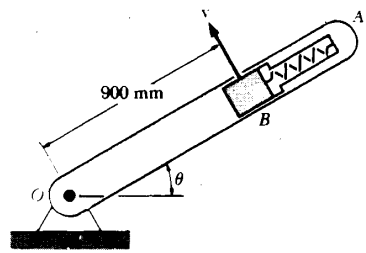


Fig. P12.48

12.49 Un acróbata del volante se propone conducir un auto pequeño a la velocidad de 45 mi/h sobre una pared vertical de una fosa circular de radio 60 ft. Si el centro de gravedad del automóvil y el conductor está a 2 ft de la pared, determínese el mínimo valor de rozamiento estático que se necesita entre los neumáticos y la pared.

12.50 Exprésense las velocidades de seguridad mínima y máxima con respecto al deslizamiento de un automóvil que se desplaza sobre un camino peraltado en términos del radio r de la curva, el ángulo de peralte θ y el ángulo de rozamiento ϕ entre los neumáticos y el pavimento.

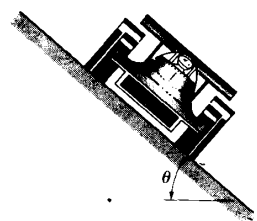


Fig. P12.51

12.51 Una curva en una pista de carreras tiene un radio de 200 m y una velocidad máxima permitida de 180 km/h (véase problema resuelto 12.6 para la definición de la velocidad máxima permitida). Sabiendo que un auto de carreras parte patinando sobre la curva cuando se mueve con una velocidad de 300 km/h, determínese *a*) el ángulo θ del peralte, *b*) el coeficiente de rozamiento estático entre los neumáticos y la pista con las condiciones del problema, *c*) la velocidad mínima con la que el mismo auto podría tomar esa curva.

12.52 Para la curva del problema resuelto 12.6 determínese la máxima velocidad de seguridad, suponiendo que el coeficiente de rozamiento estático entre los neumáticos y el pavimento es de 0.75.

12.53 El ensamble mostrado gira respecto a un eje vertical con velocidad angular constante. Si se sabe que el coeficiente de rozamiento estático entre el bloque pequeño A y la pared cilíndrica es 0.25, determínese la mínima velocidad v para la cual el bloque permanecerá en contacto con la pared.

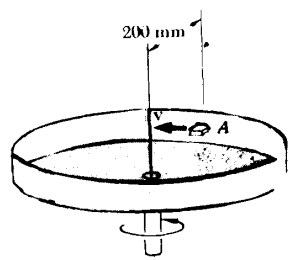


Fig. P12.53

12.54 Un pequeño collarín de 250 g puede deslizarse sobre la barra semicircular que se pone a girar respecto a la vertical AB con una velocidad angular constante de 7.5 rad/s. Determínese los tres valores de θ para los cuales el collarín no deslizará sobre la barra, suponiendo que no existe rozamiento entre el collarín y la barra.

12.55 Determínese el valor mínimo requerido del coeficiente de fricción estática entre el collarín y la barra del problema 12.54 si no debe resbalar el collarín cuando *a*) $\theta = 90°$, *b*) $\theta = 60°$, *c*) $\theta = 45°$. Indíquese en cada caso la dirección del movimiento inminente.

12.56 Para el collarín y la barra del problema 12.54 y suponiendo que los coeficientes de rozamiento son $\mu_s = 0.25$ y $\mu_k = 0.20$, indíquese si el collarín deslizará sobre la barra si se le soltara en la posición correspondiente a *a*) $\theta = 75°$, *b*) $\theta = 40°$. También determínese el módulo y dirección de la fuerza de fricción ejercida sobre el collarín inmediatamente después de ser soltado.

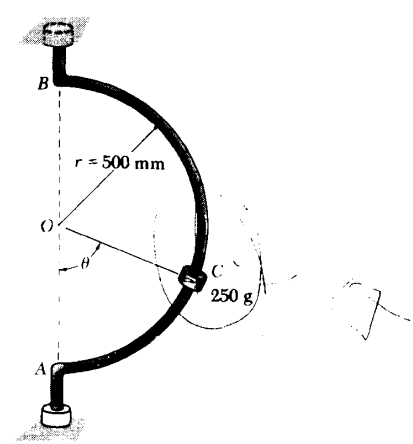


Fig. P12.54

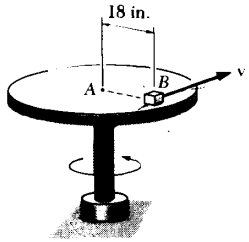


Fig. P12.57 y P12.58

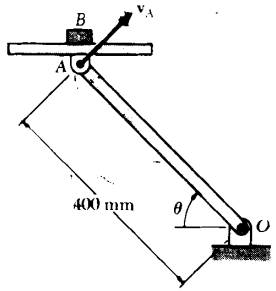


Fig. P12.59

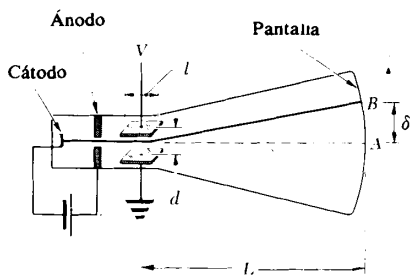


Fig. P12.61

12.57 Un bloque B está sostenido por una mesa giratoria, la cual, partiendo del reposo, gira en tal forma que el bloque experimenta una aceleración tangencial constante $a_t = 4.5$ ft/s^2. Si el coeficiente de rozamiento estático entre el bloque y la mesa giratoria es de 0.50, determínense *a*) cuánto se tardará el bloque para empezar a deslizar sobre la mesa y *b*) la velocidad v del bloque en ese instante.

12.58 Un pequeño bloque B está sobre una mesa giratoria, que, partiendo del reposo, gira en tal forma que el bloque experimenta una aceleración tangencial constante. Si el coeficiente de rozamiento estático entre el bloque y la mesa giratoria es 0.60, determínese el mínimo intervalo de tiempo para que el bloque pueda alcanzar una velocidad $v = 5$ ft/s sin resbalar.

12.59 Un pequeño bloque B está sobre una plataforma conectada en A a la barra OA. El punto A describe un círculo en un plano vertical a la rapidez constante v_A mientras que la plataforma está restringida a permanecer horizontal durante todo su movimiento por el uso de una conexión especial (que no se muestra en la figura). Los coeficientes de rozamiento entre el bloque y a plataforma son $\mu_s = 0.40$ y $\mu_k = 0.30$. Determínese *a*) la máxima velocidad v_A permitida para que el bloque no deslice sobre la plataforma, *b*) los valores θ para los cuales el deslizamiento se evita.

12.60 Para el problema 12.59 se observa que el bloque B resbala intermitentemente sobre la plataforma cuando el punto A se mueve sobre el círculo vertical a la velocidad constante $v_A = 1.22$ m/s. Determínense los valores de θ para los cuales el bloque empieza a deslizar.

12.61 En el tubo de rayos catódicos mostrado en la figura, los electrones emitidos por el cátodo y atraídos por el ánodo pasan a través de un pequeño orificio en el ánodo y conservan su movimiento en línea recta con una velocidad v_0 hasta que inciden sobre la pantalla en A. Pero si se establece una diferencia de potencial V entre las dos placas paralelas, cada electrón estará sujeto a una fuerza **F** perpendicular a las placas mientras viaja entre ellas y pegará en la pantalla en el punto B a una distancia δ de A. La magnitud de la fuerza **F** es $F = eV/d$ donde $-e$ es la carga del electrón y d es la distancia entre las placas. Obténgase una expresión para la deflexión δ en términos de V, v_0, la carga $-e$ del electrón, su masa m y las dimensiones d, l y L.

12.62 En el problema 12.61 determínese el valor mínimo permitido de la razón d/l en términos de e, m, v_0 y V si se desea que los electrones no incidan sobre la placa positiva.

12.63 Un fabricante desea diseñar un nuevo tubo de rayos catódicos, que tenga la mitad de longitud que su modelo actual. Si el tamaño de la pantalla va a permanecer igual, ¿cómo debe modificarse la longitud l de las placas para que todas las otras características del circuito permanezcan sin cambio? (Véase problema 12.61 para la descripción del tubo de rayos catódicos.)

† En el problema 12.1 se dio una fórmula que expresa g en términos de la latitud ϕ.

12.7. Momento angular de una partícula. Conservación del momento angular. Considérese una partícula P de masa m, que se mueve respecto de un sistema de referencia newtoniano $Oxyz$. Como vimos en la sección 12.3, el momento lineal de la partícula en un instante dado está definida como el vector $m\mathbf{v}$ que se obtiene al multiplicar la velocidad $\mathbf{v}$ de la partícula por su masa m. Al momento del vector $m\mathbf{v}$ respecto de O se le llama *momento angular* de la partícula respecto de O en ese instante, y se representa por $\mathbf{H}_O$. Recordando la definición del momento de un vector (sección 3.6) y representando con $\mathbf{r}$ al vector de posición de P, escribimos.

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} \tag{12.12}$$

y notando que $\mathbf{H}_O$ es un vector perpendicular al plano que contiene a $\mathbf{r}$ y a $m\mathbf{v}$ y de módulo

$$H_O = rmv \operatorname{sen} \phi \tag{12.13}$$

donde ϕ es el ángulo entre $\mathbf{r}$ y $m\mathbf{v}$ (Fig. 12.12). El sentido de $\mathbf{H}_O$ puede determinarse del sentido de $m\mathbf{v}$ aplicando la regla de la mano derecha. Las unidades de momento angular se obtiene multiplicando las unidades de longitud y de la cantidad de movimiento (sección 12.4). Para las unidades del Si tenemos unidades

$$(\mathrm{m})(\mathrm{kg \cdot m/s}) = \mathrm{kg \cdot m^2/s}$$

mientras que para las unidades del sistema inglés escribimos

$$(\mathrm{ft})(\mathrm{lb \cdot s}) = \mathrm{ft \cdot lb \cdot s}$$

Descomponiendo a los vectores $\mathbf{r}$ y $m\mathbf{v}$ en sus componentes y aplicando la fórmula (3.10), tenemos

$$\mathbf{H}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ mv_x & mv_y & mv_z \end{vmatrix} \tag{12.14}$$

Las componentes de $\mathbf{H}_O$, las cuales también representan a los momentos del momento lineal $m\mathbf{v}$ alrededor de los ejes coordenados, pueden obtenerse desarrollando el determinante en (12.14). De modo que

$$\begin{aligned} H_x &= m(yv_z - zv_y) \\ H_y &= m(zv_x - xv_z) \\ H_z &= m(xv_y - yv_x) \end{aligned} \tag{12.15}$$

En el caso de una partícula que se mueve en el plano xy, tenemos $z = v_z = 0$ y las componentes H_x y H_y se reducen a cero. El momento angular es entonces perpendicular al plano xy y queda definido completamente por el escalar

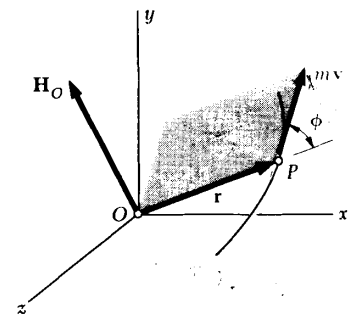


Fig. 12.12

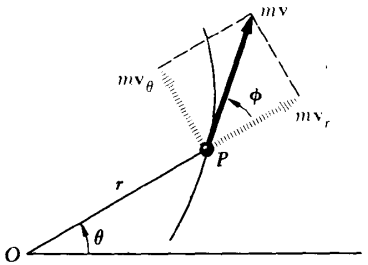


Fig. 12.13

$$H_O = H_z = m(xv_y - yv_x) \tag{12.16}$$

que será positivo o negativo según el sentido en el cual se observa que la partícula se mueve respecto de O. Si se emplean coordenadas polares, descomponemos el vector momento lineal de la partícula en sus componentes radial y transversal (Fig. 12.13) y escribimos

$$H_O = rmv \operatorname{sen} \phi = rmv_\theta \tag{12.17}$$

o, recordando de (11.45) que $v_\theta = r\dot{\theta}$,

$$H_O = mr^2\dot{\theta} \tag{12.18}$$

Ahora calcularemos la derivada, respecto a t, del momento angular $\mathbf{H}_O$ de una partícula P, que se mueve en el espacio. Derivando ambos miembros de la ecuación (12.12) y recordando la regla para la derivación de un producto vectorial (sección 11.10), escribimos

$$\dot{\mathbf{H}}_O = \dot{\mathbf{r}} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m\mathbf{a}$$

Como los vectores $\mathbf{v}$ y $m\mathbf{v}$ son paralelos, el primer término de la expresión obtenida es cero y, por la segunda ley de Newton, $m\mathbf{a}$ es igual a la suma $\Sigma\mathbf{F}$ de las fuerzas que actúan sobre P. Adviértase que $\mathbf{r} \times \Sigma\mathbf{F}$ representa la suma $\Sigma\mathbf{M}_O$ de los momentos alrededor de O de estas fuerzas, y escribimos

$$\Sigma\mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O \tag{12.19}$$

La ecuación (12.19), que resulta directamente de la segunda ley de Newton, establece que *la suma de los momentos de las fuerzas que actúan sobre la partícula alrededor de O es igual a la derivada temporal del momento angular.*

12.8. Ecuaciones de movimiento expresadas en términos de las componentes radial y transversal. Considérese a una partícula P de coordenadas polares r y θ que se mueve en un plano bajo la acción de varias fuerzas. Descomponiendo las fuerzas y a la aceleración de la partícula en sus componentes radial y transversal (Fig. 12.14) y sustituyendo en la ecuación (12.2), obtenemos las dos ecuaciones escalares

$$\Sigma F_r = ma_r \qquad \Sigma F_\theta = ma_\theta \tag{12.20}$$

Sustituyendo para a_r y a_θ de las ecuaciones (11.46), tenemos

$$\Sigma F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \tag{12.21}$$

$$\Sigma F_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \tag{12.22}$$

Las ecuaciones obtenidas pueden resolverse para dos incógnitas.

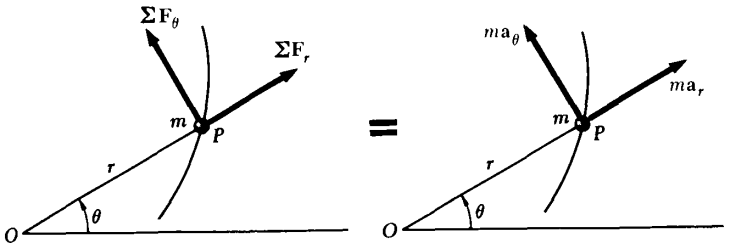


Fig. 12.14

La ecuación (12.22) pudo haberse obtenido de la ecuación (12.19), recordando (12.18) y notando que $\Sigma M_O = r\Sigma F_\theta$, la ecuación (12.19), nos da

$$r\Sigma F_\theta = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta})$$
$$= m(r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta})$$

y después de dividir ambos miembros entre **r**,

$$\Sigma F_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \tag{12.22}$$

12.9. Movimiento bajo la acción de una fuerza central. Conservación de momento angular. Cuando la única fuerza que actúa sobre una partícula P es una fuerza **F** dirigida hacia adentro o hacia afuera de un punto fijo O, se dice que la partícula se está moviendo *bajo la acción de una fuerza central* y al punto O se le llama el *centro de la fuerza* (Fig. 12.15). Como la línea de acción de **F** pasa por O, debemos tener $\Sigma\mathbf{M}_O = 0$ en cualquier instante. Sustituyendo en la ecuación (12.19), tenemos por consiguiente

$$\dot{\mathbf{H}}_O = 0$$

para todos los valores de t, o integrando en t,

$$\mathbf{H}_O = \text{constante} \tag{12.23}$$

Así que concluimos que *el momento angular de una partícula que se mueve bajo la acción de una fuerza central es constante tanto en módulo como en dirección.*

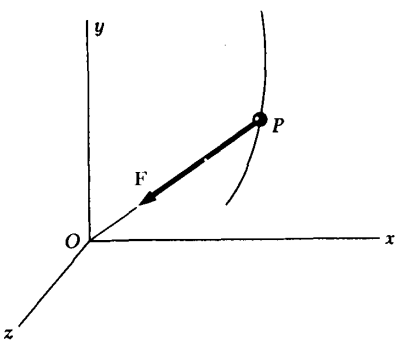


Fig. 12.15

De la definición del momento angular de una partícula (Sección 12.7), escribimos

$$\mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \mathbf{H}_O = \text{constante} \tag{12.24}$$

de donde se sigue que el vector de posición **r** de la partícula P debe ser perpendicular al vector constante $\mathbf{H}_O$. Así que una partícula sujeta a una fuerza central se mueve en un plano fijo perpendicular a $\mathbf{H}_O$. El

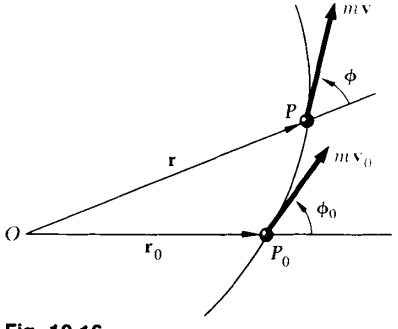


Fig. 12.16

vector $\mathbf{H}_O$ y el plano fijo están definidos por el vector de posición inicial $\mathbf{r}_0$ y la velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ de la partícula. Por conveniencia, supondremos que el plano de la figura coincide con el plano fijo del movimiento (Fig. 12.16).

Como el módulo H_O del momento angular de la partícula P es constante, el miembro del lado derecho en la ecuación (12.13) debe ser constante. Por consiguiente escribimos

$$rmv \operatorname{sen} \phi = r_0 m v_0 \operatorname{sen} \phi_0 \tag{12.25}$$

Esta relación se aplica al movimiento de cualquier partícula sujeta a una fuerza central. Como la fuerza gravitacional ejercida por el Sol sobre un planeta es una fuerza central dirigida hacia el centro del Sol, la ecuación (12.25) es fundamental para el estudio del movimiento planetario. Por una razón semejante también es fundamental para el estudio del movimiento de los vehículos espaciales en órbita alrededor de la Tierra.

Recordando la ecuación (12.18), podemos expresar en otra forma el hecho de que la magnitud de H_O del momento angular de la partícula P es constante escribiendo

$$mr^2\dot{\theta} = H_O = \text{constante} \tag{12.26}$$

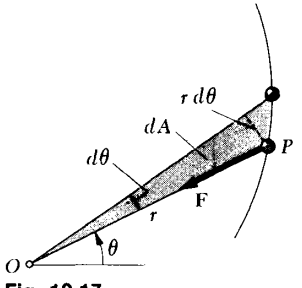


Fig. 12.17

o, dividiendo entre m y representando con h el momento angular por unidad de masa H_O/m,

$$r^2\dot{\theta} = h \tag{12.27}$$

A la ecuación (12.27) puede dársele una interpretación geométrica interesante. De la figura 12.17 observamos que el radio vector OP barre un área infinitesimal $dA = \frac{1}{2}r^2\, d\theta$ cuando gira un ángulo $d\theta$ y definiendo la *velocidad areolar* de la partícula como el cociente dA/dt, notamos que el miembro izquierdo de la ecuación (12.27) representa el doble de la velocidad de área de la partícula. Podemos concluir entonces que *cuando una partícula se mueve bajo la acción de la fuerza central, su velocidad areolar es constante.*

12.10. Ley de la gravitación de Newton. Como vimos en la sección anterior, la fuerza gravitacional ejercida por el Sol sobre un planeta, o por la Tierra, sobre un satélite que gire a su alrededor, es un ejemplo importante de una fuerza central. En esta sección aprenderemos a determinar la magnitud de una fuerza gravitacional.

En su *ley de la gravitación universal,* Newton establece que dos partículas separadas una de otra una distancia r y de masas M y m respectivamente, se atraen entre sí con fuerzas iguales y opuestas $\mathbf{F}$ y $-\mathbf{F}$ dirigidas a lo largo de la línea que une a las partículas (Fig. 12.18). El módulo común F de las dos fuerzas es

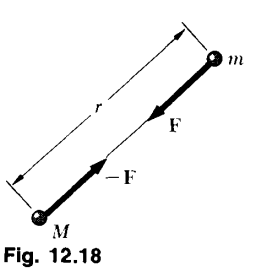


Fig. 12.18

$$F = G\frac{Mm}{r^2} \tag{12.28}$$

donde G es una constante universal, llamada la *constante de gravitación*. Los experimentos demuestran que el valor de G es $(66.73 \pm 0.03) \times 10^{-12}$ m^3/kg·s^2 en las unidades del SI, o aproximadamente 34.4×10^{-9} ft^4/lb·s^4 en las unidades del sistema inglés. Aunque las fuerzas gravitacionales existen entre cualquier par de cuerpos, su efecto es apreciable únicamente cuando uno de los cuerpos tiene una masa muy grande. El efecto de las fuerzas gravitacionales es notable en el caso de movimiento de un planeta alrededor de Sol, de los satélites que giran alrededor de la Tierra o de los cuerpos que caen en la superficie de la Tierra.

Como la fuerza que la Tierra ejerce sobre un cuerpo de masa m localizado sobre o cerca de su superficie está definido por el peso **W** del cuerpo, podemos sustituir la magnitud $W = mg$ del peso por F y el radio R de la Tierra por r, en la ecuación (12.28). Obtenemos

$$W = mg = \frac{GM}{R^2}m \qquad \text{o} \qquad g = \frac{GM}{R^2} \tag{12.29}$$

donde M es la masa de la Tierra. Como la Tierra no es realmente esférica, la distancia R del centro de la Tierra depende del punto seleccionado sobre su superficie y los valores de W y g variarán con la altitud y la latitud del punto considerado. Otra razón para la variación de W y de g con la latitud es que un sistema de ejes fijo a la Tierra no constituye un sistema de referencia newtoniano (véase sección 12.2). Una definición más exacta del peso de un cuerpo debe, por lo tanto, incluir una componente que represente a la fuerza centrífuga provocada por la rotación de la Tierra. Los valores de g al nivel del mar varían desde 9.781 m/s^2, o 32.09 ft/s^2, en el ecuador, hasta 9.833 m/s^2, o 32.26 ft/s^2, en los polos.†

La fuerza que la Tierra ejerce sobre un cuerpo de masa m localizado en el espacio a una distancia r de su centro puede encontrarse de la ecuación (12.28). Podemos simplificar los cálculos si notamos que de acuerdo con la ecuación (12.29) el producto de la constante gravitación G y de la masa M de la Tierra puede expresarse como

$$GM = gR^2 \tag{12.30}$$

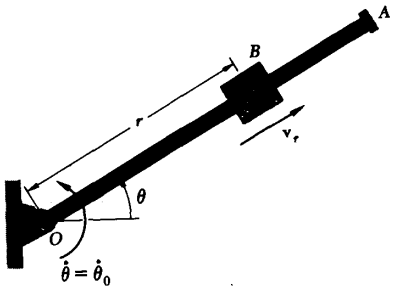
donde se les dará a g y al radio R de la Tierra sus valores promedio $g = 9.81$ m/s^2 y $R = 6.37 \times 10^6$ m en unidades del SI, ‡ o $g = 32.2$ ft/s^2 y $R = (3\ 960$ mi$)(5\ 280$ ft/mi) en unidades inglesas.

El descubrimiento de la ley de la gravitación universal se ha atribuido con frecuencia al hecho de que después de observar una manzana que caía de un árbol, Newton reflexionó que la Tierra debe atraer una manzana y a la Luna en la misma forma. Aunque es dudoso que este incidente haya ocurrido, puede decirse que Newton no hubiera formulado su ley sin antes percibir que la aceleración de un cuerpo que cae debe tener la misma causa que la aceleración que mantiene a la Luna en su órbita. Este concepto básico de continuidad de la atracción gravitacional se comprende más fácilmente ahora, cuando la separación entre la manzana y la Luna se ha llenado con proyectiles balísticos de largo alcance y satélites artificiales de la Tierra.

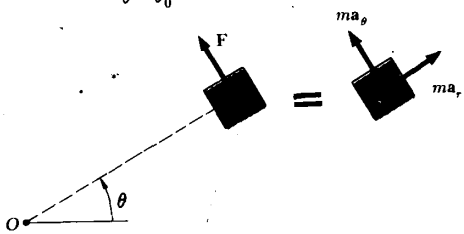
† En el problema 12.1 se dio una fórmula que expresa g en términos de la latitud ϕ.

‡ El valor de R se encuentra fácilmente si uno recuerda que la circunferencia de la Tierra es $2\pi R = 40 \times 10^6$ m.

PROBLEMA RESUELTO 12.7



Un bloque B de masa m puede deslizar libremente sobre una barra OA sin rozamiento, que gira en un plano horizontal a una velocidad constante $\dot{\theta}_0$. Si B se suelta a una distancia r_0 *desde* O, exprésese como una función de r: *a*) la componente v_r de la velocidad de B a lo largo de OA, y *b*) el módulo de la fuerza horizontal **F** ejercida sobre B por la barra OA.



Solución. Como todas las otras fuerzas son perpendiculares al plano de la figura, la única fuerza mostrada que actúa sobre B es la fuerza **F** perpendicular a OA.

Ecuaciones de movimiento. Usando las componentes radial y transversal,

$$+\nearrow \Sigma F_r = ma_r: \qquad 0 = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \tag{1}$$

$$+\nwarrow \Sigma F_\theta = ma_\theta: \qquad F = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \tag{2}$$

a) **Componente v_r de la velocidad.** Como $v_r = \dot{r}$, tenemos

$$\ddot{r} = \dot{v}_r = \frac{dv_r}{dt} = \frac{dv_r}{dr}\frac{dr}{dt} = v_r\frac{dv_r}{dr}$$

Sustituyendo $\ddot{r}$ en (1), recordando que $\dot{\theta} = \dot{\theta}_0$, y separando las variables

$$v_r\,dv_r = \dot{\theta}_0^2 r\,dr$$

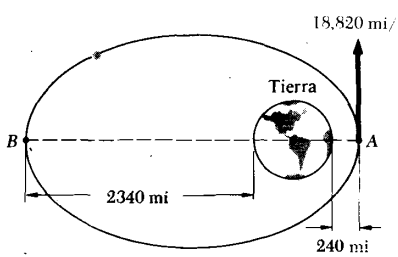
Multiplicando por 2, e integrando de 0 a v_r y de r_0 a r

$$v_r^2 = \dot{\theta}_0^2(r^2 - r_0^2) \qquad v_r = \dot{\theta}_0(r^2 - r_0^2)^{1/2} \quad \blacktriangleleft$$

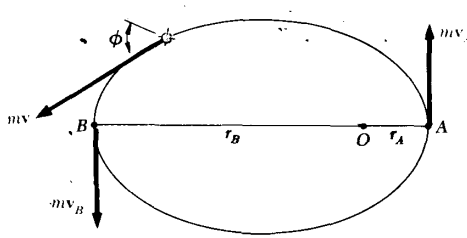
b) **La fuerza horizontal F.** Haciendo $\dot{\theta} = \dot{\theta}_0$, $\ddot{\theta} = 0$, $\dot{r} = v_r$ *en la ecuación (2) y sustituyendo para* v_r *la expresión obtenida en la parte a*), encontramos

$$F = 2m\dot{\theta}_0(r^2 - r_0^2)^{1/2}\dot{\theta}_0 \qquad F = 2m\dot{\theta}_0^2(r^2 - r_0^2)^{1/2} \quad \blacktriangleleft$$

PROBLEMA RESUELTO 12.8



Un satélite es lanzado en una dirección paralela a la superficie de la Tierra con una velocidad de 18 820 mi/h desde una altitud de 240 mi. Determínese la velocidad del satélite cuando alcanza su máxima altitud de 2 340 mi. El radio de la Tierra es de 3 960 mi.



Solución. Como el satélite se está moviendo bajo una fuerza central dirigida hacia el centro O de la Tierra, su momento angular $\mathbf{H}_O$ es constante. De la ecuación (12.13) tenemos

$$rmv \operatorname{sen}\phi = H_O = \text{constante}$$

lo que demuestra que v es mínima en B, donde tanto r como sen ϕ son máximas. Expresando la conservación del momento angular entre A y B,

$$r_A m v_A = r_B m v_B$$

$$v_B = v_A\frac{r_A}{r_B} = (18\,820 \text{ mi/h})\frac{3960 \text{ mi} + 240 \text{ mi}}{3960 \text{ mi} + 2340 \text{ mi}}$$

$$v_B = 12\,550 \text{ mi/h} \quad \blacktriangleleft$$

Problemas

12.64 El movimiento de un bloque B de 4 lb en un plano horizontal se define por las relaciones $r = 3t^2 - t^3$ y $\theta = 2t^2$, donde r se expresa en pies, t en segundos y θ en radianes. Determínense los componentes radial y transversal de la fuerza ejercida sobre el bloque para *a*) $t = 0$, *b*) $t = 1$ s.

12.65 Para el movimiento definido en el problema 12.64, determínense los componentes radial y transversal de la fuerza ejercida sobre el bloque de 4 lb conforme pasa por el origen nuevamente en $t = 3$ s.

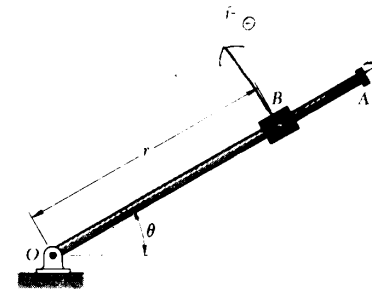


Fig. P12.64 y P12.66

12.66 El movimiento de un bloque B de 500 g en un plano horizontal se define por las relaciones $r = 2(1 + \cos 2\pi t)$ y $\theta = 2\pi t$, donde r se expresa en metros, t en segundos y θ en radianes. Determínense los componentes radial y transversal de la fuerza ejercida sobre el bloque para *a*) $t = 0$ y *b*) $t = 0.75$ s.

12.67 Un bloque B de masa m se puede deslizar sin rozamiento sobre la barra OA que gira en un plano horizontal con velocidad angular constante $\dot{\theta}_o$. Conforme gira la barra, la cuerda se enrolla alrededor de un tambor fijo de radio b y mueve el bloque hacia O con una velocidad $b\dot{\theta}_O$. Exprésese en función de m, r, b, y $\dot{\theta}_o$ *a*) la tensión T en la cuerda y *b*) el módulo de la fuerza horizontal **Q** ejercida sobre B por la barra OA.

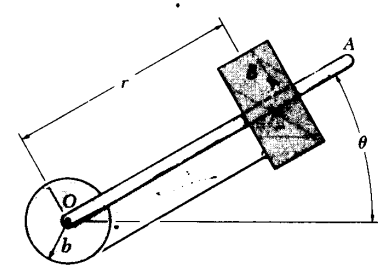


Fig. P12.67

12.68 Resuélvase el problema 12.67 si se sabe que la masa del bloque es 2 kg y que $r = 500$ mm, $b = 60$ mm y $\dot{\theta}_o = 8$ rad/s.

12.69 El cursor C tiene una masa de 200 g y puede moverse en una ranura hecha en el brazo AB que gira con una velocidad angular constante $\dot{\theta}_o = 12$ rad/s en un plano horizontal. El cursor está sujeto a un resorte de constante $k = 36$ N/m, el cual no está deformado cuando $r = 0$. Si el cursor pasa por la posición $r = 400$ mm con un velocidad radial $v_r = +1.8$ m/s, determínense en ese instante *a*) las componentes radial y transversal de su aceleración, y *b*) su aceleración relativa al brazo AB y *c*) la fuerza horizontal ejercida sobre el cursor por el brazo AB.

12.70 El cursor C tiene una masa de 200 g y puede moverse en una ranura del brazo AB que gira con una velocidad angular constante $\dot{\theta}_o = 12$ rad/s en un plano horizontal. El cursor está unido a un resorte de constante $k = 36$ N/m que no está deformado cuando $r = 0$. Si el cursor se suelta sin velocidad radial en la posisión $r = 500$ mm y se desprecia el rozamiento, determínese para la posición $r = 300$ mm *a*) las componentes radial y transversal de la velocidad del cursor, *b*) las componentes radial y transversal de su aceleración y *c*) la fuerza horizontal ejercida sobre el cursor por el brazo AB.

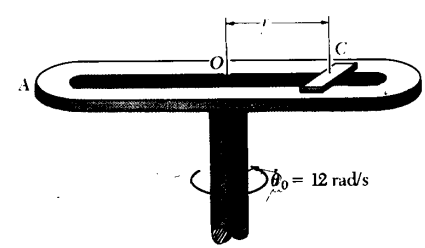


Fig. P12.69 y P12.70

12.71 Resuélvase el problema 12.70 suponiendo que el resorte no está deformado cuando el cursor C está localizado a 45 mm a la izquierda del punto medio O del brazo AB ($r = -45$ mm).

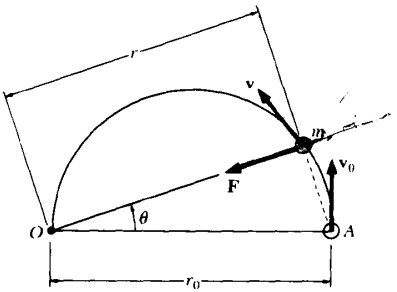


Fig. P12.72

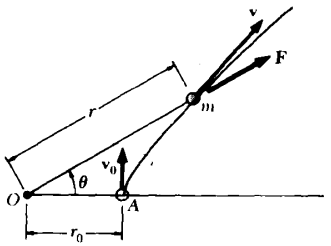


Fig. P12.73

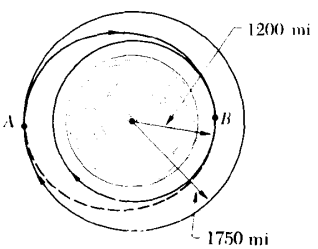


Fig. P12.80

12.72 Una partícula de masa m se lanza desde el punto A con una velocidad v_0 perpendicular a la línea OA y se mueve bajo la acción de una fuerza central **F** a lo largo de una trayectoria semicircular de diámetro OA. Observando que $r = r_o \cos\theta$ y usando la ecuación (12.27), demuéstrese que la velocidad v de la partícula es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia r de la partícula al centro de fuerza O.

12.73 Una partícula de masa m es proyectada desde el punto A con una velocidad inicial v_0 perpendicular a OA y se mueve bajo la acción una de fuerza central **F** dirigida hacia afuera del centro de fuerza O. Si la partícula sigue una trayectoria definida por la ecuación $r = r_o/\cos 2\theta$ y usando la ecuación (12.27) exprésense las componentes radial y transversal de la velocidad v de la partícula en función de θ.

12.74 Para la partícula del problema 12.72, *a*) demuéstrese que la fuerza central **F** es inversamente proporcional a la quinta potencia de la distancia r de la partícula al centro de fuerza O y *b*) determínese el módulo de **F** para $\theta = 0$.

12.75 Para la partícula del problema 12.73, *a*) demuéstrese que la fuerza central **F** es inversamente proporcional al cubo de la distancia r de la partícula al centro de fuerza 0 y *b*) determínese el módulo de **F** para $\theta = 0$.

12.76 Representando por ρ la densidad media de un planeta, demuéstrese que el tiempo mínimo necesario para que un satélite dé una vuelta completa alrededor del planeta es $(3\pi/G\rho)^{1/2}$ donde G es la constante de gravitación.

12.77 Demuéstrese que el radio r de la órbita de la Luna puede determinarse a partir del radio R de la Tierra, la aceleración de la gravedad g en la superficie de la Tierra y el tiempo r en el que la Luna da una vuelta completa alrededor de la Tierra. Calcúlese r si $r = 27.3$ días, dando la respuesta en unidades SI y en el inglés.

12.78 Se han colocado satélites de comunicación en una órbita geosincrónica, o sea en una órbita circular de modo que completen una revolución alrededor de la Tierra en un día sideral (23 horas 56 minutos) y aparezcan estacionarios respecto a la Tierra. Determínense *a*) la altitud de los satélites sobre la superficie de la Tierra y *b*) la velocidad con la cual describen sus órbitas. Dé las respuestas en ambos sistemas de unidades (en el SI y en el sistema inglés).

12.79 Se ha observado que los periodos orbitales de dos satélites del planeta Júpiter, Io y Calisto, son de 1 día 18 h 28 min y 16 días 16 h 32 min, respectivamente. Sabiendo que el radio de la órbita de Calisto es 1.884×10^6 km, determínense *a*) la masa del planeta Júpiter y *b*) el radio de la órbita de Io. (El periodo orbital de un satélite es el tiempo que le toma dar una vuelta completa alrededor del planeta.)

12.80 Una nave espacial Apolo describe una órbita circular con un radio de 1750 mi alrededor de la Luna a la velocidad de 2950 mi/h. Para transferirlo a una órbita circular más pequeña de 1200 mi de radio, la nave espacial se coloca primero sobre una trayectoria elíptica AB reduciendo su velocidad a 290 mi/h cuando pasa por A. Determínense *a*) la velocidad de la astronave al acercarse a B en la trayectoria elíptica y *b*) la cantidad a la que debe reducirse su velocidad en B para ingresar en la órbita circular más pequeña.

12.81 Los planes para una misión de aterrizaje sin tripulación sobre el planeta Marte requieren que el vehículo que regresará a la Tierra describa al principio una órbita circular a una altitud d_A = 2200 km sobre la superficie del planeta, con una velocidad de 2771 m/s. Al pasar por el punto A, el vehículo deberá insertarse en una órbita elíptica de transferencia encendiendo sus motores e incrementando su velocidad en Δv_A = 1046 m/s. Al pasar por el punto B a una altitud d_B = 100 000 km, el vehículo se deberá insertar en una segunda órbita de transferencia situada en un plano un poco diferente, cambiando la dirección de su velocidad y reduciendo su velocidad en Δv_B = − 22.0 m/s. Por último al pasar el vehículo por el punto C, a una altitud d_C = 1000 km su velocidad se deberá incrementar en Δv_C = 660 m/s para insertarlo en su trayectoria de regreso. Sabiendo que el radio del planeta Marte es R = 3400 km, determínese la velocidad del vehículo tras terminar la última maniobra.

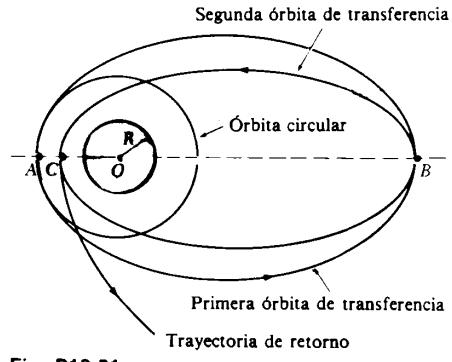


Fig. P12.81

12.82 Resuélvase el problema 12.81 suponiendo que Δv_B = − 37.2 m/s y d_C = 300 km y que los otros datos permanecen sin cambio.

12.83 Se usa un remolcador espacial para colocar satélites de comunicación en una órbita geosincrónica (véase problema 12.78) a una altitud de 22,230 mi sobre la superficie de la Tierra. El remolcador describe inicialmente una órbita circular a una altitud de 340 mi y se le inserta en una órbita elíptica de transferencia encendiendo su motor al pasar por A, aumentando asi su velocidad en 7740 ft/s. ¿En cuánto debe aumentarse su velocidad al pasar por B para insertarlo en la órbita geosincrónica?

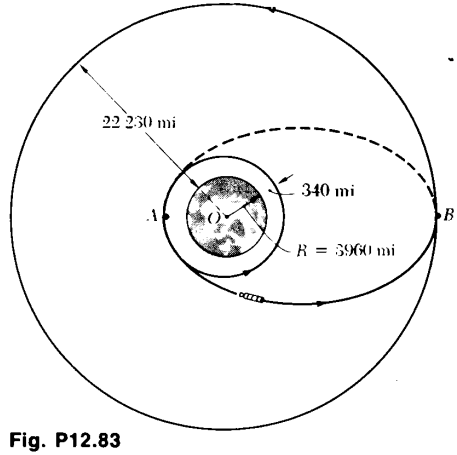


Fig. P12.83

12.84 Una pelota de 4 lb está montada sobre una barra horizontal que puede girar libremente respecto a un eje vertical. En la posición indicada la velocidad de la pelota es v_1 = 30 in/s y está sostenida por una cuerda unida al eje. Repentinamente se corta la cuerda y la pelota se mueve a la posición B conforme la barra gira. Despreciando la masa de la barra, determínense *a*) las componentes radial y transversal de la aceleración de la pelota inmediatamente después que la cuerda ha sido cortada, *b*) la aceleración de la pelota relativa a la barra en ese mismo instante y *c*) la velocidad de la pelota después que ésta ha alcanzado el tope B.

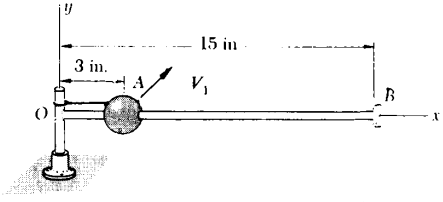


Fig. P12.84

12.85 Una pelota pequeña se balancea en un círculo horizontal en el extremo de una cuerda de longitud l_1 que forma un ángulo θ_1 con la vertical. Entonces se tira lentamente de la cuerda a través del soporte en O hasta que la longitud del extremo libre es l_2. *a*) Desarróllese una relación entre l_1, l_2, θ_1, θ_2; *b*) si se pone la pelota en movimiento de manera que l_1 = 30 in y θ_1 = 30°, determínese el ángulo θ_2 para l_2 = 20 in.

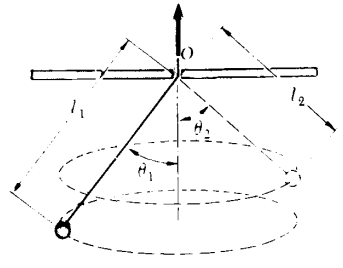


Fig. P12.85

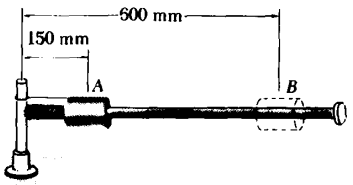


Fig. P12.86

12.86 Un collarín de 300 g puede deslizar por una barra horizontal que gira libremente alrededor de un eje vertical. El collarín está inicialmente sostenido en A por una cuerda unida al eje y comprime un resorte de constante 5 N/m que está sin estirar cuando el collarín se encuentra a 750 mm del eje. Conforme la barra gira a $\dot{\theta} = 12$ rad/s, se corta la cuerda y el collarín se mueve hacia afuera a lo largo de la barra. Despreciando el rozamiento y la masa de la barra, determínense para la posición B del collarín *a*) la componente transversal de la velocidad de éste, *b*) las componentes radial y transversal de su aceleración y *c*) la aceleración del collarín respecto a la barra.

12.87 En el problema 12.86 para la posición B del collarín, determínense *a*) la componente radial de la velocidad del collarín y *b*) el valor de $\ddot{\theta}$.

***12.11. Trayectoria de una partícula bajo la acción de una fuerza central.** Considérese una partícula P que se mueve bajo la acción de una fuerza central $\mathbf{F}$. Nos proponemos obtener la ecuación diferencial que describa su trayectoria.

Suponiendo que la fuerza $\mathbf{F}$ está dirigida hacia el centro de fuerza O, observamos que ΣF_r y ΣF_θ se reducen, respectivamente, a $-F$ y cero en las ecuaciones (12.21) y (12.22). Por consiguiente, escribimos

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -F \tag{12.31}$$

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0 \tag{12.32}$$

Estas ecuaciones definen el movimiento de P. Pero sustituiremos la ecuación (12.32) por la ecuación (12.27) que es más conveniente de usar y que es equivalente a la ecuación (12.32) como podemos comprobar fácilmente derivándola respecto a t. Escribimos

$$r^2\dot{\theta} = h \qquad \text{o} \qquad r^2\frac{d\theta}{dt} = h \tag{12.33}$$

La ecuación (12.33) puede usarse para suprimir la variable independiente t de la ecuación (12.31). Resolviendo para $\dot{\theta}$ o $d\theta/dt$ la ecuación (12.33) tenemos

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2} \tag{12.34}$$

de la cual se deduce que

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = -h\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right) \tag{12.35}$$

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2}\frac{d\dot{r}}{d\theta}$$

o, sustituyendo $\dot{r}$ de (12.35)

$$\ddot{r} = \frac{h}{r^2}\frac{d}{d\theta}\left[-h\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)\right]$$

$$\ddot{r} = -\frac{h^2}{r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) \tag{12.36}$$

Sustituyendo θ y $\dot{r}$ de (12.34) y (12.36), respectivamente, en la ecuación (12.31) e introduciendo la función $u = 1/r$ obtenemos, después de simplificaciones,

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{F}{mh^2u^2} \tag{12.37}$$

En la obtención de la ecuación (12.37) se supuso que la fuerza **F** estaba dirigida hacia O. El módulo de **F** debe, por lo tanto, ser positivo si **F** está realmente dirigida hacia O (fuerza de atracción) y será negativo si **F** se dirige hacia afuera de O (fuerza de repulsión). Si F es una función conocida de r y por tanto de u, la ecuación (12.37) es una ecuación diferencial en u y θ. Esta ecuación diferencial define la trayectoria que describe la partícula sujeta a la fuerza central **F**. La ecuación de la trayectoria se obtendrá resolviendo la ecuación diferencial (12.37) para u como una función de θ y determinando las constantes de integración de las condiciones iniciales.

***12.12. Aplicación a la mecánica espacial.** Después de que la última etapa de sus cohetes de lanzamiento se ha consumido, los satélites de la Tierra y otros vehículos espaciales están sujetos sólo a la atracción gravitacional de la Tierra. Su movimiento puede por tanto determinarse de las ecuaciones (12.33) y (12.37), que describen el movimiento de una partícula bajo la acción de una fuerza central, después de que F se ha sustituido por la expresión obtenida para la fuerza de atracción gravitacional.† Al sustituir en la ecuación (12.37) la expresión

$$F = \frac{GMm}{r^2} = GMmu^2$$

donde M = masa de la Tierra
m = masa del vehículo espacial
r = distancia del centro de la Tierra al vehículo
$u = 1/r$

obtenemos la ecuación diferencial

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{h^2} \tag{12.38}$$

donde el miembro derecho es una constante.

La solución de la ecuación diferencial (12.38) se obtiene sumando la solución particular $u = GM/h^2$ a la solución general $u = C\cos(\theta - \theta_0)$ de la ecuación homogénea correspondiente (es decir, la ecuación obtenida haciendo el miembro derecho igual a cero). Esco-

† Se ha supuesto que los vehículos espaciales considerados aquí son atraídos sólo por la Tierra y que su masa es despreciable en comparación con la masa de ésta. Si un vehículo se mueve muy lejos de la Tierra, su trayectoria puede ser afectada por la atracción del Sol, la Luna o algún otro planeta.

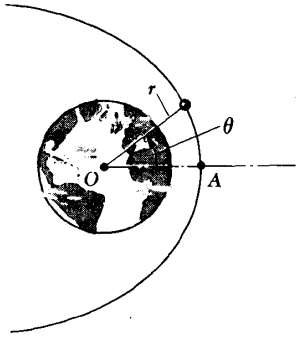


Fig. 12.19

giendo el eje polar de manera que $\theta_0 = 0$, escribimos

$$\frac{1}{r} = u = \frac{GM}{h^2} + C\cos\theta \tag{12.39}$$

La ecuación (12.39) es la ecuación de una *curva cónica* (elipse, parábola o hipérbola) en coordenadas polares r y θ. El origen O de las coordenadas que se ubica en el centro de la Tierra es un *foco* de esta sección cónica y el eje polar es uno de sus ejes de simetría (Fig. 12.19).

La relación de las constantes C y GM/h^2 define la *excentricidad* ε de la curva cónica; fijando

$$\varepsilon = \frac{C}{GM/h^2} = \frac{Ch^2}{GM} \tag{12.40}$$

podemos escribir la ecuación (12.39) en la forma

$$\frac{1}{r} = \frac{GM}{h^2}(1 + \varepsilon\cos\theta) \tag{12.39'}$$

Pueden distinguirse tres casos:

1. $\varepsilon > 1$, o $C > GM/h^2$: Existen dos valores θ_1 y $-\theta_1$ del ángulo polar definido por $\cos\theta_1 = -GM/Ch^2$ para los cuales el segundo miembro de la ecuación (12.39) se hace cero. Para estos dos valores del radio vector r se hace infinito; la curva cónica es una *hipérbola* (Fig. 12.20).
2. $\varepsilon = 1$, o $C = GM/h^2$: el radio vector se hace infinito para $\theta = 180°$; la curva cónica es una *parábola*.
3. $\varepsilon < 1$, o $C < GM/h^2$: el radio vector permanece finito para cualquier valor de θ; la curva cónica es una *elipse*. En el caso particular en el que $\varepsilon = C = 0$, la longitud del radio vector es constante y la cónica es un círculo.

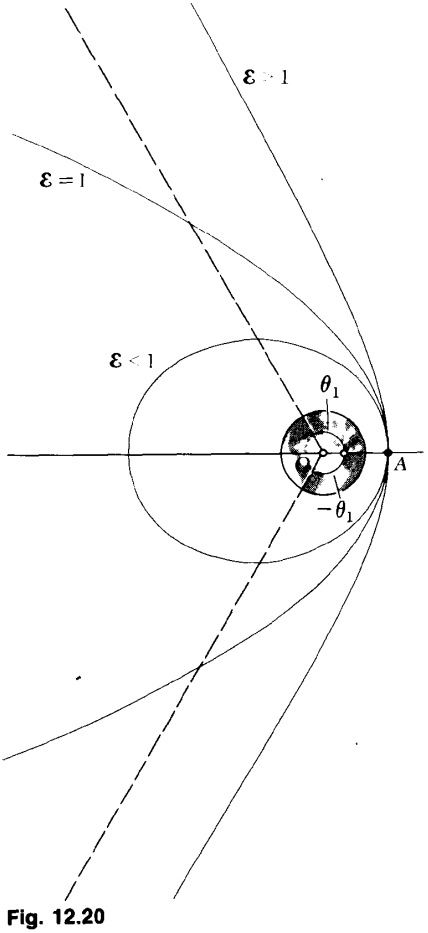


Fig. 12.20

Ahora veremos cómo las constantes C y GM/h^2, que caracterizan a la trayectoria de un vehículo espacial, pueden determinarse de la posición y la velocidad de éste al inicio de su vuelo libre. Supondremos, como es generalmente el caso, que la fase impulsada de su vuelo ha sido programada en tal forma que cuando la última etapa del cohete de lanzamiento cesa de funcionar, el vehículo tiene una velocidad paralela a la superficie de la Tierra (Fig. 12.21), en otras palabras, supondremos que el vehículo espacial inicia su vuelo libre en el vértice A de su trayectoria. †

Si denotamos por r_0 y v_0 al radio vector y a la velocidad del vehículo respectivamente, al inicio de su vuelo libre, observamos que la velocidad se reduce a su componente transversal $v_0 = r_0\dot{\theta}_0$. De la ecuación (12.27), expresamos el momento angular por unidad de masa h como

$$h = r_0^2\dot{\theta}_0 = r_0 v_0 \tag{12.41}$$

El valor obtenido para h puede usarse para determinar la constante GM/h^2. Notamos también que el cálculo de esta constante puede simplificarse si se usa la relación indicada en la sección 12.10:

$$GM = gR^2 \tag{12.30}$$

donde R es el radio de la Tierra ($R = 6.37 \times 10^6$ m o 3 960 mi) y g es la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra.

La constante C se determinará con $\theta = 0$, $r = r_0$ en la ecuación (12.39) y obtenemos

$$C = \frac{1}{r_0} - \frac{GM}{h^2} \tag{12.42}$$

Si sustituimos el valor de h de (12.41), podemos expresar fácilmente a C en términos de r_0 y v_0.

Determinemos ahora las condiciones iniciales que corresponden a cada una de las tres trayectorias fundamentales indicadas anteriormente. Considerando primero la trayectoria parabólica, tomamos $C = GM/h^2$ en la ecuación (12.42) y eliminamos h entre las ecuaciones (12.41) y (12.42). Despejando v_0 obtenemos

$$v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}}$$

Podemos comprobar fácilmente que un valor más grande de la velocidad inicial corresponde a una trayectoria hiperbólica y que un valor más pequeño nos da una trayectoria elíptica. Como el valor de v_0 obtenido para la trayectoria parabólica es el valor más pequeño para el cual el vehículo espacial no regresa a su punto de partida, se le llama la *velocidad de escape*. Por consiguiente, escribimos

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}} \quad \text{o} \quad v_{esc} = \sqrt{\frac{2gR^2}{r_0}} \tag{12.43}$$

si hacemos uso de la ecuación (12.30). Notamos que la trayectoria será (1) hiperbólica si $v_0 > v_{esc}$, (2) parabólica si $v_0 = v_{esc}$, (3) elíptica si $v_0 < v_{esc}$.

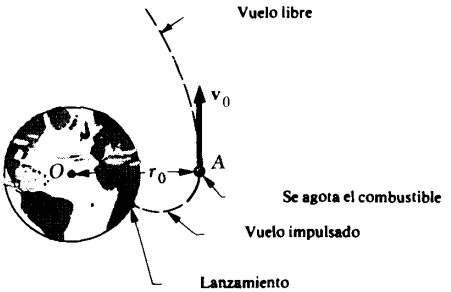


Fig. 12.21

† Los problemas relacionados con lanzamientos oblicuos se considerarán en la sección 13.9.

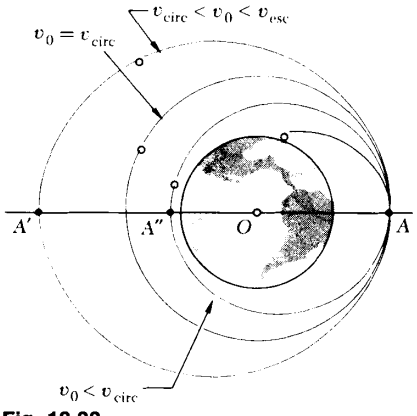


Fig. 12.22

Entre las distintas órbitas elípticas posibles existe una de especial interés, la *órbita circular* que se obtiene cuando $C = 0$. Se encuentra fácilmente que el valor de la velocidad inicial que corresponde a una órbita circular es

$$v_{circ} = \sqrt{\frac{GM}{r_0}} \quad \text{o} \quad v_{circ} = \sqrt{\frac{gR^2}{r_0}} \tag{12.44}$$

si se toma en cuenta la ecuación (12.30). De la figura 12.22 observamos que para valores de v_0 comprendidos entre v_{circ} y v_{esc}, el punto A donde comienza el vuelo libre es el punto de la órbita más cercano a la Tierra. A este punto se le llama *perigeo*, mientras que el punto A', que es el más alejado de la Tierra, se conoce como *apogeo*. Para valores de $v_0 < v_{circ}$ el punto A se convierte en el apogeo mientras que el punto A'' del otro lado de la órbita se convierte en el perigeo. Para valores de v_0 mucho menores que v_{circ}, la trayectoria del vehículo espacial interseca la superficie de la Tierra; en tal caso el vehículo no entra en órbita.

Los proyectiles balísticos que están diseñados para pegar en la superficie de la Tierra también viajan a lo largo de trayectorias elípticas. De hecho debemos darnos cuenta de que cualquier objeto proyectado en el vacío con una velocidad inicial $v_0 < v_{esc}$ se moverá en una trayectoria elíptica. Únicamente cuando las distancias que intervienen son pequeñas podemos suponer que el campo gravitacional de la Tierra es uniforme, y la trayectoria elíptica puede aproximarse por una trayectoria parabólica como se hizo anteriormente (sección 11.11) en el caso de proyectiles convencionales.

Periodo orbital. Una característica importante del movimiento de un satélite de la Tierra es el tiempo que necesita para describir su órbita. A este tiempo se le conoce el *periodo orbital* del satélite y se representa con τ. Observamos primero, en vista de la definición de la velocidad de área (sección 12.9), que τ puede obtenerse dividiendo el área dentro de la órbita entre la velocidad de área. Como el área de una elipse es igual a πab, donde a y b representa los semiejes mayor y menor respectivamente, y como la velocidad de área es igual a $h/2$, escribimos

$$\tau = \frac{2\pi ab}{h} \tag{12.45}$$

Aunque h puede determinarse directamente de r_0 y v_0 en el caso de un satélite lanzado en una dirección paralela a la superficie de la Tierra, los semiejes a y b no están directamente relacionados con las condiciones iniciales. Como, por otro lado, los valores r_0 y r_1 de r correspondientes al perigeo y al apogeo de la órbita pueden determinarse de la ecuación (12.39), expresaremos a los semiejes a y b en términos de r_0 y r_1.

Consideremos la órbita elíptica mostrada en la figura 12.23. El centro de la Tierra se encuentra en O y coincide con uno de los dos focos de la elipse, mientras que los puntos A y A' representan el perigeo y el apogeo de la órbita, respectivamente. Es fácil comprobar que

$$r_0 + r_1 = 2a$$

entonces

$$a = \tfrac{1}{2}(r_0 + r_1) \tag{12.46}$$

Recordando que la suma de las distancias de cada uno de los focos a cualquier punto de la elipse es una constante, escribimos

$$O'B + BO = O'A + OA = 2a \qquad \text{o} \qquad BO = a$$

Por otro lado tenemos $CO = a - r_0$. Por lo tanto, podemos escribir

$$b^2 = (BC)^2 = (BO)^2 - (CO)^2 = a^2 - (a - r_0)^2$$
$$b^2 = r_0(2a - r_0) = r_0 r_1$$

y por consiguiente

$$b = \sqrt{r_0 r_1} \tag{12.47}$$

Las fórmulas (12.46) y (12.47) indican que el semieje mayor y el semieje menor de la órbita son iguales a los promedios aritmético y geométrico de los valores máximo y mínimo del radio vector, respectivamente. Una vez que r_0 y r_1 se han determinado, pueden calcularse fácilmente las longitudes de los semiejes y sustituirse en lugar de a y b en la fórmula (12.45).

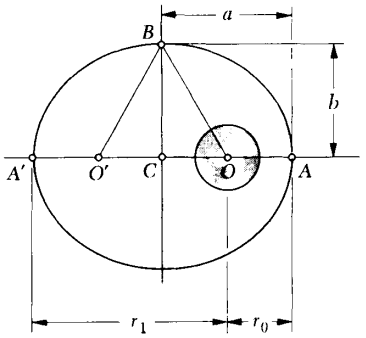


Fig. 12.23

***12.13. Leyes de Kepler del movimiento planetario.** Las ecuaciones que gobiernan el movimiento de un satélite de la Tierra pueden usarse para describir el movimiento de la Luna alrededor de la Tierra. Pero en ese caso, la masa de la Luna no es despreciable en comparación con la masa de la Tierra y los resultados obtenidos no son completamente exactos.

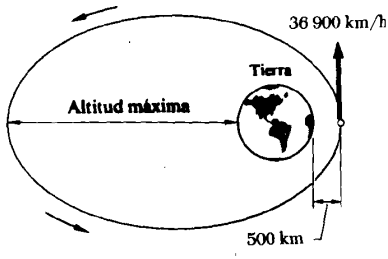
La teoría desarrollada en las secciones anteriores puede aplicarse también al estudio del movimiento de los planetas alrededor del Sol. Aunque se introduce otro error al despreciar las fuerzas ejercidas por los planetas entre sí, la aproximación obtenida es excelente. De hecho las propiedades expresadas por la ecuación (12.39), donde M representa ahora la masa del Sol, y por la ecuación (12.33), fueron descubiertas por el astrónomo alemán Johann Kepler (1571-1630) por medio de observaciones astronómicas del movimiento de los planetas, aun antes que Newton hubiese formulado su teoría fundamental.

Las tres *leyes del movimiento planetario* de Kepler pueden expresarse en la forma siguiente:

1. Cada planeta describe una elipse en la que el Sol ocupa uno de sus focos.
2. El radio vector trazado desde el Sol a un planeta recorre áreas iguales en tiempos iguales.
3. Los cuadrados de los periodos orbitales de los planetas son proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de sus órbitas.

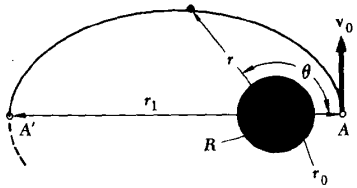
La primera ley expresa un caso particular del resultado establecido en la sección 12.12, mientras que la segunda nos dice que la velocidad areal de cada planeta es constante (véase sección 12.9). La tercera ley de Kepler puede deducirse también de los resultados obtenidos en la sección 12.12. †

† Véase problema 12.115.



PROBLEMA RESUELTO 12.9

Un satélite es lanzado en una dirección paralela a la superficie de la Tierra con una velocidad de 36 900 km/h desde una altitud de 500 km. Determínense: *a*) la máxima altitud alcanzada por el satélite, y *b*) el periodo orbital del satélite.



***a*) Altitud máxima.** Después del lanzamiento, el satélite está sujeto sólo a la atracción gravitacional de la Tierra, así que su movimiento está gobernado por la ecuación (12.39),

$$\frac{1}{r} = \frac{GM}{h^2} + C\cos\theta \tag{1}$$

Como la componente radial de la velocidad es cero en el punto de lanzamiento A, tenemos $h = r_0 v_0$. Se sabe que el radio de la Tierra es $R = 6\,370$ km, calculamos

$$r_0 = 6370\text{ km} + 500\text{ km} = 6870\text{ km} = 6.87 \times 10^6\text{ m}$$

$$v_0 = 36\,900\text{ km/h} = \frac{36.9 \times 10^6\text{ m}}{3.6 \times 10^3\text{ s}} = 10.25 \times 10^3\text{ m/s}$$

$$h = r_0 v_0 = (6.87 \times 10^6\text{ m})(10.25 \times 10^3\text{ m/s}) = 70.4 \times 10^9\text{ m}^2/\text{s}$$

$$h^2 = 4.96 \times 10^{21}\text{ m}^4/\text{s}^2$$

Usando $GM = gR^2$, donde R es el radio de la Tierra, tenemos

$$GM = gR^2 = (9.81\text{ m/s}^2)(6.37 \times 10^6\text{ m})^2 = 398 \times 10^{12}\text{ m}^3/\text{s}^2$$

$$\frac{GM}{h^2} = \frac{398 \times 10^{12}\text{ m}^3/\text{s}^2}{4.96 \times 10^{21}\text{ m}^4/\text{s}^2} = 80.3 \times 10^{-9}\text{ m}^{-1}$$

Sustituyendo este valor en (1), obtenemos

$$\frac{1}{r} = 80.3 \times 10^{-9}\text{ m}^{-1} + C\cos\theta \tag{2}$$

Como en el punto A tenemos $\theta = 0$ y $r = r_0 = 6.87 \times 10^6$ m, calculamos la constante C de:

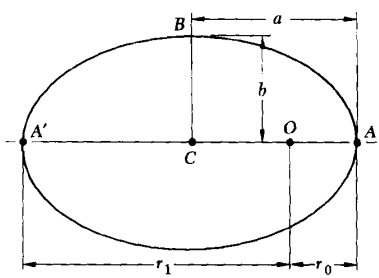
$$\frac{1}{6.87 \times 10^6\text{ m}} = 80.3 \times 10^{-9}\text{ m}^{-1} + C\cos 0° \qquad C = 65.3 \times 10^{-9}\text{ m}^{-1}$$

En A', el punto de la órbita más alejado de la Tierra, tenemos $\theta = 180°$. Usando (2), calculamos la distancia r_1 correspondiente:

$$\frac{1}{r_1} = 80.3 \times 10^{-9}\text{ m}^{-1} + (65.3 \times 10^{-9}\text{ m}^{-1})\cos 180°$$

$$r_1 = 66.7 \times 10^6\text{ m} = 66\,700\text{ km}$$

$$\textit{Altitud máxima} = 66\,700\text{ km} - 6370\text{ km} = 60\,300\text{ km}$$ ◄



***b*) Periodo orbital.** Puesto que A y A' son el perigeo y el apogeo de la órbita elíptica, respectivamente, usamos las ecuaciones (12.46) y (12.47) para calcular a los semiejes mayor y menor de la órbita:

$$a = \tfrac{1}{2}(r_0 + r_1) = \tfrac{1}{2}(6.87 + 66.7)(10^6)\text{ m} = 36.8 \times 10^6\text{ m}$$

$$b = \sqrt{r_0 r_1} = \sqrt{(6.87)(66.7)} \times 10^6\text{ m} = 21.4 \times 10^6\text{ m}$$

$$\tau = \frac{2\pi ab}{h} = \frac{2\pi(36.8 \times 10^6\text{ m})(21.4 \times 10^6\text{ m})}{70.4 \times 10^9\text{ m}^2/\text{s}}$$

$$\tau = 70.3 \times 10^3\text{ s} = 1171\text{ min} = 19\text{ h }31\text{ min}$$ ◄

Problemas

12.88 Para la partícula del problema 12.72, y usando la ecuación (12.37), demuéstrese que la fuerza central **F** es inversamente proporcional a la quinta potencia de la distancia r de la partícula al centro de fuerzas O.

12.89 Para la partícula del problema 12.73 y usando la ecuación (12.37), demuéstrese que la fuerza central **F** es inversamente proporcional al cubo de la distancia r de la partícula al centro de fuerzas O.

12.90 Una partícula de masa m describe la espiral hiperbólica $r = b/\theta$ bajo la acción de la fuerza central **F** dirigida hacia el centro de fuerzas O. Usando la ecuación (12.37) demuéstrese que **F** es inversamente proporcional al cubo de la distancia r de la partícula a O.

12.91 Una partícula de masa m describe la espiral logarítmica $r = r_o e^{b\theta}$ bajo la acción de una fuerza central **F** dirigida hacia el centro de fuerzas O. Empleando la ecuación (12.37) demuéstrese que **F** es inversamente proporcional al cubo de la distancia r de la partícula a O.

12.92 Cuando la astronave Voyager I alcanzó el punto de su trayectoria más cercano al planeta Júpiter, se observó que había una distancia de 350×10^3 km del centro del planeta a la nave y ésta tenía una velocidad de 26.9 km/s, determínese la masa de Júpiter suponiendo que la trayectoria de la astronave fuera parabólica.

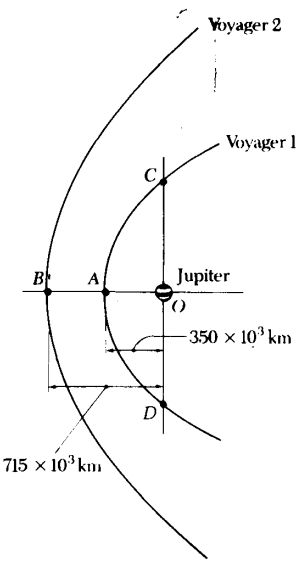


Fig. P12.92 y P12.94

12.93 Se observó que conforme la nave espacial Voyager I alcanzaba el punto de su trayectoria más cercana al planeta Saturno había una distancia de 115×10^3 mi desde el centro del planeta y tenía una velocidad de 68.8×10^3 ft/s. Sabiendo que Tetis, uno de los satélites de Saturno, describe una órbita circular de radio 183×10^3 mi a una velocidad de 37.2×10^3 ft/s, determínese la excentricidad de la trayectoria del Voyager I al acercarse a Saturno.

12.94 La astronave Voyager II alcanzó su punto de su trayectoria más cercano al planeta Júpiter a una distancia de 715×10^3 km del centro del planeta. Suponiendo que la trayectoria de la nave era parabólica y empleando los datos del problema 12.92 para el Voyager I, determínese la velocidad máxima del Voyager II al acercarse a Júpiter.

12.95 Resuélvase el problema 12.94 suponiendo que la excentricidad de la trayectoria de la aeronave Voyager II fue $\varepsilon = 1.50$.

12.96 Un satélite describe una órbita elíptica alrededor de un planeta de masa M. Representando por r_0 y r_1, los valores mínimo y máximo de la distancia r del satélite al centro del planeta respectivamente, obténgase la relación

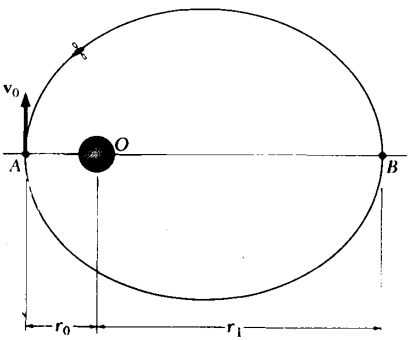


Fig. P12.96

$$\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1} = \frac{2GM}{h^2}$$

donde h es el momento angular por unidad de masa del satélite.

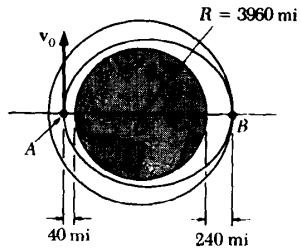


Fig. P12.97

12.97 Al consumirse el combustible de los motores, el vehículo espacial Columbia en sus misiones iniciales, había alcanzado el punto A a una altura de 40 mi y tenía una velocidad horizontal v_0. Sabiendo que su primera órbita fue elíptica y que el vehículo fue transferido a una órbita circular al pasar por el punto B a una altitud de 240 mi sobre la superficie de la Tierra, determínese *a*) la velocidad v_0 del vehículo al acabarse el combustible y *b*) el aumento en la velocidad que se requiere en B para colocar el vehículo en un órbita circular.

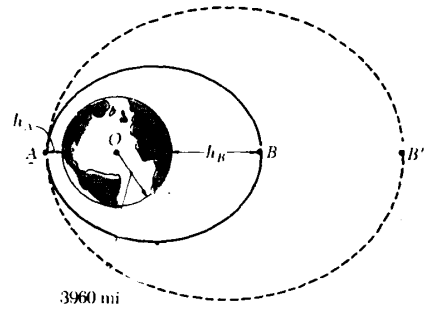


Fig. P12.98

12.98 Una astronave describe una órbita elíptica de altitud mínima $h_A = 1500$ mi y altitud máxima $h_B = 6000$ mi sobre la superficie de la Tierra. *a*) Determínese la velocidad de la astronave en A. *b*) Si su motor se enciende cuando la astronave pasa por el punto A y se incrementa su velocidad en un 8 por ciento, determínese la altitud máxima que sería alcanzada por la astronave en su nueva órbita.

12.99 Una sonda espacial está describiendo una órbita circular alrededor de un planeta de radio R. La altura de las sondas sobre la superficie del planeta es αR y su velocidad es v_0. Para colocar la sonda en una órbita elíptica que se acercara al planeta, su velocidad se reduce de v_0 a βv_0 donde $\beta < 1$, encendiendo sus motores por un intervalo corto de tiempo. Determínese el valor más pequeño permitido de β si se desea que la sonda no se estrelle en la superficie del planeta.

12.100 Una sonda espacial va a ser colocada en una órbita circular de 9000 km de radio alrededor del planeta Venus en un plano específico. Cuando la sonda llega al punto A de su trayectoria original más cercana a Venus, se coloca en una primera órbita elíptica de transferencia reduciendo su rapidez a Δv_A. Esta órbita lo lleva al punto B con una velocidad mucho más reducida. Ahí la sonda se pone en una segunda órbita de transferencia que se localiza en el plano especificado cambiando la dirección de su velocidad y reduciendo aún más su rapidez por Δv_B. Finalmente cuando la sonda llega al punto C se inserta en la órbita circular deseada reduciendo su rapidez por Δv_C. Sabiendo que la masa de Venus es 0.82 veces la masa de la Tierra, que $r_A = 15 \times 10^3$ km y $r_B = 300 \times 10^3$ km y que la sonda llega al punto A en una trayectoria parabólica, determínese cuánto debe reducirse la velocidad de la sonda *a*) en A, *b*) en B y *c*) en C.

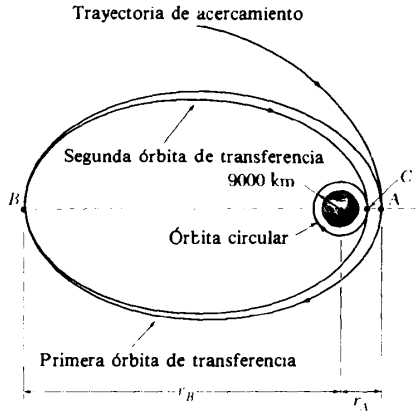


Fig. P12.100

12.101 Para la sonda espacial del problema 12.100 se sabe que $r_A = 15 \times 10^3$ km y que la velocidad de la sonda se reduce a 6500 m/s cuando pasa por A. Determínense *a*) la distancia del centro de Venus al punto B y *b*) la reducción en el módulo de la velocidad en B y C, respectivamente.

12.102 Determínese el tiempo necesario para que la sonda espacial del problema 12.100 viaje de A a B en su primera órbita de transferencia.

12.103 Determínese el tiempo necesario para que la sonda espacial del problema 12.100 viaje de B a C en su segunda órbita de transferencia.

12.104 Para el vehículo espacial Columbia del problema 12.97, determínense *a*) el periodo orbital del vehículo en su primera órbita circular y *b*) el tiempo que le toma viajar de A a B en su órbita elíptica original.

12.105 El cometa Halley viaja en una órbita elíptica alargada para la cual la distancia mínima al sol es aproximadamente $\frac{1}{2}\, r_E$, donde $r_E = 92.9 \times 10^6$ mi, es la distancia promedio del Sol a la Tierra. Si el periodo orbital del cometa Halley es de aproximadamente 76 años, determínese la distancia máxima de separación entre el Sol y el cometa.

12.106 Determínese el tiempo necesario para que la nave espacial Voyager I del problema 12.92 viaje de C a D en su trayectoria parabólica.

12.107 Determínese el tiempo necesario para que la nave Voyager II del problema 12.94 viaje de E a F en su trayectoria parabólica.

12.108 Una sonda espacial describe una órbita circular de radio n_R con una velocidad v_0 alrededor de un planeta de radio R y centro O. Cuando la sonda pasa por el punto A su velocidad se reduce de v_0 a βv_0 donde $\beta < 1$, para colocar la sonda en su trayectoria de choque. Demuéstrese que el ángulo AOB donde B representa el punto de impacto de la sonda en el planeta, depende solamente de los valores de n y β.

12.109 Después de concluir su misión de exploración a la Luna, los dos astronautas que formaron la tripulación de un módulo de excursión lunar Apolo (LEM) se reunirían con el módulo de comando que había permanecido en una órbita circular alrededor de la Luna. Antes de su regreso a la Tierra los astronautas pondrían a su nave en una posición adecuada de manera que el LEM se colocaría enfilando hacia la parte posterior de ésta. Cuando el módulo de comando pasara por A, el LEM se dejaría a la deriva para estrellarse sobre la superficie de la Luna en el punto B. Sabiendo que el módulo de comando se encontraba en órbita alrededor de la Luna a una altitud de 120 km y que el ángulo OAB fue de 50°, determínese la velocidad del LEM relativa al módulo de comando al dejarse a la deriva. (*Sugerencia.* El punto A es el apogeo de la órbita elíptica de choque. Recuérdese también que la masa de la Luna es 0.01230 veces la masa de la Tierra.)

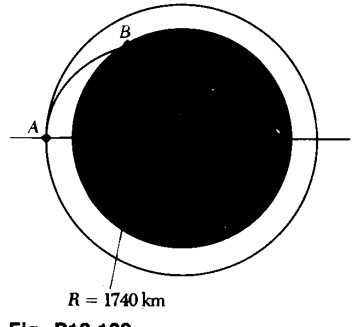


Fig. P12.109

12.110 En el problema 12.109, determínese el ángulo AOB que define el punto del choque del LEM sobre la superficie de la Luna, suponiendo que el módulo de comando estaba orbitando a la Luna a una altitud de 150 km y que el LEM se dejó a la deriva con una velocidad de 80 m/s respecto al módulo de comando.

12.111 Un vehículo espacial se encuentra describiendo una órbita circular a una altitud de 200 mi sobre la superficie de la Tierra. Al pasar por A enciende sus motores por un lapso corto para reducir su rapidez un 6 por ciento y empezar su descenso hacia la Tierra. Determínese la altitud del vehículo espacial en el punto B, si el ángulo AOB es igual a 50°. (*Sugerencia.* El punto A es el apogeo de la trayectoria elíptica de descenso.)

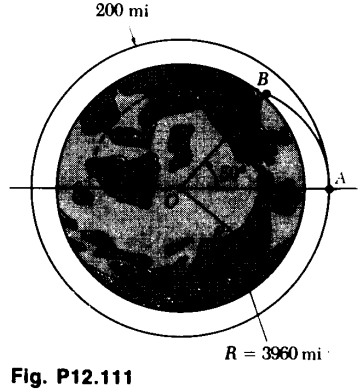


Fig. P12.111

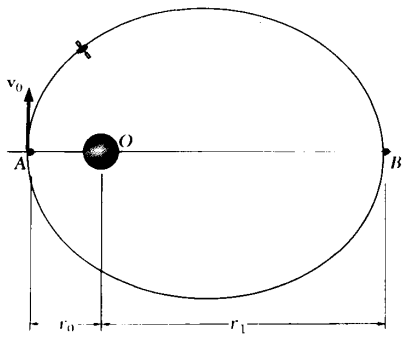


Fig. P12.112 y P12.113

12.112 Un satélite describe una órbita elíptica alrededor de un planeta. Representando por r_0 y r_1 las distancias correspondientes al perigeo y al apogeo de la órbita, respectivamente, demuéstrese que la curvatura de la órbita en cada uno de estos dos puntos puede expresarse como

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1}\right)$$

12.113 *a*) Exprésese la excentricidad ε de la órbita elíptica descrita por un satélite alrededor de un planeta en términos de las distancias r_0 y r_1 correspondientes al perigeo y al apogeo de la órbita, respectivamente. *b*) Úsese el resultado anterior para determinar las excentricidades de las dos órbitas de transferencia descritas en el problema 12.100.

12.114 Dedúzcase la tercera ley de Kepler del movimiento planetario de las ecuaciones (12.30) y (12.45).

12.115 Demuéstrese que el momento angular por unidad de masa h de un satélite que describe una órbita elíptica con semieje mayor A y excentricidad ε respecto de un planeta de masa M, puede expresarse como

$$h = \sqrt{GMa(1 - \varepsilon^2)}$$

Repaso y resumen

Este capítulo se dedicó a la segunda ley de Newton y sus aplicaciones en el análisis del movimiento de partículas.

La segunda ley de Newton

Representando con m la masa de la partícula, por $\Sigma\mathbf{F}$ la suma o resultante, de las fuerzas que actúan sobre la partícula y por $\mathbf{a}$ la aceleración de la partícula relativa a un *sistema de referencia newtoniano* (sección 12.2), se escribió

$$\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a} \qquad (12.2$$

Momento lineal

Presentando el *momento lineal* de una partícula $\mathbf{L} = m\mathbf{v}$ (sección 12.3), se vio que la segunda ley de Newton también podía ser escrita en la forma

$$\Sigma\mathbf{F} = \dot{\mathbf{L}} \qquad (12.5$$

que expresa que *la resultante de las fuerzas que actúan sobre una partícula es igual a la derivada temporal del momento lineal de la partícula.*

Sistemas consistentes de unidades

La ecuación (12.2) se aplica solamente si se utiliza un sistema de unidades consistente. Con unidades del SI, las fuerzas se deben expresar en newtons, las masas en kilogramos y las aceleraciones en m/s^2. Con unidades inglesas, las fuerzas se deben expresar en libras fuerza, las masas en $lb.s^2/ft$ (también conocidos como *slug*) y las aceleraciones en ft/s^2 (sección 12.4).

Ecuaciones de movimiento para una partícula

Para resolver problemas relacionados con el movimiento de una partícula, la ecuación (12.2) se debe reemplazar por ecuaciones que contengan cantidades escalares (sección 12.5)
Usando los *componentes rectangulares* de **F** y **a**, se escribe

$$\Sigma F_x = ma_x \qquad \Sigma F_y = ma_y \qquad \Sigma F_z = ma_z \tag{12.8}$$

Usando los *componentes tangenciales y normales*, se tiene

$$\Sigma F_t = m\frac{dv}{dt} \qquad \Sigma F_n = m\frac{v^2}{\rho} \tag{12.9'}$$

Equilibrio dinámico

También se notó (sección 12.6) que las ecuaciones de movimiento de una partícula se podrían reemplazar por ecuaciones similares a las ecuaciones de equilibrio utilizadas en estática si se agregaba un vector $-m\mathbf{a}$, de magnitud ma pero de sentido opuesto al de la aceleración, a las fuerzas aplicadas a la partícula; se decía entonces que la partícula estaba en *equilibrio dinámico*. Sin embargo, por razones de uniformidad, todos los problemas resueltos se solucionaron a partir de las ecuaciones de movimiento, primero utilizando componentes rectangulares (problemas resueltos del 12.1 al 12.4), y después componentes tangenciales y normales (problemas resueltos 12.5 y 12.6).

Momento angular

En la segunda parte del capítulo se definió el *momento angular* $\mathbf{H}_O$ de una partícula respecto a un punto O como el momento respecto a O del momento lineal $m\mathbf{v}$ de esa partícula (sección 12.7). Se escribe

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} \tag{12.12}$$

y se notó que H_O es un vector perpendicular al plano que contiene a $\mathbf{r}$ y a $m\mathbf{v}$ (fig. 12.24) y de módulo

$$H_O = rmv \sin \phi \tag{12.13}$$

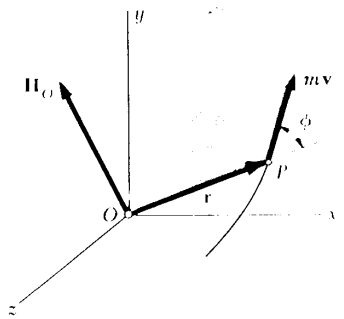


Fig. 12.24

Descomponiendo los vectores $\mathbf{r}$ y $m\mathbf{r}$ en sus componentes rectangulares, se expresó el momento angular $\mathbf{H}_O$ en forma determinante

$$\mathbf{H}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ mv_x & mv_y & mv_z \end{vmatrix} \tag{12.14}$$

En el caso de una partícula moviéndose en el plano xy, se tenía $z = v_z = 0$. El momento angular es perpendicular al plano xy y se define completamente por su módulo. Se escribe

$$H_O = H_z = m(xv_y - yv_x) \tag{12.16}$$

Derivada temporal del momento angular

Calculando la derivada temporal del momento angular, $\dot{\mathbf{H}}_O$, y aplicando la segunda ley de Newton, se escribe

$$\Sigma \mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O \tag{12.19}$$

que establece que *la suma de momentos respecto a O de las fuerzas que actúan sobre una partícula es igual a la derivada temporal del momento angular de la partícula respecto a O.*

En muchos problemas referidos al movimiento plano de una partícula se ha juzgado conveniente usar *componentes radiales y transversales* (sección 12.8, problema resuelto 12.7) y escribir las ecuaciones

$$\Sigma F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \tag{12.21}$$
$$\Sigma F_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \tag{12.22}$$

Movimiento bajo una fuerza central

Cuando la única fuerza que actúa sobre una partícula P es una fuerza $\mathbf{F}$ dirigida hacia un punto fijo O, se dice que la partícula se mueve *bajo una fuerza central* (sección 12.9). Puesto que $\Sigma \mathbf{M}_O = 0$ en cualquier momento, se desprende de la ecuación 12.19 que $\dot{\mathbf{H}}_O = 0$ para todos los valores de t y, por lo tanto, que

$$\mathbf{H}_O = \text{constante} \tag{12.23}$$

Se concluye que *el momento angular de una partícula que se mueve bajo una fuerza central es constante, tanto en módulo como en dirección*, y que la partícula se mueve en un plano perpendicular al vector $\mathbf{H}_O$.

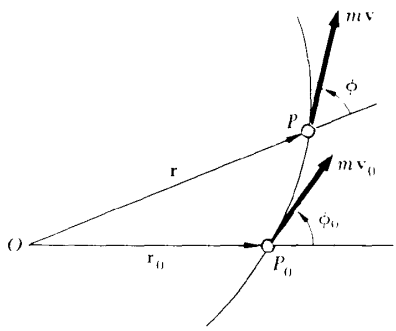


Fig. 12.25

Recordando la ecuación (12.13), se escribe la relación

$$rmv \operatorname{sen} \phi = r_0 m v_0 \operatorname{sen} \phi_0 \tag{12.25}$$

que se aplica al movimiento de cualquier partícula bajo una fuerza central (fig. 12.25). Utilizando coordenadas polares y recordando la ecuación (12.18), también se tiene

$$r^2\dot{\theta} = h \tag{12.27}$$

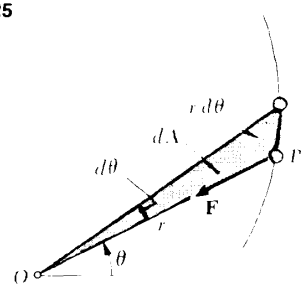


Fig. 12.26

donde h es una constante que representa el momento angular por unidad de masa, H_O/m de la partícula. Se observó (fig. 12.26) que el área infinitesimal dA distendida por el vector radial OP conforme rota a través de $d\theta$ es igual a $\frac{1}{2}r^2\,d\theta$, por tanto, que el miembro izquierdo de la ecuación (12.27) representa el doble de la *velocidad de área* dA/dt de la partícula. Por lo tanto, *la velocidad areolar de una partícula que se mueve bajo una fuerza central es constante.*

Ley de la gravitación universal de Newton

Una aplicación importante del movimiento bajo la acción de una fuerza central es proporcionada para el movimiento orbital de cuerpos bajo atracción gravitatoria (sección 12.10).

De acuerdo a *la ley de gravitación universal de Newton*, dos partículas a una distancia r una de la otra y de masa M y m, respectivamente, se atraen una a la otra con fuerzas iguales y opuestas $\mathbf{F}$ y $-\mathbf{F}$ dirigidas a lo largo de la línea que une a las partículas (fig. 12.27). La magnitud común F de las dos fuerzas es

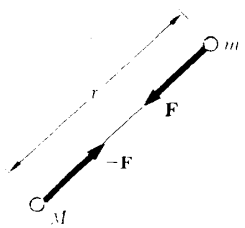


Fig. 12.27

$$F = G\frac{Mm}{r^2} \tag{12.28}$$

donde G es la *constante de gravitación*. En el caso de un cuerpo de masa m sujeto a la atracción gravitatoria de la Tierra, el producto GM, donde M es la masa de la Tierra, se puede expresar como

$$GM = gR^2 \tag{12.30}$$

donde $g = 9.81\ \text{m/s}^2 = 32.2\ \text{ft/s}^2$ y donde R representa el radio de la Tierra.

Se demostró en la sección 12.11 que una partícula que se mueve bajo la acción de una fuerza central describe una trayectoria definida por la ecuación diferencial

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{F}{mh^2u^2} \tag{12.37}$$

donde $F > 0$ corresponde a una fuerza atractiva y donde $u = 1/r$. En el caso de una partícula que se mueve bajo la acción de una fuerza de atracción gravitatoria (sección 12.12), se sustituyó F en la expresión proporcionada en la ecuación (12.28). Midiendo θ del eje OA que une al foco O al punto A de la trayectoria más cercana a O (fig. 12.28), se encontró que la solución a la ecuación (12.37) era

Movimiento orbital

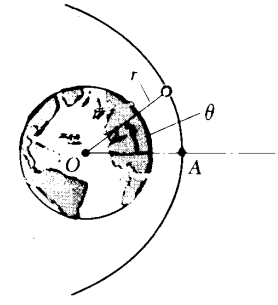


Fig. 12.28

$$\frac{1}{r} = u = \frac{GM}{h^2} + C\cos\theta \tag{12.39}$$

Esta es la ecuación de una cónica de excentricidad $\varepsilon = Ch^2/GM$. La cónica es una *elipse* si $\varepsilon < 1$, una *parábola* si $\varepsilon = 1$, una *hipérbola* si $\varepsilon > 1$. Las constantes C y h se pueden determinar a partir de las condiciones iniciales; si la partícula se proyecta desde el punto A ($\theta = 0$, $r = r_0$) con una velocidad inicial v_0 perpendicular a OA, se tiene $h = r_0v_0$ (problema resuelto 12.9).

Velocidad de escape

También se demostró que los valores de la velocidad inicial correspondientes, respectivamente, a una trayectoria parabólica y a una circular eran

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}} \tag{12.43}$$

$$v_{circ} = \sqrt{\frac{GM}{r_0}} \tag{12.44}$$

y que el primero de estos valores, llamado la velocidad de escape, es el mínimo valor de v_0 para el cual la partícula no regresará a su punto de inicio.

Periodo orbital

El *periodo orbital* τ de un planeta o satélite se definió como el tiempo requerido por el cuerpo para describir su órbita. Se demostró que

$$\tau = \frac{2\pi ab}{h} \tag{12.45}$$

donde $h = r_0v_0$ y donde a y b representan los semiejes mayor y menor de la órbita. También que se demostró que estos semiejes eran respectivamente iguales a las medias aritméticas y geométricas de los valores máximo y mínimo del vector radial r.

Leyes de Kepler

La última sección del capítulo (sección 12.13) presentó las *leyes de Kepler del movimiento planetario* y demostró que estas leyes empíricas, obtenidas de observaciones astronómicas iniciales confirman las leyes del movimiento de Newton, así como su ley de gravitación.

Problemas de repaso



Fig. P12.116

12.116 Un automóvil ha subido una larga pendiente del 2 por ciento a una velocidad constante de 85 km/h. Si el conductor no hace cambio de velocidades o en la aceleración del automóvil cuando alcanza la cima de la colina, ¿cuál será la aceleración del automóvil si inicia la bajada de una pendiente del 3%?

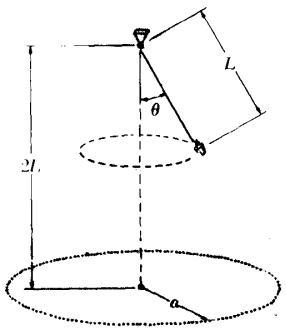


Fig. P12.117

12.117 Un cubo está atado a una cuerda de longitud $L = 1.2$ m y se le hace girar en un círculo horizontal. Al caer gotas de agua que se desprenden del cubo golpean el piso a lo largo del perímetro de un círculo de radio a. Determínese el radio a cuando $\theta = 30°$.

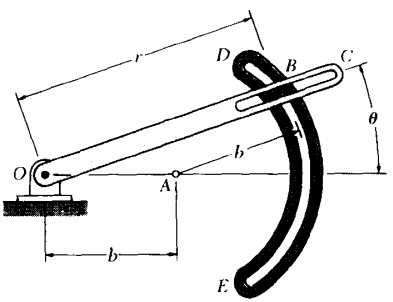


Fig. P12.118

12.118 El pasador B pesa 4 oz y desliza libremente a lo largo del brazo rotatorio OC y a lo largo de la ranura circular DE de radio $b = 18$ in. Despreciando el rozamiento y suponiendo que la barra OC está hecha para girar a una velocidad constante $\theta_0 = 12$ rad/s en un plano horizontal, determínese para cualquier valor de θ *a*) las componentes radial y transversal de la fuerza resultante ejercida sobre el pasador B, *b*) las fuerzas **P** y **Q** ejercidas sobre el pasador B, respectivamente, por la barra OC y por la pared de la ranura DE.

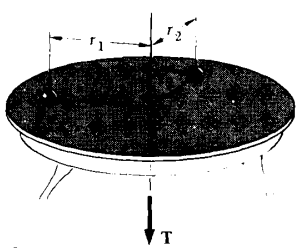


Fig. P12.119

12.119 Una pelota de 5 oz desliza sobre una mesa horizontal lisa en el extremo de una cuerda que pasa a través de un pequeño agujero en la mesa en O. Cuando la longitud de la porción del resorte sobre la mesa es $r_1 = 24$ in., la velocidad de la pelota es $v_1 = 4$ ft/s. Si se sabe que la resistencia a la rotura de la cuerda es 6.00 lb, determínese *a*) la mínima distancia r_2 que se puede lograr al hacer pasar lentamente el resorte a través del agujero y *b*) la velocidad correspondiente v_2.

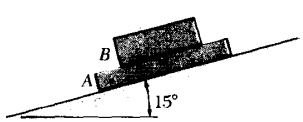


Fig. P12.120

12.120 Dos placas A y B, cada una de 50 kg de masa se colocan como se indica sobre un plano inclinado de 15°. El coeficiente de rozamiento entre A y B es 0.10; el coeficiente de rozamiento entre A y el plano es 0.20. *a*) Si las placas se sueltan a partir del reposo, determínese la aceleración de cada una. *b*) Resuélvase la parte *a* suponiendo que las placas A y B están soldadas y actúan como un sólido rígido simple.

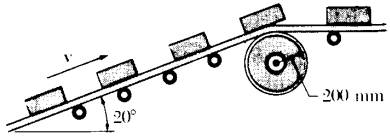


Fig. P12.121

12.121 Una serie de pequeños paquetes, que son movidos por una banda transportadora con velocidad constante v, pasan sobre un rodillo guía como se indica. Si el coeficiente de rozamiento entre los paquetes y la banda es 0.75, determínese el valor máximo de v para el cual los paquetes no patinarán respecto a la banda.

12.122 Una bolsa se empuja suavemente desde lo alto de una pared en A y se balancea en un plano vertical en el extremo de una cuerda de longitud l. *a*) Para cualquier posición B de la bolsa determínese la componente tangencial a_t de su aceleración y obténgase su velocidad v por integración. *b*) Determínese el valor de θ para el cual se romperá la cuerda, si se sabe que puede soportar una tensión máxima igual al doble del peso de la bolsa.

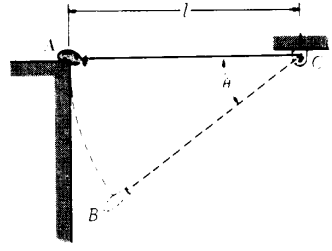


Fig. P12.122

12.123 Dos estaciones espaciales S_1 y S_2 describen órbitas circulares coplanarias en sentido inverso a las manecillas del reloj de radio r_0 y $8r_0$, respectivamente, alrededor de la Tierra. Se desea enviar un vehículo de S_1 a S_2. Se deberá lanzar en una dirección tangencial a la órbita de S_1 y alcanzar a S_2 con una velocidad tangencial a la órbita de S_2. Después de una fase con baja potencia, el vehículo viajará en vuelo libre desde S_1 hasta S_2. *a*) Determínese la velocidad del despegue (velocidad del vehículo relativa a S_1), en términos de la velocidad v_0 de S_1. *b*) Determínese el ángulo θ que define la posición requerida de S_2 con relación a S_1 al momento del lanzamiento.

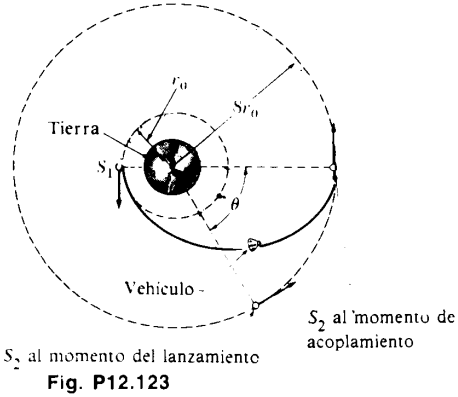


Fig. P12.123

12.124 Los dos bloques mostrados están inicialmente en reposo. Despreciando las masas de las poleas y el efecto del rozamiento en las mismas y entre el bloque A y la pendiente, determínense *a*) la aceleración de cada bloque y *b*) la tensión en el cable.

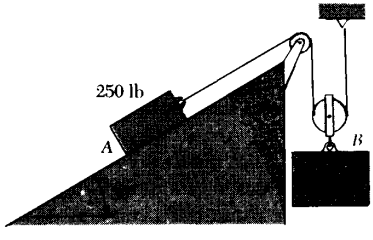


Fig. P12.124

12.125 Resuélvase el problema 12.124 suponiendo que los coeficientes de rozamiento entre el bloque A y la pendiente son $\mu_s = 0.25$ y $\mu_k = 0.20$.

12.126 Al terminársele el combustible un satélite Explorer estaba a 170 mi sobre la superficie de la Tierra y tenía una velocidad horizontal v_0 de magnitud 32.6×10^3 ft/s. Determínese *a*) la altitud máxima alcanzada por el satélite y *b*) su velocidad en su apogeo B.

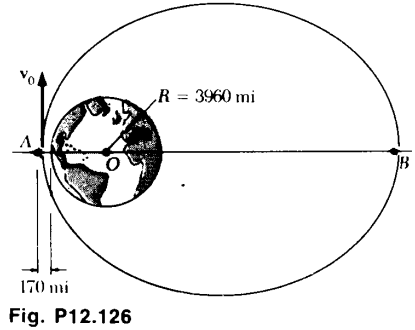


Fig. P12.126

12.127 Un bloque B de 6 kg descansa como se indica sobre una ménsula A de 10 kg. Los coeficientes de rozamiento son $\mu_s = 0.30$ y $\mu_k = 0.25$ entre el bloque B y la ménsula A y no hay rozamiento en la polea ni entre la ménsula y la superficie horizontal. Determínese *a*) la máxima fuerza **P** que se puede ejercer sobre la cuerda para que el bloque B no deslice sobre la ménsula A y *b*) la aceleración correspondiente de la ménsula.

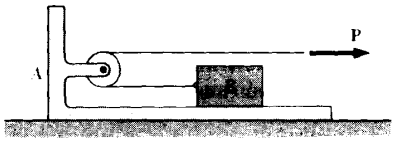


Fig. P12.127

Los siguientes problemas están diseñados para ser resueltos con ordenador.

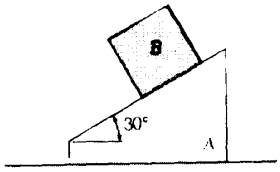


Fig. P12.C1

12.C1 El bloque B de 12 lb se suelta desde el reposo sobre la cuña A de 30 lb, la cual está sostenida por una superficie horizontal. Elabórese un programa de ordenador que se pueda usar para calcular la aceleración de la cuña y la aceleración del bloque relativa a la cuña. Representando por μ el coeficiente de rozamiento en todas las superficies, úsese este programa para determinar las aceleraciones para valores de μ en intervalos de 0.01 desde $\mu = 0$ hasta el valor de μ para el cual no se mueve la cuña y después para valores de μ en intervalos de 0.1 hasta el valor de μ para el cual ningún movimiento ocurre.

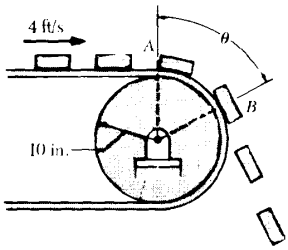


Fig. P12.C3

12.C2 En el problema 12.54 determínese con una exactitud de 0.1° los tres intervalos de valores de θ para los cuales no deslizará el collarín sobre la barra, suponiendo un coeficiente de rozamiento estático de 0.25.

12.C3 Una serie de pequeños paquetes se descarga desde una banda transportadora como se indica. Los coeficientes de fricción son $\mu_s = 0.40$ y $\mu_k = 0.35$ entre la banda y los paquetes y se sabe que los paquetes empiezan a deslizar respecto a la banda cuando $\theta = 9.01°$ (véase respuesta al problema 12.47). Elabórese un programa de ordenador y úsese para determinar por integración numérica en intervalos de tiempo de $\Delta t = 0.001$ s el ángulo θ que define el punto donde los paquetes abandonarán la banda.

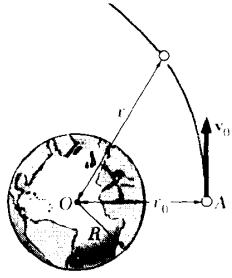


Fig. P12.C4

12.C4 Se lanza una nave espacial con una velocidad v_0 paralela a la superficie de la Tierra desde una altitud de 500 km. Elabórese un programa de ordenador y úsese para calcular la altura $d = r - R$ de la nave y el tiempo t en minutos que pasa desde el lanzamiento para valores de θ en intervalos de 5°, *a*) de 0 a 180°, suponiendo una órbita elíptica con $v_0 = 36.9 \times 10^3$ km/h, *b*) de 0 a 170°, suponiendo una trayectoria parabólica con $v_0 = 38.75 \times 10^3$ km/h y *c*) de 0 a 115° suponiendo una trayectoria hiperbólica con $v_0 = 47.5 \times 10^3$ km/h. En el caso *a*, también determínese el tiempo orbital de la nave y compárese con el valor obtenido en el problema resuelto 12.9. (*Sugerencia*. El tiempo t transcurrido desde el lanzamiento se puede obtener al integrar la ecuación (12.27) numéricamente, usando incrementos $\Delta\theta = 0.1°$.)

CAPÍTULO TRECE

Cinética de partículas: Métodos de la energía y de los momentos

13.1. Introducción. En el capítulo anterior, la mayor parte de los problemas relacionados con el movimiento de las partículas se resolvieron mediante el uso de la ecuación fundamental del movimiento $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Dada una partícula sujeta a una fuerza $\mathbf{F}$ pudimos resolver esta ecuación determinando la aceleración $\mathbf{a}$; entonces, aplicando los principios de la cinemática, pudimos determinar a partir de $\mathbf{a}$ la velocidad y la posición de la partícula en cualquier instante.

Si combinamos la ecuación $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ y los principios de la cinemática podemos obtener dos métodos adicionales de análisis, el *método del trabajo y la energía y el método del impulso y los momentos*. La ventaja de éstos reside en que, con ellos, la determinación de la aceleración es innecesaria. De hecho, el método del trabajo y la energía relaciona directamente a la fuerza, la masa, la velocidad y el desplazamiento, mientras que el método del impulso y de los momentos relaciona a la fuerza con la masa, la velocidad y el tiempo.

Se considerará primero el método del trabajo y la energía. En las secciones 13.2 a la 13.4 estudiaremos el *trabajo realizado por una fuerza* y la *energía cinética de una partícula*, y aplicaremos el teorema de las fuerzas vivas a la solución de problemas en ingeniería. Los conceptos de *potencia y rendimiento* de una máquina se introducirán en la sección 13.5.

Las secciones de la 13.6 a la 13.8 se dedican al concepto de *energía potencial* de una fuerza conservativa, así como a la aplicación del principio de conservación de energía a varios problemas de interés práctico. En la sección 13.9 veremos cómo pueden aplicarse los principios de conservación de la energía y de la conservación del momento angular en combinación para resolver problemas de mecánica espacial.

La segunda parte del capítulo se dedica a los *principios del impulso y los momentos* y a su aplicación al estudio del movimiento de una partícula. Como veremos en la sección 13.11, este principio es particularmente efectivo en el estudio de las *percusiones*, donde se aplican fuerzas muy grandes durante intervalos de tiempo muy cortos.

En las secciones 13.12 a la 13.14 consideraremos el *choque central* de dos cuerpos. Se mostrará que existe una cierta relación entre las velocidades relativas, antes y después del impacto de dos cuerpos que chocan. Esta relación puede usarse junto con el hecho de que el momento lineal total de los cuerpos se conserva para resolver cierto número de problemas de interés práctico.

Finalmente, en la sección 13.15 aprenderemos a seleccionar, de los tres métodos fundamentales presentados en los capítulos 12 y 13, el método más adecuado para la solución de un problema dado. Veremos también cómo el principio de conservación de la energía y el método del impulso y de los momentos pueden combinarse para resolver problemas en los que se tienen sólo fuerzas conservativas, salvo por una corta fase de choque durante la cual, las percusiones deben también tomarse en consideración.

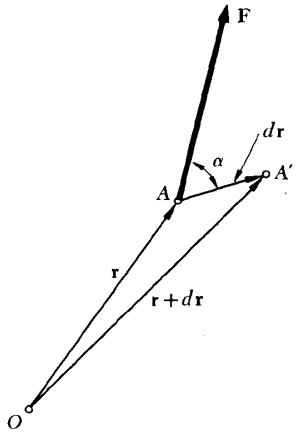


Fig. 13.1

13.2. Trabajo realizado por una fuerza. Definiremos primero los términos *desplazamiento* y *trabajo* tal como se usan en mecánica†. Considérese una partícula que se mueve desde un punto A a otro próximo A' (Fig. 13.1). Si $\mathbf{r}$ representa el vector de posición correspondiente al punto A, el pequeño vector que une a A y A' puede representarse por $d\mathbf{r}$; al vector $d\mathbf{r}$ se le llama *desplazamiento* de la partícula. Ahora supongamos que una fuerza $\mathbf{F}$ actúa sobre la partícula. El *trabajo realizado por la fuerza* $\mathbf{F}$ *correspondiente al desplazamiento* $d\mathbf{r}$ se define como la cantidad

$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \tag{13.1}$$

que se obtiene del producto escalar de la fuerza $\mathbf{F}$ y del desplazamiento $d\mathbf{r}$. *Sean* F y ds los módulos de la fuerza y del desplazamiento respectivamente, y α el ángulo formado por $\mathbf{F}$ y $d\mathbf{r}$, y de la definición del producto escalar de dos vectores (Sec. 3.9), escribimos

$$dU = F\,ds\cos\alpha \tag{13.1'}$$

Usando la fórmula (3.30) podemos expresar también el trabajo dU en términos de las componentes rectangulares de la fuerza y del desplazamiento:

$$dU = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz \tag{13.1''}$$

Como el trabajo es una *cantidad escalar*, tiene módulo y signo pero no dirección. Observamos también que el trabajo debe expresarse en unidades obtenidas al multiplicar las unidades de longitud por las unidades de fuerza. Si se emplean las unidades del

† La definición de trabajo se dio en la sección 10.2 y las propiedades básicas del trabajo de una fuerza se describieron en las secciones 10.2 y 10.6. Por conveniencia, repetiremos aquí las porciones de este material que estén relacionadas con la cinética de las partículas.

sistema inglés, el trabajo debe expresarse en ft · lb, o in · lb. Si se emplean unidades del SI, el trabajo debe expresarse en N·m. A la unidad de trabajo N·m se le llama un *joule* (J).† Recordando los factores de conversión indicados en la sección 12.4, escribimos

$$1\ \text{ft}\cdot\text{lb} = (1\ \text{ft})(1\ \text{lb}) = (0.3048\ \text{m})(4.448\ \text{N}) = 1.356\ \text{J}$$

De (13.1′) se deduce que el trabajo dU es positivo si el ángulo α es agudo, y negativo si α es obtuso. Existen tres casos de particular interés: si la fuerza **F** tiene la misma dirección que $d\mathbf{r}$, el trabajo dU se reduce a $F\,ds$; si **F** tiene una dirección opuesta a la de $d\mathbf{r}$, el trabajo es $dU = -F\,ds$. Finalmente, si **F** es perpendicular a $d\mathbf{r}$, el trabajo dU es cero.

El trabajo de **F** durante un desplazamiento *finito* de la partícula desde A_1 hasta A_2 (Fig. 13.2*a*) se obtiene integrando la ecuación (13.1) a lo largo de la trayectoria descrita por la partícula. Este trabajo, representado por $U_{1\to 2}$, es

$$U_{1\to 2} = \int_{A_1}^{A_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \tag{13.2}$$

Usando la expresión (13.1′) para el trabajo elemental dU y observando que $F\cos\alpha$ representa a la componente tangencial F_t de la fuerza, podemos expresar también el trabajo $U_{1\to 2}$, como

$$U_{1\to 2} = \int_{s_1}^{s_2} (F\cos\alpha)\,ds = \int_{s_1}^{s_2} F_t\,ds \tag{13.2′}$$

donde la variable de integración s mide la distancia recorrida por la partícula a lo largo de la trayectoria. El trabajo $U_{1\to 2}$ está representado por el área bajo la curva obtenida al dibujar $F_t = F\cos\alpha$ en función de s (Fig. 13.2*b*).

Cuando la fuerza **F** está definida por sus componentes rectangulares, puede emplearse la expresión (13.1″) para el trabajo elemental. Entonces escribimos

$$U_{1\to 2} = \int_{A_1}^{A_2} (F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz) \tag{13.2″}$$

donde la integración debe realizarse a lo largo de la trayectoria descrita por la partícula.

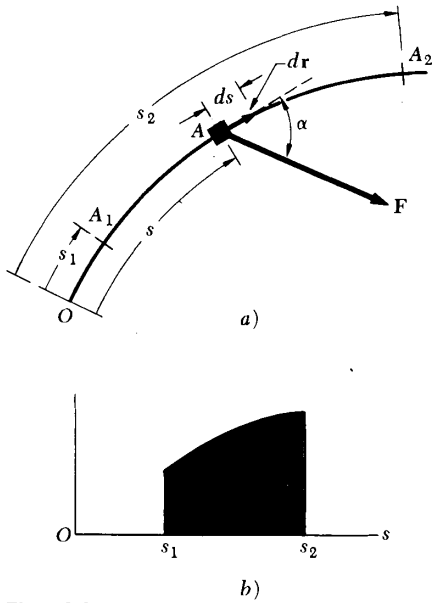


Fig. 13.2

Trabajo realizado por una fuerza constante en movimiento rectilíneo. Cuando una partícula que se mueve en línea recta está sujeta a una fuerza **F** de módulo y dirección constantes (Fig. 13.3), la fórmula (13.2′) da

$$U_{1\to 2} = (F\cos\alpha)\,\Delta x \tag{13.3}$$

donde α = ángulo que forma la fuerza con la dirección de movimiento
Δx = desplazamiento de A_1 a A_2

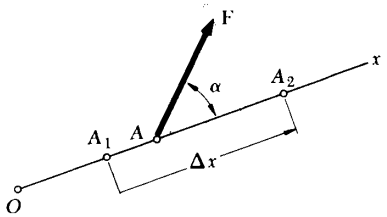


Fig. 13.3

† El joule (J) es la unidad de *energía* del SI, ya sea en forma mecánica (trabajo, energía potencial, energía cinética) o en forma química, eléctrica o térmica. Debemos observar que aunque N · m = J, el momento de una fuerza debe ser expresado en N · m y no en joules, porque el momento de una fuerza no es una forma de energía.

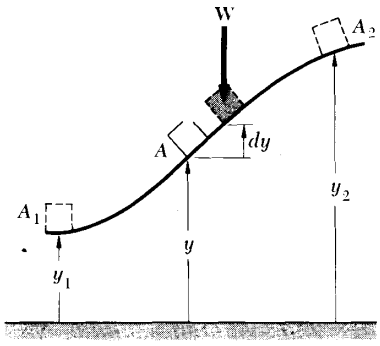
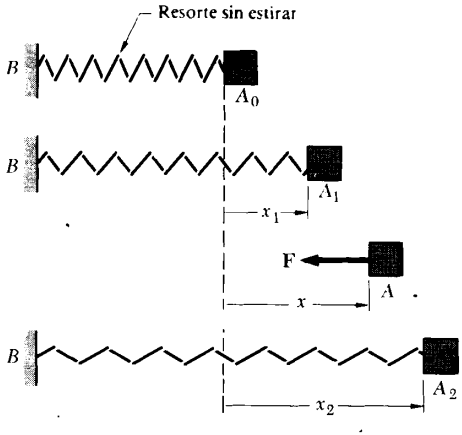
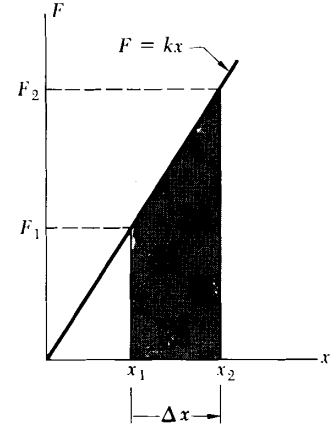


Fig. 13.4



a)



b)

Fig. 13.5

Trabajo realizado por la fuerza de gravedad. El traba del peso **W** de un cuerpo, es decir, el que la fuerza de gravedad real sobre ese cuerpo, se obtiene al sustituir las componentes de **W** (13.1′) y (13.2′) Tomando el eje y vertical (Fig. 13.4), tenemos $F_x = F_y = -W$, $F_z = 0$ y escribimos

$$dU = -W\,dy$$

$$U_{1\to 2} = -\int_{y_1}^{y_2} W\,dy = Wy_1 - Wy_2 \qquad (13$$

o

$$U_{1\to 2} = -W(y_2 - y_1) = -W\,\Delta y \qquad (13.$$

donde Δy es el desplazamiento vertical de A_1 a A_2. Así que el traba del peso **W** es igual *al producto de W por el desplazamiento vertical centro de gravedad del cuerpo.* El trabajo es *positivo* cuando $\Delta y < 0$, decir, *cuando el cuerpo se mueve hacia abajo.*

Trabajo realizado por la fuerza ejercida por un resort Consideremos un cuerpo A unido a un punto B por un resorte; se s pone que el resorte no está deformado cuando el cuerpo está en (Fig. 13.5*a*). La evidencia experimental muestra que el módulo la fuerza **F**, ejercida por el resorte sobre el cuerpo A, es propc cional a la deformación x del resorte, medida desde la posición Por tanto

$$F = kx \qquad (13$$

donde k es la *constante del resorte,* expresada en N/m o kN/m, si usan unidades del SI, y en lb/ft o lb/in, si se emplean unidades ing sas. †

El trabajo de la fuerza **F** ejercida por el resorte durante desplazamiento finito del cuerpo, de $A_1 (x = x_1)$ a $A_2 (x = x_2)$, se o tiene escribiendo

$$dU = -F\,dx = -kx\,dx$$

$$U_{1\to 2} = -\int_{x_1}^{x_2} kx\,dx = \tfrac{1}{2}kx_1^2 - \tfrac{1}{2}kx_2^2 \qquad (13.$$

Debe tenerse cuidado de usar k y x en unidades consistentes. P ejemplo, si se emplean unidades del sistema inglés, k debe expresar en lb/ft y x en pies o k en lb/in, y x en pulgadas; en el primer caso, trabajo se obtiene en ft·lb y, en el segundo, en in·lb. Notamos q el trabajo de la fuerza **F** ejercido por el resorte sobre el cuerpo es *p sitivo* cuando $x_2 < x_1$, es decir, *cuando el resorte está regresando a posición no deformada.*

Como la ecuación (13.5) es la ecuación de una línea recta de pe diente k que pasa por el origen, el trabajo $U_{1\to 2}$ de **F** durante desplazamiento de A_1 a A_2 puede obtenerse calculando el área d

† La relación $F = kx$ sólo es correcta bajo condiciones estáticas. En condiciones námicas se debe modificar la fórmula (13.5) para tomar en cuenta la inercia del reso Sin embargo, el error producido al usar la relación $F = kx$ en la solución de problem de cinética es pequeño si la masa del resorte es pequeña comparada con las otras mas en movimiento.

trapecio mostrado en la figura 13.5*b*. Esto se realiza calculando F_1 y F_2 y multiplicando la base Δx por su altura promedio $\frac{1}{2}(F_1 + F_2)$. Como el trabajo de la fuerza **F** ejercido por el resorte es positivo para un valor negativo de Δx, escribimos

$$U_{1\to 2} = -\tfrac{1}{2}(F_1 + F_2)\,\Delta x \qquad (13.6')$$

Por lo general, (13.6′) es fórmula más conveniente que (13.6), ya que las probabilidades de confundirse con las unidades consideradas son menores.

Trabajo realizado por una fuerza gravitacional. En la sección 12.10 vimos que dos partículas separadas por una distancia r, y de masas M y m respectivamente, se atraen entre sí con fuerzas iguales y opuestas **F** y $-\mathbf{F}$ dirigidas a lo largo de la línea que une a las partículas y de módulo

$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

Supongamos que la partícula M ocupa una posición O mientras que la partícula m se mueve a lo largo de la trayectoria mostrada en la figura 13.6. El trabajo de la fuerza **F** ejercido sobre la partícula m durante un desplazamiento infinitesimal de la partícula de A a A', puede obtenerse multiplicando el módulo F de la fuerza por la componente radial dr del desplazamiento. Como **F** está dirigida hacia O, el trabajo es negativo y escribimos

$$dU = -F\,dr = -G\frac{Mm}{r^2}dr$$

El trabajo que realiza la fuerza gravitacional **F** durante un desplazamiento infinitesimal de $A_1(r = r_1)$ a $A_2(r = r_2)$ es, por consiguiente

$$U_{1\to 2} = -\int_{r_1}^{r_2}\frac{GMm}{r^2}dr = \frac{GMm}{r_2} - \frac{GMm}{r_1} \qquad (13.7)$$

La fórmula obtenida puede usarse para determinar el trabajo de la fuerza que la Tierra ejerce sobre un cuerpo de masa m a una distancia r del centro de la Tierra, cuando r es mayor que el radio R de la Tierra. En este caso la letra M representa a la masa de la Tierra; recordando la primera de las relaciones (12.29) podemos sustituir el producto GMm en la ecuación (13.7) por WR^2, donde R es el radio de la Tierra ($R = 6.37 \times 10^6$ m o 3 960 mi) y W el valor del peso del cuerpo en la superficie de la Tierra.

Un buen número de las fuerzas encontradas frecuentemente en problemas de cinética *no efectúan trabajo*; son fuerzas aplicadas a puntos fijos ($ds = 0$) o que actúan en una dirección perpendicular al desplazamiento ($\cos\alpha = 0$). Entre las fuerzas que no realizan trabajo se encuentran las siguientes: la reacción de una articulación sin rozamiento cuando el cuerpo gira alrededor de dicha articulación, la reacción en una superficie sin rozamiento cuando el cuerpo en contacto se mueve a lo largo de la superficie, la reacción en un rodillo moviéndose a lo largo de su pista, y el peso de un cuerpo cuando su centro de gravedad se mueve horizontalmente.

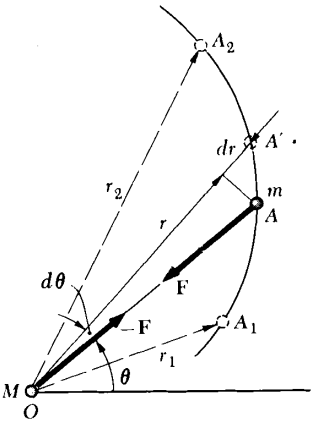


Fig. 13.6

13.3 Energía cinética de una partícula. Teorema de las fuerzas vivas. Considérese una partícula de masa m, sobre la que actúa una fuerza $\mathbf{F}$, y que se mueve a lo largo de una trayectoria que puede ser rectilínea o curva (Fig. 13.7). Expresando la segunda

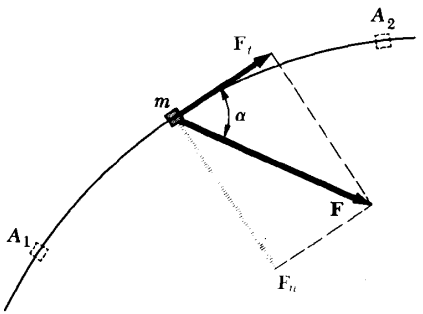


Fig. 13.7

ley de Newton en términos de las componentes tangenciales de la fuerza y de la aceleración (véase sección 12.5), escribimos

$$F_t = ma_t \qquad o \qquad F_t = m\frac{dv}{dt}$$

donde v es la velocidad de la partícula. Recordando de la sección 11.9 que $v = ds/dt$, obtenemos

$$F_t = m\frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = mv\frac{dv}{ds}$$

$$F_t\,ds = mv\,dv$$

Integrando de A_1, donde $s = s_1$ y $v = v_1$, a A_2, donde $s = s_2$ y $v = v_2$, escribimos

$$\int_{s_1}^{s_2} F_t\,ds = m\int_{v_1}^{v_2} v\,dv = \tfrac{1}{2}mv_2^2 - \tfrac{1}{2}mv_1^2 \tag{13.8}$$

El primer miembro de la ecuación (13.8) representa el trabajo U_{1-2} de la fuerza $\mathbf{F}$ ejercida sobre la partícula durante el desplazamiento de A_1 a A_2; como se indicó en la sección 13.2, el trabajo U_{1-2} es una cantidad escalar. La expresión $\frac{1}{2}mv^2$ es también una cantidad escalar; se define como la energía cinética de la partícula y se representa por T. Escribimos

$$T = \tfrac{1}{2}mv^2 \tag{13.9}$$

Sustituyendo en (13.8), tenemos

$$U_{1\to 2} = T_2 - T_1 \tag{13.10}$$

que expresa que cuando una partícula se mueve de A_1 a A_2 bajo la acción de una fuerza **F**, *el trabajo de la fuerza* **F** *es igual al cambio de la energía cinética de la partícula.* Esto se conoce como *teorema de las fuerzas vivas.* Reordenando los términos en (13.10), escribimos

$$T_1 + U_{1\to 2} = T_2 \tag{13.11}$$

Entonces, *la energía cinética de la partícula en* A_2 *puede obtenerse sumando a su energía cinética en* A_1 *el trabajo realizado por la fuerza* **F** *que actúa sobre la partícula durante el desplazamiento desde* A_1 *a* A_2. Igual que la segunda ley de Newton de la cual se derivó, el teorema de las fuerzas vivas es aplicable sólo en un sistema de referencia newtoniano (Secc. 12.2). La velocidad v usada para determinar la energía cinética T debe, por lo tanto, medirse respecto a un sistema de referencia newtoniano.

Como el trabajo y la energía cinética son cantidades escalares, su suma debe calcularse como una suma algebraica ordinaria; el trabajo $U_{1\to 2}$ se considera positivo o negativo dependiendo de la dirección de **F**. Cuando actúan varias fuerzas sobre la partícula, la expresión $U_{1\to 2}$ representa el trabajo total de las fuerzas y se obtiene sumando algebraicamente el trabajo de las distintas fuerzas.

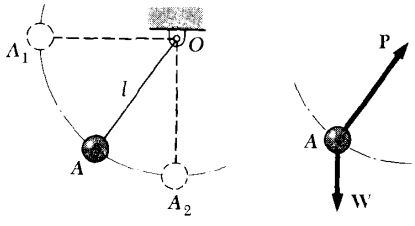
Como se acaba de mencionar, la energía cinética de una partícula es una cantidad escalar. Además, por la definición $T = \frac{1}{2}mv^2$, la energía cinética es siempre positiva, independientemente de la dirección del movimiento de la partícula. Considerando el caso particular en el que $v_1 = 0$, $v_2 = v$ y sustituyendo $T_1 = 0$, $T_2 = T$ en (13.10), observamos que el trabajo hecho por las fuerzas que actúan sobre la partícula es igual a T. Tenemos entonces que la energía cinética de una partícula que se mueve con velocidad v, representa el trabajo que debe hacerse para llevarla desde el reposo hasta la velocidad v. Sustituyendo $T_1 = T$ y $T_2 = 0$ en (13.10), notamos también que cuando una partícula que se mueve con velocidad v se lleva al reposo, el trabajo realizado por las fuerzas que actúan sobre la partícula es $-T$. Suponiendo que no se disipa energía en forma de calor, concluimos que el trabajo realizado por las fuerzas ejercidas *por la partícula* sobre los cuerpos que hacen que ésta se pare es igual a T. Tenemos entonces que la energía cinética de una partícula representa también *la capacidad de realizar trabajo, asociado con la velocidad de la partícula.*

La energía cinética se mide en las mismas unidades que el trabajo, es decir, en joules en el sistema SI y en ft·lb en el sistema inglés. Comprobamos que, en unidades del SI

$$T = \tfrac{1}{2}mv^2 = \text{kg(m/s)}^2 = (\text{kg}\cdot\text{m/s}^2)\text{m} = \text{N}\cdot\text{m} = \text{J}$$

mientras que en unidades inglesas

$$T = \tfrac{1}{2}mv^2 = (\text{lb}\cdot\text{s}^2/\text{ft})(\text{ft/s})^2 = \text{lb}\cdot\text{ft}$$



a) *b)*

Fig. 13.8

13.4 Aplicaciones del teorema de las fuerzas vivas. La aplicación del teorema de las fuerzas vivas simplifica mucho la solución de muchos problemas que relacionan fuerzas, desplazamientos y velocidades. Consideremos por ejemplo, el péndulo OA formando por una lenteja A de peso W, unida a una cuerda de longitud l (Fig. 13.8*a*). El péndulo se suelta desde el reposo en una posición horizontal OA_1 y se le permite oscilar en un plano vertical. Deseamos determinar la velocidad de la lenteja cuando pasa por A_2 directamente abajo de O.

Determinaremos primero el trabajo hecho durante el desplazamiento de A_1 a A_2 por las fuerzas que actúan sobre la lenteja. Trazamos un diagrama de sólido libre de la lenteja con todas las fuerzas *reales* que actúan sobre ella, es decir, el peso **W** y la fuerza **P** ejercida por la cuerda (Fig. 13.8*b*). (Una fuerza de inercia no es una fuerza real y *no debe* incluirse en el diagrama de sólido libre). Notamos que la fuerza **P** no realiza trabajo ya que es normal a la trayectoria; la única fuerza que realiza trabajo es el peso **W**. El trabajo de **W** se obtiene multiplicando su módulo W por el desplazamiento vertical l (Secc. 13.2); como el desplazamiento es hacia abajo, el trabajo es positivo. Por consiguiente, escribimos $U_{1\to 2} = Wl$.

Considerando ahora la energía cinética de la lenteja, encontramos que $T_1 = 0$ en A_1 y $T_2 = \frac{1}{2}(W/g)v_2^2$ en A_2. Podemos aplicar ahora el teorema de las fuerzas-vivas; recordando la fórmula (13.11), escribimos

$$T_1 + U_{1\to 2} = T_2 \qquad 0 + Wl = \frac{1}{2}\frac{W}{g}v_2^2$$

Al despejar v_2 encontramos que $v_2 = \sqrt{2gl}$, y notamos que la velocidad obtenida es la de un cuerpo que cae libremente desde una altura l.

El ejemplo que hemos considerado muestra las siguientes ventajas del método del trabajo y la energía:

1. Para encontrar la velocidad en A_2 no se necesita determinar la aceleración en una posición intermedia A ni integrar la expresión obtenida entre A_1 y A_2.
2. Todas las cantidades que intervienen son escalares y pueden sumarse directamente sin usar componentes x e y.
3. Las fuerzas que no realizan trabajo se eliminan de la solución del problema.

Pero lo que es una ventaja en un problema puede convertirse en una desventaja en otro. Es evidente, por ejemplo, que el método del trabajo y la energía no puede usarse para determinar directamente una aceleración, y notamos también que debe complementarse con la aplicación directa de la segunda ley de Newton para determinar la fuerza normal a la trayectoria de la partícula, ya que tal fuerza no realiza trabajo. Supongamos, por ejemplo, que deseamos determinar la tensión en la cuerda del péndulo de la figura 13.8*a* cuando la lenteja pasa por A_2. Trazamos un diagrama de sólido libre de la lenteja en esa posición (Fig. 13.9) y expresamos la segunda ley de Newton en términos de las componentes tangenciales y normales. Las

ecuaciones $\Sigma F_t = ma_t$ y $\Sigma F_n = ma_n$ conducen respectivamente, a que $a_t = 0$ y

$$P - W = ma_n = \frac{W}{g}\frac{v_2^2}{l}$$

Pero la velocidad de A_2 se determinó anteriormente por el método del trabajo y la energía. Sustituyendo $v_2^2 = 2gl$ y despejando P, escribimos

$$P = W + \frac{W}{g}\frac{2gl}{l} = 3W$$

Cuando en un problema intervienen dos o más partículas, cada una de ellas puede considerarse en forma separada y aplicarse el teorema de las fuerzas vivas para cada partícula. Al sumar la energía cinética de las distintas partículas y si consideramos el trabajo de todas las fuerzas que actúan sobre ellas podemos escribir también una sola ecuación del trabajo y la energía para todas las partículas que intervienen. Así pues

$$T_1 + U_{1\to 2} = T_2 \qquad (13.11)$$

donde T representa la suma aritmética de la energía cinética de la partícula del sistema (todos los términos son positivos) y $U_{1\to 2}$ el trabajo que realizan todas las fuerzas que actúan sobre las partículas, *incluyendo las fuerzas de acción y reacción ejercidas por las partículas entre sí.* Pero en los problemas que tratan de cuerpos unidos por *cuerdas inextensibles,* el trabajo de las fuerzas ejercidas por una cuerda sobre los dos cuerpos que une se anula, puesto que los puntos de aplicación de estas fuerzas recorren distancias iguales (véase problema resuelto 13.2).†

Como las fuerzas de rozamiento tienen una dirección opuesta a las de desplazamiento del cuerpo sobre el que actúan, *el trabajo que realizan las fuerzas de rozamiento es siempre negativo.* Este trabajo representa la energía disipada en calor y siempre produce una disminución en la energía cinética del cuerpo considerado (véase problema resuelto 13.3).

13.5. Potencia y rendimiento. Se define la *potencia* como la rapidez con la que se realiza un trabajo. En la selección de un motor o una máquina, la potencia es un criterio mucho más importante que el trabajo total a realizar. Un motor pequeño o una planta de potencia grande pueden usarse ambos para producir una cierta cantidad de trabajo; pero el motor pequeño puede tardar un mes en producir el trabajo que la planta grande realizaría en unos cuantos minutos. Si ΔU es el trabajo realizado durante el intervalo de tiempo Δt, entonces la potencia promedio durante este intervalo es:

$$\text{Potencia promedio} = \frac{\Delta U}{\Delta t}$$

Haciendo Δt tender a cero, obtenemos en el límite

$$\textbf{Potencia} = \frac{dU}{dt} \qquad (13.12)$$

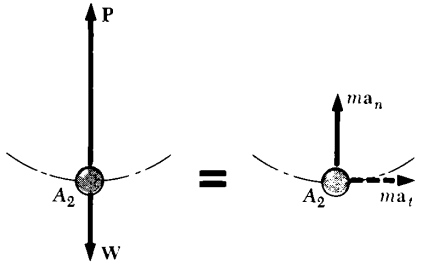


Fig. 13.9

† La aplicación del método del trabajo y la energía a un sistema de partículas se estudia en detalle en el capítulo 14.

Sustituyendo el producto escalar $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ por dU podemos también escribir

$$\text{Potencia} = \frac{dU}{dt} = \frac{\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}{dt}$$

y recordando que $d\mathbf{r}/dt$ representa la velocidad $\mathbf{v}$ del punto de aplicación de $\mathbf{F}$,

$$\textbf{Potencia} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \tag{13.13}$$

Puesto que la potencia se definió como la rapidez con la que se realiza un trabajo, debe expresarse en unidades obtenidas al dividir las unidades de trabajo entre la unidad de tiempo. Así pues, si se usan unidades del SI, la potencia debe expresarse en J/s; a esta unidad se le llama *watio* (W). Tenemos

$$1\ \text{W} = 1\ \text{J/s} = 1\ \text{N} \cdot \text{m/s}$$

Si se emplean unidades inglesas, la potencia debe expresarse en ft·lb/s o en *caballos de potencia* (hp), con esto último definido como

$$1\ \text{hp} = 550\ \text{ft} \cdot \text{lb/s}$$

Recordando de la sección 13.2 que 1 ft·lb = 1.356 J comprobamos que

$$1\ \text{ft} \cdot \text{lb/s} = 1.356\ \text{J/s} = 1.356\ \text{W}$$
$$1\ \text{hp} = 550(1.356\ \text{W}) = 746\ \text{W} = 0.746\ \text{kW}$$

El *rendimiento mecánico* de una máquina se definió en la sección 10.5 como la razón entre el trabajo producido y el trabajo absorbido

$$\eta = \frac{\text{trabajo producido}}{\text{trabajo absorbido}} \tag{13.14}$$

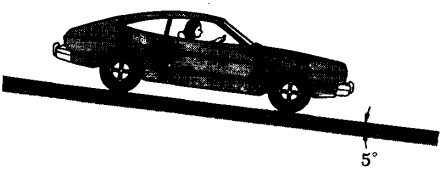
Esta definición se basa en la suposición de que el trabajo se realiza a potencia constante. La razón entre el trabajo producido y el absorbido es por lo tanto igual a la relación entre la potencia producida y la potencia absorbida

$$\eta = \frac{\textbf{potencia producida}}{\textbf{potencia absorbida}} \tag{13.15}$$

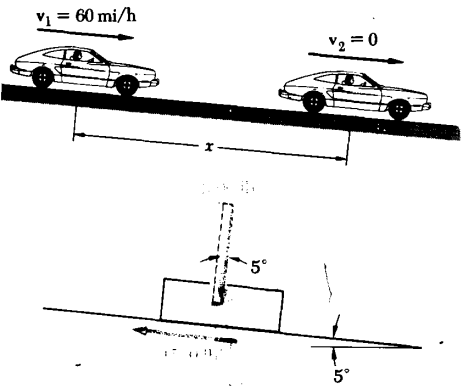
Como se pierde energía por causa del rozamiento, el trabajo producido es siempre menor que el absorbido y por consiguiente la potencia producida es siempre menor que la potencia absorbida. El rendimiento mecánico de una máquina es por lo tanto siempre menor que 1.

Cuando se usa una máquina para transformar la energía mecánica en energía eléctrica, o energía térmica en energía mecánica, su *rendimiento total* puede obtenerse de la fórmula (13.15). El rendimiento total de una máquina es siempre menor que 1 e indica cuantitativamente todas las pérdidas de energía producidas (pérdidas de energía térmica o eléctrica, así como pérdidas por rozamiento). Antes de usar la fórmula (13.15) debemos expresar la potencia producida y la absorbida en las mismas unidades.

PROBLEMA RESUELTO 13.1



Un automóvil que pesa 4 000 lb desciende por una cuesta de 5° de inclinación con una velocidad de 60 mi/h cuando se aplican los frenos, de modo que la fuerza total de frenado es constante (aplicada por la carretera sobre los neumáticos) y de 1 500 lb. Determínese la distancia recorrida por el automóvil antes de pararse.



Solución. *Energía cinética*

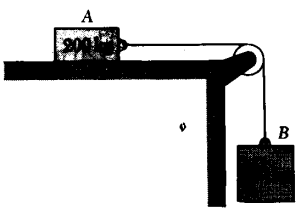
Posición 1:
$$v_1 = \left(60\frac{\text{mi}}{\text{h}}\right)\left(\frac{5280\text{ ft}}{1\text{ mi}}\right)\left(\frac{1\text{ h}}{3600\text{ s}}\right) = 88\text{ ft/s}$$
$$T_1 = \tfrac{1}{2}mv_1^2 = \tfrac{1}{2}(4000/32.2)(88)^2 = 481\,000\text{ ft·lb}$$

Posición 2:
$$v_2 = 0 \qquad T_2 = 0$$

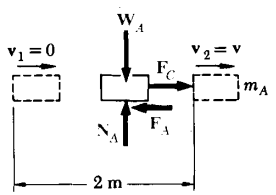
Trabajo
$$U_{1\to 2} = -1500x + (4000\,\text{sen}\,5°)x = -1151x$$

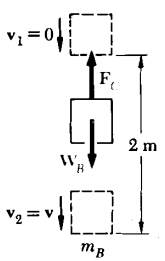
Teorema de las fuerzas vivas
$$T_1 + U_{1\to 2} = T_2$$
$$481{,}000 - 1151x = 0 \qquad x = 418\text{ ft} \blacktriangleleft$$

PROBLEMA RESUELTO 13.2



Dos bloques están unidos por un cable inextensible como se indica en la figura. Si el sistema se suelta del reposo, determínese la velocidad del bloque A después de recorrer 2 m. Supóngase que el coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque A y el plano es $\mu_k = 0.25$ y que la polea no tiene masa ni rozamiento.





Solución. *Trabajo y energía para el bloque A.* Sea $\mathbf{F}_A$ la fuerza de rozamiento, $\mathbf{F}_C$ la fuerza ejercida por el cable y escribimos

$$m_A = 200\text{ kg} \qquad W_A = (200\text{ kg})(9.81\text{ m/s}^2) = 1962\text{ N}$$
$$F_A = \mu_k N_A = \mu_k W_A = 0.25(1962\text{ N}) = 490\text{ N}$$

$T_1 + U_{1\to 2} = T_2$:
$$0 + F_C(2\text{ m}) - F_A(2\text{ m}) = \tfrac{1}{2}m_A v^2$$
$$F_C(2\text{ m}) - (490\text{ N})(2\text{ m}) = \tfrac{1}{2}(200\text{ kg})v^2 \qquad (1)$$

Trabajo y energía para el bloque B. Escribimos

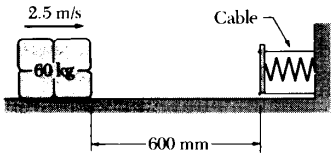
$$m_B = 300\text{ kg} \qquad W_B = (300\text{ kg})(9.81\text{ m/s}^2) = 2940\text{ N}$$

$T_1 + U_{1\to 2} = T_2$:
$$0 + W_B(2\text{ m}) - F_C(2\text{ m}) = \tfrac{1}{2}m_B v^2$$
$$(2940\text{ N})(2\text{ m}) - F_C(2\text{ m}) = \tfrac{1}{2}(300\text{ kg})v^2 \qquad (2)$$

Sumando los miembros izquierdo y derecho de (1) y (2), observamos que el trabajo de las fuerzas ejercidas por el cable en A y B se cancela:

$$(2940\text{ N})(2\text{ m}) - (490\text{ N})(2\text{ m}) = \tfrac{1}{2}(200\text{ kg} + 300\text{ kg})v^2$$
$$4900\text{ J} = \tfrac{1}{2}(500\text{ kg})v^2 \qquad v = 4.43\text{ m/s} \blacktriangleleft$$

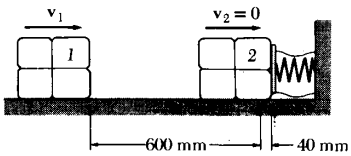
PROBLEMA RESUELTO 13.3



Se emplea un resorte para detener un paquete de 60 kg que está resbalando sobre una superficie horizontal. El resorte tiene una constante $k = 20$ kN/m y está sostenido por cables de manera que inicialmente está comprimido 120 mm. Si el paquete tiene una velocidad de 2.5 m/s en la posición mostrada y la compresión máxima adicional del resorte es 40 mm, determínense: *a*) el coeficiente de rozamiento cinético entre el paquete y la superficie, y *b*) la velocidad del paquete al pasar otra vez por la posición mostrada.

a) **Movimiento de la *posición 1* a la *posición 2***

Energía cinética. *Posición 1:* $v_1 = 2.5$ m/s



$$T_1 = \tfrac{1}{2}mv_1^2 = \tfrac{1}{2}(60\text{ kg})(2.5\text{ m/s})^2 = 187.5\text{ N}\cdot\text{m} = 187.5\text{ J}$$

Posición 2 (la deformación máxima del resorte): $v_2 = 0$ $\quad T_2 = 0$

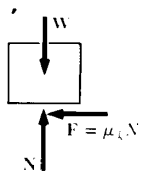
Trabajo

La fuerza **F** *de rozamiento.* Tenemos

$$F = \mu_k N = \mu_k W = \mu_k mg = \mu_k(60\text{ kg})(9.81\text{ m/s}^2) = 588.6\,\mu_k$$

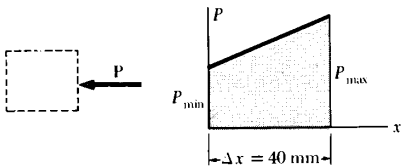
El trabajo de **F** es negativo e igual a

$$(U_{1\to 2})_f = -Fx = -(588.6\,\mu_k)(0.600\text{ m} + 0.040\text{ m}) = -377\,\mu_k$$



La fuerza **P** *del resorte.* La fuerza variable **P** ejercida por el resorte hace una cantidad de trabajo negativo igual al área bajo la curva de deformación-fuerza de la fuerza del resorte. Tenemos

$$P_{\text{mín}} = kx_0 = (20\text{ kN/m})(120\text{ mm}) = (20\,000\text{ N/m})(0.120\text{ m}) = 2400\text{ N}$$
$$P_{\text{máx}} = P_{\text{mín}} + k\,\Delta x = 2400\text{ N} + (20\text{ kN/m})(40\text{ mm}) = 3200\text{ N}$$
$$(U_{1\to 2})_e = -\tfrac{1}{2}(P_{\text{mín}} + P_{\text{máx}})\,\Delta x = -\tfrac{1}{2}(2400\text{ N} + 3200\text{ N})(0.040\text{ m}) = -112.0\text{ J}$$



Entonces el trabajo total es

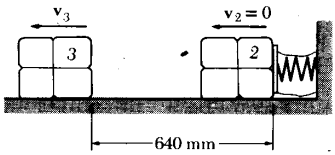
$$U_{1\to 2} = (U_{1\to 2})_f + (U_{1\to 2})_e = -377\,\mu_k - 112.0\text{ J}$$

Teorema de las fuerzas vivas

$$T_1 + U_{1\to 2} = T_2: \qquad 187.5\text{ J} - 377\,\mu_k - 112.0\text{ J} = 0 \qquad \mu_k = 0.20$$

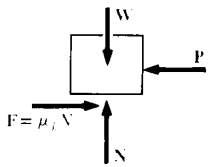
b) **Movimiento de la posición 2 a la posición 3**

Energía cinética. *Posición 2:* $v_2 = 0$ $\quad T_2 = 0$



Posición 3: $\quad T_3 = \tfrac{1}{2}mv_3^2 = \tfrac{1}{2}(60\text{ kg})v_3^2$

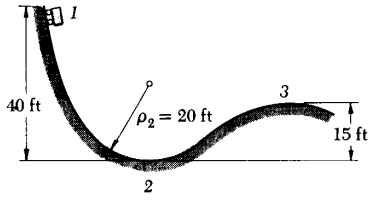
Trabajo. Como las distancias consideradas son las mismas, el valor numérico del trabajo realizado por la fuerza de rozamiento **F** y de la fuerza del resorte **P** son las mismas que arriba. Pero como el trabajo de **F** sigue siendo negativo, el trabajo de **P** es ahora positivo.



$$U_{2\to 3} = -377\mu_k + 112.0\text{ J} = -75.5\text{ J} + 112.0\text{ J} = +36.5\text{ J}$$

Teorema de las fuerzas vivas

$$T_2 + U_{2\to 3} = T_3: \qquad 0 + 36.5\text{ J} = \tfrac{1}{2}(60\text{ kg})v_3^2$$
$$v_3 = 1.103\text{ m/s} \quad v_3 = 1.103\text{ m/s} \leftarrow$$



PROBLEMA RESUELTO 13.4

Un vehículo de 2 000 lb parte del reposo en el punto *1* y se mueve sin rozamiento hacia abajo de la pista mostrada. *a*) Determínese la fuerza ejercida por el pavimento sobre el vehículo en el punto *2*, donde el radio de curvatura de ésta es 20 ft. *b*) Determínese el valor mínimo del radio de curvatura en el punto *3*, para que el vehículo permanezca en contacto con el pavimento.

a) **La fuerza ejercida por la pista en el punto 2.** El teorema de las fuerzas vivas se emplea para determinar la velocidad del vehículo al pasar por el punto *2*.

Energía cinética: $T_1 = 0 \qquad T_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}\frac{W}{g}v_2^2$

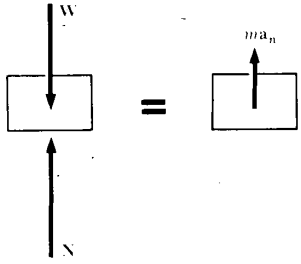
Trabajo. La única fuerza que realiza trabajo es el peso **W**. Puesto que el desplazamiento vertical del punto *1* al punto *2* es 40 ft hacia abajo, el trabajo del peso es

$$U_{1\to 2} = +W(40\text{ ft})$$

El teorema de las fuerzas vivas

$$T_1 + U_{1\to 2} = T_2 \qquad 0 + W(40\text{ ft}) = \frac{1}{2}\frac{W}{g}v_2^2$$

$$v_2^2 = 80g = 80(32.2) \qquad v_2 = 50.8\text{ ft/s}$$



Segunda ley de Newton en el punto 2. La aceleración $\mathbf{a}_n$ del vehículo en el punto *2* tiene módulo $a_n = v_2^2/\rho$ y apunta hacia arriba. Como las fuerzas exteriores que actúan sobre el vehículo son **W** y **N**, escribimos

$$+\uparrow\Sigma F_n = ma_n: \qquad -W + N = ma_n$$

$$= \frac{W}{g}\frac{v_2^2}{\rho}$$

$$= \frac{W}{g}\frac{80g}{20}$$

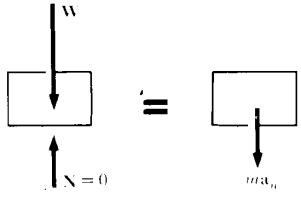
$$N = 5W \qquad N = 10{,}000\text{ lb} \uparrow$$

b) **Valor mínimo de ρ en el punto 3.** *El teorema de la fuerzas vivas* Aplicando el teorema de las fuerzas vivas entre los puntos *1* y *3*, obtenemos

$$T_1 + U_{1\to 3} = T_3 \qquad 0 + W(25\text{ ft}) = \frac{1}{2}\frac{W}{g}v_3^2$$

$$v_3^2 = 50g = 50(32.2) \qquad v_3 = 40.1\text{ ft/s}$$

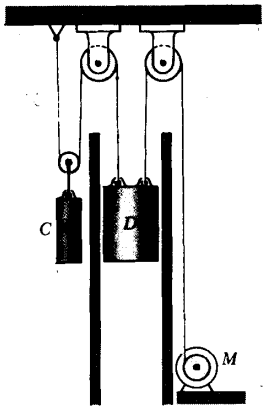
La segunda ley de Newton en el punto 3. El valor mínimo de ρ corresponde a $\mathbf{N} = 0$. En este caso la aceleración $\mathbf{a}_n$ de magnitud $a_n = v_3^2/\rho$, dirigida hacia abajo y escribimos



$$+\downarrow\Sigma F_n = ma_n: \qquad W = \frac{W}{g}\frac{v_3^2}{\rho}$$

$$= \frac{W}{g}\frac{50g}{\rho}$$

$$\rho = 50\text{ ft}$$

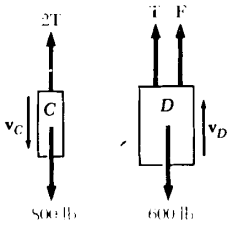


PROBLEMA RESUELTO 13.5

El montacargas D y su carga tienen un peso combinado de 600 lb, mientras que el contrapeso C pesa 800 lb. Determínese la potencia desarrollada por el motor eléctrico M cuando el montacargas *a)* se está moviendo hacia arriba con una velocidad constante de 8 ft/s, *b)* tiene una velocidad instantánea de 8 ft/s y una aceleración de 2.5 ft/s^2, ambas dirigidas hacia arriba.

Solución. Como la fuerza **F** ejercida por el cable del motor tiene la misma dirección que la velocidad $\mathbf{v}_D$ del montacargas, la potencia es igual a Fv_D, donde $v_D = 8$ ft/s. Para obtener la potencia, debemos determinar primero **F** en cada una de las dos situaciones dadas.

a) Movimiento uniforme. Tenemos $\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_D = 0$; ambos cuerpos están en equilibrio.



Cuerpo libre C: $+\uparrow\Sigma F_y = 0$: $2T - 800\text{ lb} = 0$ $\quad T = 400\text{ lb}$

Cuerpo libre D: $+\uparrow\Sigma F_y = 0$: $\quad F + T - 600\text{ lb} = 0$

$$F = 600\text{ lb} - T = 600\text{ lb} - 400\text{ lb} = 200\text{ lb}$$

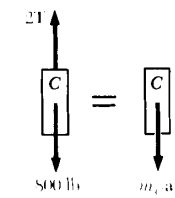
$$Fv_D = (200\text{ lb})(8\text{ ft/s}) = 1600\text{ ft}\cdot\text{lb/s}$$

$$\text{Potencia} = (1600\text{ ft}\cdot\text{lb/s})\frac{1\text{ hp}}{550\text{ ft}\cdot\text{lb/s}} = 2.91\text{ hp} \blacktriangleleft$$

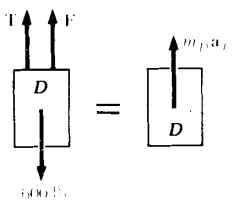
b) Movimiento acelerado. Tenemos

$$\mathbf{a}_D = 2.5\text{ ft/s}^2\uparrow \qquad \mathbf{a}_C = -\tfrac{1}{2}\mathbf{a}_D = 1.25\text{ ft/s}^2\downarrow$$

Las ecuaciones de movimiento son



Cuerpo libre C: $+\downarrow\Sigma F_y = m_C a_C$: $800 - 2T = \dfrac{800}{32.2}(1.25)$ $T = 384.5$ lb



Cuerpo libre D: $+\uparrow\Sigma F_y = m_D a_D$: $\quad F + T - 600 = \dfrac{600}{32.2}(2.5)$

$$F + 384.5 - 600 = 46.6 \qquad F = 262.1\text{ lb}$$

$$Fv_D = (262.1\text{ lb})(8\text{ ft/s}) = 2097\text{ ft}\cdot\text{lb/s}$$

$$\text{Potencia} = (2097\text{ ft}\cdot\text{lb/s})\frac{1\text{ hp}}{550\text{ ft}\cdot\text{lb/s}} = 3.81\text{ hp} \blacktriangleleft$$

Problemas

13.1 Un satélite de 100 lb se colocó en una órbita circular a 1548 mi sobre la superficie de la Tierra. A esta elevación la aceleración de la gravedad es 16.7 ft/s^2. Determínese la energía cinética del satélite si su velocidad es 15 000 mi/h.

13.2 Una pieza de 3 kg se suelta desde una altura h y pega en el suelo con una velocidad de 30 m/s. *a*) Determínese la energía cinética de la piedra al pegar en el suelo y la altura h desde la cual se soltó. *b*) Resuélvase la parte *a* suponiendo que la misma piedra se soltó en la Luna (aceleración de la gravedad en la Luna = 1.62 m/s^2).

13.3 Determínese la velocidad teórica máxima que puede alcanzar un automóvil en una distancia de 100 m partiendo del reposo, si se sabe que el coeficiente de rozamiento estático es 0.80 entre las llantas y el pavimento y que el 60% del peso del automóvil está distribuido sobre sus ruedas delanteras y el 40% sobre sus ruedas traseras. Supóngase *a*) tracción delantera, *b*) tracción trasera y *c*) tracción en las cuatro ruedas.

13.4 En una operación de mezclado de metales un cubo lleno de minerales está suspendido de una grúa viajera que se mueve con una velocidad v = 3 m/s a lo largo de un puente estacionario. Si la grúa se para repentinamente, determínese la distancia horizontal adicional a la que se moverá el cubo.

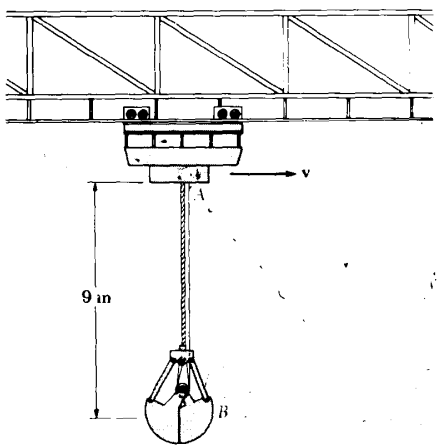


Fig. P13.4

13.5 Determínese la velocidad v con la que la grúa del problema 13.4 se estaba moviendo si los cubos que sostienen al cubo B oscilan hasta un ángulo de 16° después de que la grúa se detuvo repentinamente.

13.6 Se tiran paquetes sobre una pendiente en A con una velocidad de 4 ft/s. Los paquetes resbalan a lo largo de la superficie ABC hasta una banda transportadora que los mueve con una velocidad de 8 ft/s. Si μ_k = 0.25 entre los paquetes y la superficie ABC, determínese la distancia d si los paquetes llegan a C con una velocidad de 8 ft/s.

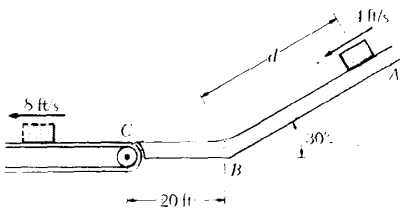


Fig. P13.6

13.7 Un paquete de 50 lb se proyecta hacia arriba en un plano inclinado de 20° con una velocidad inicial de 40 ft/s. Si el coeficiente de rozamiento cinético entre el paquete y el plano es 0.15, determínense *a*) la distancia máxima x que subirá el paquete en el plano inclinado, *b*) la velocidad del paquete al regresar a su posición inicial y *c*) la cantidad total de energía disipada por causa del rozamiento.

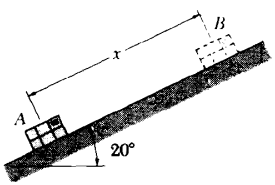


Fig. P13.7

13.8 Un remolque de 1200 kg está enganchado a un automóvil de 1400 kg; ambos se desplazan a 72 km/h cuando el conductor aplica los frenos tanto en el automóvil como en el remolque. Si las fuerzas de frenado ejercidas sobre el automóvil y el remolque son 5000 N y 4000 N, respectivamente, determínense *a*) la distancia recorrida por el auto y el remolque antes de pararse y *b*) la componente horizontal de la fuerza ejercida por el enganche del remolque sobre el automóvil.

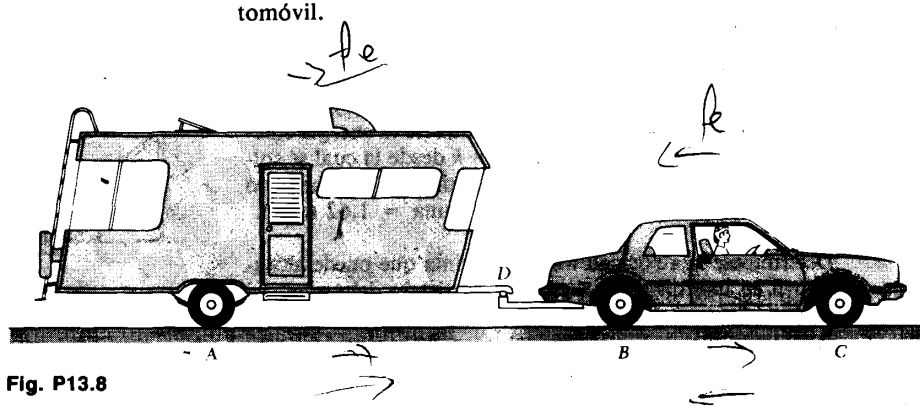


Fig. P13.8

13.9 El tren subterráneo mostrado en la figura está viajando a una velocidad de 30 mi/h cuando se aplican totalmente los frenos sobre las ruedas de los vagones *B* y *C*, provocando que deslicen sobre la vía, pero no se aplican sobre las ruedas del vagón *A*. Si el coeficiente de rozamiento cinético es de 0.35 entre las ruedas y la vía, determínense *a*) la distancia requerida para que el tren se pare y *b*) la fuerza en cada acoplamiento.

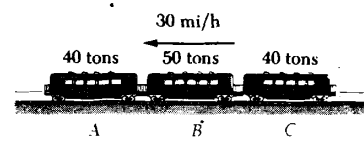


Fig. P13.9

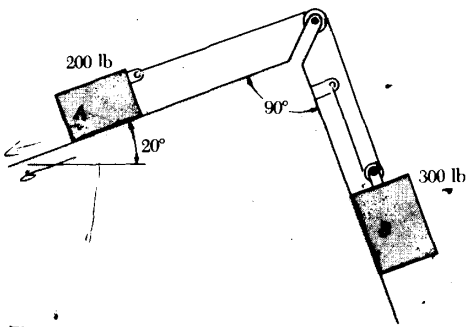


Fig. P13.12

13.10 Resuélvase el problema 13.9 suponiendo que los frenos se aplican sólo sobre las ruedas del vagón *A*.

13.11 Resuélvase el problema 13.8 suponiendo que los frenos del remolque no funcionan.

13.12 Los dos bloques que se muestran en la figura están inicialmente en reposo. Despreciando las masas de las poleas y el efecto del rozamiento en ellas y entre los bloques y los planos inclinados, determínense *a*) la velocidad del bloque después de recorrer 6 ft y *b*) la tensión en el cable.

13.13 Resuélvase el problema 12.17*c* usando el método de trabajo y la energía.

13.14 Resuélvase el problema 13.12 suponiendo que los coeficientes de rozamiento entre los bloques y los planos inclinados son $\mu_s = 0.25$ y $\mu_k = 0.20$.

13.15 El sistema mostrado está en reposo cuando se aplica una fuerza constante de 150 N al collarín *B*. *a*) Si la fuerza actúa durante todo el movimiento, determínese la velocidad del collarín *B* al golpear al soporte *C*. *b*) ¿Después de qué distancia *d* se deberá eliminar la fuerza de 150 N si el collarín debe llegar al soporte *C* con velocidad cero?

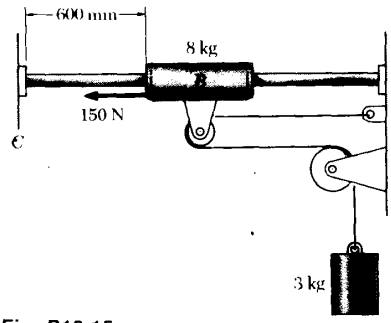


Fig. P13.15

13.16 Sabiendo que el sistema mostrado parte del reposo, determínese *a*) la velocidad del collarín *A* después de que se ha movido 400 mm, *b*) la velocidad correspondiente del collarín *B* y *c*) la tensión en el cable. Despréciense las masas de las poleas y el efecto del rozamiento.

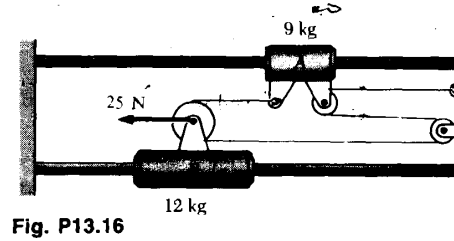


Fig. P13.16

13.17 Dos bloques *A* y *B* de masas 8 kg y 12 kg, respectivamente, cuelgan de un cable que pasa sobre una polea de masa despreciable. Si los bloques se sueltan desde el reposo y la energía disipada por causa del rozamiento es 10 J, determínense *a*) la velocidad del bloque *B* cuando pega en el suelo y *b*) la fuerza ejercida por el cable en cada uno de los dos bloques durante el movimiento.

13.18 Dos bloques *A* y *B* de masas 12 kg y 15 kg, respectivamente, penden de un cable que pasa sobre una polea de masa despreciable. Los bloques se sueltan desde el reposo en las posiciones mostradas y se observa que el bloque *B* pega en el suelo con una velocidad de 1.4 m/s. Determínense *a*) la energía disipada por causa del rozamiento en el árbol de la polea y *b*) la fuerza ejercida por el cable sobre cada uno de los dos bloques durante el movimiento.

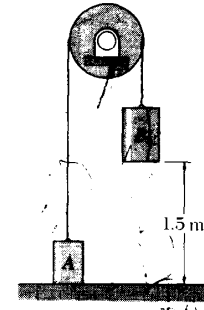


Fig. P13.17 y P13.18

13.19 Dos bloques *A* y *D* que pesan, respectivamente, 100 lb y 250 lb están unidos a una cuerda que pasa sobre dos tubos *B* y *C* fijos en la forma indicada. Se observa que, cuando el sistema se suelta desde el reposo, el bloque *A* adquiere una velocidad de 6 ft/s después de moverse 3 ft hacia arriba. Determínense *a*) la fuerza ejercida por la cuerda en cada uno de los dos bloques durante el movimiento, *b*) el coeficiente de rozamiento cinético entre las cuerdas y los tubos y *c*) la energía disipada por causa del rozamiento.

13.20 Dos bloques *A* y *D* unidos a una cuerda que pasa sobre dos tubos fijos *B* y *C* como se muestra en la figura. Los coeficientes de rozamiento entre los tubos y la cuerda son $\mu_s = 0.30$ y $\mu_k = 0.25$. Si las masas de los bloques *A* y *D* son, respectivamente, 20 kg y 55 kg y el sistema se suelta desde el reposo determínense *a*) la velocidad de *A* después de recorrer 1.5 m hacia arriba, *b*) la fuerza ejercida por la cuerda sobre cada uno de los bloques durante el movimiento y *c*) la energía disipada por causa del rozamiento.

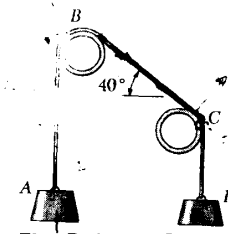


Fig. P13.19 y P13.20

13.21 Dos bloques A y B, que pesan 9 lb y 10 lb, respectivamente se conectan por una cuerda que pasa sobre poleas como se indica. El collarín C está colocado sobre el bloque A y el sistema se suelta desde el reposo; después de que los bloques se han movido 3 ft el collarín C es removido y los bloques continúan su movimiento. Si el collarín C pesa 5 lb, determínese la velocidad del bloque A justo antes de que golpee el suelo.

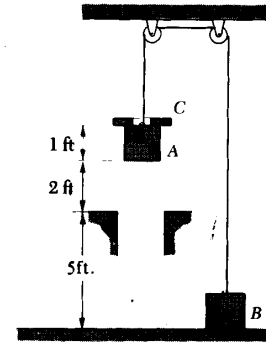


Fig. P13.21

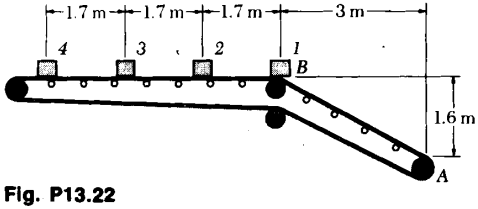


Fig. P13.22

13.22 Cuatro paquetes, cada uno de 15 kg de masa, se colocan en la forma indicada sobre una banda transportadora que está desconectada de su motor impulsor. El paquete 1 se encuentra a la derecha de la porción horizontal de la barra. Si el sistema se suelta, desde el reposo, determínense las velocidades de los paquetes 1 y 2 conforme caen de la banda en el punto A. Supóngase que la masa de la banda y de los rodillos es despreciable frente a la masa de los paquetes.

13.23 Si se sabe que el paquete 2 del problema 13.22 tiene una velocidad de 4.72 m/s al caerse de la banda, determínense las velocidades de los paquetes 3 y 4 cuando caen de la banda en el punto A.

13.24 Se han puesto ángulos de tope a una banda transportadora en intervalos iguales de $d = 300$ mm. Se colocan cuatro paquetes, cada uno de 4 kg de masa, como se indica, sobre la banda que está en reposo. Si se le aplica a la banda una fuerza constante **P** de magnitud 60 N, determínense las velocidades de los paquetes 1 y 2 conforme caen de la banda en el punto A. Supóngase que la masa de la banda y las poleas es despreciable frente a la masa de los paquetes.

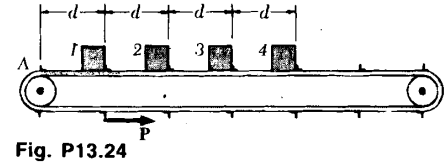


Fig. P13.24

13.25 Si se sabe que el paquete 2 del problema 13.24 tiene una velocidad de 2.29 m/s cuando cae de la banda, determínense las velocidades de los paquetes 3 y 4 al caer de la banda en el punto A.

13.26 En el problema 13.21, determínese el mínimo peso del collarín C para el cual el bloque A alcanzará llegar al suelo.

13.27 Un bloque de 6 lb está unido a un cable y a un resorte en la forma indicada. La constante del resorte es $k = 8$ lb/in y la tensión del cable es de 3 lb. Si se corta el cable, determínense *a*) el máximo desplazamiento del bloque y *b*) su máxima velocidad.

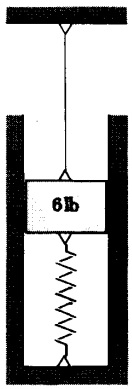


Fig. P13.27

13.28 Un émbolo de 8 kg se suelta desde el reposo en la posición mostrada y es frenado por dos resortes concéntricos; la constante del resorte exterior es $k_1 = 3$ kN/m y la constante del resorte interior es $k_2 = 10$ kN/m, si se observa que la máxima deformación del resorte exterior es de 150 mm, determínese la altura h desde la cual se soltó el émbolo.

13.29 Un émbolo de 8 kg se suelta desde el reposo en la posición mostrada y es frenado por dos resortes concéntricos; la constante del resorte exterior es $k_1 =$ kN/m y la constante del resorte interior es $k_2 = 10$ kN/m. Si el émbolo se suelta desde una altura $h =$ 600 mm, determínese la deformación máxima del resorte exterior.

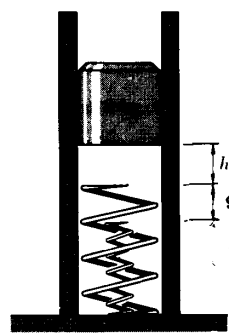


Fig. P13.28 y P13.29

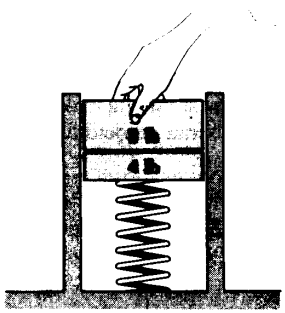


Fig. P13.30

13.30 Un bloque de 4 lb está en reposo sobre un resorte de constante 2 lb/in. Se le pone encima al bloque de 4 lb otro de 8 lb de manera que lo toque justamente y luego se suelta. Determínense *a*) la velocidad máxima alcanzada por los bloques y *b*) la fuerza máxima ejercida por los bloques sobre el resorte.

13.31 Dos tipos de parachoques amortiguadores, diseñados para un muelle, se cargan estáticamente. La curva fuerza-deformación de cada parachoques está dada por la gráfica. Determínese la deformación máxima de cada parachoques cuando un barco de 90 ton que se mueve a 1 mi/h golpea el parachoques y queda en reposo.

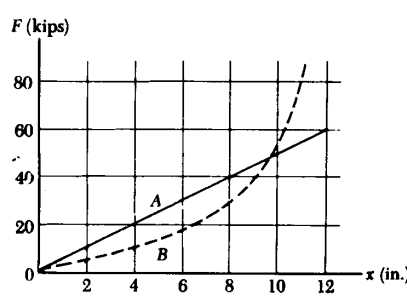


Fig. P13.31

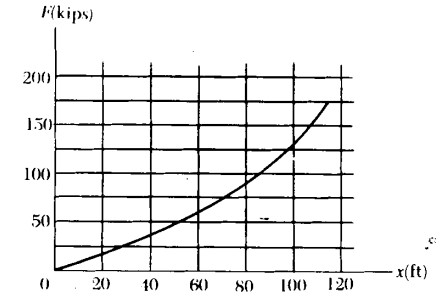


Fig. P13.32

13.32 Un avión de 15 000 lb aterriza en la cubierta de un portaaviones y es detenido por un cable que se caracteriza por el diagrama fuerza-deformación que se muestra. Si la velocidad de aterrizaje es de 90 mi/h, determínense *a*) la distancia necesaria para que el avión se detenga y *b*) la deceleración máxima del avión.

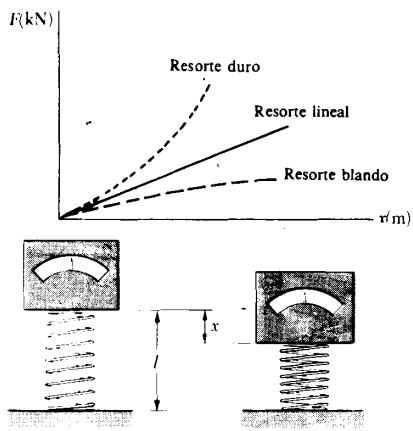


Fig. P13.33

13.33 Los resortes no lineales se clasifican en duros y blandos, dependiendo de la curvatura de sus curvas fuerza-deformación (véase figura). Si un instrumento delicado que tiene una masa de 5 kg se coloca sobre un resorte de longitud l de manera que su base toque apenas el resorte sin deformarlo, y entonces, inadvertidamente, se suelta desde esa posición, determínense la deformación máxima x_m del resorte y la fuerza máxima F_m ejercida por el resorte, suponiendo *a*) una constante de resorte lineal $k = 3$ kN/m, *b*) un resorte no lineal duro para el cual $F = (3\text{kN/m})x(1 + 160x^2)$.

13.34 Resuélvase el problema 13.33 suponiendo que en la parte *b*) el resorte duro ha sido sustituido por un resorte no lineal blando, para el cual $F = (3\text{kN/m})x(1 - 160x^2)$.

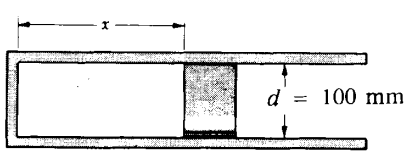


Fig. P13.35

13.35 Un émbolo de 100 mm de diámetro y masa de 4 kg resbala sin rozamiento en un cilindro. La presión P dentro del cilindro varía en razón inversa al volumen del cilindro y es igual a la presión atmosférica $p_a = 101.3$ kPa cuando $x = 250$ mm. Si el pistón se mueve hacia la izquierda y se suelta sin velocidad cuando $x = 120$ mm, determínese la máxima velocidad alcanzada por el pistón en el movimiento subsecuente.

13.36 En el problema 13.35 determínese el valor máximo de la coordenada x después de que el émbolo ha sido soltado sin velocidad en la posición $x = 120$ mm.

13.37 Se dispara una bala hacia arriba, desde la superficie de la Luna con una velocidad inicial de 600 m/s. Determínese la elevación máxima alcanzada por la bala *a*) suponiendo un campo gravitatorio uniforme $g = 1.62$ m/s^2 y *b*) usando la ley de gravitación de Newton. (Radio de la Luna = 1740 km.)

13.38 Determínese la velocidad máxima con la que un objeto que se suelta desde una distancia muy grande pegará en la superficie *a*) de la Tierra y *b*) de la Luna. Despréciese el efecto de la atmósfera de la Tierra. (El radio de la Luna es 1740 km y su masa es 0.01230 veces la masa de la Tierra.)

13.39 Un cohete es disparado verticalmente desde el suelo. Si al consumirse el combustible el cohete se encuentra a 60 mi del suelo y tiene una velocidad de 16 000 ft/s, determínese la altitud máxima que alcanzará.

13.40 Un cohete es disparado verticalmente desde el suelo, ¿Cuál debe ser la velocidad v_B al agotarse el combustible, 60 mi arriba del suelo para que alcance una altitud de 900 mi?

13.41 La esfera C y el bloque A se están moviendo hacia la izquierda con una velocidad v_0 cuando el bloque es frenado repentinamente por la pared. Determínese la mínima velocidad v_0 para la cual la esfera C oscilará en un círculo completo alrededor del pivote B *a*) si BC es una barra delgada de masa despreciable y *b*) si BC es una cuerda.

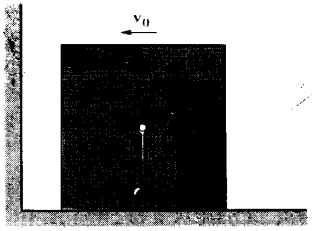


Fig. P13.41

13.42 Una bolsa se empuja suavemente desde lo alto de una pared en A y oscila en un plano vertical en el extremo de cuerda de longitud l, determínese el ángulo θ para el cual la cuerda se romperá sabiendo que puede soportar una tensión máxima del doble del peso de la bolsa.

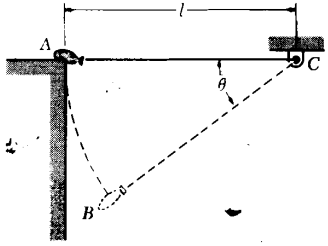


Fig. P13.42

13.43 Un carro de montaña rusa parte del reposo en A y desliza hacia abajo en la vía mostrada. Suponiendo que no hay pérdidas de energía y sabiendo que el radio de curvatura de la vía en B es 50 ft, determínese el peso aparente de un pasajero de 150 lb en B.

13.44 Un carro de montaña rusa se suelta sin velocidad en A y desliza sobre la vía mostrada. Se aplican repentinamente los frenos cuando el carro pasa por el punto B, provocando que las ruedas del carro resbalen sobre la vía ($\mu_k = 0.25$). Suponiendo que no hay pérdida de energía entre A y B y sabiendo que el radio de curvatura de la vía en B es 50 ft, determínense las componentes normal y tangencial de la aceleración del carro justo después de que se hayan aplicado los frenos.

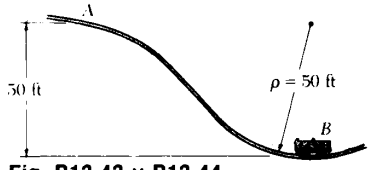


Fig. P13.43 y P13.44

13.45 Un bloque pequeño desliza con velocidad v_0 sobre la superficie horizontal AB. Despreciando el rozamiento y sabiendo que $v_0 = 0.5\sqrt{gr}$, exprese en términos de r *a*) la altura h del punto C donde el bloque dejará la superficie cilíndrica BD y *b*) la distancia d entre el punto B y el punto E donde pegará en el suelo.

13.46 Para el bloque del problema 13.45 y si $r = 800$ mm, determínense *a*) el valor más pequeño de v_0 para el cual el bloque se separa de la superficie ABD en el punto B y el valor correspondiente de d y *b*) los valores más pequeños posibles de h y d (cuando v_0 tiende a cero).

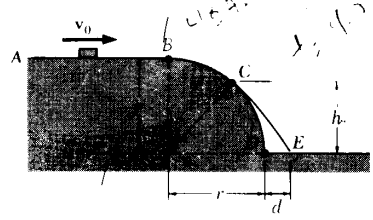


Fig. P13.45

13.47 Una bala de 18 g sale del cañón de un rifle 2 ms después de haber sido disparada. Si la velocidad de la bala es 750 m/s y se desprecia el rozamiento, determínese la potencia promedio desarrollada por el rifle, suponiendo que éste no se mueve.

13.48 Un hombre de 70 kg sube corriendo una escalera de 5 m de altura en 6 s. *a*) ¿Cuál es la potencia promedio desarrollada por el hombre? *b*) Si una mujer de 55 kg puede desarrollar el 80% de esa potencia, ¿cuánto tiempo tardará en subir corriendo una escalera de 4 m de altura?

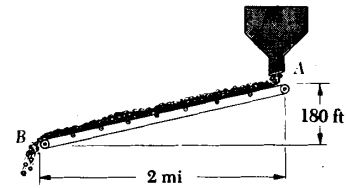


Fig. P13.49

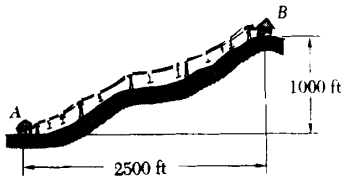


Fig. P13.50

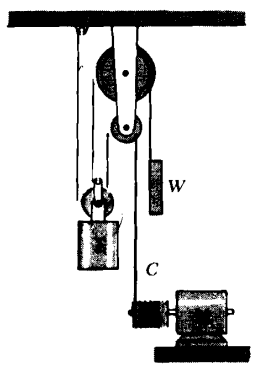


Fig. P13.53

13.49 Se acarrea piedra triturada desde una excavación en *A* hasta un muelle de carga en *B* a razón de 600 ton/h. Se une al sistema un generador eléctrico para mantener una velocidad constante de la banda. Si el rendimiento del generador-banda es 0.65, determínese la potencia promedio en kW desarrollada por el generador si la velocidad de la banda es *a*) 5 ft/s y *b*) 12 ft/s.

13.50 Un ascensor de sillas está diseñado para transportar 900 esquiadores por hora desde la base *A* a la cima *B*. El peso promedio de un esquiador es de 160 lb y la velocidad promedio del ascensor es de 250 ft/min. Determínense *a*) la potencia promedio requerida y *b*) la capacidad requerida del motor si el rendimiento mecánico es del 85% y se debe permitir un 300% de sobrecarga.

13.51 Un tren de masa total igual a 500 mg parte del reposo y acelera uniformemente hasta 90 km/h en 50 s. Después de alcanzar esa velocidad, el tren viaja con velocidad constante. La vía es horizontal y el rozamiento en los ejes y la resistencia al rodamiento producen una fuerza total de 15 kN en una dirección opuesta a la dirección del movimiento. Determínese la potencia requerida en función del tiempo.

13.52 Resuélvase el problema 13.51 suponiendo que durante todo el movimiento el tren está subiendo una cuesta de 1.5%.

13.53 El ascensor *E* pesa 5000 lb cuando está completamente cargado y se conecta a un contrapeso *W* de 2200 lb. Determínese la potencia desarrollada por el motor eléctrico cuando el *a*) se mueve hacia arriba con una velocidad constante de 15 ft/s y *b*) tiene una velocidad instantánea de 15 ft/s y una aceleración de 3 ft/s^2 ambas dirigidas hacia arriba.

13.54 Para el sistema de montacargas del problema resuelto 13.5, se sabe que la potencia desarrollada por el motor es 3 hp en el instante en que la velocidad del montacargas es 6 ft/s hacia arriba. Determínese la aceleración del montacargas en ese instante.

13.55 La transmisión hidráulica de un camión de 15 Mg le permite a su motor desarrollar una potencia esencialmente constante de 50 kW en las ruedas motrices. Determínese el tiempo requerido y la distancia recorrida conforme la velocidad del camión aumenta *a*) de 36 km/h a 54 km/h y *b*) de 54 km/h a 72 km/h.

13.56 Se sabe que la resistencia por rozamiento de un barco es proporcional a la potencia 1,75 de la velocidad v del barco. Un solo remolcador a toda máquina puede remolcar el barco a una velocidad constante de 4.5 km/h ejerciendo una fuerza constante de 300 kN. Determínese *a*) la potencia desarrollada por el remolcador y *b*) la velocidad máxima a la que dos remolcadores capaces de producir la misma potencia pueden remolcar el barco.

13.6. Energía potencial. † Consideremos otra vez a un cuerpo de peso **W** que se mueve a lo largo de una trayectoria curva, desde un punto A_1 de altura y_1 hasta un punto A_2 de altura y_2 (Fig. 13.4). De la sección 13.2 recordamos que el trabajo **W** realizado por la fuerza de gravedad durante este desplazamiento es

$$U_{1\to 2} = Wy_1 - Wy_2 \tag{13.4}$$

El trabajo de **W** puede entonces obtenerse restando el valor de la función Wy correspondiente a la segunda posición del cuerpo de su valor correspondiente a la primera posición. El trabajo de **W** es independiente de la trayectoria real seguida y depende sólo de los valores inicial y final de la función Wy. A esta función se la llama la *energía potencial* del cuerpo respecto de la *fuerza de gravedad* **W** y se representa por V_g.

$$U_{1\to 2} = (V_g)_1 - (V_g)_2 \qquad \text{con } V_g = Wy \tag{13.16}$$

Adviértase que si $(V_g)_2 > (V_g)_1$, es decir, *si la energía potencial aumenta* durante el desplazamiento (como es el caso considerado aquí), *el trabajo* $U_{1\to 2}$ *es negativo*. Si, por otra parte, el trabajo de **W** es positivo, la energía potencial disminuye. Por consiguiente, la energía potencial V_g del cuerpo proporciona una medida del trabajo que puede ser hecho por su peso **W**. Como en la fórmula (13.16) sólo interviene el *cambio* en energía potencial y no el valor real de V_g, puede agregarse una constante arbitraria de la expresión obtenida para V_g. En otras palabras, el nivel o dato desde el cual la altura y se mide, puede escogerse arbitrariamente. Nótese que la energía potencial se expresa en las mismas unidades que el trabajo, es decir, en joules si se usan unidades del SI y en ft·lb cuando se emplean unidades del sistema inglés.

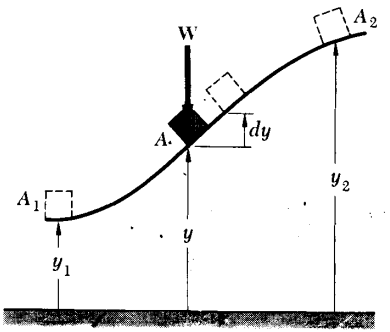


Fig. 13.4 (*repetido*)

Debe observarse que la expresión que acabamos de obtener para la energía potencial gravitatoria de un cuerpo es válida sólo mientras pueda suponerse que el peso **W** del cuerpo permanece constante, es decir, mientras que los desplazamientos del cuerpo sean pequeños comparados con el radio de la Tierra. Pero en el caso de un vehículo espacial debemos tomar en consideración la variación de la fuerza de gravedad con la distancia r desde el centro de la Tierra. Usando la expresión obtenida en la sección 13.2 para el trabajo de una fuerza gravitacional, escribimos (Fig. 13.6)

$$U_{1\to 2} = \frac{GMm}{r_2} - \frac{GMm}{r_1} \tag{13.7}$$

Por lo tanto, el trabajo de la fuerza de gravedad puede obtenerse restando el valor de la función $-GMm/r$, correspondiente a la segunda posición del cuerpo, de su valor correspondiente a la primera posición. Así pues, la expresión que debe emplearse para la energía potencial V_g, cuando la variación de la fuerza de gravedad no puede despreciarse, es

$$V_g = -\frac{GMm}{r} \tag{13.17}$$

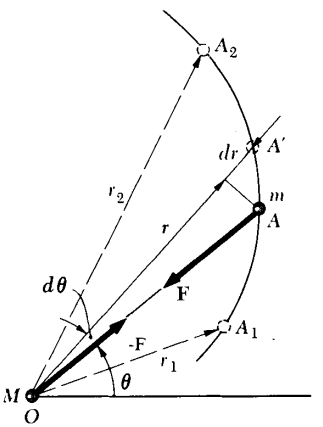


Fig. 13.6 (*repetido*)

† Parte del material de esta sección ya se consideró en la Sec. 10.7.

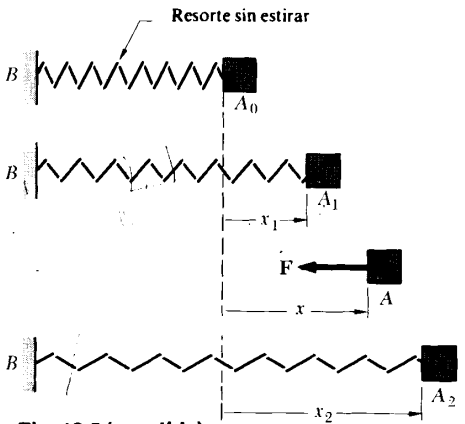


Fig. 13.5 (*repetida*)

Tomando en consideración la primera de las relaciones (12.29) escribimos V_g en la forma opcional

$$V_g = -\frac{WR^2}{r} \tag{13.17'}$$

donde R es el radio de la Tierra y W el valor del peso del cuerpo en la superficie de la Tierra. Cuando cualquiera de las relaciones (13.17) o (13.17') se emplea para expresar V_g, la distancia r debe medirse desde el centro de la Tierra,† por supuesto. Obsérvese que V_g es siempre negativa y que tiende a cero para valores muy grandes de r.

Considérese ahora un cuerpo sujeto a un resorte y que se mueve desde una posición A_1, correspondiente a una deformación x_1 del resorte, hasta una posición A_2 correspondiente a una deformación x_2 (Fig. 13.5). De la sección 13.2 recordamos que el trabajo de la fuerza **F** ejercida por el resorte sobre el cuerpo es

$$U_{1\to 2} = \tfrac{1}{2}kx_1^2 - \tfrac{1}{2}kx_2^2 \tag{13.6}$$

El trabajo de la fuerza elástica se obtiene entonces restando el valor de la función $\frac{1}{2}kx^2$, correspondiente a la segunda posición del cuerpo, de su valor correspondiente a la primera posición. Esta función se representa por V_e *y se llama la energía potencial* del cuerpo respecto de la *fuerza elástica* **F**. Escribimos

$$U_{1\to 2} = (V_e)_1 - (V_e)_2 \qquad \text{con } V_e = \tfrac{1}{2}kx^2 \tag{13.18}$$

y observamos que durante el desplazamiento considerado, el trabajo realizado por la fuerza **F** ejercido por el resorte sobre el cuerpo es negativo y aumenta la energía potencial V_e. Adviértase que la expresión obtenida para V_e es válida sólo si la deformación del resorte se mide desde su posición no deformada. Por otra parte, la fórmula (13.18) puede usarse aun cuando el resorte se gire respecto a su extremo fijo (Fig. 13.10*a*). El trabajo de la fuerza elástica depende de las deformaciones iniciales y finales del resorte (Fig. 13.10*b*).

† Las expresiones dadas para V_g en (13.17) y (13.17') sólo son válidos cuando $r \geqq R$, es decir, cuando el cuerpo considerado esté por encima de la superficie terrestre.

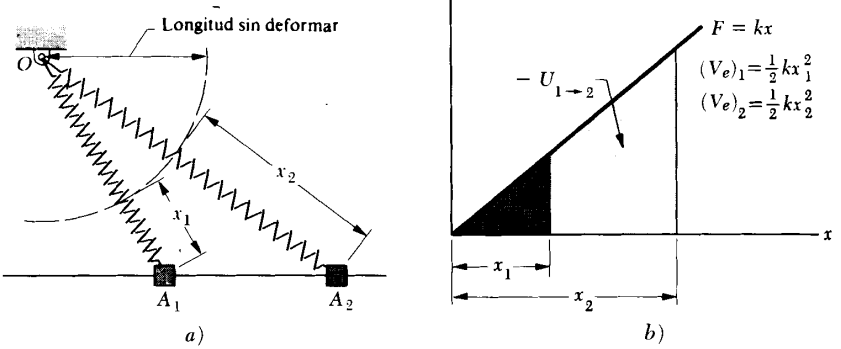


Fig. 13.10

El concepto de energía potencial puede aplicarse a fuerzas distintas a las fuerzas de gravedad o fuerzas elásticas. De hecho es aplicable siempre que el trabajo de la fuerza que se considera sea independiente de la trayectoria seguida por su punto de aplicación, conforme este punto se mueve de una posición dada A_1 hasta otra posición dada A_2. A estas fuerzas se les llama *fuerzas conservativas*, cuyas propiedades generales se estudian en la siguiente sección.

***13.7. Fuerzas conservativas.** Como se indicó en la sección anterior, se dice que de una fuerza **F** que actúa sobre una partícula A es conservativa *si su trabajo $U_{1\to 2}$ es independiente de la trayectoria seguida por la partícula A al moverse de A_1 a A_2* (Fig. 13.11*a*). Entonces podemos escribir

$$U_{1\to 2} = V(x_1, y_1, z_1) - V(x_2, y_2, z_2) \tag{13.19}$$

o, en forma breve,

$$U_{1\to 2} = V_1 - V_2 \tag{13.19'}$$

A la función $V(x, y, z)$ se le llama energía potencial o *función potencial* de **F**.

Adviértase que si A_2 se hace coincidir con A_1, esto es, si la partícula describe una trayectoria cerrada (Fig. 13.11*b*), tenemos $V_1 = V_2$ y el trabajo es cero. Así que podemos escribir para cualquier fuerza conservativa **F**

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \tag{13.20}$$

donde el círculo en el signo de la integral indica que la trayectoria es cerrada.

Apliquemos ahora (13.19) entre dos puntos próximos $A(x, y, z)$ y $A'(x + dx, y + dy, z + dz)$. El trabajo elemental dU correspondiente al desplazamiento $d\mathbf{r}$ desde A hasta A' es

$$dU = V(x, y, z) - V(x + dx, y + dy, z + dz)$$

o

$$dU = -dV(x, y, z) \tag{13.21}$$

Así pues, el trabajo elemental de una fuerza conservativa es una *diferencial exacta*.

Tomando para dU en (13.21) la expresión obtenida en (13.1″) y recordando la definición de la diferencial de una función de varias variables, escribimos

$$F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz\right)$$

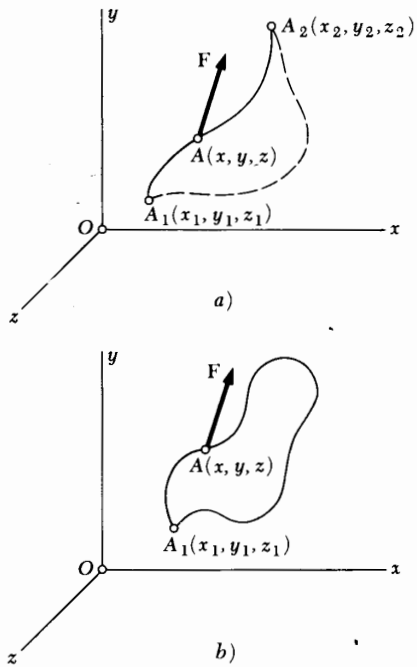


Fig. 13.11

de donde se deduce que

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \qquad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \tag{13.22}$$

Es claro que las componentes de **F** deben ser funciones de las coorde nadas x, y, z. Entonces una condición *necesaria* para que una fuerz sea conservativa es que dependa sólo de la posición de su punto d aplicación. Las relaciones (13.22) pueden expresarse más concisa mente si escribimos

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{k}\right)$$

El vector entre paréntesis se conoce como el *gradiente de la funció escalar* V y se representa por **grad** V. Así pues, para cualquier fuerz conservativa

$$\mathbf{F} = -\mathbf{grad}\ V \tag{13.2}$$

Hemos visto que las relaciones (13.19) a (13.23) se satisface para cualquier fuerza conservativa. Puede también demostrarse que una fuerza **F** satisface una de estas relaciones, **F** debe ser una fuerz conservativa.

13.8. Conservación de la energía. Vimos en las dos sec ciones anteriores que el trabajo de una fuerza conservativa puede s expresado como un cambio de energía potencial, tal como sucede con peso de una partícula o la fuerza ejercida por un resorte. Cuando un partícula se mueve bajo la acción de fuerzas conservativas, el teor ma de las fuerzas vivas establecido en la sección 13.3 puede expr sarse en una forma modificada. Sustituyendo U_{1-2} de (13.19') e (13.10), escribimos

$$V_1 - V_2 = T_2 - T_1$$

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \tag{13.2}$$

La fórmula (13.24) indica que cuando una partícula se mueve bajo la a ción de fuerzas conservativas, *la suma de la energía cinética y de energía potencial de la partícula permanece constante.* A la suma $T +$ se le llama *energía mecánica total* de la partícula y se representa por E

Consideremos por ejemplo el péndulo analizado en la sección 13. que se suelta desde el reposo desde A_1 y se le permite oscilar en u plano vertical (Fig. 13.12). Midiendo la energía potencial desde el n vel de A_2 tenemos en A_1

$$T_1 = 0 \qquad V_1 = Wl \qquad T_1 + V_1 = Wl$$

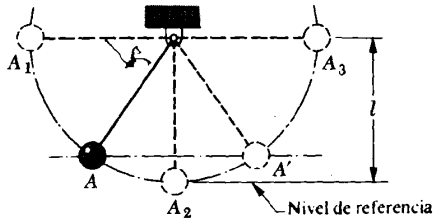


Fig. 13.12

Recordando que en A_2 la velocidad del péndulo es $v_2 = \sqrt{2gl}$, tenemos

$$T_2 = \tfrac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}\frac{W}{g}(2gl) = Wl \qquad V_2 = 0$$

$$T_2 + V_2 = Wl$$

Comprobamos así que la energía mecánica total $E = T + V$ del péndulo es la misma en A_1 y en A_2. Aunque la energía es completamente potencial en A_1 se transforma en energía completamente cinética en A_2, y conforme el péndulo permanece oscilando a la derecha la energía cinética se transforma nuevamente en energía potencial. En A_3 tendremos $T_3 = 0$ y $V_3 = Wl$.

Como la energía mecánica total del péndulo permanece constante y su energía potencial depende sólo de su elevación, la energía cinética del péndulo tendrá el mismo valor en dos puntos cualesquiera localizados al mismo nivel. Entonces la velocidad del péndulo es la misma en A y en A' (Fig. 13.12). Este resultado puede extenderse al caso de una partícula que se mueve sobre una trayectoria dada sin que dependa de la forma de la trayectoria, siempre que las únicas fuerzas que actúan sobre la partícula sean su peso y la reacción normal a la trayectoria. Por ejemplo, la partícula de la figura 13.13 que resbala en un plano vertical a lo largo de una pista sin rozamiento tendrá la misma velocidad en A, A' y A''.

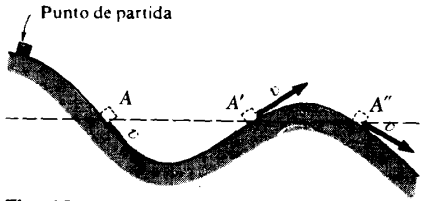


Fig. 13.13

Mientras el peso de la partícula y la fuerza ejercida por un resorte son fuerzas conservativas, las *fuerzas de rozamiento son fuerzas no conservativas*. En otras palabras, *el trabajo realizado por una fuerza de rozamiento no puede expresarse como un cambio en energía potencial*. El trabajo de una fuerza de rozamiento depende de la trayectoria seguida por sus puntos de aplicación, y mientras el trabajo $U_{1\to 2}$ definido por (13.19) es positivo o negativo de acuerdo con el sentido del movimiento, *el trabajo realizado por una fuerza de rozamiento*, como vimos en la sección 13.4, *es siempre negativo*. Se infiere que cuando un sistema mecánico presenta rozamiento, su energía mecánica total no permanece constante sino que disminuye. Sin embargo, la energía del sistema no se pierde; sólo se transforma en calor y la suma de la *energía mecánica* y la *energía térmica* del sistema permanecen constantes.

También pueden aparecer otras formas de energía en un sistema. Por ejemplo, un generador convierte energía mecánica en *energía eléctrica*; un motor de gasolina convierte *energía química* en energía mecánica; un reactor nuclear convierte *masa* en energía térmica. Si se consideran todas las formas de energía, la energía de cualquier sistema puede considerarse como una constante y el principio de la conservación de la energía permanece válido bajo cualquier condición.

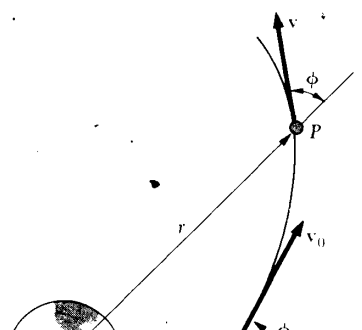


Fig. 13.14

13.9. Movimiento bajo la acción de una fuerza central conservativa. Aplicación a la mecánica celeste. Vimos en la sección 12.9 que cuando una partícula P se mueve bajo una fuerza central $\mathbf{F}$, el momento angular $\mathbf{H}_O$ de la partícula respecto del centro de fuerza O es constante. Si la fuerza $\mathbf{F}$ es también conservativa, existe una energía potencial V asociada con $\mathbf{F}$ y la energía total $E = T + V$ de la partícula es constante (Sec. 13.8). Entonces cuando una partícula se mueve bajo una fuerza central conservativa para estudiar su movimiento pueden usarse tanto el principio de la conservación del momento angular como el principio de conservación de la energía.

Considérese, por ejemplo, un vehículo espacial que se encuentra moviéndose bajo la fuerza gravitacional de la Tierra. Supondremos que comienza su vuelo libre en el punto P_0 a una distancia r_0 del centro de la Tierra, con una velocidad $\mathbf{v}_0$ que forma un ángulo ϕ_0 con el radio vector OP_0 (Fig. 13.14). Supóngase que sea P el punto de la trayectoria descrito por el vehículo; representamos por r la distancia desde O hasta P, por $\mathbf{v}$ la velocidad de la partícula en P y por ϕ el ángulo formado por $\mathbf{v}$ y el radio vector OP. Aplicando el principio de la conservación del momento angular respecto de O entre P_0 y P (Secc. 12.9), escribimos

$$r_0 m v_0 \operatorname{sen} \phi_0 = r m v \operatorname{sen} \phi \tag{13.25}$$

Recordando la expresión (13.17) obtenida para la energía potencial de una fuerza gravitacional, aplicamos el principio de la conservación de la energía entre P_0 y P y escribimos

$$T_0 + V_0 = T + V$$

$$\tfrac{1}{2} m v_0^2 - \frac{GMm}{r_0} = \tfrac{1}{2} m v^2 - \frac{GMm}{r} \tag{13.26}$$

donde M es la masa de la Tierra.

De la ecuación (13.26) puede determinarse el módulo v de la velocidad del vehículo en P cuando la distancia r de O a P se conoce; entonces puede usarse la ecuación (13.25) para determinar el ángulo ϕ que forma la velocidad con el radio vector OP.

Las ecuaciones (13.25) y (13.26) pueden usarse también para determinar los valores máximo y mínimo de r en el caso de un satélite lanzado desde P_0 en una dirección que forma un ángulo ϕ_0 con la vertical OP_0 (Fig. 13.15). Los valores deseados de r se obtienen haciendo $\phi = 90°$ en (13.25) y eliminando v entre las ecuaciones (13.25) y (13.26).

Debe hacerse notar que la aplicación de los principios de la conservación de la energía y de la conservación del momento angular conduce a una formulación más profunda de los problemas de la mecánica celeste que la que se logra con el método indicado en la sección 12.12. También su aplicación en todos los casos que incluyen lanzamientos oblicuos producirá cálculos mucho más simples y, aunque el método de la sección 12.12 puede usarse cuando la trayectoria real o el periodo orbital de un vehículo espacial deben determinarse, los cálculos se simplificarán si se usan primero los principios de conservación para determinar los valores máximo y mínimo del radio vector r.

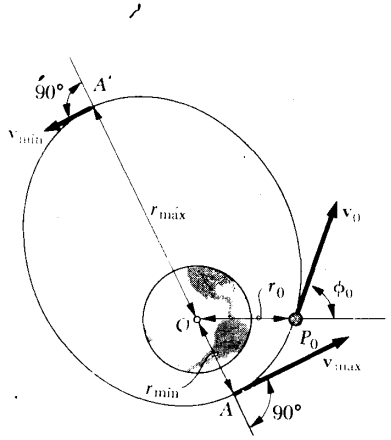
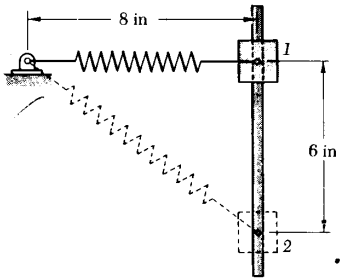
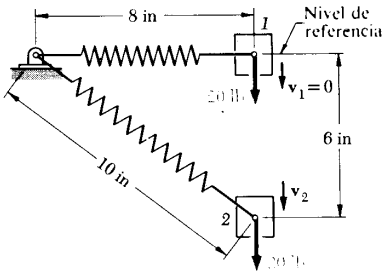


Fig. 13.15

PROBLEMA RESUELTO 13.6



Un collarín de 20 lb desliza sin rozamiento a lo largo de una barra vertical como se muestra en la figura adjunta. El resorte sin deformar unido al collarín tiene una longitud de 4 in y una constante de 3 lb/in. Si el collarín se suelta desde el reposo en la posición *1*, determínese su velocidad después de que recorrió 6 in a la posición *2*.



Posición *1*. ***Energía potencial.*** La elongación del resorte es

$$x_1 = 8 \text{ in} - 4 \text{ in} = 4 \text{ in}$$

y tenemos

$$V_e = \tfrac{1}{2}kx_1^2 = \tfrac{1}{2}(3 \text{ lb/in})(4 \text{ in})^2 = 24 \text{ in·lb}$$

Eligiendo el nivel de referencia en la forma indicada tenemos $V_g = 0$. Por consiguiente

$$V_1 = V_e + V_g = 24 \text{ in·lb} = 2 \text{ ft·lb}$$

Energía cinética. Como la velocidad en la posición *1* es cero, $T_1 = 0$.

Posición 2. ***Energía potencial.*** La elongación del resorte es

$$x_2 = 10 \text{ in} - 4 \text{ in} = 6 \text{ in}$$

y tenemos

$$V_e = \tfrac{1}{2}kx_2^2 = \tfrac{1}{2}(3 \text{ lb/in})(6 \text{ in})^2 = 54 \text{ in·lb}$$
$$V_g = Wy = (20 \text{ lb})(-6 \text{ in}) = -120 \text{ in·lb}$$

Por consiguiente,

$$V_2 = V_e + V_g = 54 - 120 = -66 \text{ in·lb} = -5.5 \text{ ft·lb}$$

Energía cinética.

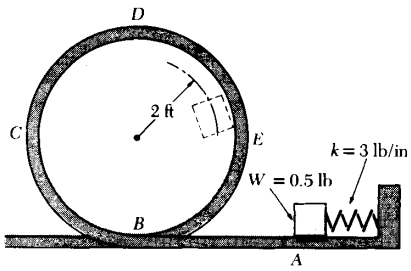
$$T_2 = \tfrac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}\frac{20}{32.2}v_2^2 = 0.311v_2^2$$

Conservación de la energía. Aplicando el principio de conservación de la energía entre las posiciones *1* y *2*, escribimos

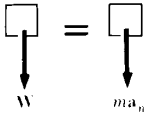
$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$
$$0 + 2 \text{ ft·lb} = 0.311v_2^2 - 5.5 \text{ ft·lb}$$
$$v_2 = \pm 4.91 \text{ ft/s}$$

$v_2 = 4.91$ ft/s ↓ ◄

PROBLEMA RESUELTO 13.7



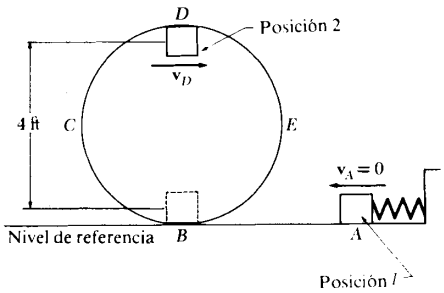
Un objeto de 0.5 lb se empuja contra el resorte en *A* y se suelta desde el repo so. Despreciando el rozamiento, determínese la deformación mínima del re sorte para la cual el objeto viajará alrededor del aro *ABCDE* y permanecerá en contacto con el aro todo el tiempo.



Velocidad necesaria en el punto *D*. Cuando el objeto pasa por el punt más alto *D*, su energía potencial con respecto a la gravedad es máxima; en tonces en el mismo punto su energía cinética y su velocidad son mínimas. Co mo el objeto debe permanecer en contacto con el aro, la fuerza **N** ejercid sobre el objeto por el aro debe ser igual o mayor que cero. Haciendo **N** = 0 calculamos la velocidad más pequeña posible v_D.

$$+\downarrow \Sigma F_n = ma_n: \qquad W = ma_n \qquad mg = ma_n \qquad a_n = g$$

$$a_n = \frac{v_D^2}{r}: \qquad v_D^2 = ra_n = rg = (2\text{ ft})(32.2\text{ ft/s}^2) = 64.4\text{ ft}^2/\text{s}^2$$



Posición *1*. Energía potencial. Representando por *x* la deformació del resorte y ya que *k* = 3 lb/in = 36 lb/ft, escribimos

$$V_e = \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}(36\text{ lb/ft})x^2 = 18x^2$$

Escogiendo el nivel de referencia en *A*, tenemos $V_g = 0$; por consiguiente

$$V_1 = V_e + V_g = 18x^2$$

Energía cinética. Como el objeto se suelta desde el reposo, $v_A = 0$ y te nemos que $T_1 = 0$.

Posición *2*. *Energía potencial.* Ahora el resorte está sin deformar, as que $V_e = 0$. Como el objeto está 4 ft arriba de la referencia, tenemos

$$V_g = Wy = (0.5\text{ lb})(4\text{ ft}) = 2\text{ ft}\cdot\text{lb}$$
$$V_2 = V_e + V_g = 2\text{ ft}\cdot\text{lb}$$

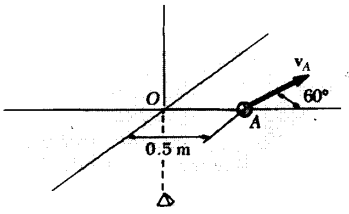
Energía cinética. Usando el valor de v_D^2 obtenido arriba, escribimos

$$T_2 = \tfrac{1}{2}mv_D^2 = \frac{1}{2}\frac{0.5\text{ lb}}{32.2\text{ ft/s}^2}(64.4\text{ ft}^2/\text{s}^2) = 0.5\text{ ft}\cdot\text{lb}$$

Conservación de la energía. Aplicando el principio de conservación d la energía entre los puntos *1* y *2*, escribimos

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$
$$0 + 18x^2 = 0.5\text{ ft}\cdot\text{lb} + 2\text{ ft}\cdot\text{lb}$$
$$x = 0.3727\text{ ft}$$

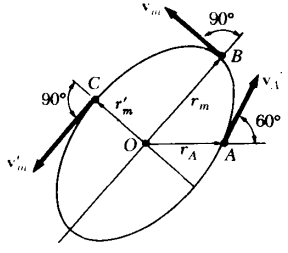
$$x = 4.47\text{ in.}$$



PROBLEMA RESUELTO 13.8

Una esfera de masa $m = 0.6$ kg está unida a una cuerda elástica de constante $k = 100$ N/m, que está sin deformar cuando la esfera se encuentra en el origen O. Si la esfera puede deslizar sin rozamiento sobre la superficie horizontal y en la posición mostrada su velocidad $\mathbf{v}_A$ tiene un módulo de 20 m/s, determínense: *a*) las distancias máxima y mínima de la esfera al origen O, y *b*) los valores correspondientes de su velocidad.

Solución. La fuerza ejercida por la cuerda sobre la esfera pasa por el punto fijo O y su trabajo puede expresarse como un cambio en energía potencial. Es por lo tanto, una fuerza central conservativa, y tanto la energía total de la esfera como su momento angular alrededor a O se conservan.



Conservación del momento angular, respecto de O. En el punto B, donde la distancia a O es máxima, la velocidad de la esfera es perpendicular a OB y el momento angular es $r_m v_m$. Una propiedad semejante se cumple en el punto C, donde la distancia a O es mínima. Expresando la conservación del momento angular entre A y B escribimos

$$\begin{aligned} r_A m v_A \operatorname{sen} 60^\circ &= r_m m v_m \\ (0.5\text{ m})(0.6\text{ kg})(20\text{ m/s})\operatorname{sen} 60^\circ &= r_m(0.6\text{ kg})v_m \\ v_m &= \frac{8.66}{r_m} \end{aligned} \tag{1}$$

Conservación de la energía

En el punto A:
$$T_A = \tfrac{1}{2}mv_A^2 = \tfrac{1}{2}(0.6\text{ kg})(20\text{ m/s})^2 = 120\text{ J}$$
$$V_A = \tfrac{1}{2}kr_A^2 = \tfrac{1}{2}(100\text{ N/m})(0.5\text{ m})^2 = 12.5\text{ J}$$

En el punto B:
$$T_B = \tfrac{1}{2}mv_m^2 = \tfrac{1}{2}(0.6\text{ kg})v_m^2 = 0.3v_m^2$$
$$V_B = \tfrac{1}{2}kr_m^2 = \tfrac{1}{2}(100\text{ N/m})r_m^2 = 50r_m^2$$

Aplicando el principio de la conservación de energía entre los puntos A y B, escribimos

$$\begin{aligned} T_A + V_A &= T_B + V_B \\ 120 + 12.5 &= 0.3v_m^2 + 50r_m^2 \end{aligned} \tag{2}$$

a) **Valores máximo y mínimo de la distancia.** Sustituyendo el valor de v_m de la ecuación (1) en la ecuación (2) y resolviendo para r_m^2, obtenemos

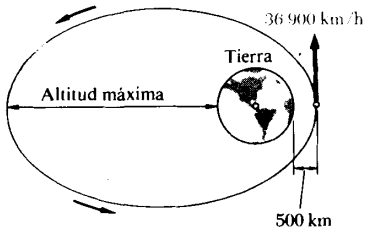
$$r_m^2 = 2.468,\text{ or } 0.1824 \qquad r_m = 1.571\text{ m},\ r'_m = 0.427\text{ m} \blacktriangleleft$$

b) **Valores correspondientes de la velocidad.** Sustituyendo los valores obtenidos para r_m y r'_m en la ecuación (1) tenemos

$$v_m = \frac{8.66}{1.571} \qquad v_m = 5.51\text{ m/s} \blacktriangleleft$$

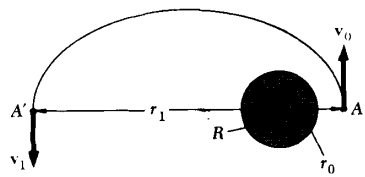
$$v'_m = \frac{8.66}{0.427} \qquad v'_m = 20.3\text{ m/s} \blacktriangleleft$$

Nota. Puede demostrarse que la trayectoria de la esfera es una elipse de centro O.



PROBLEMA RESUELTO 13.9

Un satélite es lanzado en una dirección paralela a la superficie de la Tierra con una velocidad de 36 900 km/h desde una altura de 500 km. Determínese: *a*) la altitud máxima alcanzada por el satélite, y *b*) el error máximo permitido en la dirección de lanzamiento para que el satélite entre en órbita y no se acerque más de 200 km a la superficie de la Tierra.



a) Altitud máxima. Representamos por A' el punto de la órbita más alejado de la Tierra y por r_1 a la distancia correspondiente desde el centro de la Tierra. Como el satélite está en vuelo libre entre A y A', aplicamos el principio de la conservación de la energía:

$$T_A + V_A = T_{A'} + V_{A'}$$

$$\tfrac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{r_0} = \tfrac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GMm}{r_1} \tag{1}$$

Como la única fuerza que actúa sobre el satélite es la fuerza de la gravedad, que es una fuerza central, el momento angular del satélite respecto de O se conserva. Considerando los puntos A y A', escribimos

$$r_0 m v_0 = r_1 m v_1 \qquad v_1 = v_0 \frac{r_0}{r_1} \tag{2}$$

Sustituyendo esta expresión para v_1 en la ecuación (1) y dividiendo cada término entre la masa m, obtenemos después de ordenar los términos

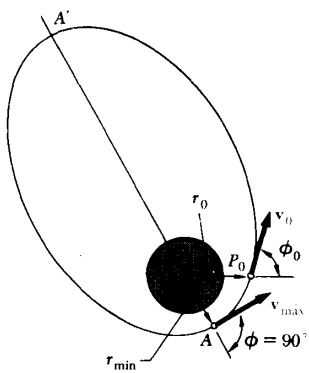
$$\tfrac{1}{2}v_0^2\left(1 - \frac{r_0^2}{r_1^2}\right) = \frac{GM}{r_0}\left(1 - \frac{r_0}{r_1}\right) \qquad 1 + \frac{r_0}{r_1} = \frac{2GM}{r_0 v_0^2} \tag{3}$$

Recordando que el radio de la Tierra es $R = 6\,370$ km, calculamos

$$r_0 = 6370 \text{ km} + 500 \text{ km} = 6870 \text{ km} = 6.87 \times 10^6 \text{ m}$$
$$v_0 = 36\,900 \text{ km/h} = (36.9 \times 10^6 \text{ m})/(3.6 \times 10^3 \text{ s}) = 10.25 \times 10^3 \text{ m/s}$$
$$GM = gR^2 = (9.81 \text{ m/s}^2)(6.37 \times 10^6 \text{ m})^2 = 398 \times 10^{12} \text{ m}^3/\text{s}^2$$

Sustituyendo estos valores en (3), obtenemos $r_1 = 66.8 \times 10^6$ m.

$$\textit{Altitud máxima} = 66.8 \times 10^6 \text{ m} - 6.37 \times 10^6 \text{ m} = 60.4 \times 10^6 \text{ m}$$
$$= 60\,400 \text{ km} \quad \blacktriangleleft$$



***b*) Margen de error en la dirección del lanzamiento.** El satélite es lanzado desde P_0 en una dirección que forma un ángulo ϕ_0 con la vertical OP_0. El valor de ϕ_0 correspondiente a $r_{min} = 6\,370$ km + 200 km = 6 570 km se obtiene aplicando el principio de la conservación de la energía y de la conservación del momento angular entre P_0 y A:

$$\tfrac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{r_0} = \tfrac{1}{2}mv_{máx}^2 - \frac{GMm}{r_{min}} \tag{4}$$

$$r_0 m v_0 \operatorname{sen} \phi_0 = r_{min} m v_{máx} \tag{5}$$

Despejando $v_{máx}$ de (5) y sustituyendo entonces este valor en (4) podemos determinar sen ϕ_0. Usando los valores de v_0 y GM calculados en la parte *a*) y notando que

$r_0/r_{min} = 6870/6570 = 1.0457$ encontramos

$\operatorname{sen} \phi_0 = 0.9801 \qquad \phi_0 = 90° \pm 11.5°$ Margen de error $= \pm 11.5°$ ◄

Problemas

13.57 Un collarín C de peso W resbala sin rozamiento sobre una barra horizontal entre los resortes A y B. Si el collarín se empuja hacia la izquierda hasta que el resorte A se comprime 4 in y se suelta, determínense la distancia que recorrerá el collarín y la velocidad máxima que alcanzará *a*) si $W = 2$ lb y *b*) si $W = 5$ lb.

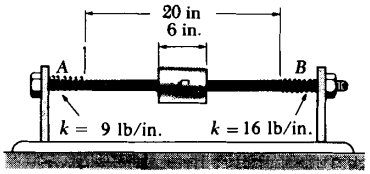


Fig. P13.57

13.58 Un collarín C de 1.2 kg puede deslizar sin rozamiento a lo largo de una barra horizontal τ está unido a tres resortes cada uno de constante $k = 400$ N/m, cuya longitud no deformada es de 150 mm. Si el collarín se suelta desde el reposo en la posición aquí mostrada, determínese la velocidad máxima que alcanzará en el movimiento.

13.59 Resuélvase el problema 13.58 suponiendo que el resorte CD ha sido eliminado.

13.60 Un collarín de 3 lb está unido a un resorte y desliza sin rozamiento a lo largo de una barra circular que descansa en un plano horizontal. El resorte tiene una constante $k = 15$ lb/in y no está deformado cuando el collarín está en B. Si el collarín pasa por el punto D con una velocidad de 6 ft/s, determínese la velocidad del collarín cuando pasa por *a*) el punto C y *b*) por el punto B.

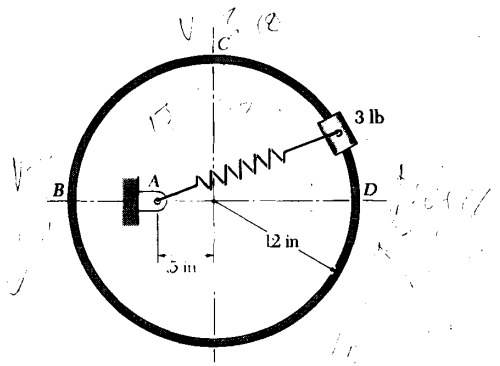


Fig. P13.60

13.61 Una cuerda elástica une los puntos A y B separados 16 in en el mismo plano horizontal. Cuando está recta, la tensión de la cuerda es de 10 lb. Entonces se tira de la cuerda en la forma indicada hasta que el punto medio C se encuentra a 6 in de C'; se requiere una fuerza de 60 lb para mantener la cuerda en C'. Se coloca una pelotita de 0.20 lb en C' y se suelta la cuerda. Determínese la velocidad de la pelotita al pasar por C.

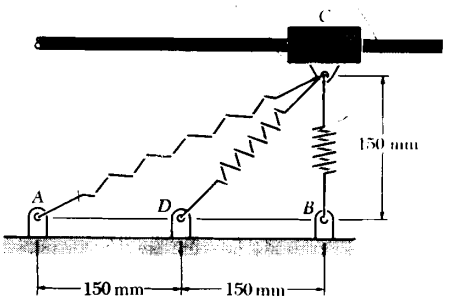


Fig. P13.58

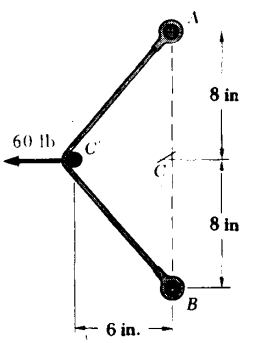


Fig. P13.61

13.62 Un collarín de 750 g puede deslizar a lo largo de la barra horizontal que se muestra. Está unido a una cuerda elástica cuya longitud sin deformación es de 300 mm y cuya constante de muelle es de 150 N/m. Sabiendo que se suelta el collarín desde el reposo en A y despreciando el rozamiento, determínese la velocidad del collarín *a*) en B y *b*) en E.

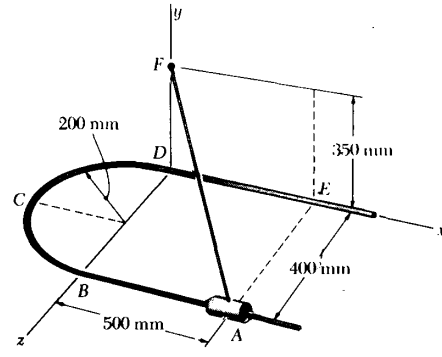


Fig. P13.62

13.63 Resuélvase el problema 13.62 suponiendo que la cuerda elástica tiene una longitud sin deformación de 450 mm y una constante de muelle de 150 N/m. Nótese que la cuerda se afloja durante parte del movimiento.

13.64 Un vagón de ferrocarril de 40 Mg parte del reposo y baja por una pendiente del 1% de inclinación una distancia de 25 m. Es parado por un parachoques que tiene una constante elástica de 3000 kN/m. *a*) ¿Cuál es la velocidad del vagón al final de la pendiente? *b*) ¿Cuántos milímetros se comprimirá el resorte?

13.65 Una pistola de juguete con resorte se emplea para disparar balas de 1 oz verticalmente hacia arriba. La longitud natural del resorte es de 6 in. Se comprime a una longitud de 1 in cuando el arma está lista para ser disparada y se expande hasta una longitud de 3 in cuando la bala sale del arma. Se requiere una fuerza de 10 lb para mantener el resorte en la posición de disparar cuando la longitud del resorte es 1 in. Determínense *a*) la velocidad de la bala al salir de la pistola y *b*) la máxima altura alcanzada por la bala.

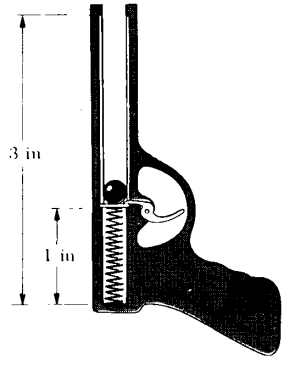


Fig. P13.65

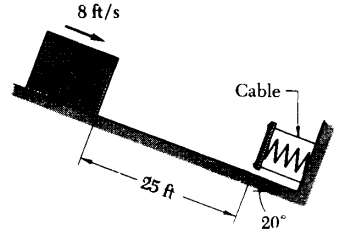


Fig. P13.66

13.66 Se emplea un resorte para parar un paquete de 200 lb que se está moviendo hacia abajo en un plano inclinado 20°. El resorte tiene una constante $k = 125$ lb/in y está sostenido por cables de manera que inicialmente está comprimido 6 in. Si la velocidad del paquete es de 8 ft/s cuando se encuentra a 25 ft del resorte y despreciando el rozamiento, determínese la deformación adicional máxima del resorte al parar el paquete.

13.67 Un collarín de 2 kg está unido a un resorte y desliza sin rozamiento en un plano vertical a lo largo de la barra ABC. El resorte está sin deformar cuando el collarín se encuentra en C y su constante es de 600 N/m. Si el collarín se suelta en A sin velocidad inicial, determínese su velocidad *a*) al pasar por B y *b*) cuando llega a C.

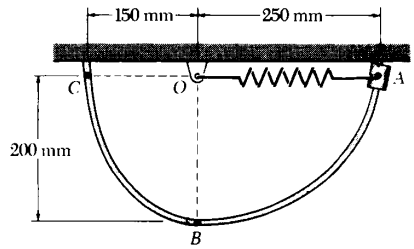


Fig. P13.67

13.68 Resuélvase el problema 13.67 suponiendo que la longitud natural del resorte es de 100 mm y que su constante es de 800 N/m.

13.69 Se demuestra en resistencia de materiales que cuando una viga elástica AB soporta un bloque de peso W en un punto B dado, la deformación y_{st} del punto D (llamada deformación estática) es proporcional a W. Demuéstrese que si el mismo bloque es lanzado desde una altura h sobre la viga y la golpea en D, la deformación máxima y_m del punto D en el movimiento subsecuente se puede expresar como

$$y_m = y_{\text{st}}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{y_{\text{st}}}}\right)$$

Nótese que esta fórmula es aproximada puesto que se basa en la suposición de que el bloque no rebota fuera de la viga y que no se disipa energía en el impacto.

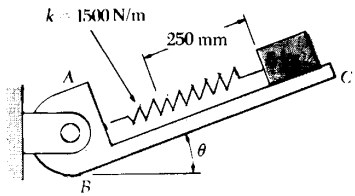


Fig. P13.70

13.70 Conforme se gira a la ménsula ABC lentamente, el bloque de 6 kg empieza a deslizar hacia el resorte para $\theta = 20°$. Se observa que la deformación máxima del resorte es 50 mm. Determínense los valores de los coeficientes de rozamiento estático y cinético.

13.71 Si la barra del problema 13.67 tiene un radio de curvatura de 200 mm en el punto B, determínese la fuerza ejercida por la barra sobre el collarín al pasar éste por el punto B.

13.72 Un objeto de 1.25 lb se suelta desde el reposo en A y resbala sin rozamiento a lo largo de la superficie mostrada. Determínese la fuerza ejercida por la superficie sobre el objeto cuando éste pasa por *a*) el punto B y *b*) el punto C.

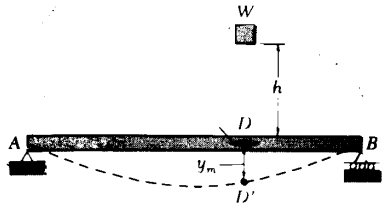


Fig. P13.69

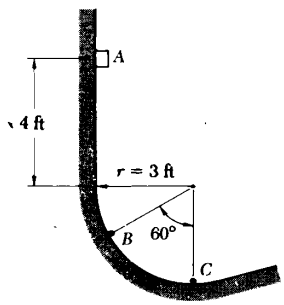


Fig. P13.72

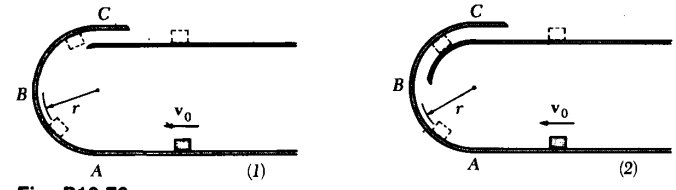


Fig. P13.73

13.73 Un pequeño paquete de peso W se proyecta dentro de un circuito de retorno vertical en A con una velocidad v_0. El paquete viaja sin rozamiento a lo largo del círculo de radio r y se deposita sobre una superficie horizontal en C. Para cada uno de los dos circuitos aquí mostrados, determínense *a*) la mínima velocidad v_0 para la cual el paquete alcanzará la superficie horizontal en C y *b*) la fuerza correspondiente que ejerce el circuito sobre el paquete conforme pasa el punto B.

13.74 En el problema 13.73 se desea que se deposite el paquete sobre la superficie horizontal en C con una velocidad de 1.5 m/s. Si $r = 0.3$ m, *a*) demuéstrese que este requerimiento no se puede lograr en el primer circuito y *b*) determínese la velocidad inicial v_0 requerida cuando se usa el segundo circuito.

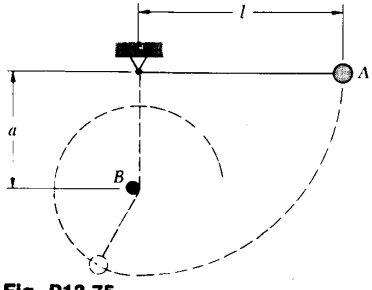


Fig. P13.75

13.75 Se suelta desde el reposo en A el péndulo aquí mostrado y oscila hasta un ángulo de 90° antes de que la cuerda toque la clavija B fija. Determínese el valor mínimo de a para el cual la lenteja del péndulo describirá un círculo alrededor de la clavija.

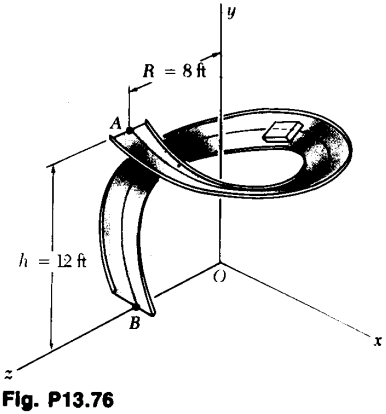


Fig. P13.76

*13.76 Se están moviendo paquetes desde el punto A en el piso superior de un almacén hasta el punto B del piso inferior, 12 ft directamente abajo de A, por medio de una rampa cuya línea central tiene la forma de una hélice con su eje vertical y y radio $R = 8$ ft. La sección transversal de la rampa va a estar peraltada de tal manera que cada paquete, después de ser soltado en A sin velocidad, deslizará a lo largo de la línea central de la rampa sin siquiera tocar sus bordes. Despreciando el rozamiento *a*) exprésese, como una función de la altura y en el punto P de la línea central, el ángulo θ formado por la normal a la superficie de la canal en P y la normal principal al eje en este punto, y *b*) determínese el módulo y dirección de la fuerza ejercida por la rampa sobre el paquete de 20 lb al llegar al punto B. (*Sugerencia.* La normal principal a la hélice en cualquier punto P es horizontal y dirigida hacia el eje y y el radio de curvatura de la hélice es $\rho = R[1 + (h/2\pi R)^2]$.)

*13.77 Demuéstrese que una fuerza $\mathbf{F}(x, y, z)$ es conservativa si y sólo si se cumplen las siguientes relaciones.

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \qquad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} \qquad \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z}$$

*13.78 La fuerza $\mathbf{F} = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})/(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$ actúa sobre una partícula $P(x, y, z)$ que se mueve en el espacio. *a*) Empleando las relaciones encontradas en el problema 13.77, demuéstrese que $\mathbf{F}$ es una fuerza conservativa. *b*) Determínese la función potencial $V(x, y, z)$ asociada a $\mathbf{F}$.

*13.79 Una fuerza **F** actúa sobre partícula $P(x, y)$ que se mueve en el plano xy. Determínese si la fuerza **F** es conservativa y calcúlese el trabajo de **F** cuando P gira en sentido opuesto al de las manecillas del reloj y describe un cuadrado cuyos vértices son A, B, C y D: *a*) cuando $\mathbf{F} = ky\mathbf{i}$ y *b*) cuando $\mathbf{F} = k(y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$.

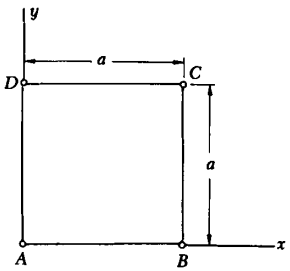


Fig. P13.79

*13.80 Una fuerza $\mathbf{F} = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j})/(x^2 + y^2)^2$ actúa sobre una partícula $P(x, y)$ que se mueve en un plano xy. *a*) Usando la primera de las relaciones encontradas en el problema 13.77 demuéstrese que **F** es una fuerza conservativa y *b*) determínese la función potencial $V(x, y)$ asociada con **F**.

13.81 *a*) Determínese la energía cinética por unidad de masa que debe tener un proyectil después de haber sido disparado desde la superficie de la Tierra para que alcance una distancia infinita de la Tierra y *b*) ¿cuál es la velocidad inicial del proyectil (llamada velocidad de escape)? Exprésense las respuestas en unidades SI y demuéstrese que la respuesta de la parte *b* es independiente del ángulo del disparo.

13.82 Un satélite de masa m describe una órbita circular de radio r alrededor de la Tierra. Exprésese *a*) su energía potencial, *b*) su energía cinética y *c*) su energía total, como una función de r. Sea R el radio de la Tierra, g la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra y supóngase que la energía potencial del satélite en su plataforma de lanzamiento es cero.

13.83 *a*) Demuéstrese, tomando $r = R + y$ en la fórmula (13.17′) y desarrollándola en serie de potencias de y/R, que la expresión obtenida en (13.16) para energía potencial V_g a causa de la gravedad es una aproximación de primer orden para la expresión dada en (13.17′); *b*) usando la misma expresión, encuéntrese una aproximación de segundo orden para V_g.

13.84 Un módulo de excursión lunar (LEM) se usó en la misión Apolo de aterrizaje en la Luna para ahorrar combustible, evitando el lanzamiento de la nave espacial Apolo completa desde la superficie de la Luna en su viaje de regreso a la Tierra. Compruébese la eficacia de este planteamiento calculando la energía por kilogramo requerida por una nave espacial para escapar del campo gravitacional de la Luna, si parte *a*) de la superficie de la Luna y *b*) de una órbita circular a 100 km arriba de la superficie de la Luna. Despréciese el efecto del campo gravitacional de la Tierra. (El radio de la Luna es 1740 km y su masa 0.01230 veces la masa de la Tierra.)

13.85 Durante su quinta misión el transbordador espacial Columbia lanzó dos satélites de comunicación mientras describía una órbita circular a 185 mi sobre la superficie de la Tierra. Si uno de estos satélites pesó 8000 lb determínese *a*) la energía adicional requerida para colocar el satélite en una órbita geosincrónica (véase problema 12.78) a una altura de 22 230 mi sobre la superficie de la Tierra y *b*) la energía necesaria para colocarlo en la misma órbita lanzándolo desde la superficie de la Tierra.

13.86 Demuéstrese que la relación entre las energías potencial y cinética de un electrón, al entrar a las placas deflectoras del tubo de rayos catódicos del problema 12.61 es igual $d\delta/lL$. (Colóquese la línea de referencia en la superficie de la placa positiva.)

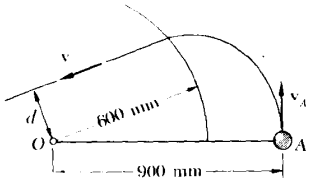


Fig. P13.87

13.87 Una pelota de 200 g resbala sobre una superficie horizontal sin rozamiento, y está unida a un punto fijo O por medio de una cuerda elástica de constante $k = 150$ N/m, de longitud natural igual a 600 mm. Se coloca una pelota en el punto A a 900 mm de O y se le da una velocidad inicial V_A en una dirección perpendicular a OA. Si la pelota pasa a una distancia mínima $d = 100$ mm del punto O, determínese *a*) la velocidad inicial v_A de la pelota y *b*) su velocidad v después de que la cuerda está sin tensión.

13.88 Si la velocidad inicial del problema 13.87 es $v_A = 2.5$ m/s determínese *a*) la velocidad v de la pelota después de que la cuerda no tiene tensión y *b*) la distancia mínima de O a la que pasará la pelota.

13.89 En el caso de la pelota del problema 13.87, determínense *a*) el valor mínimo de la velocidad inicial v_A para que la cuerda elástica permanezca tensa todo el tiempo y *b*) la velocidad máxima correspondiente alcanzada por la pelota.

13.90 En el problema resuelto 13.8 determínese la velocidad v_A para que la máxima distancia al origen O alcanzada por la esfera sea de 1.2 m.

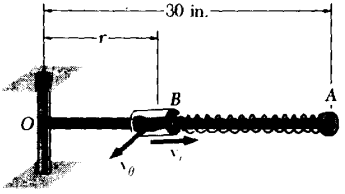


Fig. P13.91

13.91 El collarín B pesa 10 lb y está unido a un resorte de constante 50 lb/ft y longitud natural igual a 18 in. El sistema se pone en movimiento con $r = 12$ in, $v_\theta = 16$ ft/s y $v_r = 0$. Despreciando la masa de la barra y el efecto del rozamiento, determínense los componentes radial y transversal de la velocidad del collarín para $r = 21$ in.

13.92 Para el movimiento descrito en el problema 13.91 determínese *a*) la distancia máxima entre el origen y el collarín, *b*) la velocidad correspondiente. (*Sugerencia.* Resuélvase por tanteos la ecuación obtenida para r.)

13.93 al 13.95 Usando los principios de la conservación de energía y la conservación del momento angular, resuélvanse los siguientes problemas:

13.93 Problema 12.97.
13.94 Problema 12.98.
13.95 Problema 12.101*a*.

13.96 Empleando los principios de conservación de energía y de conservación del momento angular, determínese la velocidad de la sonda del problema 12.100 *a*) después de que ha sido colocada en su segunda órbita de transferencia en B y *b*) cuando llega al punto C.

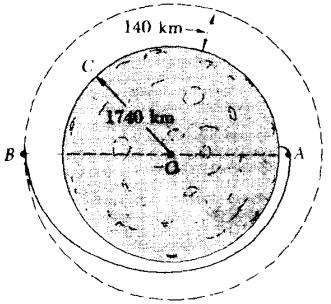


Fig. P13.97

13.97 Después de completar su misión de exploración a la Luna, los dos astronautas que formaron la tripulación de un módulo de excursión lunar Apolo (LEM) se prepararon para reunirse en el módulo de mando que estaba orbitando alrededor de la Luna a una altura de 140 km. Encendieron los motores de su LEM, lo elevaron en una trayectoria curva hasta un punto A, a 8 km de la superficie de la Luna, y apagaron los motores. Sabiendo que el LEM se movía en ese momento en dirección paralela a la superficie de la Luna y que recorrió una trayectoria elíptica para encontrarse en B con el módulo de comando, determínense *a*) la velocidad del LEM al apagarse los motores y *b*) la velocidad relativa con la que el módulo de mando alcanzó al LEM en B. (El radio de la Luna es 1740 km y su masa es 0.01230 veces la masa de la Tierra.)

13.98 Mientras describe una órbita circular a 185 mi sobre la superficie de la Tierra, un vehículo espacial lanza en el punto A, en una plataforma superior inercial (ESI), a un satélite de comunicación que va a ser colocado en una órbita geosincrónica (véase problema 12.78) a una altitud de 22 230 mi sobre la superficie de la Tierra. Determínese *a*) la velocidad del ESI respecto del vehículo después de que sus motores han sido encendidos en A y *b*) el aumento en la velocidad necesaria en B para colocar el satélite en su órbita final.

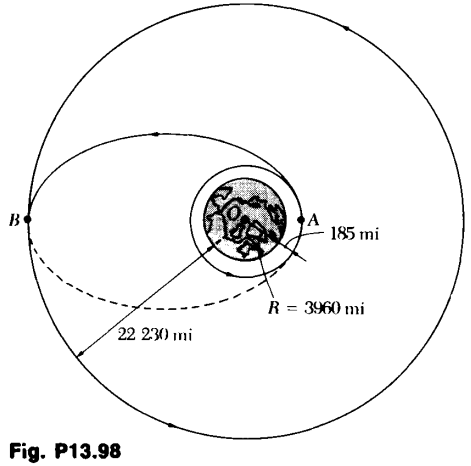


Fig. P13.98

13.99 En relación con el regreso del LEM al módulo de mando, la astronave Apolo del problema 13.97 se giró de modo que el LEM quedara de frente en su parte posterior. El LEM se dejó entonces a la deriva con una velocidad de 200 m/s en relación con el módulo de mando. Determínese el módulo y la dirección (ángulo ϕ formado con la vertical OB) de la velocidad v_C del LEM justo antes de que choque en C con la superficie de la Luna.

13.100 Un vehículo espacial va a encontrarse con un laboratorio en órbita alrededor de la Tierra a una altitud constante de 360 km. El vehículo ha alcanzado una altitud de 60 km cuando se apagan sus motores y su velocidad v_0 forma un ángulo $\phi_0 = 50°$ con la vertical OB en ese instante. ¿Qué valor debe tener v_0 para que la trayectoria del vehículo sea tangente en A a la órbita del laboratorio?

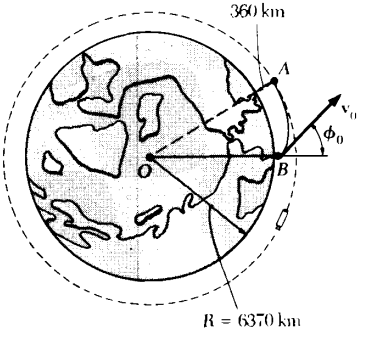


Fig. P13.100

13.101 Un vehículo espacial está describiendo una órbita circular a una altitud de 150 mi sobre la superficie de la Tierra. Al pasar por A enciende su motor por un corto intervalo de tiempo para reducir su velocidad en un 5% y comenzar su descenso hacia la Tierra. Determínense el módulo y la dirección (el ángulo ϕ formado con la vertical OB) de la velocidad v_B del vehículo al llegar al punto B a una altitud de 30 mi.

13.102 Un vehículo espacial está describiendo una órbita circular a una altitud de 150 mi sobre la superficie de la Tierra. Al pasar por A enciende su motor para reducir su velocidad y comenzar su descenso hacia la Tierra; al llegar al punto B a una altitud de 30 mi, su velocidad v_B forma un ángulo $\phi = 80°$ con la vertical. ¿Cuál es su velocidad en ese instante?

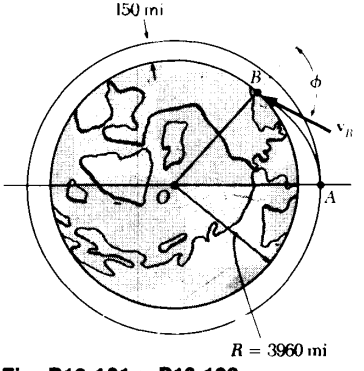


Fig. P13.101 y P13.102

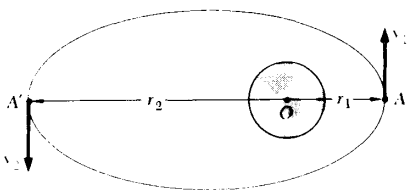


Fig. P13.105 y P13.106

13.103 Al agotarse el combustible un cohete experimental ha alcanzado una altitud de 300 km y tiene una velocidad v_0 de 8000 m/s que forma un ángulo de 40° con la vertical. Determínese la máxima altitud alcanzada por el cohete.

13.104 Al agotarse el combustible, un cohete experimental ha alcanzado una altitud de 400 km y tiene una velocidad v_0 de 7500 m/s. ¿Qué ángulo debe formar v_0 con la vertical para que el cohete alcance una altitud máxima de 3000 km?

13.105 Demuéstrese que los valores v_1 y v_2 de la velocidad de un satélite de la Tierra en el perigeo A y en el apogeo A' de una órbita elíptica están definidos por las relaciones

$$v_1^2 = \frac{2GM}{r_1 + r_2}\frac{r_2}{r_1} \qquad v_2^2 = \frac{2GM}{r_1 + r_2}\frac{r_1}{r_2}$$

donde M es la masa de la Tierra y r_1 y r_2 representan las distancias mínima y máxima de la órbita al centro de la Tierra, respectivamente.

13.106 Demuéstrese que la energía total E de un satélite de la Tierra de masa m que describe una órbita elíptica es $E = -GMm/(r_1 + r_2)$, donde M es la masa de la Tierra y r_1 y r_2 representan las distancias mínima y máxima de la órbita al centro de la Tierra. (La energía potencial gravitacional de un satélite se definió como cero a una distancia infinita de la Tierra.)

13.107 Una nave espacial de masa m describe una órbita circular de radio r_1 alrededor de la Tierra; *a*) demuéstrese que la energía adicional ΔE que debe proporcionarse a la nave para transferirla a una órbita circular de radio mayor r_2 es

$$\Delta E = \frac{GMm(r_2 - r_1)}{2r_1r_2}$$

donde M es la masa de la Tierra, y *b*) demuéstrese además que si la transferencia de una órbita circular a la otra se realiza colocando la nave en una trayectoria de transición semielíptica AB, las cantidades de energía ΔE_A y ΔE_B que deben imprimirse en A y B son proporcionales a r_2 y r_1 respectivamente.

$$\Delta E_A = \frac{r_2}{r_1 + r_2}\Delta E \qquad \Delta E_B = \frac{r_1}{r_1 + r_2}\Delta E$$

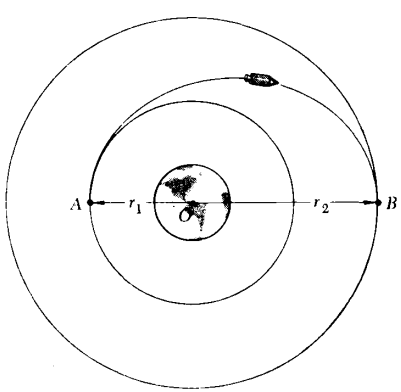


Fig. P13.107

13.108 Un satélite se lanza al espacio con una velocidad v_0 a una distancia r_0 del centro de la Tierra mediante la última etapa de sus cohetes de lanzamiento. La velocidad v_0 se calculó para enviar el satélite a una órbita circular de radio r_0, pero a causa de un fallo en los controles el satélite no se lanza horizontalmente sino con un ángulo α con la horizontal y, como resultado, es impulsado hacia una órbita elíptica. Determínense los valores máximo y mínimo de la distancia del centro de la Tierra al satélite.

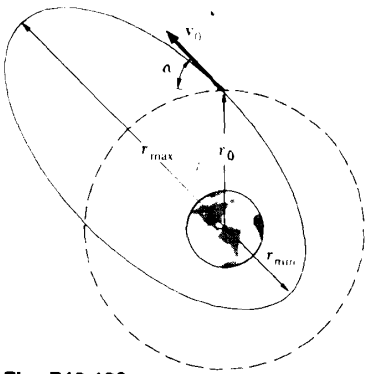


Fig. P13.108

13.109 Un proyectil se lanza desde el suelo con una velocidad inicial v_0 que forma un ángulo ϕ_0 con la vertical. Si el proyectil va a alcanzar una altitud máxima igual a αR donde R es el radio de la Tierra. *a*) Demuéstrese que el ángulo necesario ϕ_0 está definido por la relación

$$\operatorname{sen} \phi_0 = (1 + \alpha)\sqrt{1 - \frac{\alpha}{1 + \alpha}\left(\frac{v_{esc}}{v_0}\right)^2}$$

donde v_{esc} es la velocidad de escape y *b*) determínese el intervalo de valores permitido de v_0.

*13.110 Usando las respuestas obtenidas del problema 13.108, demuéstrese que la órbita circular propuesta y la órbita elíptica resultante se intersecan en los extremos del eje menor de la órbita elíptica.

*13.111 *a*) Exprese el momento angular por unidad de masa, h, en términos de $r_{mín}$ y $v_{máx}$ y la energía total por unidad de masa, E/m de un vehículo espacial que se mueve bajo la atracción gravitacional de un planeta de masa M (figura 13.15). *b*) Eliminando $v_{máx}$ de las ecuaciones obtenidas obténgase la fórmula

$$\frac{1}{r_{min}} = \frac{GM}{h^2}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{2E}{m}\left(\frac{h}{GM}\right)^2}\right]$$

c) Demuéstrese que la excentricidad ε de la trayectoria del vehículo puede expresarse como

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2E}{m}\left(\frac{h}{GM}\right)^2}$$

d) Demuéstrese además que la trayectoria del vehículo es una hipérbola, una elipse o una parábola, según que E sea positiva, negativa o cero.

13.10. Principio del impulso y del momento lineal. Ahora consideraremos un tercer método básico de la solución de problemas relacionados con el movimiento de las partículas, el cual se basa en el principio del impulso y el momento lineal y que puede usarse para resolver problemas en los que intervienen fuerza, masa, velocidad y tiempo. Tiene un interés especial en la solución de problemas en los que intervienen percusiones o choques (secciones 13.11 y 13.12).

Considérese una partícula de masa m sobre la que actúa una fuerza $\mathbf{F}$. Como ya vimos en la sección 12.3, la segunda ley de Newton puede expresarse en la forma

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) \tag{13.27}$$

en la que $m\mathbf{v}$ es el momento lineal de la partícula. Si se multiplican ambos lados de la ecuación (13.27) por dt y se integra desde un tiempo t_1 hasta t_2, entonces

$$\mathbf{F}\,dt = d(m\mathbf{v})$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\,dt = m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1$$

o bien, al transponer el último término,

$$m\mathbf{v}_1 + \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\,dt = m\mathbf{v}_2 \tag{13.28}$$

La integral de la ecuación (13.28) es un vector que se conoce con el nombre de *impulso lineal*, o simplemente el *impulso*, de la fuerza $\mathbf{F}$ durante el intervalo de tiempo considerado. Al dividirse $\mathbf{F}$ en componentes rectangulares, escribimos

$$\mathbf{Imp}_{1\to 2} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\,dt$$

$$= \mathbf{i}\int_{t_1}^{t_2} F_x\,dt + \mathbf{j}\int_{t_1}^{t_2} F_y\,dt + \mathbf{k}\int_{t_1}^{t_2} F_z\,dt \tag{13.29}$$

Adviértase que las componentes del impulso de la fuerza $\mathbf{F}$ son iguales a las áreas bajo las curvas obtenidas al dibujar las componentes F_x, F_y y F_z en función de t (Fig. 13.16), respectivamente. En el caso de una fuerza $\mathbf{F}$ de módulo y dirección constantes, el impulso está representado por el vector $\mathbf{F}(t_2 - t_1)$, que tiene la misma dirección que $\mathbf{F}$.

Si se usan unidades del SI, el módulo del impulso de una fuerza se expresa en N · s. Pero, recordando la definición del newton, tenemos

$$\mathrm{N \cdot s} = (\mathrm{kg \cdot m/s^2}) \cdot \mathrm{s} = \mathrm{kg \cdot m/s}$$

que es la unidad obtenida en la sección 12.4 para el momento lineal de una partícula. Con esto comprobamos que la ecuación (13.28) es dimensionalmente correcta. Si se usan unidades del sistema inglés, el impulso de una fuerza se expresa en lb · s, que es también la unidad que se obtuvo en la sección 12.4 para el momento lineal de una partícula.

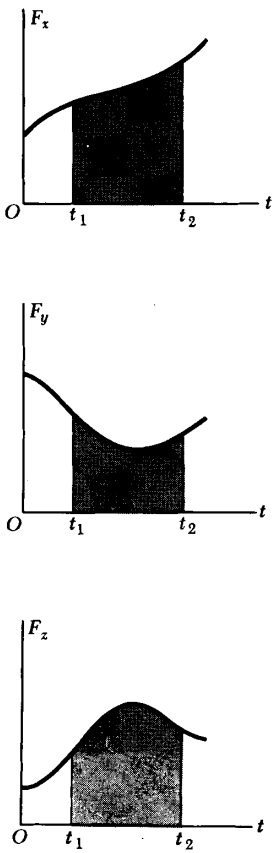


Fig. 13.16

La ecuación (13.28) expresa que cuando una fuerza **F** actúa sobre una partícula durante cierto intervalo, *puede obtenerse el momento lineal* $m\mathbf{v}_2$ *de la partícula al sumar vectorialmente su momento lineal inicial* $m\mathbf{v}_1$ *y el impulso de la fuerza* **F** durante el intervalo de tiempo considerado (Fig. 13.17).

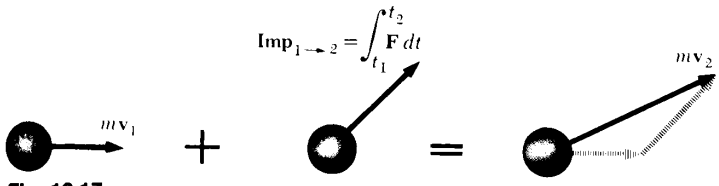


Fig. 13.17

escribimos

$$m\mathbf{v}_1 + \mathbf{Imp}_{1\to 2} = m\mathbf{v}_2 \tag{13.30}$$

Observamos que mientras la energía cinética y el trabajo son cantidades escalares, el momento lineal y el impulso son cantidades vectoriales. Con el objeto de obtener una solución analítica, es necesario sustituir la ecuación (13.30) por las ecuaciones equivalentes de las componentes

$$\begin{aligned}(mv_x)_1 + \int_{t_1}^{t_2} F_x\,dt &= (mv_x)_2\\ (mv_y)_1 + \int_{t_1}^{t_2} F_y\,dt &= (mv_y)_2\\ (mv_z)_1 + \int_{t_1}^{t_2} F_z\,dt &= (mv_z)_2\end{aligned} \tag{13.31}$$

Cuando actúan varias fuerzas sobre una partícula, debe considerarse el impulso de cada una de las fuerzas. Tenemos

$$m\mathbf{v}_1 + \Sigma\,\mathbf{Imp}_{1\to 2} = m\mathbf{v}_2 \tag{13.32}$$

También en este caso la ecuación obtenida representa una relación entre cantidades vectoriales; en la solución real de un problema debe sustituirse por las ecuaciones correspondientes de las componentes.

Si en un problema intervienen dos o más partículas, cada partícula debe considerarse por separado y la ecuación (13.32) se escribe para cada partícula. Podemos también sumar vectorialmente los momentos lineales de todas las partículas y los impulsos de todas las fuerzas que intervienen. Entonces escribimos

$$\Sigma m\mathbf{v}_1 + \Sigma\,\mathbf{Imp}_{1\to 2} = \Sigma m\mathbf{v}_2 \tag{13.33}$$

Como las fuerzas de acción y reacción entre las partículas forman parejas de fuerzas iguales y opuestas y como el intervalo desde el tiem-

po t_1 hasta t_2 es común a todas las fuerzas que aparecen, los impulsos de las fuerzas de acción y reacción se cancelan y sólo necesitamos considerar los impulsos de las fuerzas externas.†

Si sobre las partículas no actúa ninguna fuerza exterior o, en términos más generales, si la suma de las fuerzas exteriores es cero, el segundo término de la ecuación (13.33) se anula y ésta se reduce a

$$\Sigma m\mathbf{v}_1 = \Sigma m\mathbf{v}_2 \tag{13.34}$$

la cual expresa que *el momento lineal total de las partículas se conserva*. Considérese, por ejemplo, dos botes de masa m_A y m_B, inicialmente en reposo, de los que se tira acercándolos (Fig. 13.18). Si la resistencia que ofrece el agua al movimiento se desprecia, las únicas

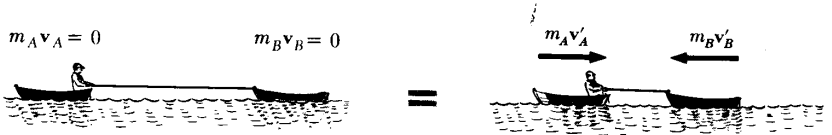


Fig. 13.18

fuerzas exteriores que actúan sobre los botes son sus pesos y las fuerzas de empuje (o fuerzas de flotación) que se les aplican. Como estas fuerzas se equilibran, escribimos

$$\Sigma m\mathbf{v}_1 = \Sigma m\mathbf{v}_2$$
$$0 = m_A\mathbf{v}'_A + m_B\mathbf{v}'_B$$

en donde $\mathbf{v}'_A$ y $\mathbf{v}'_B$ representan las velocidades de los botes después de un intervalo finito de tiempo. La ecuación obtenida indica que los botes se mueven en direcciones opuestas (acercándose) con velocidades inversamente proporcionales a sus masas.‡

13.11. Percusiones. En algunos problemas, puede actuar una fuerza muy grande durante un pequeño intervalo de tiempo sobre una partícula y producir un cambio brusco en el momento lineal. Tal fuerza se llama fuerza percusiva y el efecto que resulta recibe el nombre de percusión. Por ejemplo, al pegar a una bola con un bate de béisbol, el contacto entre ellos tiene lugar durante un intervalo Δt muy corto. Pero el valor promedio de la fuerza $\mathbf{F}$ que ejerce el bate sobre la pelota es muy grande y el im-

† Debemos notar la diferencia entre esta afirmación y la correspondiente que se hizo en la sección 13.4 respecto al trabajo de las fuerzas de acción y reacción entre varias partículas. Mientras que la suma de los impulsos de estas fuerzas es siempre cero, la suma de su trabajo es cero sólo bajo circunstancias especiales, por ejemplo, cuando los distintos cuerpos que intervienen están unidos por cordones o barras inextensibles y por ello están restringidos a moverse distancias iguales.

‡ La aplicación del método del impulso y de la cantidad de movimiento a un sistema de partículas, y el concepto de la conservación del momento lineal de un sistema de partículas, se considerarán en detalle en el capítulo 14.

pulso resultante $\mathbf{F}\,\Delta t$ es suficiente para cambiar el sentido de movimiento de la pelota (Fig. 13.19).

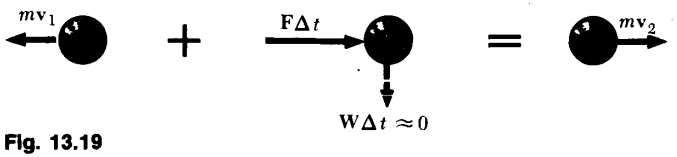


Fig. 13.19

Cuando actúan fuerzas de percusión sobre una partícula, la ecuación (13.32) se convierte en

$$m\mathbf{v}_1 + \Sigma \mathbf{F}\,\Delta t = m\mathbf{v}_2 \tag{13.35}$$

Puede despreciarse cualquier fuerza que no sea percusiva, ya que el impulso correspondiente $\mathbf{F}\,\Delta t$ es muy pequeño. Las *fuerzas no percusivas* incluyen el peso del cuerpo, la fuerza ejercida por un resorte o cualquier otra fuerza que se sepa que es pequeña comparada con una fuerza de percusión. Las reacciones desconocidas pueden ser o no ser de percusión, por consiguiente, su impulso debe estar incluido en la ecuación (13.35), siempre que no se haya demostrado que es despreciable. Por ejemplo, el impulso del peso de la pelota de beisbol antes considerada puede despreciarse. Si se analiza el movimiento del bate, también puede despreciarse el impulso del peso de éste. Los impulsos de las reacciones de las manos del jugador sobre el bate, en cambio, deben incluirse; estos impulsos no serán despreciables si se golpea incorrectamente a la pelota.

Adviértase que el método del impulso y del momento lineal es especialmente efectivo en el análisis de las percusiones sobre una partícula, porque sólo intervienen las velocidades inicial y final de la partícula y los impulsos de las fuerzas que actúan sobre ella. Por otro lado, la aplicación directa de la segunda ley de Newton requeriría de la determinación de las fuerzas en función del tiempo y de la integración de las ecuaciones de movimiento sobre el intervalo Δt.

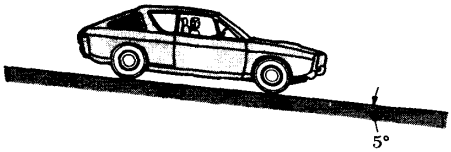
En el caso de percusiones con varias partículas, puede utilizarse la ecuación (13.33). Se reduce a

$$\Sigma m\mathbf{v}_1 + \Sigma \mathbf{F}\,\Delta t = \Sigma m\mathbf{v}_2 \tag{13.36}$$

donde el segundo término sólo contiene fuerzas exteriores de percusión. Si todas las fuerzas exteriores que actúan sobre las diferentes partículas no son de percusión, el segundo término de la ecuación (13.36) se anula y esta ecuación se reduce a (13.34). Escribimos

$$\Sigma m\mathbf{v}_1 = \Sigma m\mathbf{v}_2 \tag{13.34}$$

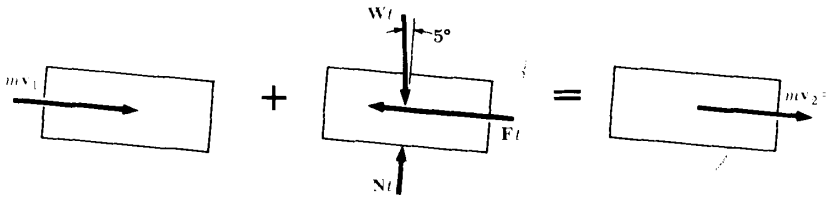
la cual expresa que el momento lineal total de las partículas se conserva. Ésta es la situación, por ejemplo, cuando dos partículas libres en movimiento chocan entre sí. Sin embargo, debemos observar que, aunque se conserva el momento lineal total de las partículas, en general *no* se conserva su energía total. En las secciones 13.12 a 13.14 se estudiarán en detalle algunos problemas en los que interviene la colisión o *choque* de dos partículas.



PROBLEMA RESUELTO 13.10

Un automóvil que pesa 4000 lb baja por una pendiente de 5° con una velo dad de 60 mi/h cuando se aplican los frenos, produciendo una fuerza to constante de frenado (aplicada por la carretera sobre los neumáticos) de 1 500 Determínese el tiempo necesario para que el automóvil se detenga.

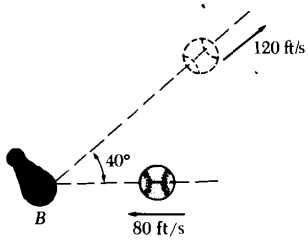
Solución. Aplicamos al principio del impulso y del momento lin Como cada fuerza es de dirección y módulo constantes, el impulso cor pondiente es igual al producto de la fuerza por el intervalo de tiempc



$$m\mathbf{v}_1 + \Sigma\,\mathbf{Imp}_{1\to 2} = m\mathbf{v}_2$$

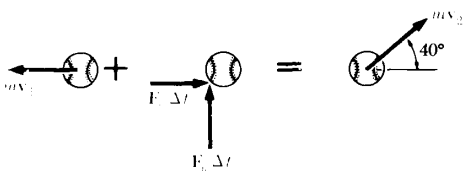
$+\searrow$ componentes x: $mv_1 + (W \operatorname{sen} 5°)t - Ft = 0$

$(4000/32.2)(88 \text{ ft/s}) + (4000 \operatorname{sen} 5°)t - 1500t = 0$ $\qquad t = 9.49 \text{ s}$



PROBLEMA RESUELTO 13.11

Se lanza una pelota de beisbol con una velocidad de 80 ft/s hacia un bat dor. Después que la pelota se golpea con el bate B, tiene una velocidad de ft/s en la dirección indicada. Si el bate y la pelota están en contacto dura 0.015 s, determínese la fuerza de percusión promedio aplicada sobre la pel durante el impacto.



Solución. Aplicamos el principio del impulso y del momento lir a la pelota. Como el peso de la pelota es una fuerza no percusiva, despreciaremos.

$$m\mathbf{v}_1 + \Sigma\,\mathbf{Imp}_{1\to 2} = m\mathbf{v}_2$$

$\pm\rightarrow$ componentes x: $\quad -mv_1 + F_x\,\Delta t = mv_2 \cos 40°$

$$-\frac{\frac{4}{16}}{32.2}(80 \text{ ft/s}) + F_x(0.015 \text{ s}) = \frac{\frac{4}{16}}{32.2}(120 \text{ ft/s}) \cos 4($$

$$F_x = +89.0 \text{ lb}$$

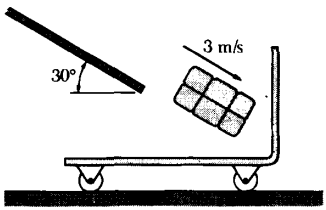
$+\uparrow$ componentes y: $\quad 0 + F_y\,\Delta t = mv_2 \operatorname{sen} 40°$

$$F_y(0.015 \text{ s}) = \frac{\frac{4}{16}}{32.2}(120 \text{ ft/s}) \operatorname{sen} 4($$

$$F_y = +39.9 \text{ lb}$$

A partir de sus componentes F_x y F_y determinamos el módulo y direc de la fuerza **F**:

$$\mathbf{F} = 97.5 \text{ lb} \angle 24.2°$$

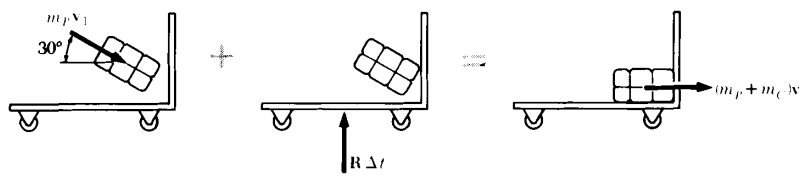


PROBLEMA RESUELTO 13.12

Un paquete de 10 kg cae de una rampa con una velocidad de 3 m/s a una carreta de 25 kg. Sabiendo que la carreta está inicialmente en reposo y puede rodar libremente, determínese: *a*) la velocidad final de la carreta, *b*) el impulso ejercido por la carreta sobre el paquete, y *c*) la fracción de la energía inicial que se pierde en el choque.

Solución. Primero aplicamos el principio del impulso y del momento lineal al sistema paquete-carreta para obtener la velocidad $\mathbf{v}_2$ de la carreta y el paquete. Después aplicamos el mismo principio al paquete solo, con el objeto de encontrar el impulso $\mathbf{F}\,\Delta t$ que se le aplica.

a) Principio del impulso y del momento lineal: paquete y carreta



$$m_P\mathbf{v}_1 + \Sigma\,\mathbf{Imp}_{1\to 2} = (m_P + m_C)\mathbf{v}_2$$

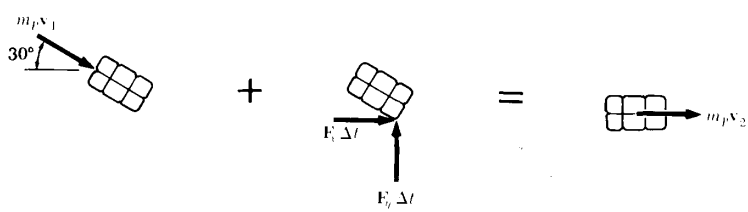
$\pm\rightarrow$ x componentes: $\quad m_P v_1 \cos 30° + 0 = (m_P + m_C)v_2$

$$(10\text{ kg})(3\text{ m/s})\cos 30° = (10\text{ kg} + 25\text{ kg})v_2$$

$$v_2 = 0.742\text{ m/s} \rightarrow \blacktriangleleft$$

Adviértase que la ecuación utilizada expresa la conservación del momento lineal en la dirección x.

b) Principio del impulso y el momento lineal: paquete



$$m_P\mathbf{v}_1 + \Sigma\,\mathbf{Imp}_{1\to 2} = m_P\mathbf{v}_2$$

$\pm\rightarrow$ componentes x: $\quad m_P v_1 \cos 30° + F_x\,\Delta t = (10\text{ kg})(0.742\text{ m/s})$

$$F_x\,\Delta t = -18.56\text{ N}\cdot\text{s}$$

$+\uparrow$ componentes y: $\quad -m_P v_1 \operatorname{sen} 30° + F_y\,\Delta t = 0$

$$-(10\text{ kg})(3\text{ m/s})\operatorname{sen} 30° + F_y\,\Delta t = 0$$

$$F_y\,\Delta t = +15\text{ N}\cdot\text{s}$$

El impulso aplicado sobre el paquete es $\mathbf{F}\,\Delta t = 23.9\text{ N}\cdot\text{s} \measuredangle 38.9°$ ◄

c) **Fracción de energía perdida.**

$$T_1 = \tfrac{1}{2}m_P v_1^2 = \tfrac{1}{2}(10\text{ kg})(3\text{ m/s})^2 = 45\text{ J}$$

$$T_2 = \tfrac{1}{2}(m_P + m_C)v_2^2 = \tfrac{1}{2}(10\text{ kg} + 25\text{ kg})(0.742\text{ m/s})^2 = 9.63\text{ J}$$

La fracción de la energía que se ha perdido es $\dfrac{T_1 - T_2}{T_1} = \dfrac{45\text{ J} - 9.63\text{ J}}{45\text{ J}} = 0.786$ ◄

Problemas

13.112 Un trasatlántico de 40 000 ton tiene una velocidad inicial de 2.5 mi/h. Despreciando la resistencia al movimiento por causa del agua, determínese el tiempo necesario para detenerlo usando un remolque que suministra una fuerza constante de 35 kips.

13.113 Un automóvil de 1200 kg viaja con una velocidad de 90 km/h cuando se aplican los frenos a fondo, haciendo que los cuatro neumáticos patinen. Determínese el tiempo necesario para que el automóvil se detenga *a*) sobre pavimento seco ($\mu_k = 0.75$) y *b*) sobre un camino helado ($\mu_k = 0.10$).

13.114 Los coeficientes de rozamiento entre la carga y el remolque de plataforma que se indica son $\mu_s = 0.40$ y $\mu_k = 0.35$. Si la velocidad del camión es 90 km/h, determínese el tiempo mínimo en el que el camión puede detenerse sin que la carga se mueva.

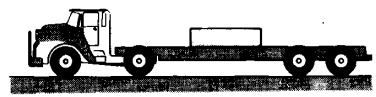


Fig. P13.114

13.115 Sobre una partícula de 10 lb actúa la fuerza $\mathbf{F} = 2t\mathbf{i} + (3 - t)\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$, expresada en lb. Sabiendo que la velocidad de la partícula en $t = 0$ es $\mathbf{v} = -(24 \text{ ft/s})\mathbf{i} + (15 \text{ ft/s})\mathbf{j} - (60 \text{ ft/s})\mathbf{k}$, determínese la velocidad de la partícula en $t = 4$ s.

13.116 Sobre una partícula de 2 kg actúa una fuerza $\mathbf{F} = (8 - 6t)\mathbf{i} + (4 - t^2)\mathbf{j} + (4 + t)\mathbf{k}$, expresada en newtons. Si la velocidad de la partícula es $\mathbf{v} = (150 \text{ m/s})\mathbf{i} + (100 \text{ m/s})\mathbf{j} - (250 \text{ m/s})\mathbf{k}$ en $t = 0$, determínense *a*) el tiempo para el cual la velocidad de la partícula es paralela al plano *yz* y *b*) la velocidad correspondiente de la partícula.

13.117 Resuélvase el problema 12.15 usando el principio del impulso y del momento lineal.

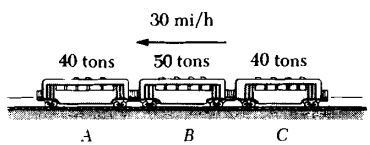


Fig. P13.118

13.118 El tren subterráneo que se muestra se desplaza a una velocidad de 30 mi/h cuando se aplican los frenos a fondo a las ruedas de los vagones *B* y *C*, haciendo que patinen sobre la vía, pero no se aplican los frenos a las ruedas del vagón *A*. Si el coeficiente de rozamiento cinético entre las ruedas y la vía es de 0.35, determínense *a*) el tiempo necesario para que el tren se detenga y *b*) la fuerza en cada acoplamiento.

13.119 Resuélvase el problema 13.118 suponiendo que los frenos se aplican únicamente a las ruedas del vagón *A*.

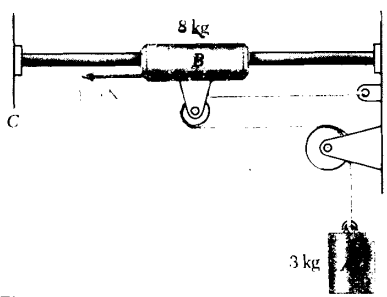


Fig. P13.120

13.120 El sistema aquí mostrado está en reposo cuando se le aplica una fuerza constante de 150 N al collarín *B*. Despreciando el efecto de la fricción, determínense *a*) el tiempo al cual la velocidad del collarín *B* será de 2.5 m/s hacia la izquierda y *b*) la tensión correspondiente del cable.

13.121 Resuélvase el problema 12.17*b* usando el principio del impulso y del momento lineal.

13.122 Sobre un plano inclinado se colocan dos paquetes como se indica en la figura. Los coeficientes de rozamiento son $\mu_s = 0.30$ y $\mu_k = 0.25$ entre el plano y el paquete A, y $\mu_s = 0.20$ y $\mu_k = 0.15$ entre el plano y el paquete B. Si los paquetes están en contacto cuando se sueltan determínense *a*) la velocidad de cada paquete después de 3 s y *b*) la fuerza que ejerce el paquete A sobre el paquete B.

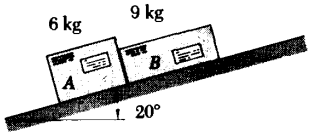


Fig. P13.122

13.123 Un collarín de 3 kg que está inicialmente en reposo está sometido a la fuerza **Q** que varía como se indica, si $\mu_k = 0.25$, determínese la velocidad del collarín en *a*) $t = 1$ y *b*) $t = 2$ s.

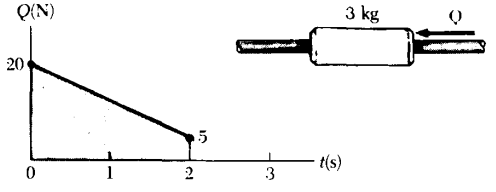


Fig. P13.123

13.124 En el problema 13.123, determínense *a*) la velocidad máxima que alcanza el collarín y el tiempo correspondiente y *b*) el tiempo en el que el collarín llega al reposo.

13.125 Sobre un bloque de 125 lb inicialmente en reposo actúa una fuerza **P** que varía como aquí se indica. Si los coeficientes de rozamiento entre el bloque y la superficie horizontal son $\mu_s = 0.50$ y $\mu_k = 0.40$, determínense *a*) el tiempo en el cual el bloque iniciará su movimiento, *b*) la velocidad máxima que alcanza el bloque y *c*) el tiempo en el cual el bloque se detendrá.

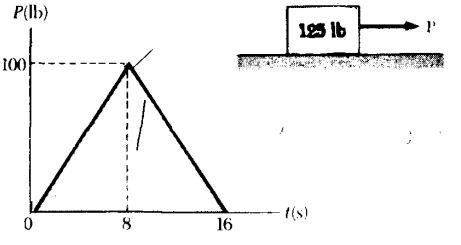


Fig. P13.125

13.126 Resuélvase el problema 13.125 suponiendo que el peso del bloque es 175 lb.

13.127 Una bala de 25 g se dispara con una velocidad de 600 m/s hacia un bloque de madera que se apoya contra una pared vertical sólida. Supóngase que la bala se detiene en 0.75 ms, determínese la fuerza de percusión promedio que ejerce la bala sobre el bloque.

13.128 Un automóvil de 3000 lb que se desplaza a una velocidad de 2.5 mi/h golpea una pared del garage y se detiene en 75 ms. Determínese la fuerza de percusión promedio aplicada por la pared a la defensa del automóvil.

13.129 Una bala de 1 oz con cubierta de acero se dispara a una velocidad de 2000 ft/s hacia una placa de acero y rebota a lo largo de una trayectoria CD a una velocidad de 1600 ft/s. La bala deja un raspón de 2 in sobre la superficie de la placa y suponiendo que tiene una velocidad promedio de 1800 ft/s mientras está en contacto con la placa, obténgase el módulo y dirección de la fuerza de percusión aplicada por la placa a la bala.

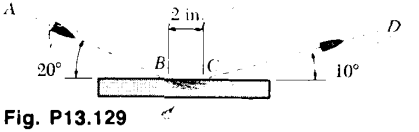


Fig. P13.129

13.130 Después de escalar una pared, un hombre se lanza a una altura de 3 m. Si su cuerpo se detiene por completo 0.15 s de pués de que sus pies tocan el suelo, determínese la componente ver cal de la fuerza de percusión promedio que el suelo aplica a sus pie

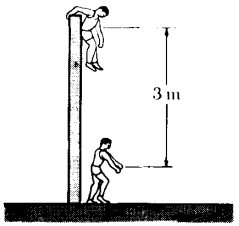


Fig. P13.130

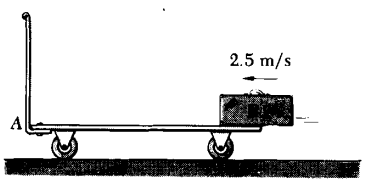


Fig. P13.131

13.131 Un empleado de una línea aérea lanza una maleta de kg con una velocidad horizontal de 2.5 m/s sobre un portaequipa de 30 kg. Sabiendo que el portaequipaje está inicialmente en repo y que puede rodar libremente, encuéntrense *a*) la velocidad del port equipaje después de que la maleta deslizó sobre él hasta detener y *b*) la razón de la energía cinética final del portaequipaje y la male a la energía cinética inicial de la maleta.

13.132 Un vagón de ferrocarril de 45 Mg que se mueve a u velocidad de 3 km/h debe acoplarse a otro vagón de 25 Mg que es en reposo. Obténganse *a*) la velocidad final de los vagones acoplad y *b*) la fuerza percusiva promedio que actúa sobre cada vagón si acoplamiento se efectúa en 0.3 s.

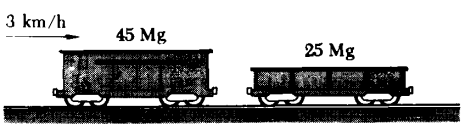


Fig. P13.132



Fig. P13.133

13.133 Dos bañistas *A* y *B*, de masa 75 kg y 50 kg, respectiv mente, se zambullen desde la popa de un bote de 200 kg. Ca bañista se tira al agua de manera que su velocidad horizontal relati respecto al bote es de 3 m/s. Si el bote se encuentra en repos determínese su velocidad final, suponiendo que *a*) los dos bañist se tiran simultáneamente y *b*) el bañista *A* se tira primero y *c*) el b ñista *B* se lanza primero.



Fig. P13.134

13.134 Una barcaza de 3 Mg inicialmente en reposo, car una caja de 500 kg. La barcaza está equipada con un cabrestante q ejerce una fuerza constante de 1200 N sobre la caja durante 6 s. E tonces la caja desliza a lo largo de la cubierta hasta que alcan nuevamente el reposo ($\mu_k = 0.20$). *a*) Dibújese la curva $v-t$ para barcaza. *b*) Determínese la posición final de la barcaza. *c*) Dete mínese la posición final de la caja sobre la cubierta de la barcaz

13.135 El automóvil A se dirigía hacia el norte en un cruce cuando el automóvil B que se dirigía hacia el este le pegó en el costado. Aunque ambos conductores reconocen no haber obedecido las señales de alto total del cruce, los dos afirman que conducían al límite de velocidad de 35 mi/h y que el otro iba mucho más rápido. Sabiendo que el automóvil A pesa 2000 lb, el B 3600 lb y que la inspección de la escena del accidente indica que, a causa del impacto, los dos automóviles quedaron unidos y patinaron en una dirección de 40° hacia el norte desde el este, encuéntrese *a*) cuál de los automóviles se movía realmente a 35 mi/h y *b*) la velocidad del otro automóvil.

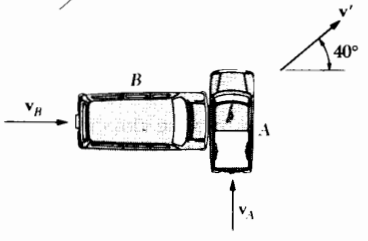


Fig. P13.135

13.136 Un antiguo cañón de 3000 lb dispara un proyectil de 18 lb con una velocidad de 1500 ft/s a un ángulo de 30°. El cañón se halla sobre una superficie horizontal y puede moverse libremente sobre ella. Supóngase que el cañón está unido rígidamente a la cureña (es decir, que no tiene ningún mecanismo de retroceso) y que el proyectil sale del cañón 5 ms después del disparo. Determínense *a*) la velocidad de retroceso del cañón y *b*) la resultante **R** de las fuerzas de percusión verticales aplicadas por el suelo al cañón.

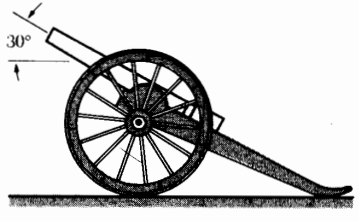


Fig. P13.136

13.137 Un remache pequeño que une placas metálicas se aplasta golpeándolo con un martillo. Encuéntrese el impulso aplicado al remache y la energía que se absorbe en cada golpe, si se sabe que la cabeza del martillo tiene una masa de 750 g y que le pega al remache con una velocidad de 6 m/s. Supóngase que el martillo no rebota y que el yunque está apoyado en resortes y *a*) tiene una masa infinita (soporte rígido) y *b*) tiene una masa de 4 kg.

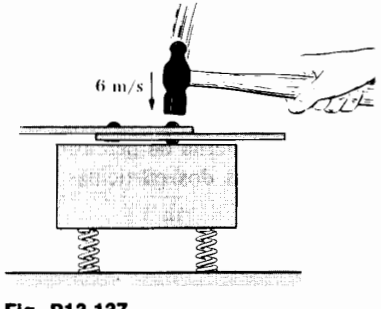


Fig. P13.137

13.138 Una pieza se forja en un pequeño yunque. El martillo pesa 400 lb y se lanza desde una altura de 5 ft, determínese el impulso inicial ejercido sobre la pieza, suponiendo que el yunque de 1000 lb *a*) descansa directamente sobre piso duro y *b*) se sostiene sobre resortes.

13.12. Choques. Una colisión entre dos cuerpos que ocurre durante un intervalo muy pequeño y durante el cual los dos cuerpos ejercen entre sí fuerzas relativamente grandes, recibe el nombre de un *choque*. La normal común a las superficies en contacto durante el impacto se llama la *línea de choque*. Si los centros de masa de los dos cuerpos que chocan se localizan sobre esta línea, el choque es un *choque central*. En caso contrario, se dice que el choque es *excéntrico*. Limitaremos nuestro estudio al choque central de dos partículas y pospondremos el análisis del choque excéntrico de dos sólidos rígidos (Secc. 17.12).

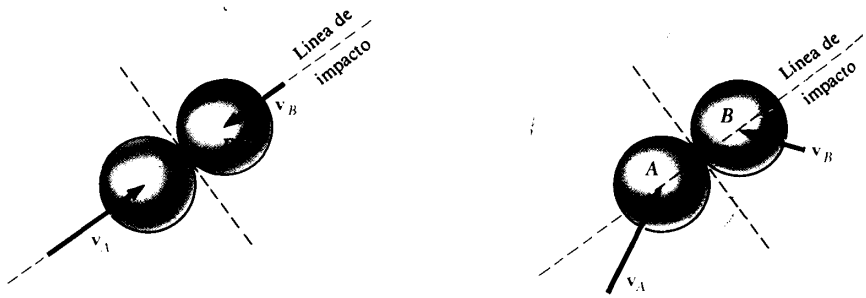
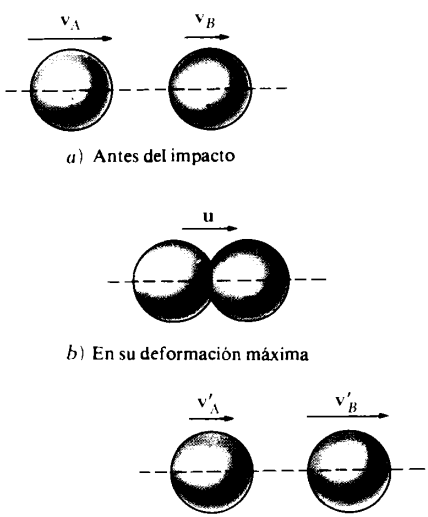


Fig. 13.20 *a*) Impacto central directo *b*) Impacto central oblicuo

Si las velocidades de las dos partículas están dirigidas a lo largo de la línea de choque, se dice que *el choque es directo* (Fig. 13.20*a*). Por otro lado, si una o ambas partículas se mueven en una línea que no sea la de choque, se dice que el *choque es oblicuo* (Fig. 13.20*b*).

13.13. Choque central directo. Considérense dos partículas A y B, de masas m_A y m_B, que se mueven en la misma línea recta hacia la derecha con velocidades $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$ (Fig. 13.21*a*). Si $\mathbf{v}_A$ es mayor que $\mathbf{v}_B$, la partícula A golpeará finalmente a la B. Por el impacto, las dos partículas se *deformarán* y, al final del periodo de deformación, tendrán la misma velocidad $\mathbf{u}$ (Fig. 13.21*b*). Entonces ocurrirá un periodo de *restitución*, al final del cual las dos partículas habrán recuperado su forma original o quedarán deformadas permanentemente, dependiendo de la magnitud de las fuerzas de impacto y de los materiales de que estén hechas. Nuestro propósito ahora es encontrar las velocidades $\mathbf{v}'_A$ y $\mathbf{v}'_B$ de las partículas al final del periodo de restitución (Fig. 13.21*c*).



a) Antes del impacto

b) En su deformación máxima

c) Después del impacto

Fig. 13.21

Considérese primero a las dos partículas como un solo sistema, notando que no hay fuerza externa de percusión. Por consiguiente, el momento lineal total de las dos partículas se conserva y escribimos

$$m_A\mathbf{v}_A + m_B\mathbf{v}_B = m_A\mathbf{v}'_A + m_B\mathbf{v}'_B$$

Como todas las velocidades que consideramos están dirigidas a lo largo del mismo eje, podemos sustituir a la ecuación obtenida por la siguiente relación que contiene sólo componentes escalares:

$$m_Av_A + m_Bv_B = m_Av'_A + m_Bv'_B \tag{13.37}$$

Un valor positivo de cualquiera de las cantidades escalares v_a, v_B v'_A o v'_B significa que el vector correspondiente está dirigido hacia la derecha; un valor negativo indica que el vector correspondiente está dirigido hacia la izquierda.

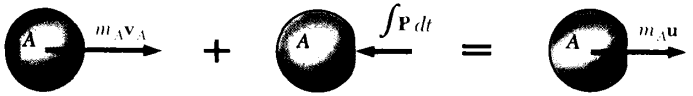
A fin de obtener las velocidades $\mathbf{v}'_A$ y $\mathbf{v}'_B$ es necesario primero establecer una segunda relación entre los escalares v'_A y v'_B. Con este propósito, consideraremos ahora el movimiento de la partícula A durante el periodo de deformación y aplicaremos el principio del impulso y del momento lineal. Como la única fuerza percusiva que actúa sobre A durante este periodo es la fuerza $\mathbf{P}$ aplicada por B (Fig. 13.22*a*), escribimos, usando otra vez las componentes escalares,

$$m_A v_A - \int P\,dt = m_A u \tag{13.38}$$

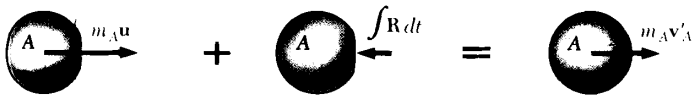
en la que la integral se extiende al periodo de la deformación. Considérese ahora el movimiento de A durante el periodo de restitución e indicando por $\mathbf{R}$ la fuerza aplicada sobre A por B durante este periodo (Fig. 13.22*b*), escribimos

$$m_A u - \int R\,dt = m_A v'_A \tag{13.39}$$

en la cual la integral se extiende al periodo de la restitución.



a) Periodo de deformación



b) Periodo de restitución

Fig. 13.22

En general, la fuerza $\mathbf{R}$ que se ejerce sobre A durante el periodo de restitución difiere de la fuerza $\mathbf{P}$ ejercida durante el periodo de deformación y la magnitud $\int R\,dt$ de su impulso es menor que la magnitud $\int P\,dt$ del impulso de $\mathbf{P}$. El cociente de las magnitudes de los impulsos que corresponden al periodo de restitución y al periodo de deformación, respectivamente, se denomina *coeficiente de restitución* y se indica por e. Escribimos

$$e = \frac{\int R\,dt}{\int P\,dt} \tag{13.40}$$

El valor del coeficiente e es siempre entre 0 y 1 y depende en gran medida de los dos materiales que intervienen. Sin embargo, también varía considerablemente con la velocidad del impacto, la forma y tamaño de los dos cuerpos que chocan.

Al resolver las ecuaciones (13.38) y (13.39) para los dos impulsos y sustituyendo en la ecuación (13.40), se obtiene

$$e = \frac{u - v'_A}{v_A - u} \tag{13.41}$$

Un análisis similar de la partícula B conduce a la relación

$$e = \frac{v'_B - u}{u - v_B} \tag{13.42}$$

Como los cocientes de (13.41) y (13.42) son iguales, también son iguales al cociente obtenido al sumar sus numeradores y sus denominadores, respectivamente. Por consiguiente, tenemos

$$e = \frac{(u - v'_A) + (v'_B - u)}{(v_A - u) + (u - v_B)} = \frac{v'_B - v'_A}{v_A - v_B}$$

y entonces

$$v'_B - v'_A = e(v_A - v_B) \tag{13.43}$$

Puesto que $v'_B - v'_A$ representa la velocidad relativa de las dos partículas después del choque y $v_A - v_B$ su velocidad relativa antes del choque, la fórmula (13.43) expresa que *la velocidad relativa de las dos partículas, después del choque puede obtenerse multiplicando su velocidad relativa antes del choque por el coeficiente de restitución*. Esta propiedad se utiliza experimentalmente para obtener el valor del coeficiente de restitución de dos materiales arbitrarios.

Ahora pueden obtenerse las velocidades de la dos partículas después del impacto al resolver las ecuaciones simultáneas (13.37) y (13.43) para v'_A y v'_B. Debe recordarse que la deducción de las ecuaciones (13.37) y (13.43) se basó en suponer que la partícula B se ubica a la derecha de A y que ambas partículas se movían inicialmente hacia la derecha. Si la partícula B se mueve inicialmente hacia la izquierda, se debe considerar al escalar v_B con signo negativo. La misma convención de signo se aplica a las velocidades después del choque: un signo positivo de v'_A indicará que la partícula A se mueve hacia la derecha después del impacto, mientras que un signo negativo, indica que se mueve hacia la izquierda.

Tienen un interés especial dos casos particulares de choques:

1. $e = 0$, *choque perfectamente plástico.* Cuando $e = 0$, la ecuación (13.43) da por resultado $v'_B = v'_A$. No hay periodo de restitución y las dos partículas permanecen unidas después del impacto. Al sustituir $v'_B = v'_A = v'$ en la ecuación (13.37), la cual expresa que el momento lineal total de las partículas se conserva, escribimos

$$m_A v_A + m_B v_B = (m_A + m_B)v' \tag{13.44}$$

Esta ecuación puede ser resuelta para obtener la velocidad común v' de las dos partículas después del choque.

2. $e = 1$, *choque perfectamente elástico.* Cuando $e = 1$, la ecuación (13.43) se reduce a

$$v'_B - v'_A = v_A - v_B \tag{13.45}$$

la cual expresa que las velocidades relativas antes y después del choque son iguales. Los impulsos recibidos por cada partícula durante el periodo de deformación y durante el periodo

de restitución son iguales. Después del choque, las partículas se alejan con la misma velocidad con la cual se acercaron antes del impacto. Pueden obtenerse las velocidades v'_A y v'_B al resolver las ecuaciones simultáneas (13.37) y (13.45).

Vale la pena observar que *en el caso de un choque perfectamente elástico, se conserva la energía total de las dos partículas*, y su momento lineal total. Las ecuaciones (13.37) y (13.45) pueden escribirse de la siguiente manera:

$$m_A(v_A - v'_A) = m_B(v'_B - v_B) \qquad (13.37')$$

$$v_A + v'_A = v_B + v'_B \qquad (13.45')$$

Al multiplicar (13.37′) y (13.45′) miembro a miembro, tenemos

$$m_A(v_A - v'_A)(v_A + v'_A) = m_B(v'_B - v_B)(v'_B + v_B)$$

$$m_A v_A^2 - m_A(v'_A)^2 = m_B(v'_B)^2 - m_B v_B^2$$

Reordenando los términos en la ecuación resultante y multiplicando por $\frac{1}{2}$, escribimos

$$\tfrac{1}{2}m_A v_A^2 + \tfrac{1}{2}m_B v_B^2 = \tfrac{1}{2}m_A(v'_A)^2 + \tfrac{1}{2}m_B(v'_B)^2 \qquad (13.46)$$

la cual expresa que la energía cinética de las partículas se conserva. Sin embargo, adviértase que *en el caso general de un choque,* es decir, cuando e no es igual a 1, *la energía total de las partículas no se conserva.* Esto puede demostrarse en cualquier caso particular al comparar las energías cinéticas antes y después del choque. La energía cinética perdida se transforma parcialmente en calor y se consume en la generación de ondas elásticas en los dos cuerpos que chocan.

13.14. Choque central oblicuo. Consideremos ahora el caso en el que las velocidades de las dos partículas que chocan *no* están dirigidas a lo largo de la línea de choque (Fig. 13.23). Como se

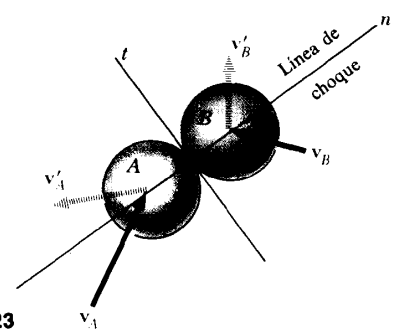


Fig. 13.23

indicó en la sección 13.12, se dice que el impacto es *oblicuo*. Puesto que las velocidades $\mathbf{v}'_A$ y $\mathbf{v}'_B$ de las partículas después del impacto son de dirección y módulo desconocidos, su determinación necesitará que se usen cuatro ecuaciones independientes.

Elegimos como ejes coordenados el eje n a lo largo de la línea de choque, es decir, a lo largo de la normal común a las superficies en contacto, y el eje t a lo largo de su tangente común. Suponiendo que las partículas son perfectamente *lisas* y que *no hay rozamiento*

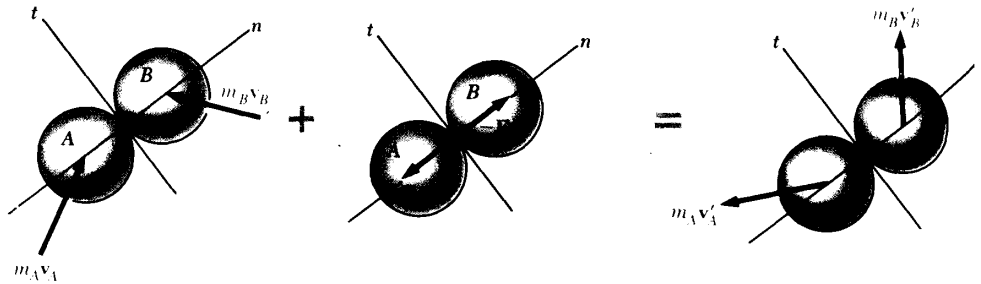
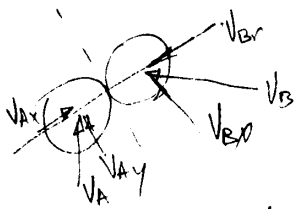


Fig. 13.24



$$m_A V_{Ax} + m_B V_{Bx} = m_A V'_{Ax} + m_B V'_{Bx}$$

$$e = \frac{V'_{Bx} - V'_{Ax}}{V_{Ax} - V_{Bx}}$$

$$V_{Ay} = V'_{Ay}$$

$$V_{By} = V'_{By}$$

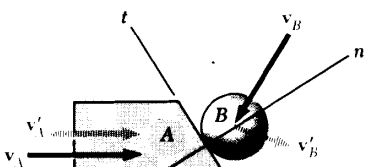


Fig. 13.25

entre ellas, observamos que los únicos impulsos aplicados a las partícul durante el choque son causados por fuerzas internas dirigidas a lo lar de la línea de choque, o sea a lo largo del eje *n* (Fig. 13.24). Entonc

1. La componente a lo largo del eje *t* del momento lineal cada partícula, consierada por separado, se conserva; consecuencia, la componente *t* de la velocidad de cada pa tícula no se altera. Escribimos

$$(v_A)_t = (v'_A)_t \qquad (v_B)_t = (v'_B)_t \qquad (13.4$$

2. La componente a lo largo del eje *n* del momento lineal tot de las dos partículas se conserva. Escribimos

$$m_A(v_A)_n + m_B(v_B)_n = m_A(v'_A)_n + m_B(v'_B)_n \qquad (13.4$$

3. Se obtiene la componente a lo largo del eje *n* de la velocid relativa de las dos partículas después del choque, multipl cando la componente *n* de su velocidad relativa antes d choque por el coeficiente de restitución. En efecto, una d ducción similar a la dada en la sección 13.13 en el caso d choque central directo produce

$$(v'_B)_n - (v'_A)_n = e[(v_A)_n - (v_B)_n] \qquad (13.4$$

En consecuencia, hemos obtenido cuatro ecuaciones indepe dientes que pueden resolverse para obtener las componentes de l velocidades de *A* y de *B* después del choque. Este método de soluci se ejemplifica en el problema resuelto 13.15.

Nuesto análisis del choque central oblicuo de dos partículas se h basado hasta este punto en suponer que ambas partículas se movía libremente antes y después del choque. Ahora examinaremos el cas en el que una de las partículas, o ambas, tienen alguna restricción e su movimiento. Por ejemplo, considérese el choque entre el bloqu *A*, que está restringido a moverse en el plano horizontal y la pelota *B* que puede moverse libremente en el plano de la figura (Fig. 13.25 Supóngase que no hay rozamiento entre el bloque y la pelota, entre el bloque y la superficie horizontal; notamos que los impulso aplicados al sistema consisten en los impulsos de las fuerzas interna **F** y $-\mathbf{F}$ dirigidas a lo largo de la línea de choque, es decir, a lo larg del eje *n*, y del impulso de la fuerza externa $\mathbf{F}_{ext}$ ejercida por la supe ficie horizontal sobre el bloque *A* y dirigida a lo largo de la vertic (Fig. 13.26).

Las velocidades del bloque *A* y de la pelota *B* inmediatament después del choque están representadas por tres incógnitas, a sabe

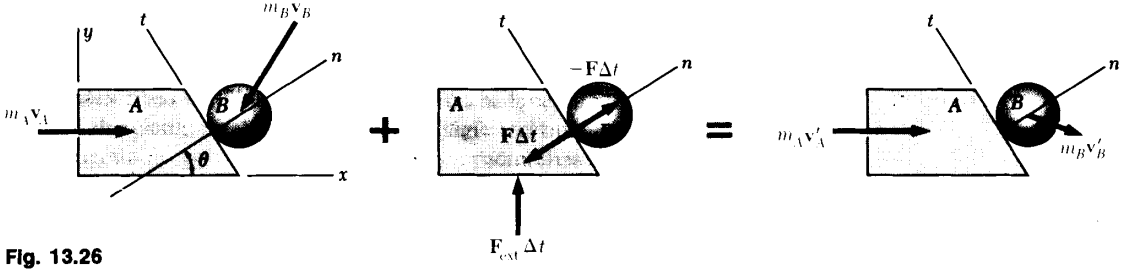


Fig. 13.26

el módulo de la velocidad v'_A del bloque A, la cual se sabe que es horizontal, y el módulo y dirección de la velocidad v'_B de la pelota B. En consecuencia, escribiremos tres ecuaciones que expresen que

1. La componente a lo largo del eje t del momento lineal de la pelota B se conserva; por lo tanto, la componente t de la velocidad de la pelota B no se altera. Escribimos

$$(v_B)_t = (v'_B)_t \tag{13.50}$$

2. La componente a lo largo del eje x horizontal del momento lineal total del bloque A y de la pelota B se conserva. Escribimos

$$m_A v_A + m_B(v_B)_x = m_A v'_A + m_B(v'_B)_x \tag{13.51}$$

3. La componente de la velocidad relativa del bloque A y la pelota B a lo largo del eje n después del choque, se obtiene multiplicando la componente n de su velocidad relativa antes del choque por el coeficiente de restitución. Escribimos otra vez

$$(v'_B)_n - (v'_A)_n = e[(v_A)_n - (v_B)_n] \tag{13.49}$$

No obstante, debemos recalcar que en el caso aquí considerado no puede establecerse la validez de la ecuación (13.49) mediante una simple extensión de la deducción dada en la sección (13.13) para el choque central directo de dos partículas que se mueven en una línea recta. De hecho, tales partículas no estaban sometidas a ningún impulso externo, mientras que el bloque A de este análisis está sujeto al impulso ejercido por la superficie horizontal. Para demostrar que la ecuación (13.49) sigue siendo válida, primero debemos aplicar el principio del impulso y del momento lineal al bloque A durante el período de deformación (Fig. 13.27). Si se consideran únicamente las componentes horizontales, entonces

$$m_A v_A - (\int P\,dt)\cos\theta = m_A u \tag{13.52}$$

en donde la integral se extiende al periodo de deformación y $\mathbf{u}$ representa la velocidad del bloque A al final de dicho periodo. Si ahora se

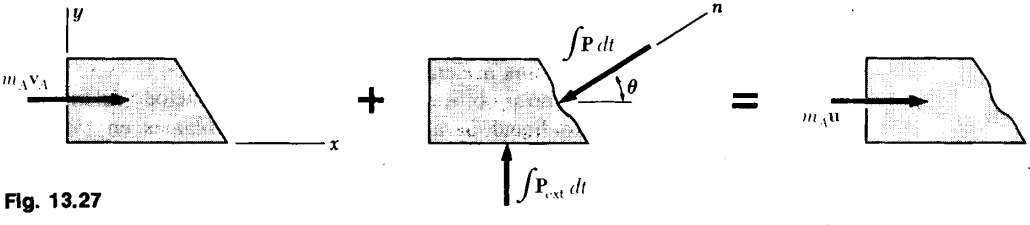


Fig. 13.27

considera el periodo de restitución, escribimos de manera similar

$$m_A u - (\int R\,dt)\cos\theta = m_A v'_A \tag{13.53}$$

en donde la integral se extiende sobre el periodo de restitución.

Recordando la definición del coeficiente de restitución de la sección 13.13, escribimos

$$e = \frac{\int R\,dt}{\int P\,dt} \tag{13.40}$$

Despejando de las ecuaciones (13.52) y (13.53) las integrales $\int P\,dt$ y $\int R\,dt$ y sustituyendo en la ecuación (13.40), tenemos, después de simplificar,

$$e = \frac{u - v'_A}{v_A - u}$$

o bien, al multiplicar todas las velocidades por $\cos\theta$ con el fin de obtener sus proyecciones sobre la línea de choque

$$e = \frac{u_n - (v'_A)_n}{(v_A)_n - u_n} \tag{13.54}$$

Obsérvese que la ecuación (13.54) es idéntica a la ecuación (13.41) de la sección 13.13, excepto por los subíndices n que se usaron aquí para indicar que estamos considerando las componentes de la velocidad a lo largo de la línea de choque. Como no hay restricciones sobre el movimiento de la pelota B, puede completarse la demostración de la ecuación (13.49) de la misma manera que en la sección 13.13 se dedujo la ecuación (13.43). De esta manera, concluimos que la relación (13.49) entre las componentes de las velocidades relativas de dos partículas que chocan a lo largo de la línea de choque, continúa siendo válida cuando una de las partículas tiene restricciones en su movimiento. Con facilidad se puede extender la validez de esta relación al caso en el que ambas partículas tienen restricciones en su movimiento.

13.15. Problemas en los que intervienen la energía y el momento lineal Tenemos ahora a nuestra disposición tres métodos diferentes para la solución de problemas cinéticos. La aplicación directa de la segunda ley de Newton, $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, el método del trabajo y la energía y el método del impulso y del momento lineal. Para sacarle el máximo provecho a estos tres métodos debemos saber escoger el que mejor se adapte a la solución de un problema dado. También debemos prepararnos para emplear diferentes métodos para la solución de distintas partes de un problema cuando tal procedimiento sea recomendable.

Ya vimos que el método del trabajo y la energía es en la mayor parte de los casos más expedito que la aplicación directa de la segunda ley de Newton. Sin embargo, como se indicó en la sección 13.4, tal método tiene sus limitaciones y algunas veces se debe complementar con el uso de $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Este es por ejemplo, el caso cuando deseamos determinar una aceleración o una fuerza normal.

En general no se obtiene gran ventaja al usar el método del impulso y el momento lineal para la solución de problemas en los que no intervienen fuerzas de percusión. En general encontramos que la ecuación $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ nos lleva a una solución igualmente rápida, y que, si es aplicable, el método del trabajo y la energía es

incluso más rápido y más conveniente. Sin embargo, el método del impulso y del momento lineal es el único método práctico en problamas de choques. Una solución basada en la aplicación directa de $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ sería tediosa y, por otro lado, el método del trabajo y la energía no podría usarse, ya que un impacto (a menos que sea perfectamente elástico) presenta una pérdida de energía mecánica.

En muchos problemas intervienen solamente fuerzas conservativas, excepto durante una fase breve durante el choque en el cual actúan fuerzas de percusión. La solución de tales problemas puede dividirse en varias partes. Mientras la parte correspondiente a la fase del choque requiere el uso del método del impulso y del momento lineal y de la relación entre las velocidades relativas, las otras partes pueden resolverse usualmente por el método del trabajo y la energía, pero el uso de la ecuación $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ será necesario si el problema requiere la determinación de una fuerza normal.

Considérese, por ejemplo, un péndulo A de masa m_A y longitud l que se suelta sin velocidad desde una posición A_1 (Fig. 13.28*a*). El péndulo oscila libremente en un plano vertical hasta que golpea con un segundo péndulo B de masa m_B y la misma longitud l, que está inicialmente en reposo. Después del impacto (con coeficiente de restitución e), el péndulo B oscila hasta un ángulo θ que deseamos determinar.

La solución del problema puede dividirse en tres partes:

1. *El péndulo A oscila desde A_1 hasta A_2.* Puede usarse el principio de conservación de energía para determinar la velocidad $(\mathbf{v}_A)_2$ del péndulo en A_2 (Fig. 13.28*b*).
2. *El péndulo A golpea el péndulo B.* Usando el hecho de que el momento lineal total de los dos péndulos se conserva, y la relación entre sus velocidades relativas, determinamos las velocidades $(\mathbf{v}_A)_3$ y $(\mathbf{v}_B)_3$ de los dos péndulos después del choque (Fig. 13.28*c*).
3. *El péndulo B oscila desde B_3 hasta B_4.* Aplicando el principio de conservación de la energía al péndulo B, determinamos la máxima elevación y_4 alcanzada por ese péndulo (Fig. 13.28*d*). El ángulo θ puede determinarse entonces por trigonometría.

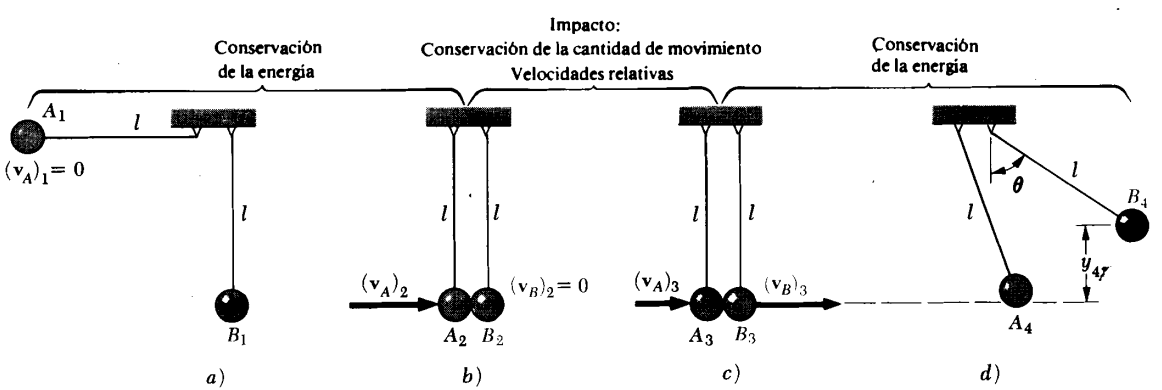


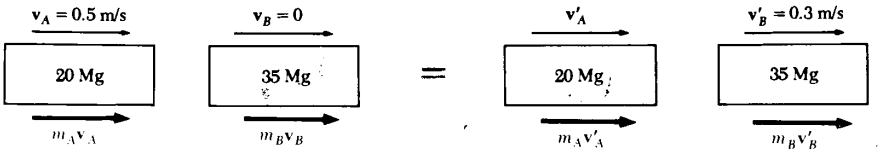
Fig. 13.28

Nótese que el método de solución que acabamos de describir debe complementarse con el uso de $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ si se desean determinar las tensiones en las cuerdas que sostienen los péndulos.

PROBLEMA RESUELTO 13.13

Un vagón de ferrocarril de 20 Mg que se mueve con una velocidad de 0.5 m/s hacia la derecha, choca con un vagón de 35 Mg que se encuentra en reposo. Si después del choque se observa que el vagón de 35 Mg se mueve hacia la derecha con una velocidad de 0.3 m/s, determínese el coeficiente de restitución entre los dos vagones.

Solución. Expresamos que el momento lineal total de los dos vagones se conserva.



$$m_A\mathbf{v}_A + m_B\mathbf{v}_B = m_A\mathbf{v}'_A + m_B\mathbf{v}'_B$$

$$(20\text{ Mg})(+0.5\text{ m/s}) + (35\text{ Mg})(0) = (20\text{ Mg})v'_A + (35\text{ Mg})(+0.3\text{ m/s})$$

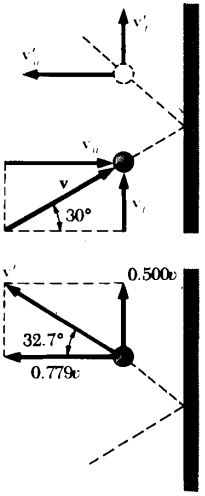
$$v'_A = -0.025\text{ m/s} \qquad \mathbf{v}'_A = 0.025\text{ m/s} \leftarrow$$

El coeficiente de restitución se obtiene al escribir

$$e = \frac{v'_B - v'_A}{v_A - v_B} = \frac{+0.3 - (-0.025)}{+0.5 - 0} = \frac{0.325}{0.5} \qquad e = 0.65 \blacktriangleleft$$

PROBLEMA RESUELTO 13.14

Una pelota se lanza contra una pared vertical lisa (sin rozamiento). Inmediatamente antes de que la pelota pegue en la pared, su velocidad tiene un módulo v y forma un ángulo de 30° con la horizontal. Si $e = 0.90$, determínense el módulo y la dirección de la velocidad de la pelota cuando rebota de la pared.



Solución. Descomponemos la velocidad inicial de la pelota en sus componentes perpendicular y paralela a la pared, respectivamente:

$$v_n = v\cos 30° = 0.866v \qquad v_t = v\,\text{sen}\,30° = 0.500v$$

Movimiento paralelo a la pared. Como la pared es lisa, el impulso que ejerce sobre la pelota es perpendicular a ella. Entonces se conserva la componente, paralela a la pared, del momento lineal de la pelota y tenemos

$$\mathbf{v}'_t = \mathbf{v}_t = 0.500v \uparrow$$

Movimiento perpendicular a la pared. Puesto que la masa de la pared (y de la Tierra) es esencialmente infinita, la expresión de que el momento lineal total de la pared y la pelota se conserva, no proporcionará información útil. Usando la relación (13.49) entre las velocidades relativas, escribimos

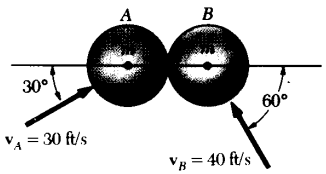
$$0 - v'_n = e(v_n - 0)$$

$$v'_n = -0.90(0.866v) = -0.779v \qquad \mathbf{v}'_n = 0.779v \leftarrow$$

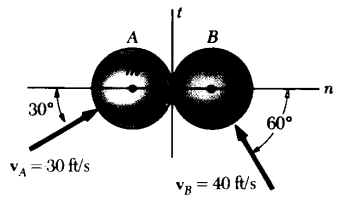
Movimiento resultante. Sumando vectorialmente las componentes $\mathbf{v}'_n$ y $\mathbf{v}'_t$,

$$\mathbf{v}' = 0.926v \measuredangle 32.7° \blacktriangleleft$$

PROBLEMA RESUELTO 13.15



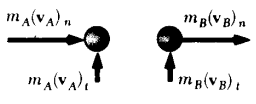
En la figura se muestra el módulo y dirección de las velocidades de dos pelotas idénticas sin rozamiento antes de chocar entre sí. Suponiendo que $e = 0.90$, determínense el módulo y dirección de la velocidad de cada pelota después del choque.

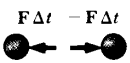


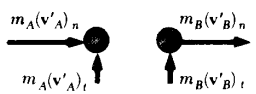
Solución. Las fuerzas de percusión que actúan entre las dos pelotas durante el choque están dirigidas a lo largo de una línea que une los centros de las pelotas, llamada *línea de choque*. Descomponiendo las velocidades en sus componentes dirigidas a lo largo de la línea de choque y a lo largo de la tangente común a las superficies de contacto, respectivamente, escribimos

$$\begin{aligned}(v_A)_n &= v_A \cos 30° = +26.0 \text{ ft/s}\\ (v_A)_t &= v_A \operatorname{sen} 30° = +15.0 \text{ ft/s}\\ (v_B)_n &= -v_B \cos 60° = -20.0 \text{ ft/s}\\ (v_B)_t &= v_B \operatorname{sen} 60° = +34.6 \text{ ft/s}\end{aligned}$$

Principio del impulso y del momento lineal. En los diagramas adjuntos mostramos en sucesión los momentos lineales iniciales, los impulsos y los momentos lineales finales.







Movimiento a lo largo de la tangente común. Si sólo se consideran las componentes t entonces aplicamos el principio del impulso y del momento lineal a cada pelota por *separado*. Como las fuerzas de percusión están dirigidas a lo largo de la línea de choque, la componente t del momento lineal y por lo tanto, la componente t de la velocidad de cada pelota no cambia. Tenemos

$$(v'_A)_t = 15.0 \text{ ft/s} \uparrow \qquad (v'_B)_t = 34.6 \text{ ft/s} \uparrow$$

Movimiento a lo largo de la línea de choque. En la dirección n consideramos las dos pelotas como un solo sistema y notamos que por la tercera ley de Newton los impulsos internos son $\mathbf{F}\,\Delta t$ y $-\mathbf{F}\,\Delta t$, respectivamente, y se anulan. Escribimos entonces que el momento lineal total de las pelotas se conserva:

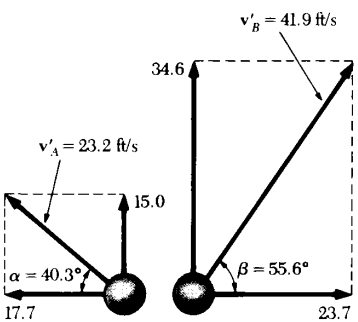
$$\begin{aligned}m_A(v_A)_n + m_B(v_B)_n &= m_A(v'_A)_n + m_B(v'_B)_n\\ m(26.0) + m(-20.0) &= m(v'_A)_n + m(v'_B)_n\\ (v'_A)_n + (v'_B)_n &= 6.0 \quad (1)\end{aligned}$$

Usando la relación (13.49) entre las velocidades relativas, escribimos

$$\begin{aligned}(v'_B)_n - (v'_A)_n &= e[(v_A)_n - (v_B)_n]\\ (v'_B)_n - (v'_A)_n &= (0.90)[26.0 - (-20.0)]\\ (v'_B)_n - (v'_A)_n &= 41.4 \quad (2)\end{aligned}$$

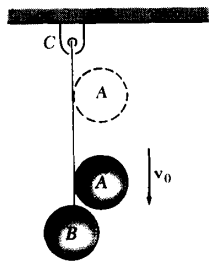
Resolviendo las ecuaciones simultáneas (1) y (2), obtenemos

$$\begin{aligned}(v'_A)_n &= -17.7 & (v'_B)_n &= +23.7\\ (v'_A)_n &= 17.7 \text{ ft/s} \leftarrow & (v'_B)_n &= 23.7 \text{ ft/s} \rightarrow\end{aligned}$$



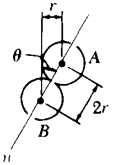
Movimiento resultante. Sumando vectorialmente las componentes de velocidad de cada pelota, obtenemos

$$v'_A = 23.2 \text{ ft/s} \measuredangle 40.3° \qquad v'_B = 41.9 \text{ ft/s} \measuredangle 55.6° \blacktriangleleft$$

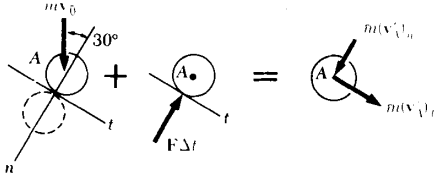


PROBLEMA RESUELTO 13.16

La pelota *B* está colgando de una cuerda *BC* inextensible. Una pelota idéntica *A* se suelta desde el reposo cuando está apenas tocando la cuerda y adquiere una velocidad $\mathbf{v}_0$ antes de chocar con la pelota *B*. Supóngase que el choque es perfectamente elástico ($e = 1$) y sin rozamiento. Determínese la velocidad de cada pelota inmediatamente después del choque.



$$\text{sen } \theta = \frac{r}{2r} = 0.5 \qquad \theta = 30°$$



Solución. Como la pelota *B* está restringida a moverse en un círculo de centro *C*, su velocidad $\mathbf{v}'_B$ después del impacto debe ser horizontal. Así pues, en el problema intervienen tres incógnitas: el módulo v'_B de la velocidad de *B*, y el módulo y la dirección de la velocidad $\mathbf{v}'_A$ de *A* después del impacto.

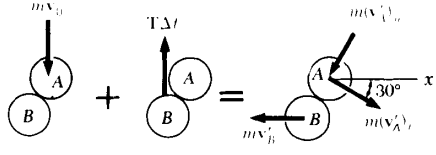
Principio del impulso-momento lineal: pelota A

$$m\mathbf{v}_A + \mathbf{F}\,\Delta t = m\mathbf{v}'_A$$

$+\searrow$ componentes t: $\quad mv_0 \operatorname{sen} 30° + 0 = m(v'_A)_t$

$$(v'_A)_t = 0.5v_0 \tag{1}$$

Nótese que la ecuación usada expresa la conservación del momento lineal de la pelota *A* a lo largo de la tangente común a las pelotas *A* y *B*.



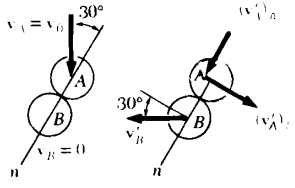
Principio del impulso-momento lineal: pelotas A y B.

$$m\mathbf{v}_A + \mathbf{T}\,\Delta t = m\mathbf{v}'_A + m\mathbf{v}'_B$$

$\overset{+}{\rightarrow}$ componentes x: $\quad 0 = m(v'_A)_t \cos 30° - m(v'_A)_n \operatorname{sen} 30° - mv'_B$

Obsérvese que la ecuación obtenida expresa la conservación del momento lineal total en la dirección x. Sustituyendo el valor de (v'_A) de la ecuación (1) y reordenando los términos, escribimos

$$0.5(v'_A)_n + v'_B = 0.433v_0 \tag{2}$$



Velocidades relativas a lo largo de la línea del choque. Como $e = 1$, la ecuación (13.49) da

$$(v'_B)_n - (v'_A)_n = (v_A)_n - (v_B)_n$$

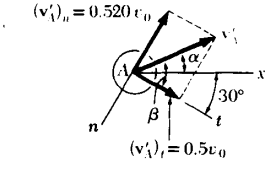
$$v'_B \operatorname{sen} 30° - (v'_A)_n = v_0 \cos 30° - 0$$

$$0.5v'_B - (v'_A)_n = 0.866v_0 \tag{3}$$

Resolviendo las ecuaciones simultáneas (2) y (3), obtenemos

$$(v'_A)_n = -0.520v_0 \qquad v'_B = 0.693v_0$$

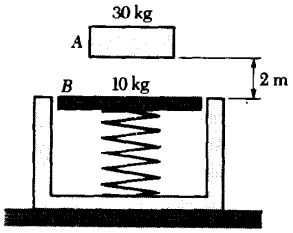
$$\mathbf{v}'_B = 0.693v_0 \leftarrow$$



Recordando la ecuación (1) trazamos el esquema adjunto y obtenemos por trigonometría

$$v'_A = 0.721v_0 \qquad \beta = 46.1° \qquad \alpha = 46.1° - 30° = 16.1°$$

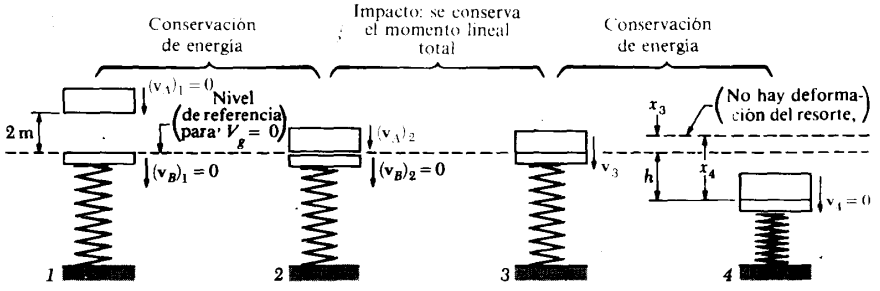
$$\mathbf{v}'_A = 0.721v_0 \measuredangle 16.1° \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESUELTO 13.17

Un bloque de 30 kg se deja caer desde una altura de 2 m sobre el plato de 10 kg de una báscula de resorte. Considérese que el choque es perfectamente plástico y determínese el desplazamiento máximo del plato. La constante del resorte es $k = 20$ kN/m.

Solución. El choque entre el bloque y el plato *debe* tratarse separadamente; por consiguiente dividimos la solución en tres partes.



Conservación de la energía. Bloque: $W_A = (30\text{ kg})(9.81\text{ m/s}^2) = 294\text{ N}$

$$T_1 = \tfrac{1}{2}m_A(v_A)_1^2 = 0 \qquad V_1 = W_A y = (294\text{ N})(2\text{ m}) = 588\text{ J}$$

$$T_2 = \tfrac{1}{2}m_A(v_A)_2^2 = \tfrac{1}{2}(30\text{ kg})(v_A)_2^2 \qquad V_2 = 0$$

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2: \qquad 0 + 588\text{ J} = \tfrac{1}{2}(30\text{ kg})(v_A)_2^2 + 0$$

$$(v_A)_2 = +6.26\text{ m/s} \qquad (\mathbf{v}_A)_2 = 6.26\text{ m/s}\downarrow$$

Choque: conservación del momento lineal. Como el choque es perfectamente plástico $e = 0$; el bloque y el plato se mueven juntos después del impacto.

$$m_A(v_A)_2 + m_B(v_B)_2 = (m_A + m_B)v_3$$

$$(30\text{ kg})(6.26\text{ m/s}) + 0 = (30\text{ kg} + 10\text{ kg})v_3$$

$$v_3 = +4.70\text{ m/s} \qquad \mathbf{v}_3 = 4.70\text{ m/s}\downarrow$$

Conservación de la energía. Inicialmente, el resorte sostiene el peso W_B del plato, así que la deformación inicial del resorte es

$$x_3 = \frac{W_B}{k} = \frac{(10\text{ kg})(9.81\text{ m/s}^2)}{20 \times 10^3\text{ N/m}} = \frac{98.1\text{ N}}{20 \times 10^3\text{ N/m}} = 4.91 \times 10^{-3}\text{ m}$$

Representando por x_4 a la deformación total máxima del resorte, escribimos

$$T_3 = \tfrac{1}{2}(m_A + m_B)v_3^2 = \tfrac{1}{2}(30\text{ kg} + 10\text{ kg})(4.70\text{ m/s})^2 = 442\text{ J}$$

$$V_3 = V_g + V_e = 0 + \tfrac{1}{2}kx_3^2 = \tfrac{1}{2}(20 \times 10^3)(4.91 \times 10^{-3})^2 = 0.241\text{ J}$$

$$T_4 = 0$$

$$V_4 = V_g + V_e = (W_A + W_B)(-h) + \tfrac{1}{2}kx_4^2 = -(392)h + \tfrac{1}{2}(20 \times 10^3)x_4^2$$

Nótese que el desplazamiento del plato es $h = x_4 - x_3$, entonces

$$T_3 + V_3 = T_4 + V_4:$$

$$442 + 0.241 = 0 - 392(x_4 - 4.91 \times 10^{-3}) + \tfrac{1}{2}(20 \times 10^3)x_4^2$$

$$x_4 = 0.230\text{ m} \qquad h = x_4 - x_3 = 0.230\text{ m} - 4.91 \times 10^{-3}\text{ m}$$

$$h = 0.225\text{ m} \qquad h = 225\text{ mm} \blacktriangleleft$$

Problemas

13.139 Se sabe que el coeficiente de restitución entre los dos collarines es de 0.80. Determínense *a*) sus velocidades después del choque y *b*) la energía perdida durante el choque.

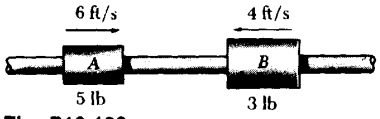


Fig. P13.139

13.140 Resuélvase el problema 13.139 suponiendo que la velocidad del collarín B es 2 ft/s hacia la derecha.

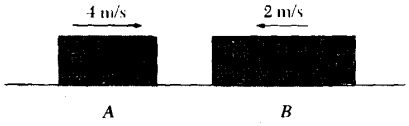


Fig. P13.141 y P13.142

13.141 Dos bloques de acero deslizan sin fricción sobre una superficie horizontal e inmediatamente antes del choque sus velocidades son como se indica. Si $e = 0.75$, determínense *a*) sus velocidades después del choque y *b*) la pérdida de energía durante el choque.

13.142 Las velocidades de dos bloques de acero antes del choque son como se indica; si después del choque se observa que la velocidad del bloque B es de 2.5 m/s hacia la derecha, determínense el coeficiente de restitución entre los dos bloques.

13.143 Dos automóviles idénticos B y C están en reposo sobre un puentecillo de acero (pasarela de embarcar) con sus frenos sin aplicar. El automóvil A del mismo modelo que ha sido empujado por los trabajadores del muelle pega en el automóvil B con una velocidad de 1.5 m/s, provocando una serie de choques entre los tres automóviles. Suponiendo un coeficiente de restitución $e = 0.75$ entre las defensas, determínese la velocidad de cada automóvil después de que han tenido lugar todos los choques.

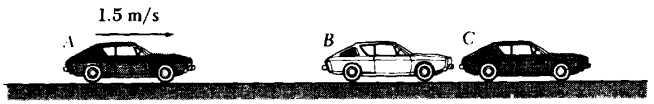


Fig. P13.143

13.144 Resuélvase el problema 13.143 suponiendo que el coeficiente de restitución entre el automóvil A y B es $e = 0.50$ y entre el automóvil B y C es $e = 1.00$.

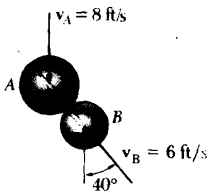


Fig. P13.145

13.145 Una pelota A de 2.5 lb cae verticalmente con una velocidad $v_A = 8$ ft/s cuando es golpeada en la forma indicada con una pelota B de 1.5 lb que tiene una velocidad v_B de 6 ft/s. Si el coeficiente de restitución entre las dos pelotas es $e = 0.75$ y si se supone que el rozamiento es nulo, determínese la velocidad de cada pelota inmediatamente después del choque.

13.146 Dos discos de hockey idénticos A y B de 3 in de diámetro se pueden mover libremente sobre una cancha de hockey. El disco B está en reposo y el disco A tiene una velocidad inicial $\mathbf{v} = v_0\mathbf{i}$. *a*) Si $b = 1.5$ in y $e = 0.80$, determínese la velocidad de cada disco después del choque. *b*) Demuéstrese que, si $e = 1$, las velocidades finales de los discos forman un ángulo recto para todos los valores de b.

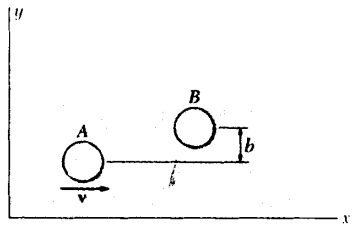


Fig. P13.146

13.147 Dos bolas de billar idénticas pueden moverse libremente sobre una mesa horizontal. La bola A tiene una velocidad v_0, como se muestra en la figura, y golpea la bola B que se encuentra en reposo en un punto C, definido por $\theta = 45°$. Si el coeficiente de restitución entre las dos bolas es $e = 0.80$ y si se supone que no hay rozamiento, determínese la velocidad de cada bola después del choque.

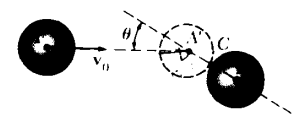


Fig. P13.147

13.148 Un jugador de billar desea que la bola A golpee a la bola B oblicuamente y después golpee de frente a la bola C. Supóngase un choque perfectamente elástico ($e = 1$); sea r el radio de las bolas y d la distancia entre los centros de B y C; determínese *a*) el ángulo θ que define el punto D donde la pelota B debe ser golpeada y *b*) el intervalo de valores de los ángulos ABC y ACB para los cuales esta jugada es posible.

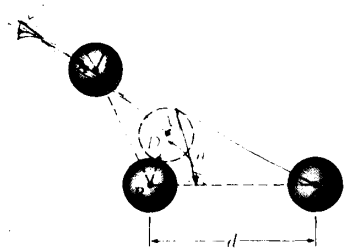


Fig. P13.148

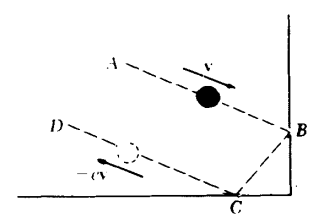


Fig. P13.149

13.149 Se lanza una pelota hacia una esquina de 90° con una velocidad inicial $\mathbf{v}$. Representando el coeficiente de restitución por e, demuéstrese que la velocidad final es ev y que las trayectorias inicial y final AB y CD son paralelas.

13.150 Uno de los requisitos para aceptar el uso de pelotas de tenis en competiciones oficiales es que, al ser lanzadas sobre una superficie rígida desde una altura de 100 in, la altura del primer rebote de la pelota esté en el intervalo de 53 in $\leqslant h \leqslant$ 58 in. Determínese el intervalo de los coeficientes de restitución de las pelotas de tenis que satisfacen este requisito.

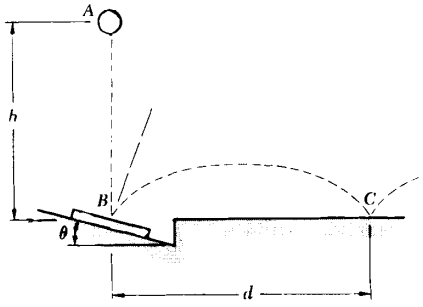


Fig. P13.151 y P13.152

13.151 Una pequeña pelota A se suelta desde una altura h sobre una placa rígida sin rozamiento en B y rebota al punto C que se encuentra a la misma altura que B. Si $\theta = 20°$ y el coeficiente de restitución entre la pelota y la placa es $e = 0.40$, determínese la distancia d.

13.152 Una pequeña pelota A se suelta desde una altura h sobre una placa rígida sin rozamiento en B y rebota al punto C que se encuentra a la misma altura que B. Determínese el valor de θ para el cual la distancia d es máxima y el valor correspondiente de d si el coeficiente de restitución es *a*) $e = 1$ y *b*) $e = 0.50$.

13.153 Una pelota se mueve con velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ y cae desde A, a una altura $h_0 = 40$ in de un suelo sin rozamiento. Sabiendo que la pelota choca en el piso a una distancia $d_0 = 6$ in de B y que el coeficiente de restitución entre la pelota y el piso es $e = 0.85$, determínense *a*) la altura h_1 y la longitud d_1 del primer rebote y *b*) la altura h_2 y longitud d_2 del segundo rebote.

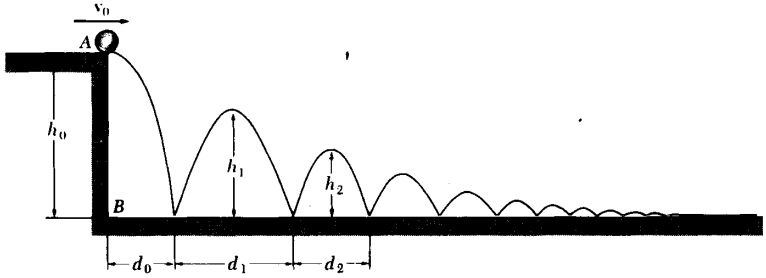


Fig. P13.153, P13.154, y P13.155

13.154 Una pelota se mueve con velocidad horizontal $\mathbf{v}_0$ y cae desde A, a una altura $h_0 = 25$ in de un piso sin rozamiento. Si la pelota pega en el piso a una distancia $d_0 = 5$ in de B y la altura de su primer rebote es $h_1 = 16$ in determínense *a*) el coeficiente de restitución entre la pelota y el piso *b*) la longitud d_1 del primer rebote.

13.155 Una pelota que se mueve con una velocidad horizontal $v_0 = 0.4$ m/s cae desde A a un piso sin rozamiento. Si la pelota pega en el piso a una distancia $d_0 = 80$ mm de B y si la longitud del primer rebote es $d_1 = 140$ mm, determínense *a*) el coeficiente de restitución entre la pelota y el piso y *b*) la altura h_1 del primer rebote.

13.156 En el problema 13.155, determínese cuánto tiempo permanecerá la pelota rebotando después de haber pegado por primera vez en el piso.

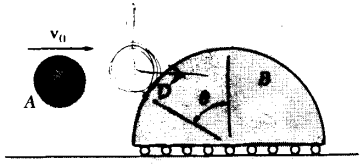


Fig. P13.157

13.157 Una esfera de 4 lb que se mueve a la derecha con velocidad de 5 ft/s golpea en D la superficie sin rozamiento de un medio cilindro de 10 lb que está en reposo. El medio cilindro descansa sobre rodillos y se puede mover libremente en la dirección horizontal. Si $e = 0.75$ y $\theta = 60°$, determínense las velocidades del medio cilindro y de la esfera inmediatamente después del choque.

13.158 Resuélvase el problema 13.157 suponiendo que $\theta = 30°$.

13.159 Una esfera A de masa $m_A = 2$ kg se suelta desde el reposo en la posición indicada y choca con la superficie inclinada de una cuña B sin rozamiento de masa $m_B = 6$ kg con una velocidad de módulo $v_0 = 3$ m/s. La cuña está soportada en rodillos de manera que puede moverse libremente en dirección horizontal y se encuentra inicialmente en reposo. Sabiendo que $\theta = 30°$ y que el coeficiente de restitución entre la esfera y la cuña es $e = 0.80$, determínense las velocidades de la esfera y la cuña inmediatamente después del choque.

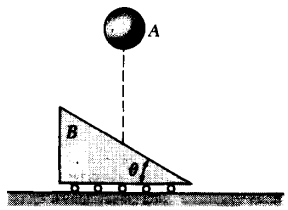


Fig. P13.159

13.160 Resuélvase el problema 13.159 suponiendo que $\theta = 60°$.

13.161 Para la esfera y la cuña del problema 13.159 determínese el ángulo θ de la cuña para el que la esfera rebota horizontalmente a la derecha, suponiendo que la cuña *a*) es libre de moverse en la dirección horizontal y *b*) está ligada rígidamente al piso.

13.162 Una esfera A de 1.5 lb se suelta desde el reposo cuando $\theta_A = 45°$ y golpea a una esfera B de 3 lb que está en reposo. Si el coeficiente de restitución es $e = 0.75$, determínense los valores de θ_A y θ_B correspondientes a las posiciones más altas que alcanzarán las esferas después del choque.

13.163 Una esfera A de 1.5 lb se suelta desde el reposo cuando $\theta_A = 70°$ y golpea a la esfera B de 3 lb que se encuentra en reposo. Sabiendo que la velocidad de la esfera A es cero después del choque, determínense *a*) el coeficiente de restitución e y *b*) el valor de θ_B correspondiente a la posición más alta que alcanza la esfera B.

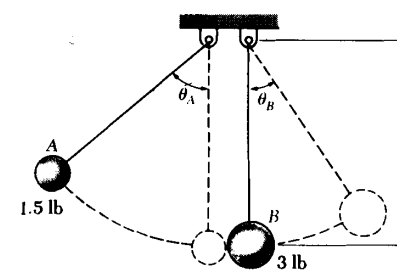


Fig. P13.162 y P13.163

13.164 Un bloque A de 6 kg se suelta desde el reposo cuando $l = 900$ mm, se mueve hacia abajo sobre el plano inclinado de 30° y golpea a un bloque B de 3 kg que se encuentra en reposo. El plano inclinado tiene pequeños rodillos y se puede despreciar la fricción entre el bloque A y el plano inclinado. Después del choque, cada bloque desliza hacia la izquierda y llega al reposo. Si se sabe que $e = 0.60$ y $\mu_k = 0.40$ entre cada bloque y la superficie horizontal, determínese hasta qué distancia deslizará cada bloque.

13.165 Un bloque A de 5 kg se suelta desde el reposo cuando $l = 800$ mm se mueve hacia abajo en un plano inclinado de 30° y golpea a un bloque B de 3 kg que se encuentra en reposo. El plano inclinado tiene pequeños rodamientos y la fricción entre el bloque A y el plano se puede despreciar. Si después del choque el bloque A desliza 240 mm a la izquierda y el bloque B desliza 1.2 m a la izquierda, determínense *a*) el coeficiente de restitución entre los dos bloques y *b*) el coeficiente de rozamiento entre los bloques y la superficie horizontal.

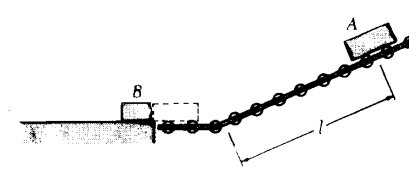


Fig. P13.164 y P13.165

13.166 Se dispara una bala de 20 g con una velocidad $v_0 = 600$ m/s contra un bloque de madera de 4.5 kg. Sabiendo que el coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque y el piso es 0.40, determínense *a*) la distancia que se moverá el bloque y *b*) el porcentaje de la energía inicial que se pierde por rozamiento entre el bloque y el piso.

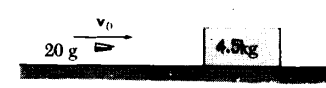


Fig. P13.166

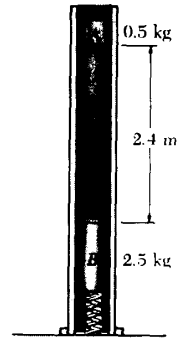


Fig. P13.167

13.167 El cilindro A se suelta desde 2.4 m sobre el cilindro B, que está en reposo sobre un resorte de constante $k = 3$ kN/m. Suponiendo un choque perfectamente plástico, determínense *a*) el máximo desplazamiento del cilindro B y *b*) la pérdida de energía durante el choque.

13.168 Se desea introducir un pilote de 300 lb en el suelo hasta que la resistencia a su penetración sea de 20 000 lb. Cada golpe del martillo de 1200 lb es el resultado de una caída libre de 3 ft sobre el pilote. Determínese cuánto se introducirá el pilote en el suelo cuando se haya alcanzado la resistencia de 20 000 lb. Supóngase que el choque es perfectamente plástico.

13.169 El martillo de 1200 lb de un martinete cae desde una altura de 3 ft sobre un pilote de 300 lb, el cual se introduce 4 in en el suelo. Suponiendo un choque perfectamente plástico, determínese la resistencia promedio del suelo a la penetración.

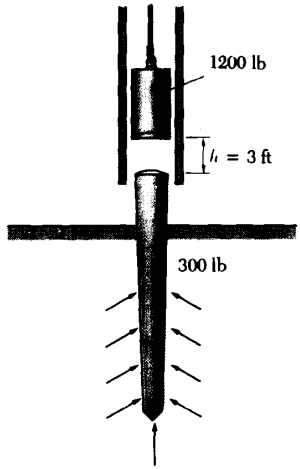


Fig. P13.168 y P13.169

13.170 Se deja caer una pelota de 35 g desde una altura h_0 sobre una placa de 140 g. Se observa que rebota hasta una altura h_1 = 580 mm cuando la placa se apoya directamente sobre el suelo duro, y hasta una altura h_2 = 160 mm cuando se coloca una capa de espuma de goma (caucho alveolar) entre la placa y el suelo. Obténganse *a*) el coeficiente de restitución entre la pelota y la placa, y *b*) la altura h_0 de la cual cae la pelota.

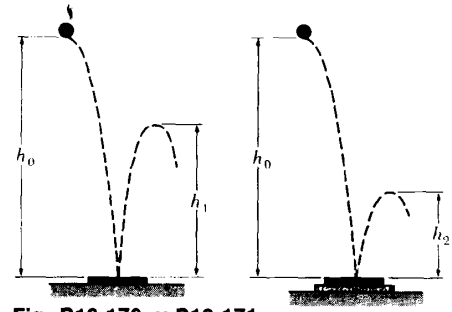


Fig. P13.170 y P13.171

13.171 Se deja caer una pelota de 35 g desde una altura h_0 = 600 mm sobre una pequeña placa. Se observa que la pelota rebota hasta una altura h_1 = 360 mm cuando la placa se apoya directamente sobre suelo duro y hasta una altura h_2 = 200 mm cuando se coloca una capa de espuma de goma (caucho alveolar) entre la placa y el suelo. Determínense *a*) el coeficiente de restitución entre la pelota y la placa y *b*) la masa de la placa.

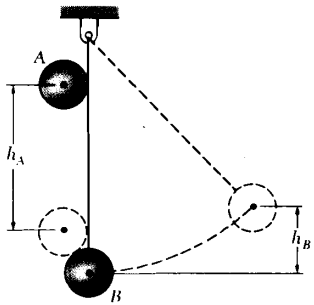


Fig. P13.172

13.172 La pelota B cuelga de un cordón inextensible. Se suelta desde el reposo una pelota idéntica A cuando toca el cordón y cae desde una altura $h_A = 200$ mm antes de golpear la pelota B. Supóngase un choque perfectamente elástico ($e = 1$) y que el rozamiento es nulo y determínese el desplazamiento vertical resultante máximo h_B de la pelota B.

13.173 Una esfera de 1.5 lb se mueve hacia la izquierda con una velocidad de 50 ft/s cuando golpea la superficie inclinada de un bloque B de 4 lb que se encuentra en reposo. El bloque se apoya en rodillos y está unido a un resorte de constante $k = 15$ lb/in. Si el coeficiente de restitución entre la esfera y el bloque es $e = 0.75$ y se desprecia la fricción, determínese la deformación máxima del resorte.

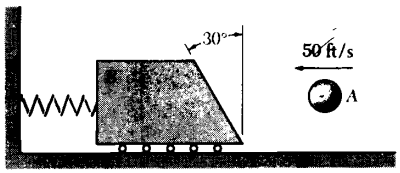


Fig. P13.173

13.174 Un parachoques se diseña de manera que proteja un automóvil de 2500 lb contra los daños al chocar contra una pared rígida a una velocidad de hasta 5 mi/h. Suponiendo un choque perfectamente plástico, obténgase *a*) la energía que absorbe el parachoques durante el choque y *b*) la velocidad a la que el automóvil puede chocar contra otro de 2500 lb sin sufrir daños si el otro aumóvil tiene una protección similar y está en reposo, con los frenos sin aplicar.

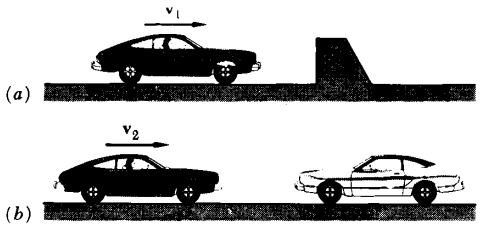


Fig. P13.174

*13.175 Una pelota de masa m_A que se mueve con velocidad $\mathbf{v}_A$ choca de frente con una segunda pelota de masa m_B en reposo. Sea e el coeficiente de restitución entre las dos pelotas; demuéstrese que el porcentaje de energía que se pierde durante el choque es

$$\frac{100(1 - e^2)}{1 + (m_A/m_B)}$$

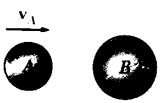


Fig. P13.175

Repaso y Resumen

Este capítulo trató del método del trabajo y la energía y el método del impulso y del momento lineal. En la primera mitad del capítulo se estudió el método del trabajo y la energía y sus aplicaciones al análisis del movimiento de partículas.

Trabajo de una fuerza

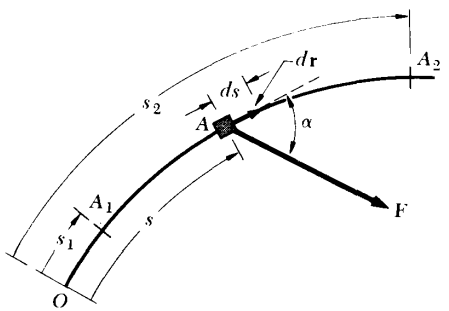


Fig. P13.29

Primero se consideró una fuerza **F** que actúa sobre una partícula A y se definió *el trabajo de* **F** *correspondiente a un pequeño desplazamiento* $d\mathbf{r}$ (sección 13.2) como la cantidad

$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \tag{13.1}$$

o, reutilizando la definición de producto escalar de dos vectores,

$$dU = F\,ds\cos\alpha \tag{13.1'}$$

donde α es el ángulo entre **F** y $d\mathbf{r}$ (fig. 13.29). El trabajo de **F** durante un desplazamiento finito desde A_1 hasta A_2 se representó por medio de $U_{1\to 2}$ y se obtuvo al integrar la ecuación (13.1) a lo largo de la trayectoria descrita por la partícula:

$$U_{1\to 2} = \int_{A_1}^{A_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \tag{13.2}$$

Para una fuerza definida por sus componentes rectangulares, se escribió:

$$U_{1\to 2} = \int_{A_1}^{A_2} (F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz) \tag{13.2''}$$

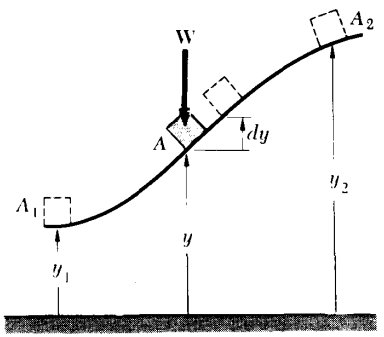


Fig. 13.30

Trabajo de un peso

El trabajo del peso **W** de un cuerpo cuando su centro de gravedad se mueve de una altura y_1 a una altura y_2 (Fig. 13.30), se obtuvo al sustituir $F_x = F_z = 0$ y $F_y = -W$ en la ecuación (13.2'') e integrándola. Se encontró

$$U_{1\to 2} = -\int_{y_1}^{y_2} W\,dy = Wy_1 - Wy_2 \tag{13.4}$$

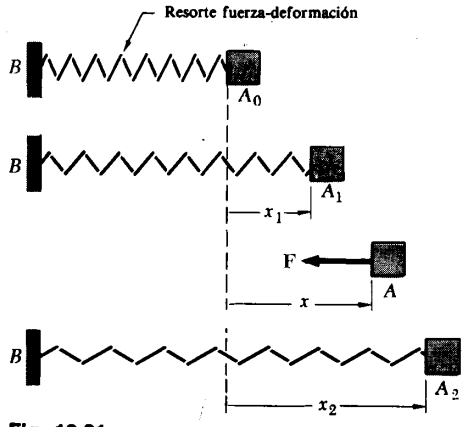


Fig. 13.31

Trabajo de una fuerza ejercida por un resorte

El trabajo de una fuerza **F** ejercida por un resorte sobre un cuerpo A durante un desplazamiento finito del cuerpo (Fig. 13.31) desde A_1 ($x = x_1$) hasta A_2 ($x = x_2$) se obtuvo al escribir

$$dU = -F\,dx = -kx\,dx$$

$$U_{1\to 2} = -\int_{x_1}^{x_2} kx\,dx = \tfrac{1}{2}kx_1^2 - \tfrac{1}{2}kx_2^2 \qquad (13.6)$$

El trabajo de **F** es, por lo tanto, positivo *cuando el resorte regresa a su posición sin deformación.*

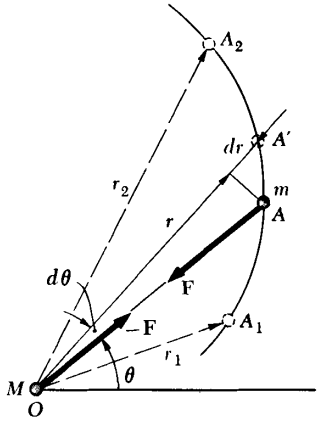


Fig. 13.32

Trabajo de una fuerza gravitacional

El *trabajo de la fuerza gravitacional* **F** ejercida por una partícula de masa M situada en O sobre una partícula de masa m conforme la última se mueve de A_1 a A_2 (Fig. 13.32) se obtuvo al utilizar de la sección 12.10 la expresión para la magnitud de **F** y al escribir

$$U_{1\to 2} = -\int_{r_1}^{r_2} \frac{GMm}{r^2}\,dr = \frac{GMm}{r_2} - \frac{GMm}{r_1} \qquad (13.7)$$

La *energía cinética de una partícula* de masa m que se mueve con una velocidad $\mathbf{v}$ (sección 13.3) se definió como la cantidad escalar

$$T = \tfrac{1}{2}mv^2 \tag{13.9}$$

Teorema de las fuerzas vivas

De la segunda ley de Newton se dedujo el *teorema de las fuerzas vivas* que establece que *la energía cinética de una partícula en A_2 se puede obtener al sumar su energía cinética en A_1 al trabajo realizado durante el desplazamiento desde A_1 hasta A_2 de la fuerza* $\mathbf{F}$ *ejercida sobre la partícula:*

$$T_1 + U_{1\to 2} = T_2 \tag{13.11}$$

Método de trabajo y energía

El método del trabajo y la energía simplifica la solución de muchos problemas relacionados con fuerzas, desplazamientos y velocidades, puesto que no requiere la determinación de aceleraciones (sección 13.4). También se observó que solamente incluye cantidades escalares y que las fuerzas que no realizan trabajo no necesitan ser consideradas (problemas resueltos 13.1 y 13.3). Sin embargo, este método deberá ser completado por la aplicación directa de la segunda ley de Newton para determinar una fuerza normal a la trayectoria de la partícula (problema resuelto 13.4).

Potencia y rendimiento mecánico

La potencia desarrollada por una máquina y su rendimiento mecánico se comentaron en la sección 13.5. La potencia se definió como la velocidad a la que se realiza el trabajo

$$\text{Potencia} = \frac{dU}{dt} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} \tag{13.12, 13.13}$$

donde $\mathbf{F}$ es la fuerza ejercida sobre la partícula y $\mathbf{v}$ la velocidad de la misma (problema resuelto 13.5). *El rendimiento mecánico* representado por η se expresó como

$$\eta = \frac{\text{potencia producida}}{\text{potencia absorbida}} \tag{13.15}$$

Fuerza conservativa. Energía potencial

Cuando el trabajo de una fuerza $\mathbf{F}$ es independiente de la trayectoria seguida (secciones 13.6 y 13.7), se dice que la fuerza $\mathbf{F}$ es una *fuerza conservativa* y su trabajo es igual a *la variación de la energía potencial* V asociada a $\mathbf{F}$:

$$U_{1\to 2} = V_1 - V_2 \tag{13.19'}$$

Se obtuvieron las siguientes expresiones para la energía potencial asociada a cada una de las fuerzas consideradas anteriormente:

Fuerza de gravedad (peso): $V_g = Wy$ (13.16)

Fuerza gravitacional: $V_g = -\dfrac{GMm}{r}$ (13.17)

Fuerza elástica ejercida por un resorte: $V_e = \tfrac{1}{2}kx^2$ (13.18)

Sustituyendo $U_{1\to 2}$ de la ecuación (13.19') en la ecuación (13.11) y reordenando los términos (sección 13.8) se obtuvo

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \tag{13.24}$$

Principio de conservación de energía

Éste es el *principio de conservación de la energía* que establece que, cuando una partícula se mueve bajo la acción de fuerzas conservativas, *la suma de sus energías cinética y potencial permanece constante.* La aplicación de este principio facilita la solución de problemas relacionados con fuerzas conservativas solamente (problemas resueltos 13.6 y 13.7).

Movimiento bajo una fuerza gravitatoria

En la sección 12.9 se dijo que, cuando una partícula se mueve bajo la acción de una fuerza central **F**, su momento angular respecto al centro de la fuerza *O* permanece constante, se observó que (sección 13.9), si la fuerza central **F** es además conservativa, los principios de conservación del momento angular y de la conservación de la energía se podían utilizar conjuntamente para analizar el movimiento de una partícula (problema resuelto 13.8). Puesto que la fuerza gravitatoria ejercida por la Tierra sobre un vehículo espacial es tanto central como conservativa, este enfoque se utilizó para estudiar el movimiento de tales vehículos (problema resuelto 13.9) y resultó particularmente eficaz en el caso de un *despegue oblicuo.* Considerando la posición inicial P_0 y una posición arbitraria P del vehículo (Fig. 13.33), se escribió

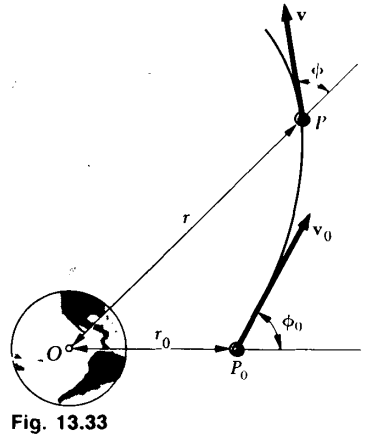


Fig. 13.33

$$(H_O)_0 = H_O: \qquad r_0 m v_0 \operatorname{sen} \phi_0 = r m v \operatorname{sen} \phi \tag{13.25}$$

$$T_0 + V_0 = T + V:$$

$$\tfrac{1}{2} m v_0^2 - \frac{GMm}{r_0} = \tfrac{1}{2} m v^2 - \frac{GMm}{r} \tag{13.26}$$

donde m era la masa del vehículo y M la masa de la Tierra.

Principio de impulso y momento lineal de una partícula

La segunda mitad del capítulo se dedicó al método del impulso y del momento lineal y a su aplicación en la solución de varios tipos de problemas relacionados con el movimiento de partículas.

El *momento lineal de una partícula* (sección 13.10) se definió como el producto $m\mathbf{v}$ de la masa m de la partícula por su velocidad $\mathbf{v}$. A partir de la segunda ley de Newton $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, se dedujo la relación.

$$m\mathbf{v}_1 + \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\, dt = m\mathbf{v}_2 \tag{13.28}$$

donde $m\mathbf{v}_1$ y $m\mathbf{v}_2$ representan el momento lineal de la partícula en el tiempo t_1 y en el tiempo t_2 respectivamente y donde la integral define *el impulso lineal de la fuerza* **F** durante el intervalo de tiempo correspondiente. Por lo tanto, se escribió

$$m\mathbf{v}_1 + \mathbf{Imp}_{1\to 2} = m\mathbf{v}_2 \tag{13.30}$$

que expresa el principio del impulso y del momento lineal para una partícula. Cuando la partícula considerada está sometida a varias fuerzas, se deberá utilizar la suma de los impulsos de estas fuerzas,

$$m\mathbf{v}_1 + \Sigma\, \mathbf{Imp}_{1\to 2} = m\mathbf{v}_2 \tag{13.32}$$

Puesto que las ecuaciones (13.30) y (13.32) se refieren a *cantidades vectoriales*, es necesario considerar por separado sus componentes x e y cuando se aplican en la solución de un problema particular. (Problemas resueltos 13.10 y 13.11.)

Percusiones

El método del impulso y el momento lineal es particularmente adecuado para el estudio de las *percusiones*, cuando fuerzas muy grandes, llamadas *fuerzas de percusión*, se aplican durante intervalos muy cortos de tiempo Δt, puesto que este método se refiere a los impulsos $\mathbf{F}\,\Delta t$ de las fuerzas, más que a las fuerzas mismas (sección 13.11). Despreciando el impulso de cualquier fuerza no percusiva, se escribió

$$m\mathbf{v}_1 + \Sigma\mathbf{F}\,\Delta t = m\mathbf{v}_2 \tag{13.35}$$

En el caso de percusiones de varias partículas se obtuvo

$$\Sigma m\mathbf{v}_1 + \Sigma\mathbf{F}\,\Delta t = \Sigma m\mathbf{v}_2 \tag{13.36}$$

donde el segundo término se refiere solamente a fuerzas exteriores de percusión (problema resuelto 13.12).

En el caso particular de que *la suma de los impulsos de las fuerzas exteriores sea cero*, la ecuación (13.16) se reduce a $\Sigma m\mathbf{v}_1 = \Sigma m\mathbf{v}_2$, es decir, *el momento lineal total de las partículas se conserva.*

Choque central directo

En las secciones 13.12 a 13.14 se consideró el choque central de dos cuerpos en colisión. En el caso de un *choque central directo* (sección 13.13), los dos cuerpos A y B que chocan se movían a lo largo de línea de choque

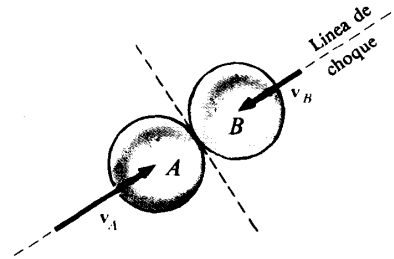


Fig. 13.34

con velocidades $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$, respectivamente (Fig. 13.34). Se pueden utilizar dos ecuaciones para determinar las velocidades $\mathbf{v}'_A$ y $\mathbf{v}'_B$ después del choque. La primera expresa la conservación del momento lineal total de los dos cuerpos,

$$m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B \tag{13.37}$$

donde un signo positivo indica que la velocidad correspondiente se dirige a la derecha, mientras que la segunda relaciona las velocidades relativas de los dos cuerpos antes y después del choque.

$$v'_B - v'_A = e(v_A - v_B) \tag{13.43}$$

La constante e se conoce como el *coeficiente de restitución*; su valor está entre 0 y 1 y depende en gran medida de los materiales de los cuerpos. Cuando $e = 0$ se dice que el choque es *perfectamente plástico*; cuando $e = 1$, se dice que el choque es *perfectamente elástico* (problema resuelto 13.13).

En el caso de un *choque central oblicuo* (sección 13.14), las velocidades de los dos cuerpos antes y después del choque fueron descompuestas en componentes a lo largo de la línea de choque n y componentes a lo largo de la tangente común a la superficie en contacto t (Fig. 13.35). Se observó

Choque central oblicuo

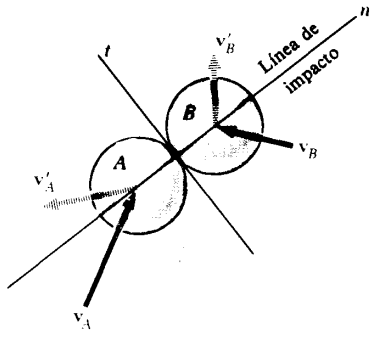


Fig. 13.35

que las componentes tangenciales de la velocidad de cada cuerpo permanecieron inalteradas, mientras que las componentes n satisficieron ecuaciones similares a las ecuaciones (13.37) y (13.43) (problemas resueltos 13.14 y 13.15). Aunque este método se desarrolló para cuerpos que se mueven libremente antes y después del choque, se demostró que podía extenderse al caso de que uno o ambos de los cuerpos en colisión estuviesen restringidos en su movimiento (problema resuelto 13.16).

Empleo de los tres métodos fundamentales de análisis cinético

En la sección 13.15 se comentaron las ventajas relativas de los tres métodos fundamentales presentados en este capítulo y en el anterior, es decir, la segunda ley de Newton, el de trabajo y energía, y el de impulso y momento lineal. Se observó que el método de trabajo y energía y el método de impulso y momento lineal se podían combinar para resolver problemas con una fase de choque durante la cual las fuerzas de percusión deben ser tomadas en cuenta (problema resuelto 13.17).

Problemas de repaso

13.176 Un collarín de 200 g puede deslizar sobre una barra horizontal que es libre de rotar alrededor de un eje vertical. El collarín está inicialmente sostenido en A por medio de una cuerda atada al eje y comprime un resorte de constante 40 N/m, el cual está sin deformación cuando el collarín se sitúa a 225 mm del eje. Conforme la barra gira a razón de $\theta_0 = 12$ rad/s, se corta la cuerda y el collarín se mueve a lo largo de la barra. Despreciando el rozamiento y la masa de la barra y suponiendo que el resorte esta unido al collarín y al eje, determínense los componentes radial y transversal de la velocidad del collarín cuando pasa por el punto B.

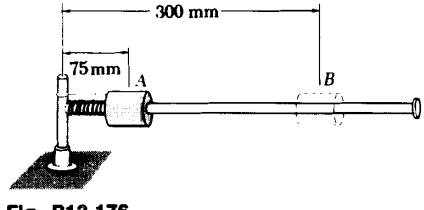


Fig. P13.176

13.177 Un peso W atado a una cuerda inextensible gira en un círculo vertical de radio r. Demuéstrese que la diferencia entre el va-

lor máximo de la tensión $T_{máx}$ en la cuerda y su valor mínimo $T_{mín}$ es independiente de la velocidad a la cual gira el peso, y determine $T_{máx} - T_{mín}$.

13.178 Un ascensor sube con una velocidad constante de 2 m/s. Un niño que va en el ascensor lanza una piedra de 0.6 kg hacia arriba con una velocidad de 5 m/s con relación al elevador. Obténgase *a*) el trabajo efectuado por el niño para lanzar la piedra, *b*) la diferencia en los valores de la energía cinética de la piedra antes y después de ser lanzada y *c*) ¿Por qué no son iguales los valores de las partes *a* y *b*?

13.179 Un avión de 32 000 lb aterriza sobre un portaaviones y se engancha con el cable de frenado. El cable es inextensible y es controlado en *A* y *B* desde mecanismos localizados bajo cubiertas que constan de émbolos que se mueven en cilindros llenos de aceite. Si el sistema émbolo cilindro mantiene una tensión constante de 85 kips en el cable durante todo el aterrizaje, encuéntrese la velocidad de aterrizaje del avión si recorre una distancia $d = 95$ ft después de haberse enganchado con el cable.

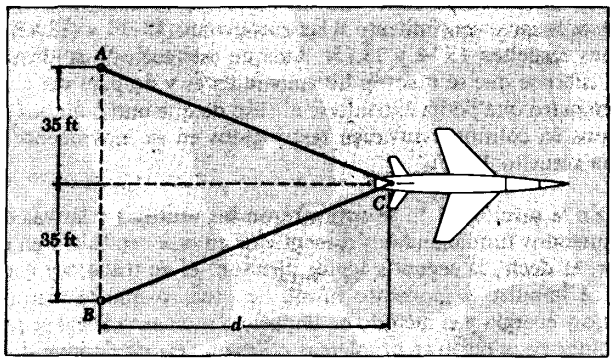


Fig. P13.179

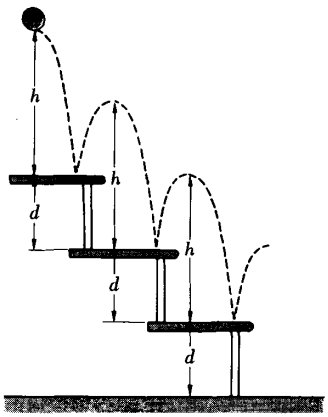


Fig. P13.181

13.180 Para el avión del problema 13.179, determínese el valor de la tensión en el cable de frenado, sabiendo que el avión aterriza con una velocidad de 120 mi/h y recorre una distancia $d = 110$ ft después de haberse enganchado con el cable.

13.181 Una pelota cae desde una altura *h* sobre el descansillo o rellano y baja rebotando las escaleras. Indicando por *e* el coeficiente de restitución, obténgase el valor de *h* para el cual la pelota rebota a la misma altura sobre cada escalón.

13.182 Una nave espacial describe una órbita circular de radio $r_1 = 4500$ mi alrededor de la Tierra. Al pasar por el punto *A* su motor se enciende durante 180 s y esto provoca el efecto de colocar la nave espacial en una órbita elíptica con apogeo en *B* a una distancia de 8000 mi desde el centro de la Tierra. ¿Durante cuánto tiempo se deberá encender el motor en *B* si se desea colocar la nave espacial en una órbita circular de radio $r_2 = 8000$ mi?

13.183 Un camión de 12 Mg y el vagón de ferrocarril de 30 Mg están en reposo, con sus frenos sin aplicar. Una locomotora choca

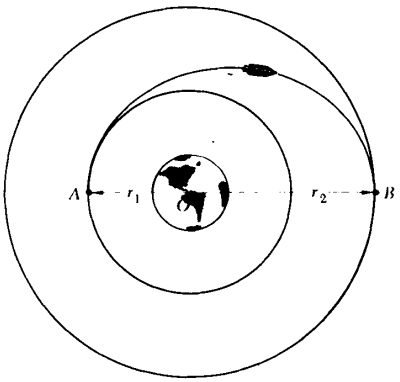


Fig. P13.182

con el vagón y lo pone en movimiento con una velocidad de 1.4 m/s hacia la derecha. Suponiendo que $e = 1$ entre el camión y los extremos del vagón y despreciando el efecto de la fricción, determínense las velocidades del camión y del vagón, después de que *a*) el extremo *A* golpea al camión y *b*) el camión golpea el extremo *B*.

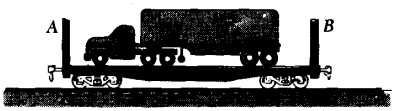


Fig. P13.183

13.184 Una cadena de longitud L está suspendida de una tira de goma, de longitud natural h y está en equilibrio en la posición indicada. Entonces se corta la cadena en el punto *A*. Determínese la longitud x, sabiendo que la porción remanente de la cadena se elevará lo suficiente para *a*) permitir que la tira de goma se encuentre distendida y *b*) tocar el techo.

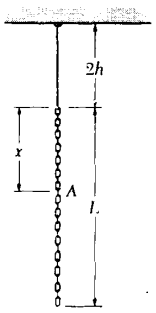


Fig. P13.184

13.185 Una moneda de diez centavos está en reposo sobre una superficie rugosa cuando es golpeada perpendicularmente por un dólar, que se mueve hacia la derecha. Después del choque, cada moneda desliza y alcanza el reposo; la moneda de diez centavos desliza 480 mm hacia la derecha y el medio dólar desliza 95 mm hacia la derecha. Suponiendo que el coeficiente de rozamiento sea el mismo en cada moneda, determínese el valor del coeficiente de restitución entre las monedas. (*masas*: medio dólar: 12.50 g; cuarto de dólar: 6.25 g; diez centavos: 2.5 g.)

13.186 Un tren ligero formado por dos vagones va a 90 km/h. Cuando se aplican los frenos, una fuerza constante de frenado de

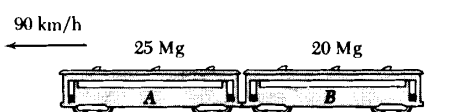


Fig. P13.186

30 kN se aplica a cada vagón. Determínense *a*) el tiempo necesario para que pare el tren después de aplicar los frenos y *b*) las fuerzas en la unión entre los dos vagones mientras el tren frena.

13.187 El collarín A cae desde 3 ft sobre el collarín B, el cual se apoya en un resorte de constante $k = 5$ lb/in. Suponiendo un impacto perfectamente plástico obténganse *a*) la deformación máxima del collarín B y *b*) la energía perdida durante el impacto.

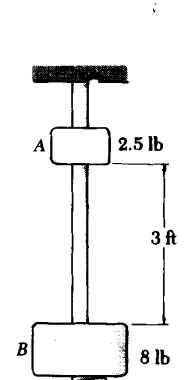
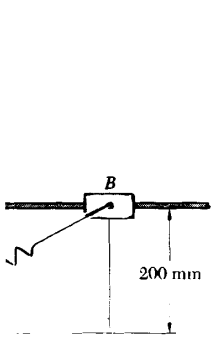


Fig. P13.187

Los siguientes problemas están diseñados para ser resueltos con un ordenador.

13.C1 El resorte AB de constante 60 N/m está unido al collarín B de 1.8 kg que puede moverse libremente a lo largo de la barra horizontal. La longitud sin deformación del resorte es 125 mm. Sabiendo que el collarín se suelta desde el reposo en la posición indicada, *a*) elabórese un programa de ordenador y úsese para calcular la velocidad del collarín en intervalos de 25 mm desde el punto B al punto C; *b*) extiéndase este programa para determinar el tiempo aproximado requerido por el collarín para moverse desde B hasta C utilizando intervalos de 5 mm. (*Sugerencia:* El tiempo Δt_i requerido por el collarín para moverse Δx_i se puede obtener al dividir Δx_i entre la velocidad promedio $\frac{1}{2}(v_i + v_{i+1})$ del collarín sobre Δt_i si la aceleración del collarín se supone que permanece constante durante Δt_i.)



13.C2 Un pequeño paquete de masa m se proyecta dentro de un circuito de retorno vertical en A con una velocidad v_0. El paquete viaja sin fricción a lo largo de un círculo de radio r y si $v_0^2 < 5\,g$ se deposita sobre un entrepaño horizontal H. Si $v_0^2 = 2\,g$ el paque-

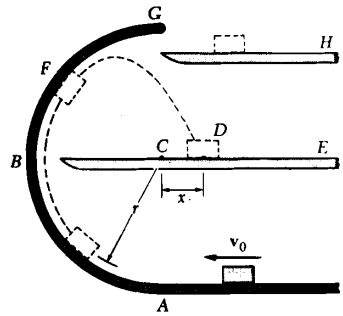


Fig. P13.C2

te alcanza el punto B y cae deslizando por la superficie circular. Para $2\ g < v_0^2 < 5\ g$ el paquete abandona la superficie circular y golpea el entrepaño horizontal en el punto D. Elabórese un programa de ordenador y utilícese para determinar dónde caerán los paquetes sobre el entrepaño E para valores de v_0^2 desde 2 g hasta 5 g en intervalos de 0.2 g.

13.C3 Al acabarse su combustible, un satélite ha alcanzado una altura de 2400 km y tiene una velocidad v_0 de módulo 8100 m/s formando un ángulo ϕ_0 con la vertical. Elabórese un programa de computadora y úsese para determinar las alturas máxima y mínima alcanzadas por el satélite para valores de ϕ_0 de 60 a 120° en intervalos de 5°. Supóngase que si el satélite se acerca a más de 300 km de la superficie de la Tierra se incendiará súbitamente. Indíquense los valores de ϕ_0 para los cuales no se alcanzará una órbita permanente.

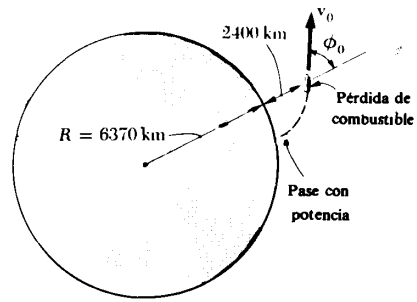


Fig. P13.C3

13.C4 En un juego de billar, un jugador desea golpear la bola B perpendicularmente con una bola A a una distancia nd donde d es el diámetro de las bolas. Sin embargo, el jugador proyecta la pelota A con una velocidad $\mathbf{v}_0$ formando un pequeño ángulo θ_0 con la línea AB. Representando con e el coeficiente de restitución, escríbase un programa de ordenador para calcular el módulo de la velocidad v'_A de la bola A después del impacto y el ángulo θ'_A que v'_A formará con la línea AB. Usando este programa y sabiendo que $n = 10$ y $v_0 = 4$ m/s, determínense v'_A y θ'_A para valores de θ_0 desde 0 a 0.5° en intervalos de 0.05° y desde 0.5 a 5.5° en intervalos de 0.5°, suponiendo *a*) $e = 0.95$, *b*) $e = 0.90$ y *c*) $e = 0.70$.

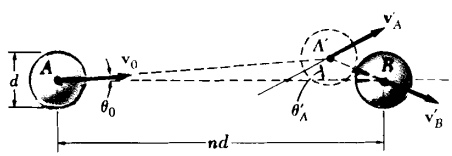


Fig. P13.C4

CAPÍTULO CATORCE

Sistemas de partículas

14.1. Introducción. En este capítulo nos ocuparemos del movimiento de *sistemas de partículas*, es decir, el movimiento de gran número de partículas consideradas en grupo. En la primera parte de este capítulo nos referiremos a los sistemas que constan de partículas bien definidas, mientras que en la segunda parte analizaremos el movimiento de sistemas variables, es decir, sistemas que continuamente ganan o pierden partículas, o ambas cosas al mismo tiempo.

En la sección 14.2 aplicaremos primero la segunda ley de Newton a cada partícula del sistema. Definiendo la *fuerza inercial* o *efectiva* de una partícula como el producto $m_i\mathbf{a}_i$ de su masa m_i y su aceleración $\mathbf{a}_i$, demostraremos que las *fuerzas exteriores* que actúan sobre las diferentes partículas forman un sistema mecánicamente equivalente al sistema de las fuerzas inerciales o efectivas, es decir, ambos sistemas tienen la misma resultante y el mismo momento resultante con respecto a cualquier punto arbitrario. En la sección 14.3 demostraremos además que la resultante y el momento resultante de las fuerzas exteriores son iguales a la derivada temporal del momento lineal total y del momento angular total de las partículas del sistema, respectivamente.

En la sección 14.4 definiremos el *centro de masas* de un sistema de partículas y describiremos el movimiento de dicho punto, mientras que en la sección 14.5 trataremos sobre el movimiento de las partículas con respecto a su centro de masas. En la sección 14.6 nos ocuparemos de las condiciones bajo las cuales se conservan el momento lineal y el momento angular de un sistema de partículas y aplicaremos los resultados obtenidos a la solución de varios problemas.

Las secciones 14.7 y 14.8 tratan de la aplicación del teorema de las fuerzas vivas a un sistema de partículas, en tanto que la sección 14.9 se ocupa de la aplicación del principio del impulso y del momento. Estas secciones contienen también algunos problemas de interés práctico.

Debe notarse que aunque las deducciones que se dan en la primera parte de este capítulo se realizan para un sistema de partículas independientes, continúan siendo válidas cuando las partículas del sistema están conectadas rígidamente, es decir, cuando forman un sólido rígido. De hecho, los resultados obtenidos aquí serán los cimientos de nuestro análisis sobre la cinética de los sólidos rígidos en los capítulos 16 al 18.

La segunda parte de este capítulo se dedicará al estudio de los sistemas de masa variable. En la sección 14.11 consideraremos corrientes estacionarias de partículas, como un chorro de agua desviado por un álabe fijo o el flujo de aire por un motor de reacción, y aprenderemos a determinar las fuerza ejercida por el chorro en el álabe y el empuje desarrollado por el motor. Finalmente, en la sección 14.12 analizaremos los sistemas que aumentan su masa al absorber partículas continuamente o que disminuyen su masa al arrojar partículas continuamente. Entre las diversas aplicaciones prácticas de este análisis estará la determinación del empuje producido por un motor cohete.

14.2. Aplicación de las leyes de Newton al movimiento de un sistema de partículas. Fuerzas inerciales o efectivas. A fin de deducir las ecuaciones de movimiento de un sistema de n partículas, comenzaremos por escribir la segunda ley de Newton para cada partícula individual del sistema. Considérese la partícula P_i, en donde $1 \leq i \leq n$. Sea m_i la masa de P_i y $\mathbf{a}_i$ su aceleración con respecto al sistema de referencia newtoniano $Oxyz$. Indicaremos por $\mathbf{f}_{ij}$ la fuerza que ejerce sobre P_i otra partícula P_j del sistema (Fig. 14.1); esta fuerza recibe el nombre de *fuerza interior*. La resultante de las fuerzas interiores que ejercen sobre P_i todas las demás partículas del

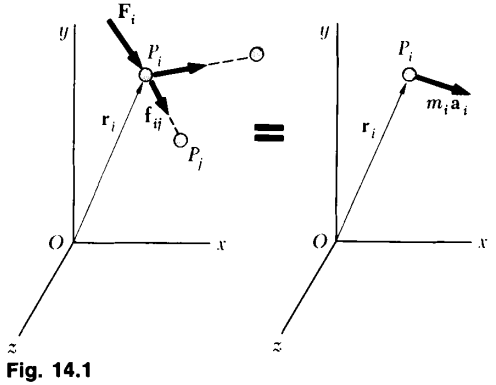


Fig. 14.1

sistema es así $\sum_{j=1}^{n} \mathbf{f}_{ij}$ (en la cual $\mathbf{f}_{ii}$ carece de sentido y se supone igual a cero). Por otro lado, indicando por $\mathbf{F}_i$ la resultante de todas las *fuerzas exteriores* que actúan sobre P_i, escribimos la segunda ley de Newton aplicada a la partícula P_i de la manera siguiente:

$$\mathbf{F}_i + \sum_{j=1}^{n} \mathbf{f}_{ij} = m_i \mathbf{a}_i \tag{14.1}$$

Representando por $\mathbf{r}_i$ al vector de posición de P_i y tomando los momentos respecto a O de los diferentes términos en la ecuación (14.1), también escribimos

$$\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i + \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij}) = \mathbf{r}_i \times m_i\mathbf{a}_i \tag{14.2}$$

Repitiendo este procedimiento con cada partícula P_i del sistema, obtenemos n ecuaciones del tipo (14.1) y n ecuaciones del tipo (14.2), en las que i adquiere sucesivamente los valores 1, 2, . . . , n. Los vectores $m_i\mathbf{a}_i$ se identifican como las *fuerzas inerciales o efectivas* de las partículas. † En consecuencia, las ecuaciones obtenidas así expresan el hecho de que las fuerzas exteriores $\mathbf{F}_i$ y las fuerzas internas $\mathbf{f}_{ij}$ que actúan sobre las distintas partículas forman un sistema que es equivalente al de los vectores $m_i\mathbf{a}_i$ (es decir, un sistema puede sustituir al otro) (Fig. 14.2).

Antes de avanzar más con nuestra deducción, examinemos las fuerzas interiores $\mathbf{f}_{ij}$. Notamos que estas fuerzas aparecen en las parejas $\mathbf{f}_{ij}$, $\mathbf{f}_{ji}$, en donde $\mathbf{f}_{ij}$ representa la fuerza que la partícula P_j ejerce sobre la partícula P_i, y $\mathbf{f}_{ji}$ es la fuerza que P_i ejerce sobre P_j (Fig. 14.2). Ahora bien, de acuerdo con la tercera ley de Newton (Secc. 6.1), am-

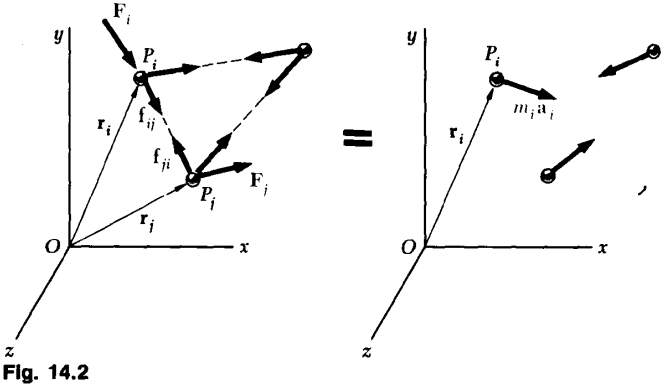


Fig. 14.2

pliada por la ley de Newton de la gravitación a partículas que actúan a distancia (Secc. 12.10), las fuerzas $\mathbf{f}_{ij}$ y $\mathbf{f}_{ji}$ son iguales y opuestas y tienen la misma línea de acción. Su suma es, por consiguiente, $\mathbf{f}_{ij} + \mathbf{f}_{ji} = 0$, y la suma de sus momentos con respecto a O es

$$\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{f}_{ji} = \mathbf{r}_i \times (\mathbf{f}_{ij} + \mathbf{f}_{ji}) + (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \times \mathbf{f}_{ji} = 0$$

puesto que los vectores $\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i$ y $\mathbf{f}_{ji}$ del último término son paralelos. Sumando todas las fuerzas interiores del sistema, y sumando sus momentos con respecto a O, obtenemos las ecuaciones

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{f}_{ij} = 0 \qquad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij}) = 0 \tag{14.3}$$

† Como estos vectores representan las resultantes de las fuerzas que actúan sobre cada una de las partículas del sistema, se les puede considerar realmente como fuerzas.

las cuales expresan el hecho de que la resultante y el momento resultante de las fuerzas interiores del sistema son cero.

Regresando ahora a las n ecuaciones (14.1), en donde $i = 1, 2, \ldots, n$, las sumamos miembro a miembro. Teniendo en cuenta la primera de las ecuaciones (14.3), obtenemos

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{a}_i \tag{14.4}$$

Procediendo de manera similar con las ecuaciones (14.2) y teniendo en cuenta la segunda de las ecuaciones (14.3), tenemos

$$\sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{a}_i) \tag{14.5}$$

Las ecuaciones (14.4) y (14.5) expresan el hecho de que el sistema de las fuerzas exteriores $\mathbf{F}_i$ y el sistema de las fuerzas equivalentes $m_i\mathbf{a}_i$ tienen la misma resultante y el mismo momento resultante. Refiriéndonos a la definición dada en la sección 3.19 para dos sistemas equivalentes de vectores, podemos enunciar en consecuencia que *el sistema de las fuerzas exteriores que actúan sobre las partículas y el sistema de las fuerzas reales de las partículas, son equivalentes*† (Fig. 14.3).

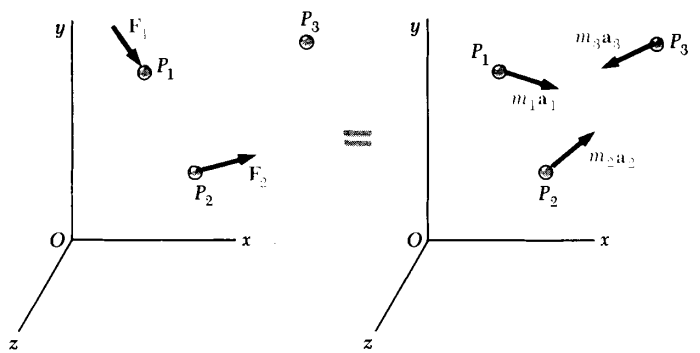


Fig. 14.3

Podemos indicar que las ecuaciones (14.3) expresan el hecho de que el sistema de las fuerzas interiores $\mathbf{f}_{ij}$ es equivalente a cero. Sin embargo, *no* se afirma que las fuerzas interiores no tengan efecto sobre las partículas en consideración. De hecho, las fuerzas gravitatorias que el Sol y los planetas ejercen entre sí son internas al sistema solar y equivalentes a cero, pero estas fuerzas son las únicas responsables del movimiento de los planetas alrededcor del Sol.

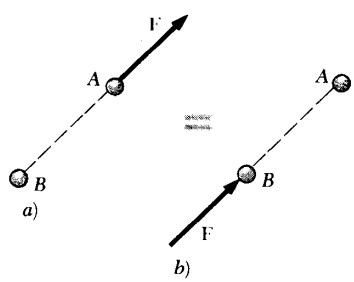


Fig. 14.4

† El resultado que acabamos de obtener recibe con frecuencia el nombre del *principio de d'Alembert*, en honor al matemático francés Jean le Rond d'Alembert (1717-1783). Sin embargo, el enunciado original de d'Alembert se refiere al movimiento de un sistema de cuerpos conectados, con $\mathbf{f}_{ij}$ representando fuerzas restrictivas que, aplicadas ellas mismas, no causarán que el sistema se mueva. Se demostrará a continuación que, en general, esto no ocurre para las fuerzas interiores que actúan en un sistema de partículas libres, por lo que pospondremos la consideración del principio de d'Alembert hasta el estudio del movimiento de los sólidos rígidos (Cap. 16).

De manera similar, no se sigue de las ecuaciones (14.4) y (14.5) que dos sistemas de fuerzas exteriores que tengan la misma resultante y el mismo momento resultante tendrían el mismo efecto sobre un sistema de partículas arbitrario. Es evidente que los sistemas indicados en las figuras 14.4*a* y 14.4*b* tienen la misma resultante y el mismo momento resultante; sin embargo, el primero acelera a la partícula *A* y no afecta a la partícula *B*, mientras que el segundo acelera a *B* y no afecta a *A*. Es importante recordar que cuando afirmábamos en la sección 3.19 que dos sistemas equivalentes de fuerzas que actúan sobre un sólido rígido son también equivalentes, hicimos notar específicamente que *no* se podía extender esta propiedad a un sistema de fuerzas que actúe sobre un conjunto de partículas independientes como los que consideramos en este capítulo.

Con objeto de evitar confusión, utilizaremos signos de igualdad en color gris para enlazar los sistemas equivalentes de vectores, como los indicados en las figuras 14.3 y 14.4. Estos signos indicarán que los dos sistemas de vectores tienen la misma resultante y el mismo momento resultante. Los signos de igualdad en color seguirán utilizándose para indicar que dos sistemas de vectores son equivalentes, es decir, que se puede sustituir un sistema por el otro (Fig. 14.2).

14.3. Momento lineal y angular de un sistema de partículas. Las ecuaciones (14.4) y (14.5) obtenidas en la sección anterior para el movimiento de un sistema de partículas, pueden expresarse de una manera más condensada si introducimos los momentos lineal y angular de un sistema de partículas. Definiendo el momento lineal L del sistema de partículas como la suma de los momentos lineales de las diferentes partículas del sistema (Secc. 12.3), escribimos

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v}_i \tag{14.6}$$

Definiendo el momento angular $\mathbf{H}_O$ con respecto a O del sistema de partículas de una manera similar (Secc. 12.7) encontramos

$$\mathbf{H}_O = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i) \tag{14.7}$$

Derivando con respecto a t ambos miembros de las ecuaciones (14.6) y (14.7), escribimos

$$\dot{\mathbf{L}} = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\mathbf{v}}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{a}_i \tag{14.8}$$

Así

$$\dot{\mathbf{H}}_O = \sum_{i=1}^{n} (\dot{\mathbf{r}}_i \times m_i \mathbf{v}_i) + \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}_i \times m_i \dot{\mathbf{v}}_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{v}_i \times m_i\mathbf{v}_i) + \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}_i \times m_i\mathbf{a}_i)$$

la cual se reduce a

$$\dot{\mathbf{H}}_O = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}_i \times m_i\mathbf{a}_i) \tag{14.9}$$

porque los vectores $\mathbf{v}_i$ y $m_i\mathbf{v}_i$ son paralelos

Observamos que los segundos miembros de las ecuaciones (14.8) y (14.9) son idénticos a los segundos miembros de las ecuaciones (14.4) y (14.5), respectivamente. Se sigue que los primeros miembros de dichas ecuaciones son iguales, respectivamente. Recordando que el primer miembro de la ecuación (14.5) representa la suma de los momentos $\mathbf{M}_O$ con respecto a O de las fuerzas exteriores que actúan sobre las partículas del sistema, y omitiendo el subíndice i de las sumas, escribimos

$$\Sigma\mathbf{F} = \dot{\mathbf{L}} \tag{14.10}$$

$$\Sigma\mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O \tag{14.11}$$

Estas ecuaciones expresan que *la resultante y el momento resultante con respecto al punto fijo O de las fuerzas exteriores son iguales, respectivamente, a la derivada temporal del momento lineal y del momento angular respecto al punto O del sistema de partículas.*

14.4. Movimiento del centro de masas de un sistema de partículas. La ecuación (14.10) puede escribirse en otra forma si se considera el *centro de masas* del sistema de partículas. El centro de masas del sistema es el punto C definido por el vector de posición $\bar{\mathbf{r}}$ que satisface la relación

$$m\bar{\mathbf{r}} = \sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{r}_i \tag{14.12}$$

en la que m representa la masa total $\sum_{i=1}^{n} m_i$ de las partículas. Descomponiendo los vectores de posición $\bar{\mathbf{r}}$ y $\mathbf{r}_i$ en componentes rectangulares, obtenemos las tres ecuaciones escalares siguientes, que pueden utilizarse para encontrar las coordenadas $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ del centro de masas:

$$m\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i \qquad m\bar{y} = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i \qquad m\bar{z} = \sum_{i=1}^{n} m_i z_i \tag{14.12'}$$

Como m_ig representa el peso de la partícula P_i y mg el peso total de las partículas, notamos que G es también el centro de gravedad del sistema de partículas. Sin embargo, a fin de evitar confusión, llamaremos G al *centro de masas* del sistema de partículas al analizar las

propiedades del sistema relacionadas con la *masa* de las partículas, mientras que nos referiremos a él como el *centro de gravedad* del sistema al considerar propiedades asociadas con el *peso* de las partículas. Por ejemplo, las partículas localizadas fuera del campo gravitacional de la Tierra tienen masa pero no peso. Nos podemos referir entonces correctamente a su centro de masas, pero evidentemente no a su centro de gravedad.†

Al derivar ambos miembros de la ecuación (14.12) con respecto a t, escribimos

$$m\dot{\bar{\mathbf{r}}} = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\mathbf{r}}_i$$

o sea

$$m\bar{\mathbf{v}} = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v}_i \tag{14.13}$$

en la cual $\bar{\mathbf{v}}$ representa la velocidad del centro de masas G del sistema de partículas. Pero el segundo miembro de la ecuación (14.13) es, por definición, el momento lineal $\mathbf{L}$ del sistema (Secc. 14.3). Por tanto, tenemos

$$\mathbf{L} = m\bar{\mathbf{v}} \tag{14.14}$$

y, al derivar ambos miembros con respecto a t,

$$\dot{\mathbf{L}} = m\bar{\mathbf{a}} \tag{14.15}$$

en la que $\bar{\mathbf{a}}$ representa la aceleración del centro de masas G. Sustituyendo $\dot{\mathbf{L}}$ de (14.15) en (14.10), escribimos la ecuación

$$\Sigma\mathbf{F} = m\bar{\mathbf{a}} \tag{14.16}$$

la cual define al movimiento del centro de masas G del sistema de partículas.

Notamos que la ecuación (14.16) es idéntica a la ecuación que obtendríamos para una partícula de masa m igual a la masa total de las partículas del sistema, sobre la cual actúan todas las fuerzas exteriores. Por consiguiente enunciamos: *el centro de masas de un sistema de partículas se mueve como si toda la masa del sistema y todas las fuerzas exteriores se concentrasen en dicho punto.*

Este principio se ilustra mejor con el movimiento de una bomba que estalla. Sabemos que si se desprecia la resistencia del aire, se puede suponer que una bomba describe una trayectoria parabólica. Después que la bomba hace explosión, el centro de masas G de los fragmentos de la bomba seguirá describiendo la misma trayectoria. De hecho, el punto G debe moverse como si la masa y el peso de todos los fragmentos estuviesen concentrados en G; por consiguiente, debe moverse como si la bomba no hubiese estallado.

Debe advertirse que la deducción anterior no contiene los momentos de las fuerzas exteriores. Por tanto, *sería incorrecto suponer* que las fuerzas exteriores son equivalentes a un vector $m\bar{\mathbf{a}}$ fijo al

† Podemos resaltar también el hecho de que el centro de masas y el centro de gravedad de un sistema de partículas no coinciden exactamente, puesto que los pesos de las partículas están dirigidos hacia el centro de la Tierra y, por lo tanto, no forman en realidad un sistema de fuerzas paralelas.

centro de masas G. En general éste no es el caso, pues, como veremos en la siguiente sección, la suma de los momentos de las fuerzas exteriores con respecto a G es, normalmente, distinta de cero.

14.5. Momento angular de un sistema de partículas con respecto a su centro de masas. En algunas aplicaciones (p. ej. en el análisis del movimiento de un sólido rígido) es conveniente considerar el movimiento de las partículas de un sistema con respecto al sistema de referencia central $Gx'y'z'$, que se traslada con respecto al sistema de referencia newtoniano $Oxyz$ (Fig. 14.5). Aunque no es, en general, un sistema de referencia newtoniano, veremos que la relación fundamental (14.11) aún se cumple cuando el sistema $Oxyz$ se sustituye con $Gx'y'z'$.

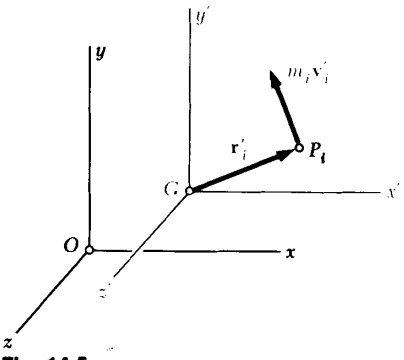


Fig. 14.5

Representando con $\mathbf{r}'_i$ y $\mathbf{v}'_i$, respectivamente, al vector de posición y la velocidad de la partícula P_i relativa al sistema de referencia en movimiento $Gx'y'z'$, definimos el *momento angular* $\mathbf{H}'_G$ del sistema de partículas con respecto al centro de masas G como:

$$\mathbf{H}'_G = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}'_i \times m_i\mathbf{v}'_i) \tag{14.17}$$

Ahora derivamos ambos miembros de la ecuación (14.17) respecto de t. Siendo esta operación similar a la realizada en la sección 14.3 con la ecuación (14.7), escribimos de inmediato

$$\dot{\mathbf{H}}'_G = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}'_i \times m_i\mathbf{a}'_i) \tag{14.18}$$

en la cual $\mathbf{a}'_i$ representa la aceleración de P_i relativa al sistema de referencia en movimiento. Con referencia a la sección 11.12, escribimos

$$\mathbf{a}_i = \bar{\mathbf{a}} + \mathbf{a}'_i$$

en la que $\mathbf{a}_i$ y $\bar{\mathbf{a}}$ representan las aceleraciones de P_i y G, respectivamente, relativas al sistema $Oxyz$. Despejando $\mathbf{a}'_i$ y sustituyendo en (14.18), tenemos

$$\dot{\mathbf{H}}'_G = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}'_i \times m_i\mathbf{a}_i) - \left(\sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{r}'_i\right) \times \bar{\mathbf{a}} \tag{14.19}$$

Pero, por (14.12), la segunda suma de la ecuación (14.19) es igual a $m\bar{\mathbf{r}}'$ y, por tanto, a cero, puesto que el vector de posición $\bar{\mathbf{r}}'$ de G relativo al sistema de referencia $Gx'y'z'$ es evidentemente cero. Por otro lado, como $\mathbf{a}_i$ representa la aceleración de P_i relativa a un sistema de referencia newtoniano, podemos utilizar la ecuación (14.1) y sustituir $m_i\mathbf{a}_i$ por la suma de las fuerzas interiores $\mathbf{f}_{ij}$ y la resultante $\mathbf{F}_i$ de las fuerzas exteriores que actúan sobre P_i. Pero un razonamiento similar al utilizado en la sección 14.2 demuestra que el momento resultante con respecto a G de las fuerzas interiores $\mathbf{f}_{ij}$ del sistema completo es cero. La primera suma de la ecuación (14.19) se reduce por consiguiente al momento resultante de las fuerzas exteriores que actúan sobre las partículas del sistema respecto a G, por lo que escribimos

$$\Sigma\mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}'_G \tag{14.20}$$

la cual expresa que *el momento resultante de las fuerzas exteriores respecto a G, es igual a la derivada temporal del momento angular del sistema de partículas respecto de G.*

Debe notarse que en la ecuación (14.17) definimos el momento angular $\mathbf{H}'_G$ como la suma de los momentos, con respecto a G, de los momentos lineales $m_i\mathbf{v}'_i$ de las partículas *en su movimiento con relación al sistema de referencia central Gx'y'z'*. Algunas veces podemos desear calcular la suma $\mathbf{H}_G$ de los momentos respecto a G de los momentos linales de las partículas $m_i\mathbf{v}_i$ *en su movimiento absoluto,*

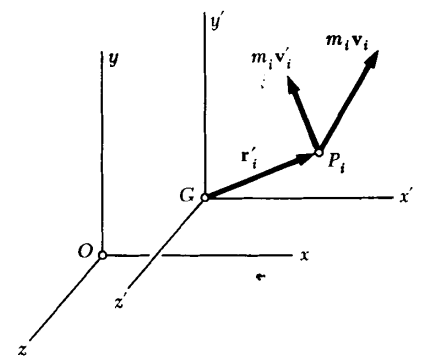


Fig. 14.6

es decir, en su movimiento observado desde el sistema newtoniano de referencia $Oxyz$ (Fig. 14.6):

$$\mathbf{H}_G = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}'_i \times m_i\mathbf{v}_i) \tag{14.21}$$

Es sorprendente que los momentos angulares $\mathbf{H}'_G$ y $\mathbf{H}_G$ sean idénticos. Esto se puede verificar refiriéndonos a la sección 11.12 y escribiendo

$$\mathbf{v}_i = \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}'_i \tag{14.22}$$

Al sustituir $\mathbf{v}_i$ de la ecuación (14.22) en la (14.21), tenemos

$$\mathbf{H}_G = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{r}'_i\right) \times \bar{\mathbf{v}} + \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}'_i \times m_i\mathbf{v}'_i)$$

Pero, como observamos antes, la primera suma es igual a cero. En consecuencia, $\mathbf{H}_G$ se reduce a la segunda suma, la cual, por definición, es igual a $\mathbf{H}'_G$. †

† Nótese que esta propiedad es particular del sistema de referencia central $Gx'y'z'$ y, en general, no se cumple para otros sistemas de referencia (véase el problema 14.24).

Aprovechando la propiedad que acabamos de establecer, simplificaremos nuestra notación omitiendo la prima (′) en la ecuación (14.20). Por consiguiente escribimos

$$\Sigma \mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G \tag{14.23}$$

en la que se sobreentiende que puede calcularse el momento angular $\mathbf{H}_G$ al formar los momentos respecto a G de los momentos lineales de las partículas en su movimiento con respecto al sistema newtoniano de referencia $Oxyz$, o bien, con respecto al sistema central $Gx'y'z'$:

$$\mathbf{H}_G = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i) = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{a}'_i) \tag{14.24}$$

14.6. Conservación del momento lineal en un sistema de partículas. Si sobre las partículas de un sistema no actúa ninguna fuerza exterior, los primeros miembros de las ecuaciones (14.10) y (14.11) son iguales a cero y estas ecuaciones se reducen a $\dot{\mathbf{L}} = 0$ y $\dot{\mathbf{H}}_O = 0$. Concluimos que

$$\mathbf{L} = \text{constante} \qquad \mathbf{H}_O = \text{constante} \tag{14.25}$$

Las ecuaciones obtenidas expresan que el momento lineal del sistema de partículas y su momento angular respecto al punto fijo O se conservan.

En algunas aplicaciones, como en problemas en los que intervienen fuerzas centrales, el momento respecto a un punto fijo O de cada una de las fuerzas exteriores puede ser cero sin que ninguna de las fuerzas sea cero. En tales casos, aún se cumple la segunda de las ecuaciones (14.25); el momento angular del sistema de partículas respecto a O se conserva.

El concepto de la conservación del momento lineal y el momento angular también pueden aplicarse al análisis del movimiento del centro de masas G de un sistema de partículas y al análisis del movimiento del sistema alrededor de G. Por ejemplo, si la suma de las fuerzas exteriores es cero, se aplica la primera de las ecuaciones (14.25). Recordando la ecuación (14.14), escribimos

$$\bar{\mathbf{v}} = \text{constante} \tag{14.26}$$

la cual expresa que el centro de masas G del sistema se mueve en una línea recta y con una velocidad constante. Por otro lado, si la suma de los momentos respecto a G de las fuerzas exteriores es cero, se sigue de la ecuación (14.23) que el momento angular del sistema alrededor de su centro de masas se conserva:

$$\mathbf{H}_G = \text{constante} \tag{14.27}$$

PROBLEMA RESUELTO 14.1

En $t = 0$ se observa que un vehículo espacial de 200 kg pasa por el origen de un sistema newtoniano de referencia *Oxyz* con una velocidad $\mathbf{v}_0 = (150 \text{ m/s})\mathbf{i}$ con relación al sistema. Después de la detonación de cargas explosivas, el vehículo se separa en tres partes, *A*, *B*, y *C*, con masa de 100 kg, 60 kg y 40 kg, respectivamente. Si en $t = 2.5$ s se observa que las posiciones de las partes *A* y *B* son *A*(555, −180, 240) y *B*(255, 0, −120), en las que las coordenadas están expresadas en metros, encuéntrese la posición de la parte *C* en ese instante.

Solución. Como no hay fuerza exterior, el centro de masas *G* del sistema se mueve con la velocidad constante $\mathbf{v}_0 = (150 \text{ m/s})\mathbf{i}$. En $t = 2.5$ s, su posición es

$$\bar{\mathbf{r}} = \mathbf{v}_0 t = (150 \text{ m/s})\mathbf{i}(2.5 \text{ s}) = (375 \text{ m})\mathbf{i}$$

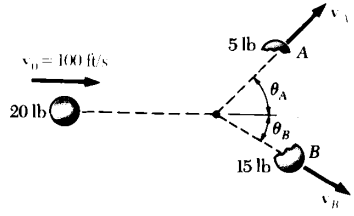
Recordando la ecuación (14.12), escribimos

$$m\bar{\mathbf{r}} = m_A\mathbf{r}_A + m_B\mathbf{r}_B + m_C\mathbf{r}_C$$

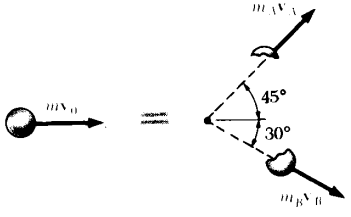
$$(200 \text{ kg})(375 \text{ m})\mathbf{i} = (100 \text{ kg})[(555 \text{ m})\mathbf{i} - (180 \text{ m})\mathbf{j} + (240 \text{ m})\mathbf{k}] + (60 \text{ kg})[(255 \text{ m})\mathbf{i} - (120 \text{ m})\mathbf{k}] + (40 \text{ kg})\mathbf{r}_C$$

$$\mathbf{r}_C = (105 \text{ m})\mathbf{i} + (450 \text{ m})\mathbf{j} - (420 \text{ m})\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$$

PROBLEMA RESUELTO 14.2



Un proyectil de 20 lb se mueve con una velocidad de 100 ft/s cuando estalla en dos fragmentos *A* y *B* que pesan 5 lb y 15 lb, respectivamente. Si inmediatamente después de la explosión los fragmentos *A* y *B* se mueven en las direcciones determinadas por $\theta_A = 45°$ y $\theta_B = 30°$, respectivamente, determínese la velocidad de cada fragmento.



Solución. Como no hay fuerza exterior, se conserva el momento lineal del sistema y escribimos

$$m_A\mathbf{v}_A + m_B\mathbf{v}_B = m\mathbf{v}_0$$

$$(5/g)\mathbf{v}_A + (15/g)\mathbf{v}_B = (20/g)\mathbf{v}_0$$

$\pm\rightarrow$ componentes *x*: $5v_A \cos 45° + 15v_B \cos 30° = 20(100)$

$+\uparrow$ componentes *y*: $5v_A \operatorname{sen} 45° - 15v_B \operatorname{sen} 30° = 0$

Al resolver las dos ecuaciones simultáneas para v_A y v_B, tenemos

$$v_A = 207 \text{ ft/s} \qquad v_B = 97.6 \text{ ft/s}$$

$$\mathbf{v}_A = 207 \text{ ft/s} \measuredangle 45° \qquad \mathbf{v}_B = 97.6 \text{ ft/s} \measuredangle 30° \quad \blacktriangleleft$$

Problemas

14.1 Se dispara horizontalmente una bala de 3/4 oz que atraviesa el bloque A y queda incrustada en el bloque B. La bala hace que A y B comiencen a moverse con velocidades de 7.5 y 5 ft/s, respectivamente. Obténgase *a*) la velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ de la bala y *b*) la velocidad de la bala al ir del bloque A al bloque B.

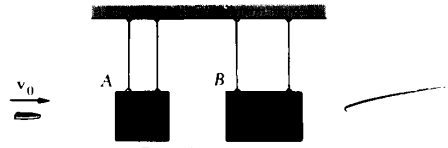


Fig. P14.1 y P14.2

14.2 Una bala de 3/4 de oz se dispara horizontalmente y atraviesa el bloque A y queda incrustada en el bloque B. Si $v_0 = 1800$ ft/s, y el bloque B comienza a moverse con una velocidad de 6 ft/s, determínense *a*) la velocidad con la que el bloque A comienza a moverse y *b*) la velocidad de la bala al ir del bloque A al bloque B.

14.3 Una locomotora de 60 Mg, deslizándose a 7 km/h, choca con una plataforma de 10 Mg que lleva una carga de 25 Mg que puede deslizar a lo largo del piso de la plataforma ($\mu_k = 0.20$). Si la plataforma estaba en reposo sin frenos y se engancha automáticamente con la locomotora en el choque, determínese la velocidad de la plataforma *a*) inmediatamente después del choque y *b*) después de que la carga se ha deslizado hasta detenerse en relación a la plataforma.

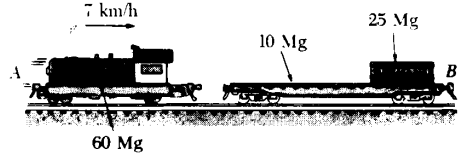


Fig. P14.3

14.4 Resuélvase el problema 14.3 suponiendo que la plataforma no logra acoplarse con la locomotora y que el choque es perfectamente elástico ($e = 1$).

14.5 Tres vagones de carga idénticos tienen las velocidades que se indican. Suponiendo que el vagón B es golpeado inicialmente por el vagón A, obténgase la velocidad de cada vagón después de que han ocurrido todos los choques si *a*) los tres vagones se acoplan automáticamente y *b*) los vagones A y B se acoplan automática y rígidamente, mientras que los vagones B y C rebotan al chocar con un coeficiente de restitución $e = 1$.

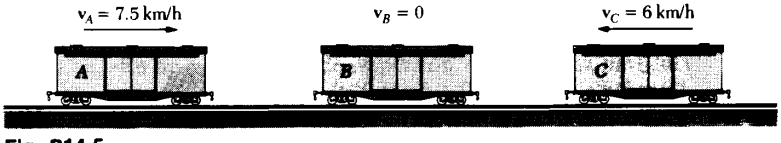


Fig. P14.5

14.6 Resuélvase el problema 14.5 suponiendo que el vagón B es golpeado inicialmente por el vagón C.

14.7 Un sistema consta de tres partículas A, B y C. Se sabe que $W_A = 5$ lb, $W_B = 4$ lb y $W_C = 3$ lb y que las velocidades de las partículas expresadas en ft/s son, respectivamente, $\mathbf{v}_A = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v}_B = v_x\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$ y $\mathbf{v}_C = -3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Determínense *a*) las componentes v_x y v_z de la velocidad de la partícula B para las cuales el momento angular $\mathbf{H}_O$ del sistema con respecto a O es paralelo al eje x y *b*) el valor correspondiente de $\mathbf{H}_O$.

14.8 Para el sistema de partículas del problema 14.7, obténganse *a*) las componentes v_x y v_z de la velocidad de la partícula B para las cuales el momento angular $\mathbf{H}_O$ del sistema con respecto a O es paralelo al eje z y *b*) el valor correspondiente de $\mathbf{H}_O$.

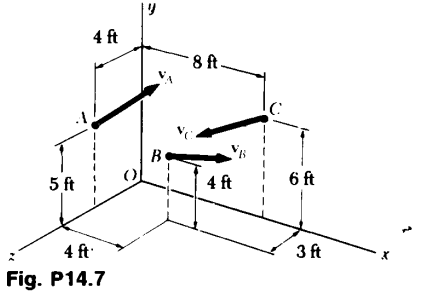


Fig. P14.7

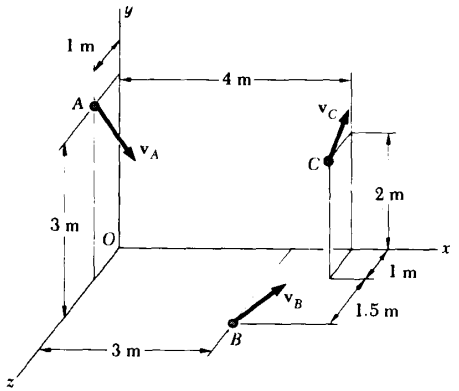


Fig. P14.9

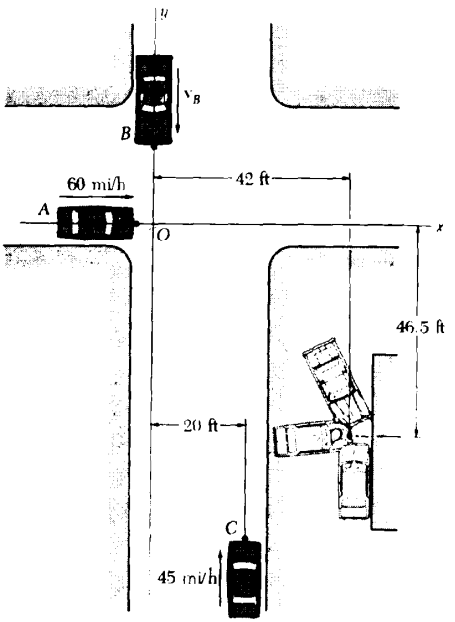


Fig. P14.12

14.9 Un sistema consta de tres partículas A, B y C. Se sabe que m_A = 1 kg, m_B = 2kg y m_C = kg y que las velocidades de las partículas expresadas en m/s son, respectivamente, $\mathbf{v}_A = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{v}_B = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ y $\mathbf{v}_C = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$. *a*) Determínese el momento angular $\mathbf{H}_O$ del sistema respecto a O. *b*) Utilizando el resultado de la parte *a* y las respuestas al problema 14.10, verifíquese que se satisfaga la relación proporcionada en el problema 14.22.

14.10 Para el sistema de partículas del problema 14.9, obténgase *a*) el vector de posición $\bar{\mathbf{r}}$ del centro de masas G del sistema, *b*) el momento lineal $m\bar{\mathbf{v}}$ del sistema y *c*) el momento angular $\mathbf{H}_G$ del sistema respecto de G.

14.11 Un vehículo espacial de 240 kg que tiene una velocidad $\mathbf{v}_0$ = (500 m/s) $\mathbf{k}$ pasa por el origen O en t = 0. Entonces, unas cargas explosivas separan el vehículo en tres partes A, B y C de masa 40 kg, 80 kg y 120 kg, respectivamente. Si en t = 3 s se observa que las posiciones de las partes B y C son B(375, 825, 2025) y C(−300, −600, 1200) en donde las coordenadas están expresadas en metros, determínese la posición correspondiente de la parte A despreciando el efecto de la gravedad.

14.12 La patrulla A se dirigía hacia el este a 60 mi/h atendiendo una llamada de emergencia de la policía cuando fue golpeada en una intersección por el automóvil B el cual va hacia el sur con gran velocidad. Tras deslizarse unidos sobre el pavimento húmedo, ambos automóviles golpearon a la patrulla C que se dirige hacia el norte a 45 mi/h. Los tres automóviles unidos golpearon una pared y se detuvieron en D. Si el automóvil B pesaba 3600 lb y cada una de las patrullas pesaba 3000 lb y el oficial que manejaba la patrulla C observó que estaba a 63 ft de la intersección cuando ocurrió el primer choque, determínense *a*) la velocidad del automóvil B y *b*) el tiempo que transcurrió desde el primer choque hasta que se detuvieron en D. (Despréciense las fuerzas ejercidas sobre los automóviles por el pavimento húmedo.)

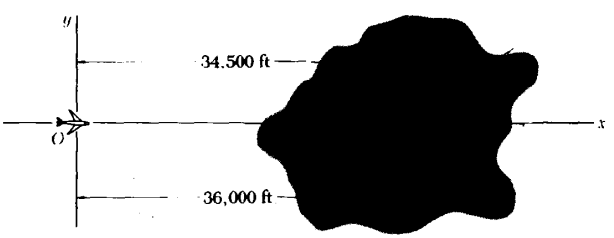


Fig. P14.13

14.13 Un avión de pasajeros que pesa 60 ton y viaja hacia el este a una altitud de 30 000 ft con una velocidad de 540 mi/h estalla repentinamente, rompiéndose en tres fragmentos A, B y C. El fragmento A que pesa 30 tons y el fragmento B que pesa 20 tons son encontrados en un área boscosa en los puntos indicados en la figura. Si sabemos que la explosión ocurrió cuando el avión se encontraba encima del punto O y, suponiendo que los tres fragmentos impactan en el suelo al mismo tiempo, encuéntrese la posición del fragmento C despreciando la resistencia del aire.

14.14 Dos balas de cañón de 15 kg, están unidas por una cadena y son disparadas horizontalmente con una velocidad de 165 m/s desde lo alto de una pared de 15 m de altura. La cadena se rompe durante la trayectoria de las balas y una de ellas impacta en el suelo en $t = 1.5$ s a una distancia de 240 m de la base de la pared y 7 m a la derecha de la línea de tiro. Obténgase la posición de la otra bala de cañón en el mismo instante despreciando la resistencia del aire.

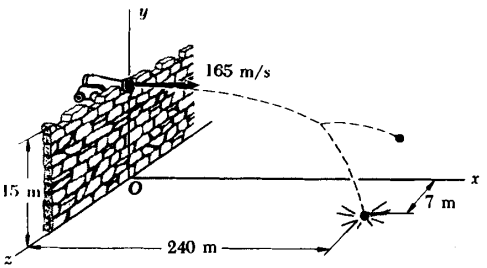


Fig. P14.14

14.15 Resuélvase el problema 14.14 si la bala de cañón que primero impacta en el suelo tiene una masa de 12 kg y la otra de 18 kg. Supóngase que el tiempo de vuelo y el punto de impacto de la primera bala son los mismos.

14.16 Si sabemos que el fragmento A del problema resuelto 14.2 tiene una velocidad de $v_A = 250$ ft/s y va en la dirección $\theta_A = 60°$, determínense el módulo y dirección de la velocidad del fragmento B después de la explosión.

14.17 En un juego de billar la bola A se mueve con velocidad $\mathbf{v}_0 = (10 \text{ ft/s})\mathbf{i}$ cuando golpea a las bolas B y C que se encuentran en reposo en contacto. Después del choque se observa que A se mueve con velocidad $\mathbf{v}_A = (3.92 \text{ ft/s})\mathbf{i} - (4.56 \text{ ft/s})\mathbf{j}$, mientras que B y C se mueven en las direcciones indicadas. Determínense los módulos de las velocidades $\mathbf{v}_B$ y $\mathbf{v}_C$.

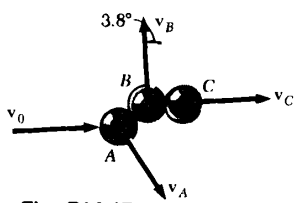


Fig. P14.17

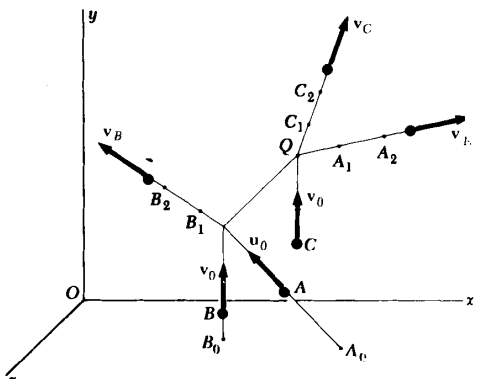


Fig. P14.18

14.18 En un experimento de dispersión, se dirige una partícula alfa A con una velocidad $\mathbf{u}_0 = -(600 \text{ m/s})\mathbf{i} + (750 \text{ m/s})\mathbf{j} - (800 \text{ m/s})\mathbf{k}$ hacia un chorro de núcleos de oxígeno que se mueven con la velocidad común $\mathbf{v}_0 = (600 \text{ m/s})\mathbf{j}$. Después de chocar sucesivamente con los núcleos B y C, se observa que la partícula A se mueve a lo largo de la trayectoria determinada por los puntos A_1 (280, 240, 120), A_2 (360, 320, 160) mientras que los núcleos B y C se mueven a lo largo de trayectorias dadas por, respectivamente, B_1 (147, 220, 130), B_2 (114, 290, 120) y por C_1 (240, 232, 90), y C_2 (240, 280, 75). Todas las trayectorias son líneas rectas y todas las coordenadas están expresadas en milímetros. Sabiendo que la masa de un núcleo de oxígeno es el cuádruple de una partícula alfa, obténgase la velocidad de cada una de las tres partículas después del choque.

14.19 Un proyectil de 1.2 kg se mueve en dirección perpendicular a un muro, cuando, en el punto D, estalla en tres fragmentos A, B y C de masas 300 g, 400 g y 500 g. Si los fragmentos golpean al muro en los puntos indicados y $v_A = 490$ m/s, determínese la velocidad $\mathbf{v}_0$ del proyectil antes de explotar.

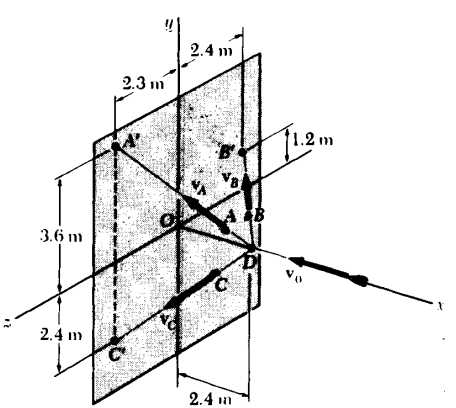


Fig. P14.19

14.20 Un helicóptero A de 4500 kg viaja en dirección este a una velocidad de 120 km/h y una altitud de 800 m cuando lo golpea un helicóptero B de 6000 kg. A consecuencia del choque ambos helicópteros perdieron sustentación y los restos del aparato cayeron al suelo en 12 s en un punto situado 525 m al este y 135 m al sur del punto del impacto. Despreciando la resistencia del aire, encuéntrense las componentes de la velocidad del helicóptero B justo antes del choque.

14.21 Un arquero da en un pájaro que vuela en línea recta horizontal a 9 m sobre el suelo, con una flecha de madera de 40 g. Si sabemos que la flecha golpea al pájaro por detrás con una velocidad de 110 m/s y un ángulo de 30° con la vertical y que el pájaro cae al suelo en 1.5 s y 18 m por delante del punto donde fue golpeado, obténgase *a*) la masa del pájaro y *b*) la velocidad a la que volaba cuando fue golpeado.

14.22 Dedúzcase la relación

$$\mathbf{H}_O = \bar{\mathbf{r}} \times m\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{H}_G$$

entre los momentos angulares $\mathbf{H}_O$ y $\mathbf{H}_G$, definidos por las ecuaciones (14.7) y (14.24), respectivamente. Los vectores $\bar{\mathbf{r}}$ y $\bar{\mathbf{v}}$ representan, en ese orden, la posición y velocidad del centro de masas G del sistema de partículas respecto al sistema newtoniano de referencia $Oxyz$, donde m representa la masa total del sistema.

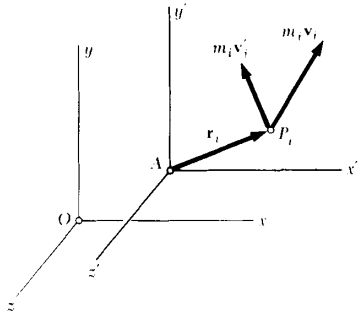


Fig. P14.24

14.23 Demuéstrese que la ecuación (14.23) puede ser deducida directamente de la ecuación (14.11) al sustituir $\mathbf{H}_O$ por la expresión dada en el problema 14.22.

14.24 Considérese el sistema de referencia $Ax'y'z'$ en traslación con respecto al sistema newtoniano de referencia $Oxyz$. Definimos el momento angular $\mathbf{H}'_A$ de un sistema de n partículas alrededor de A como la suma

$$\mathbf{H}'_A = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}'_i \times m_i\mathbf{v}'_i \tag{1}$$

de los momentos con respecto a A de los momentos lineales $m_i\mathbf{v}'_i$ de las partículas en su movimiento relativo al sistema de referencia $Ax'y'z'$. Indicando por $\mathbf{H}_A$ la suma

$$\mathbf{H}_A = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}'_i \times m_i\mathbf{v}_i \tag{2}$$

de los momentos con respecto a A de los momentos lineales $m_i\mathbf{v}_i$ de las partículas en su movimiento relativo al sistema newtoniano de referencia $Oxyz$, demuéstrese que $\mathbf{H}_A = \mathbf{H}'_A$ en cierto instante si y sólo si se satisface una de las condiciones siguientes en ese instante: *a*) A tiene velocidad nula con respecto al sistema $Oxyz$, *b*) A coincide con el centro de masas G del sistema y *c*) la velocidad $\mathbf{v}_A$ relativa a $Oxyz$ está dirigida a lo largo de la línea AG.

14.25 Demuéstrese que la relación $\Sigma\mathbf{M}_A = \dot{\mathbf{H}}'_A$ donde $\mathbf{H}'_A$ está definida por la ecuación (1) del problema 14.24 y donde $\Sigma\mathbf{M}_A$ representa la suma de los momentos de las fuerzas exteriores que actúan sobre el sistema de partículas, es válida si y sólo si se satisface una de las siguientes condiciones: *a*) el sistema $Ax'y'z'$ es también un sistema de referencia newtoniano, *b*) A coincide con el centro de masas G y *c*) la aceleración $\mathbf{a}_A$ de A relativa a $Oxyz$ está dirigida a lo largo de la línea AG.

14.7. Energía cinética de un sistema de partículas. La energía cinética T de un sistema de partículas se define como la suma de las energías cinéticas de las distintas partículas del sistema. Refiriéndonos a la sección 13.3 escribimos, por consiguiente,

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2 \tag{14.28}$$

Empleo de un sistema de referencia central. Cuando se calcula la energía cinética de un sistema que consiste en gran número de partículas (como en el caso de un sólido rígido), a menudo es conveniente considerar por separado el movimiento del centro de masas G del sistema y el movimiento del sistema relativo a un sistema de referencia en movimiento fijo en G.

Sea P_i una partícula del sistema, $\mathbf{v}_i$ su velocidad relativa al sistema newtoniano de referencia $Oxyz$ y $\mathbf{v}'_i$ su velocidad relativa al sistema móvil $Gx'y'z'$ que se traslada con respecto a $Oxyz$ (Fig. 14.7). Recordamos de la sección anterior que

$$\mathbf{v}_i = \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}'_i \tag{14.22}$$

en la que $\bar{\mathbf{v}}$ representa la velocidad del centro de masas G relativa al sistema newtoniano $Oxyz$. Al observar que v_i^2 es igual al producto escalar $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i$, expresamos a la energía cinética T del sistema relativa al sistema newtoniano $Oxyz$ de la manera siguiente:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} (m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i)$$

o, al sustituir $\mathbf{v}_i$ de la ecuación (14.22),

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} [m_i(\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}'_i) \cdot (\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}'_i)]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right)\bar{v}^2 + \bar{\mathbf{v}} \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v}'_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i'^2$$

La primera suma representa la masa total m del sistema. Recordando la ecuación (14.13), notamos que la segunda suma es igual a $m\bar{\mathbf{v}}'$ y por consiguiente es nula, puesto que $\bar{\mathbf{v}}'$, que representa la velocidad de G relativa al sistema de referencia $Gx'y'z'$, obviamente es cero. Por tanto, escribimos

$$T = \frac{1}{2}m\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i'^2 \tag{14.29}$$

Esta ecuación muestra que la energía cinética T de un sistema de partículas puede obtenerse *sumando la energía cinética del centro de masas G* (suponiendo toda la masa concentrada en G) *y la energía cinética del sistema en su movimiento relativo al sistema $Gx'y'z'$*.

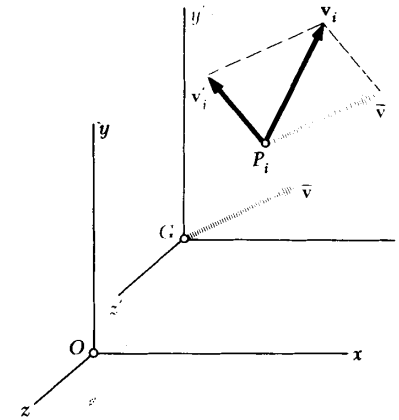


Fig. 14.7

14.8. Teorema de las fuerzas vivas. Conservación de la energía para un sistema de partículas. El teorema de las fuerzas vivas puede ser aplicado a cada partícula P_i de un sistema de partículas. Escribimos

$$T_1 + U_{1\to 2} = T_2 \tag{14.30}$$

para cada partícula P_i, en la que U_{1-2} representa el trabajo realizado por las fuerzas interiores $\mathbf{f}_{ij}$ y la fuerza exterior resultante $\mathbf{F}_i$ que actúan sobre P_i. Sumando las energías cinéticas de las diferentes partículas del sistema y considerando el trabajo de todas las fuerzas que intervienen, podemos aplicar la ecuación (14.30) al sistema completo. Las cantidades T_1 y T_2 representan ahora la energía cinética de todo el sistema y puede calcularse de la ecuación (14.28) o de la (14.29). La cantidad $U_{1\to 2}$ representa el trabajo de todas las fuerzas que actúen sobre las partículas del sistema. Debemos notar que, aunque las fuerzas interiores $\mathbf{f}_{ij}$ y $\mathbf{f}_{ji}$ son iguales y opuestas, en general el trabajo realizado por ellas no se anulará, pues las partículas P_i y P_j sobre las que actúan tendrán generalmente diferentes desplazamientos. Por consiguiente, al calcular $U_{1\to 2}$, *deberemos considerar el trabajo de las fuerzas interiores* $\mathbf{f}_{ij}$ *así como el trabajo de las fuerzas exteriores* $\mathbf{F}_i$.

Si todas las partículas que actúan sobre las partículas de un sistema son conservativas, la ecuación (14.30) puede sustituirse por

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \tag{14.31}$$

en la que V representa la energía potencial asociada a las fuerzas interiores y exteriores que actúen sobre las partículas del sistema. La ecuación (14.31) expresa el principio de *conservación de la energía* para el sistema de partículas.

14.9. Principio del impulso y del momento para un sistema de partículas. Al integrar la ecuaciones (14.10) y (14.11) sobre t desde un tiempo t_1 hasta el tiempo t_2, escribimos

$$\sum \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\, dt = \mathbf{L}_2 - \mathbf{L}_1 \tag{14.32}$$

$$\sum \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O\, dt = (\mathbf{H}_O)_2 - (\mathbf{H}_O)_1 \tag{14.33}$$

Recordando la definición del impulso lineal de una fuerza dada en la sección 13.10, observamos que las integrales de la ecuación (14.32) representan los impulsos lineales de las fuerzas exteriores que actúan sobre las partículas del sistema. Nos referiremos de una manera similar a las integrales de la ecuación (14.33) como los *impulsos angulares* con respecto a O de las fuerzas exteriores. Por consiguiente, la ecuación (14.32) expresa que la suma de los impulsos de las fuerzas exteriores que actúan sobre el sistema es igual al cambio en el momento lineal del sistema. De igual manera, la ecuación (14.33) expresa que la suma de los impulsos angulares respecto de O de dichas fuerzas es igual a la variación del momento angular del sistema respecto de O.

A fin de comprender el significado físico de las ecuaciones (14.32) y (14.33), reagruparemos los términos en estas ecuaciones y escribiremos.

$$\mathbf{L}_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\, dt = \mathbf{L}_2 \tag{14.34}$$

$$(\mathbf{H}_O)_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O\, dt = (\mathbf{H}_O)_2 \tag{14.35}$$

En las partes *a* y *c* de la figura 14.8 hemos trazado los momentos lineales de las partículas del sistema a los tiempos t_1 y t_2, respectivamente, mientras que en la parte *b* de la misma figura mostramos un vector igual a la suma de los impulsos lineales de las fuerzas exteriores y un par de momento igual a la suma de los impulsos angulares alrededor de *O* de las fuerzas exteriores. Para mayor sencillez, se ha supuesto que las partículas se mueven en el plano de la figura, pe-

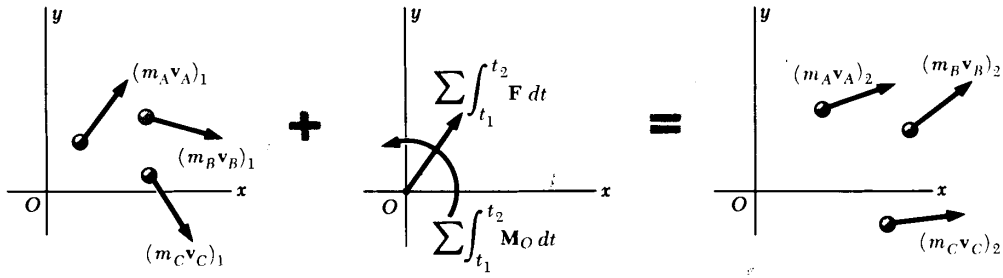


Fig. 14.8 *a)* *b)* *c)*

ro esto sigue siendo válido en el caso de partículas que se mueven en el espacio. Recordando de la ecuación (14.6) que **L**, por definición, es la resultante de las cantidades de movimiento $m_i\mathbf{v}_i$, se deduce que la ecuación (14.34) expresa que la resultante de los vectores mostrados en las partes *a* y *b* de la figura 14.8 es igual a la resultante de los vectores mostrados en la parte *c* de la misma figura. Al recordar, de la ecuación (14.7), que $\mathbf{H}_O$ es el momento resultante de los momentos lineales $m_i\mathbf{v}_i$, notamos que la ecuación (14.35) expresa, de manera similar, que el momento resultante de los vectores en las partes *a* y *b* de la figura 14.8 es igual al momento resultante de los vectores en la parte *c*. Por consiguiente, las ecuaciones (14.34) y (14.35) expresan que *los momentos lineal y angular de las partículas al tiempo* t_1 *y los impulsos de las fuerzas exteriores desde* t_1 *a* t_2 *forman un sistema de vectores equivalentes al sistema de los momentos lineal y angular de las partículas al tiempo* t_2. Esto se indicó en la figura 14.8 mediante el empleo de signos más e igual de color gris.

Si sobre las partículas del sistema no actúa ninguna fuerza exterior, las integrales de las ecuaciones (14.34) y (14.35) son cero y estas ecuaciones se reducen a

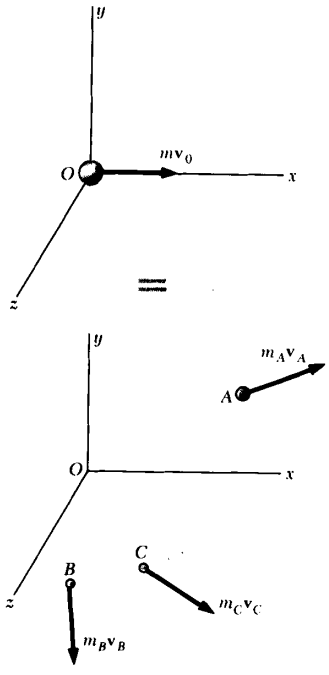
$$\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_2 \tag{14.36}$$

$$(\mathbf{H}_O)_1 = (\mathbf{H}_O)_2 \tag{14.37}$$

De esta manera comprobamos el resultado obtenido en la sección 14.6: Si sobre las partículas de un sistema no actúa ninguna fuerza exterior, se conservan el momento lineal y el momento angular alrededor del punto *O* del sistema de partículas. El sistema de los momentos lineal y angular iniciales es equivalente al sistema de los momentos lineal y angular finales, y se sigue que el momento angular del sistema de partículas respecto de *cualquier* punto fijo se conserva.

PROBLEMA RESUELTO 14.3

Para el vehículo espacial de 200 kg del problema resuelto 14.1 se sabe que a t = 2.5 s, la velocidad de la parte A es $\mathbf{v}_A = (270 \text{ m/s})\mathbf{i} - (120 \text{ m/s})\mathbf{j} + (160 \text{ m/s})\mathbf{k}$ y que la velocidad de la parte B es paralela al plano xz. Encuéntrese la velocidad de la parte C.



Solución. Como no hay ninguna fuerza exterior, el momento lineal inicial $m\mathbf{v}_0$ es equivalente al sistema de los momentos lineales finales. Igualando primero las sumas de los vectores de ambas partes del diagrama adjunto, y después las sumas de sus momentos con respecto a O, escribimos

$$\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_2: \qquad m\mathbf{v}_0 = m_A\mathbf{v}_A + m_B\mathbf{v}_B + m_C\mathbf{v}_C \tag{1}$$

$$(\mathbf{H}_O)_1 = (\mathbf{H}_O)_2: \quad 0 = \mathbf{r}_A \times m_A\mathbf{v}_A + \mathbf{r}_B \times m_B\mathbf{v}_B + \mathbf{r}_C \times m_C\mathbf{v}_C \tag{2}$$

Al recordar del problema resuelto 14.1 que $\mathbf{v}_0 = (150 \text{ m/s})\mathbf{i}$,

$$m_A = 100 \text{ kg} \qquad m_B = 60 \text{ kg} \qquad m_C = 40 \text{ kg}$$
$$\mathbf{r}_A = (555 \text{ m})\mathbf{i} - (180 \text{ m})\mathbf{j} + (240 \text{ m})\mathbf{k}$$
$$\mathbf{r}_B = (255 \text{ m})\mathbf{i} - (120 \text{ m})\mathbf{k}$$
$$\mathbf{r}_C = (105 \text{ m})\mathbf{i} + (450 \text{ m})\mathbf{j} - (420 \text{ m})\mathbf{k}$$

y empleando la información dada en el enunciado de este problema, reescribimos las ecuaciones (1) y (2) de la manera siguiente:

$$200(150\mathbf{i}) = 100(270\mathbf{i} - 120\mathbf{j} + 160\mathbf{k}) + 60[(v_B)_x\mathbf{i} + (v_B)_z\mathbf{k}] + 40[(v_C)_x\mathbf{i} + (v_C)_y\mathbf{j} + (v_C)_z\mathbf{k}] \tag{1'}$$

$$0 = 100\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 555 & -180 & 240 \\ 270 & -120 & 160 \end{vmatrix} + 60\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 255 & 0 & -120 \\ (v_B)_x & 0 & (v_B)_z \end{vmatrix} + 40\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 105 & 450 & -420 \\ (v_C)_x & (v_C)_y & (v_C)_z \end{vmatrix} \tag{2'}$$

Igualando a cero el coeficiente de $\mathbf{j}$ en (1') y los coeficientes de $\mathbf{i}$ y $\mathbf{k}$ en (2') escribimos, después de simplificar, las tres ecuaciones escalares

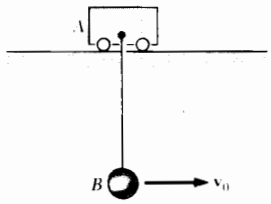
$$(v_C)_y - 300 = 0$$
$$450(v_C)_z + 420(v_C)_y = 0$$
$$105(v_C)_y - 450(v_C)_z - 45\,000 = 0$$

las cuales resultan en, respectivamente,

$$(v_C)_y = 300 \qquad (v_C)_z = -280 \qquad (v_C)_x = -30$$

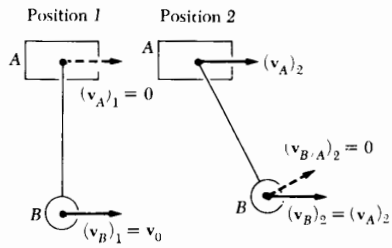
La velocidad de la parte C es, en consecuencia,

$$\mathbf{v}_C = -(30 \text{ m/s})\mathbf{i} + (300 \text{ m/s})\mathbf{j} - (280 \text{ m/s})\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESUELTO 14.4

La bola B, de masa m_B, se suspende de una cuerda de longitud l unida al vagón A de masa m_A, el cual puede rodar libremente sobre una vía horizontal sin rozamiento. Si se comunica a la bola una velocidad horizontal inicial $\mathbf{v}_0$ mientras el vagón está en reposo, determínense *a*) la velocidad de B al alcanzar su punto de altura máxima y *b*) la máxima distancia vertical h a través de la cual se puede elevar B.



Solución. Se deberá aplicar el principio de impulso y del momento y el principio de conservación de la energía al sistema vagón-bola entre su posición inicial 1 y la posición 2 cuando B alcanza su altura máxima.

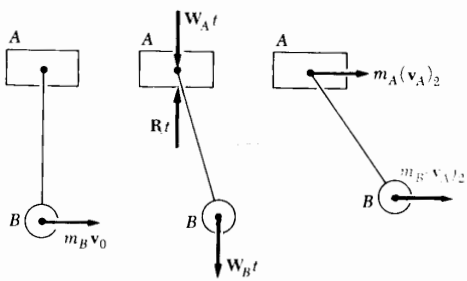
Velocidades

Posición 1: $(\mathbf{v}_A)_1 = 0 \qquad (\mathbf{v}_B)_1 = \mathbf{v}_0$ (1)

Posición 2: Cuando la bola B alcanza su elevación máxima, su velocidad $(\mathbf{v}_{B/A})_2$ relativa al soporte A es cero. Entonces, en ese instante, su velocidad absoluta es

$$(\mathbf{v}_B)_2 = (\mathbf{v}_A)_2 + (\mathbf{v}_{B/A})_2 = (\mathbf{v}_A)_2 \tag{2}$$

Principio del impulso y del momento. Observando que los impulsos exteriores constan de $\mathbf{W}_A t$, $\mathbf{W}_B t$ y $\mathbf{R}t$, donde $\mathbf{R}$ es la reacción de la guía sobre el vagón y reutilizando (1) y (2), se dibuja el diagrama del impulso-momento lineal y se escribe



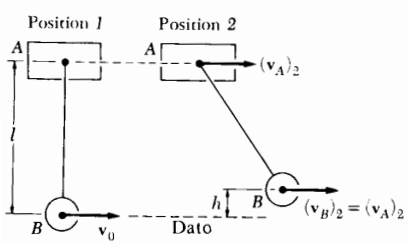
$$\Sigma m\mathbf{v}_1 + \Sigma\,\mathbf{Ext\ Imp}_{1\to 2} = \Sigma m\mathbf{v}_2$$

$\stackrel{+}{\rightarrow}$ x componentes: $\qquad m_B v_0 = (m_A + m_B)(v_A)_2$

lo que expresa que el momento lineal del sistema se conserva en la dirección horizontal. Resolviendo para $(v_A)_2$:

$$(v_A)_2 = \frac{m_B}{m_A + m_B} v_0 \qquad (\mathbf{v}_B)_2 = (\mathbf{v}_A)_2 = \frac{m_B}{m_A + m_B} v_0 \rightarrow \blacktriangleleft$$

Conservación de la energía.



Posición 1. *Energía potencial*: $V_1 = m_A g l$

Energía cinética: $T_1 = \frac{1}{2} m_B v_0^2$

Posición 2. *Energía potencial*: $V_2 = m_A g l + m_B g h$

Energía cinética: $T_2 = \frac{1}{2}(m_A + m_B)(v_A)_2^2$

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2: \quad \tfrac{1}{2} m_B v_0^2 + m_A g l = \tfrac{1}{2}(m_A + m_B)(v_A)_2^2 + m_A g l + m_B g h$$

Al despejar h, se tiene

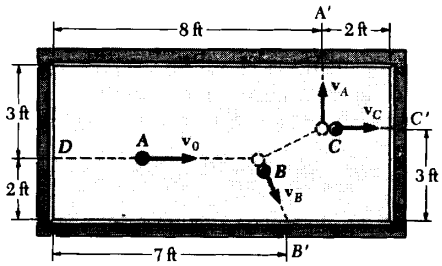
$$h = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{m_A + m_B}{m_B} \frac{(v_A)_2^2}{2g}$$

o, sustituyendo para $(v_A)_2$ la expresión encontrada anteriormente,

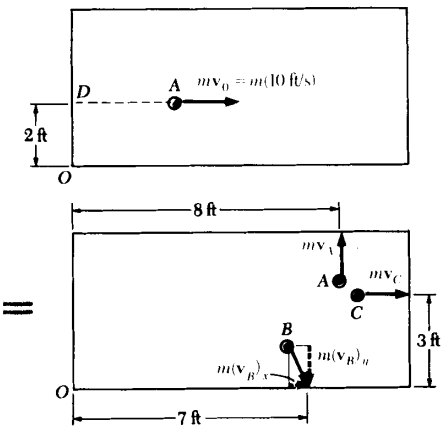
$$h = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{m_B}{m_A + m_B} \frac{v_0^2}{2g} \qquad h = \frac{m_A}{m_A + m_B} \frac{v_0^2}{2g} \blacktriangleleft$$

Observación. Para $m_A \gg m_B$ las respuestas obtenidas se reducen a $(\mathbf{v}_B)_2 = (\mathbf{v}_A)_2 = 0$ y $h = v_0^2/2g$; B oscila como un péndulo simple con A fijo. Para $m_A \ll m_B$ se reducen a $(\mathbf{v}_B)_2 = (\mathbf{v}_A)_2 = \mathbf{v}_0$ y $h = 0$; a A y B se mueven en la misma velocidad constante $\mathbf{v}_0$.

PROBLEMA RESUELTO 14.5



En un juego de billar, la bola A recibe una velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ de módulo $v_0 = 10$ ft/s a lo largo de la línea DA paralela al eje de la mesa. Choca con la bola B y después con la C, estando ambas en reposo. Si A y C chocan de frente con los lados de la mesa en los puntos A' y C', respectivamente, B choca oblicuamente en el lado B' y suponiendo superficies sin rozamiento e impactos perfectamente elásticos, obténganse las velocidades $\mathbf{v}_A$, $\mathbf{v}_B$ y $\mathbf{v}_C$ con las que las bolas chocan con los costados de la mesa. (*Observación.* En este ejemplo resuelto y en varios de los problemas que siguen, se supone que las bolas de billar son partículas que se mueven libremente en un plano horizontal en vez de las esferas rodantes y deslizantes que son en realidad.)



Solución. *Conservación del momento lineal.* Como no hay fuerza exterior, el momento lineal inicial $m\mathbf{v}_0$ es equivalente al sistema de momentos después de los dos choques (y antes que cualquiera de las bolas choque con el costado de la mesa). Con referencia al esquema adjunto, escribimos

$$\rightarrow \text{componentes } x: \qquad m(10\text{ ft/s}) = m(v_B)_x + mv_C \tag{1}$$

$$+\uparrow \text{componentes } y: \qquad 0 = mv_A - m(v_B)_y \tag{2}$$

$$+\circlearrowleft \text{momentos respecto a } O: \quad -(2\text{ ft})m(10\text{ ft/s}) = (8\text{ ft})mv_A - (7\text{ ft})m(v_B)_y - (3\text{ ft})mv_C \tag{3}$$

Al resolver las tres ecuaciones para v_A, $(v_B)_x$ y $(v_B)_y$ en términos de v_C,

$$v_A = (v_B)_y = 3v_C - 20 \qquad (v_B)_x = 10 - v_C \tag{4}$$

Conservación de la energía. Como las superficies son lisas y sin rozamiento y los impactos son perfectamente elásticos, la energía cinética inicial $\frac{1}{2}mv_0^2$ es igual a la energía cinética final del sistema:

$$\tfrac{1}{2}mv_0^2 = \tfrac{1}{2}m_Av_A^2 + \tfrac{1}{2}m_Bv_B^2 + \tfrac{1}{2}m_Cv_C^2$$

$$v_A^2 + (v_B)_x^2 + (v_B)_y^2 + v_C^2 = (10\text{ ft/s})^2 \tag{5}$$

Al sustituir v_A, $(v_B)_x$ y $(v_B)_y$ de la ecuación (4) en (5), tenemos

$$2(3v_C - 20)^2 + (10 - v_C)^2 + v_C^2 = 100$$

$$20v_C^2 - 260v_C + 800 = 0$$

Despejando v_C, encontramos $v_C = 5$ ft/s y $v_C = 8$ ft/s. Como sólo la segunda raíz produce un valor positivo de v_A después de sustituir en las ecuaciones (4), concluimos que $v_C = 8$ ft/s y

$$v_A = (v_B)_y = 3(8) - 20 = 4\text{ ft/s} \qquad (v_B)_x = 10 - 8 = 2\text{ ft/s}$$

$$\mathbf{v}_A = 4\text{ ft/s} \uparrow \qquad \mathbf{v}_B = 4.47\text{ ft/s} \searrow 63.4° \qquad \mathbf{v}_C = 8\text{ ft/s} \rightarrow \blacktriangleleft$$

Problemas

14.26 En el problema 14.1, determínese la energía perdida por rozamiento al *a*) atravesar la bala el bloque *A* y *b*) penetrar la bala el bloque *B*.

14.27 En el problema 14.3, encuéntrese la energía perdida *a*) al acoplarse los dos vagones y *b*) cuando el extremo del vagón plataforma golpea el camión.

14.28 Cada uno de los tres vagones de carga del problema 14.5 tiene una masa de 36 Mg. Suponiendo que el vagón *B* choca primero con el vagón *A*, acoplándose automáticamente y después *B* es golpeado por el vagón *C* y se acoplan automáticamente, obténgase la energía perdida *a*) en el primer acoplamiento y *b*) en el segundo acoplamiento.

14.29 En el problema 14.19 encuéntrese el trabajo efectuado por las fuerzas interiores durante la explosión del proyectil.

14.30 Dos automóviles *A* y *B* de masas m_A y m_B, respectivamente, viajan en direcciones opuestas cuando chocan de frente. Se supone que el impacto es perfectamente plástico y además, que la energía amortiguada por cada automóvil es igual a su pérdida de energía cinética con respecto a un sistema de referencia en movimiento y fijo al centro de masa del sistema de los dos automóviles. Simbolizando con E_A y E_B la energía amortiguada por el automóvil *A* y el *B* respectivamente, *a*) demuéstrese que $(E_A/E_B) = (m_B/m_A)$, es decir, la energía amortiguada por cada vehículo es inversamente proporcional a su masa, *b*) calcúlense E_A y E_B si el automóvil *A* pesa 3500 lb y tiene una velocidad de 55 mi/h antes del impacto, mientras que el *B* pesa 2000 lb y tiene una velocidad de 35 mi/h.



Fig. P14.30

14.31 Se supone que cada uno de los automóviles que participan en el choque descrito en el problema 14.30 fue diseñado para resistir con toda seguridad un choque contra un muro sólido inmóvil a una velocidad v_0. Para cada vehículo puede medirse entonces la severidad del choque del problema 14.30 por medio de la relación de la energía absorbida por el auto en el choque a la energía absorbida por él durante la prueba. Con esta base, demuéstrese que el choque descrito en el problema 14.30 es $(m_A/m_B)^2$ veces más severo para el automóvil *B* que para el automóvil *A*.

14.32 Cuando se corta la cuerda que une las partículas *A* y *B*, los resortes comprimidos hacen que las partículas vuelen por separado (el resorte no está conectado a las partículas). La energía potencial del resorte comprimido se sabe que es 40 ft · lb y que el conjunto tiene una velocidad inicial v_0 como se indica. Si la cuerda se cortó cuando $\theta = 25°$, determínese la velocidad resultante de cada partícula.

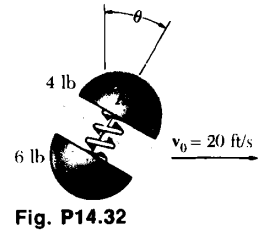


Fig. P14.32

14.33 Un bloque B de 20 kg está suspendido de un cordón de 2 m fijo a un vagón A de 30 kg, el cual puede rodar libremente sobre una vía horizontal sin rozamiento. Si el sistema se suelta desde el reposo en la posición aquí indicada, obténganse las velocidades de A y de B cuando B pasa directamente bajo A.

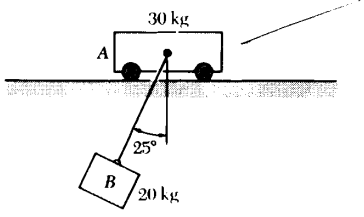


Fig. P14.33

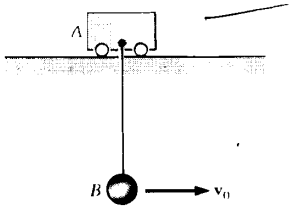


Fig. P14.34

14.34 La pelota B está suspendida de una cuerda de longitud l, fija a un vagón A, el cual puede rodar libremente sobre una vía horizontal sin rozamiento. La pelota y el vagón tienen la misma masa m. Si la pelota recibe una velocidad inicial horizontal $\mathbf{v}_0$, mientras el vagón está en reposo, descríbase el movimiento subsecuente del sistema especificando las velocidades de A y de B para los siguientes valores sucesivos del ángulo θ (que se supone positivo en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj) que formará la cuerda con la vertical: *a)* $\theta = \theta_{máx}$, *b)* $\theta = 0$ y *c)* $\theta = \theta_{mín}$.

14.35 En un juego de billar, la bola A se mueve con velocidad $\mathbf{v}_0 = v_0\mathbf{i}$ cuando golpea a las bolas B y C que están en reposo una junto a la otra. Suponiendo superficies sin rozamiento y choque perfectamente elástico, es decir, conservación de la energía, determínese la velocidad final de cada bola, suponiendo que el camino de A es *a)* perfectamente centrada y que A pega a B y a C simultáneamente, y *b)* no perfectamente centrada y que A golpea B ligeramente antes de golpear C.



Fig. P14.35

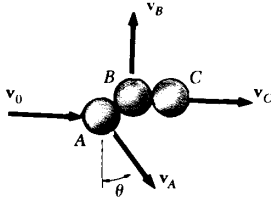


Fig. P14.36

14.36 En un juego de billar, la bola A se mueve con velocidad $\mathbf{v}_0 = (5 \text{ m/s})\mathbf{i}$ cuando golpea las bolas B y C que se encuentran en reposo una junto a la otra. Después del choque, se observa que las tres bolas se mueven en las direcciones mostradas, con $\theta = 20°$. Suponiendo superficies sin rozamiento y choque perfectamente elástico (es decir, conservación de la energía), determínense los módulos de las velocidades $\mathbf{v}_A$, $\mathbf{v}_B$ y $\mathbf{v}_C$.

14.37 Un bloque B de 15 lb parte del reposo y se desliza sobre la cuña A de 25 lb, la cual está apoyada sobre una superficie horizontal. Despreciando el rozamiento, determínense *a)* la velocidad de B en relación a A después de que se ha deslizado 3 ft hacia abajo de la superficie inclinada de la cuña y *b)* la velocidad correspondiente de A.

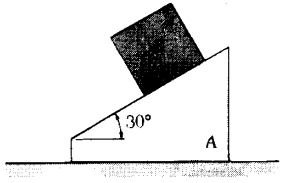


Fig. P14.37

14.38 Tres esferas, cada una de masa m pueden deslizarse libremente sobre una superficie horizontal sin rozamiento. Las esferas A y B están atadas a una cuerda inextensible e inelástica de longitud l y están en reposo en la posición indicada, cuando la esfera B es golpeada de lleno por la esfera C, la cual se mueve hacia la derecha con velocidad $\mathbf{v}_0$. Si la cuerda está tensa cuando la esfera B es golpeada por la C y se supone un choque perfectamente elástico entre B y C, y por consiguiente, la conservación de energía en el sistema completo, encuéntrese la velocidad de cada esferá inmediatamente después del choque.

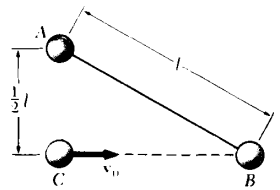


Fig. P14.38

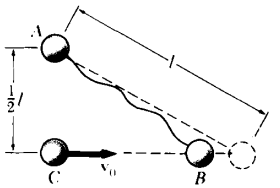


Fig. P14.39

14.39 Tres esferas, cada una de masa m, se pueden deslizar libremente sobre una superficie horizontal sin rozamiento. Las esferas A y B están atadas a una cuerda inextensible e inelástica de longitud l y están en reposo en la posición indicada cuando la esfera B es golpeada de lleno por la esfera C, la cual se mueve hacia la derecha con velocidad $\mathbf{v}_0$. Si la cuerda está floja cuando la esfera B es golpeada por la esfera C y se supone un choque perfectamente elástico entre B y C, determínense *a*) la velocidad de cada esfera inmediatamente después que la cuerda se tensa y *b*) la fracción de la energía cinética inicial del sistema que se disipa cuando la cuerda se tensa.

14.40 Tres esferas pequeñas, A, B y C, cada una de masa m, están conectadas a un anillo pequeño D por medio de tres cuerdas elásticas e inextensibles de longitud l que están equidistantes. Las esferas pueden resbalar sobre una superficie horizontal sin rozamiento e inicialmente están girando con una velocidad v_0 alrededor del anillo D que se encuentra en reposo. De repente se rompe la cuerda CD. Después que las otras dos cuerdas vuelven a estar tensas, obténgase *a*) la velocidad del anillo D, *b*) la velocidad relativa con que las esferas A y B giran alrededor de D y *c*) la fracción de la energía del sistema original que se disipa cuando las cuerdas AD y BD vuelven a estar tensas.

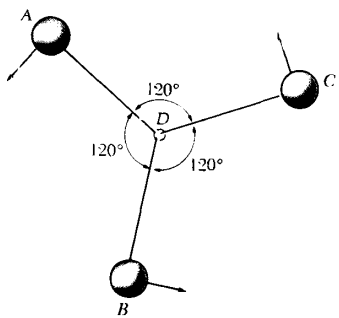


Fig. P14.40

14.41 Dos esferas pequeñas A y B de masa m y $2m$, respectivamente, están unidas por medio de una barra rígida de longitud l y masa despreciable. Las dos esferas descansan sobre una superficie horizontal sin rozamiento cuando repentinamente se le proporciona a A la velocidad $\mathbf{v}_0 = v_0\mathbf{i}$. Determínense *a*) el momento lineal del sistema y su momento angular respecto de su centro de masas G, *b*) las velocidades de A y B después de que la barra AB ha girado 90° y *c*) las velocidades de A y B después de que la barra AB ha girado 180°.

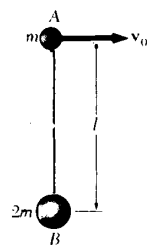


Fig. P14.41

14.42 En el experimento de dispersión del problema 14.18, sabemos que la partícula alfa se lanza desde A_0 (300,0,300) y que choca con el núcleo de oxígeno C en Q(240, 200, 100) con todas las coordenadas expresadas en mm. Determínense las coordenadas del punto B_0 en el que la trayectoria original del núcleo B atraviesa el plano xz. (*Sugerencia.* Exprésese la conservación del momento angular de las tres partículas respecto de Q.)

14.43 Un vehículo espacial de 750 lb que se mueve con la velocidad $\mathbf{v}_0 = (1\ 500\ \text{ft/s})\mathbf{k}$ pasa a través del origen O. Entonces, unas cargas explosivas separan al vehículo en tres partes A, B y C que pesan respectivamente, 125 lb, 250 lb y 375 lb. Si sabemos que poco tiempo después las posiciones de las tres partes son, respectivamente, A (240, 240, 2160), B(600, 1320, 3240) y C(−480, −960, 1920), expresadas las coordenadas en pies y que la velocidad de B es $\mathbf{v}_B = (500\ \text{ft/s})\mathbf{i} + (1100\ \text{ft/s})\mathbf{j} + (2200\ \text{ft/s})\mathbf{k}$ y que la componente x de la velocidad de C es -400 ft/s, determínese la velocidad de la parte A.

14.44 Tres pequeñas esferas idénticas A, B y C, que pueden deslizarse sobre una superficie horizontal sin rozamiento, están unidas por tres cuerdas de longitud l atadas al anillo G. Inicialmente las esferas giran alrededor del anillo que se mueve a lo largo del eje x con velocidad $\mathbf{v}_0$. Súbitamente el anillo se rompe y las tres esferas se mueven libremente en el plano xy. Sabiendo que $\mathbf{v}_A = (0.732\ \text{m/s})\mathbf{j}$, $\mathbf{v}_C = (1.2\ \text{m/s})\mathbf{i}$, $a = 208$ mm y $d = 120$ mm, determínense *a*) la velocidad inicial del anillo, *b*) la longitud l de las cuerdas y *c*) la velocidad angular en radianes sobre segundo a la cual giraban las esferas alrededor de G.

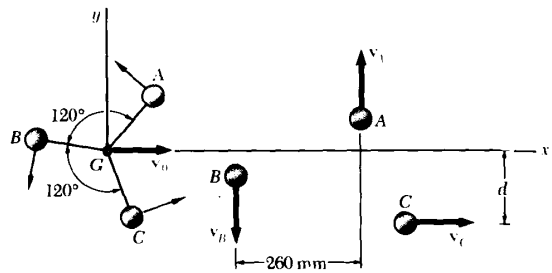


Fig. P14.44 y P14.45

14.45 Tres esferas idénticas A, B y C, las cuales se pueden deslizar sobre una superficie horizontal sin rozamiento están unidas a tres cuerdas de 150 mm de longitud que están unidas a un anillo G. Inicialmente las esferas giran en sentido contrario a las manecillas del reloj, alrededor del anillo, con una velocidad relativa de 0.6 m/s y el anillo se mueve a lo largo del eje x con una velocidad $\mathbf{v}_0 = (0.3\ \text{m/s})\mathbf{i}$. Repentinamente se rompe el anillo y las tres esferas se mueven libremente en el plano xy con A y B siguiendo trayectorias paralelas al eje y a una distancia $a = 260$ mm de separación una de la otra y con C siguiendo una trayectoria paralela al eje x. Determínense *a*) la velocidad de cada esfera y *b*) la distancia d.

14.46 Dos discos pequeños A y B de masa 3 kg y 1.5 kg respectivamente, pueden deslizar sobre una superficie horizontal sin rozamiento. Están enlazados por una cuerda de 600 mm de longitud y giran en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, alrededor del centro de masas G, con una velocidad angular de 10 rad/s. En $t = 0$ las coordenadas de G son $\bar{x}_0 = 0$, $\bar{y}_0 = 2m$, y su velocidad es $\mathbf{v}_0 = (1.2 \text{ m/s})\mathbf{i} + (0.96 \text{ m/s})\mathbf{j}$. Poco tiempo después la cuerda se rompe, y se observa que el disco A se mueve entonces a lo largo de una trayectoria paralela al eje y y el disco B a lo largo de una trayectoria que atraviesa al eje x a una distancia $b = 7.5$ m de O. Encuéntrense *a*) la velocidad de A y B después de que la cuerda se rompe y *b*) la distancia a entre el eje y y la trayectoria de A.

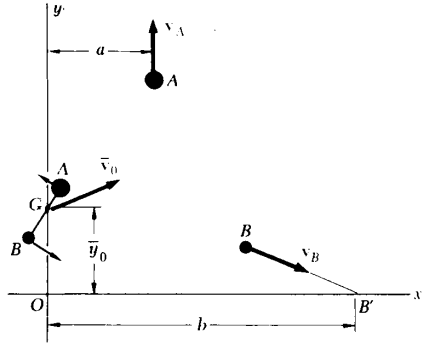


Fig. P14.46 y P14.47

14.47 Dos discos pequeños A y B de masas 2 kg y 1 kg, respectivamente, pueden deslizar sobre una superficie horizontal sin rozamiento. Están unidos por medio de una cuerda de masa despreciable y giran alrededor de su centro de masas G. En $t = 0$ G se mueve con velocidad $\bar{\mathbf{v}}_0$ y sus coordenadas son $\bar{x}_0 = 0$, $\bar{y}_0 = 1.89$ m. Poco tiempo después se rompe y se observa que el disco A se mueve con velocidad $\mathbf{v}_A = 5$ m/s $\mathbf{j}$ en una línea recta y a una distancia $a = 2.56$ m del eje y, mientras que B se desplaza a una velocidad $\mathbf{v}_B = (7.2 \text{ m/s})\mathbf{i} - (4.6 \text{ m/s})\mathbf{j}$ a lo largo de una trayectoria que atraviesa al eje x a una distancia $b = 7.48$ m del origen O. Determínense *a*) la velocidad inicial $\bar{\mathbf{v}}_0$ del centro de masas G de los dos discos, *b*) la longitud de la cuerda que conecta inicialmente los dos discos y *c*) la velocidad angular en rad/s donde giraban los discos alrededor de G.

14.48 En un juego de billar la bola A recibe una velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ a lo largo de la línea DA paralela al eje de la mesa. Choca con la bola B y después con la bola C que se encuentran en reposo. Se observa que las bolas A y C chocan de lleno con los lados de la mesa en los puntos A' y C', respectivamente, mientras que la bola B choca oblicuamente con la banda en B'. Si sabemos que $v_0 = 10$ ft/s, $v_A = 4$ ft/s y $a = 7$ ft, determínense *a*) las velocidades $\mathbf{v}_B$ y $\mathbf{v}_C$ de las bolas B y C y *b*) el punto C' donde pega la bola C a la banda de la mesa. Supónganse superficies sin rozamiento y los choques perfectamente elásticos (es decir, conservación de la energía).

14.49 En el juego de billar del problema 14.48 se supone ahora que $v_0 = 12$ ft/s, $v_C = 7$ ft/s y $c = 3$ft. Determínense *a*) las velocidades $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$ de las bolas A y B y *b*) el punto A' donde la bola A golpea la banda de la mesa.

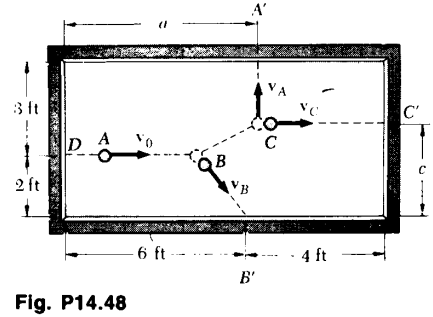


Fig. P14.48

***14.10. Sistemas de masa variable.** Todos los sistemas de partículas que hemos considerado hasta ahora consistían en partículas bien definidas. Estos sistemas no ganaban ni perdían partículas durante su movimiento. Sin embargo, en gran número de aplicaciones en ingeniería es necesario considerar *sistemas de masa variable*, es decir, sistemas que continuamente ganan o pierden partículas, o bien, que hacen ambas cosas a la vez. Considérese, por ejemplo, una turbina hidráulica. Su análisis incluye la determinación de las fuerzas que ejerce un chorro de agua sobre álabes giratorios y notamos que las partículas de agua en contacto con los álabes forman un sistema que cambia siempre y que continuamente adquiere y pierde partículas. Los cohetes son otro ejemplo de los sistemas variables, pues su propulsión depende de la expulsión continua de partículas de combustible.

Recordamos que todos los principios cinéticos formulados hasta ahora se dedujeron para sistemas de partículas que no las ganaban ni perdían. Por tanto, debemos encontrar una manera de reducir el análisis de un sistema de masa variable al de un sistema auxiliar de masa constante. El procedimiento a seguir se indica en las secciones 14.11 y 14.12 para dos extensas categorías de aplicaciones.

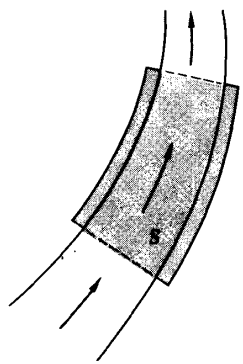


Fig. 14.9

***14.11. Corriente estacionaria de partículas.** Considérese una corriente estacionaria de partículas, como un chorro de agua desviado por un álabe fijo o una corriente de aire que pasa por un conducto o por un ventilador. A fin de encontrar la resultante de las fuerzas que se ejercen sobre las partículas en contacto con un álabe, conducto o ventilador, aislamos las partículas e indicamos por S al sistema así definido (Fig. 14.9). Observamos que S es un sistema variable de partículas, puesto que continuamente gana las partículas que fluyen a su interior y pierde un número igual de partículas que fluyen fuera de él. Por consiguiente, los principios cinéticos que hasta ahora hemos establecido no pueden aplicarse directamente a S.

Sin embargo, podemos definir fácilmente un sistema de partículas auxiliar que sí permanezca constante durante un corto intervalo Δt. Considérese, en el tiempo t, el sistema S *más* las partículas que entrarán a S durante el intervalo Δt (Fig. 14.10*a*). Después, considérese el tiempo $t + \Delta t$ del sistema S *más* las partículas que han salido de S durante el intervalo Δt (Fig. 14.10*c*). Es evidente que *las mismas partículas intervienen en ambos casos* y podemos aplicar a estas partículas el principio del impulso y el momento. Como la masa total m del sistema S permanece constante, las partículas que entran al sistema y las que salen de él en el tiempo Δt deben tener la misma masa Δm. Indicando por $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$, respectivamente, las velocidades de las partículas que entran a S por A y que salen de S por B, representamos el momento lineal de las partículas que entran a S por $(\Delta m)\mathbf{v}_A$ (Fig. 14.10*a*) y el momento lineal de las partículas que salen de S por $(\Delta m)\mathbf{v}_B$ (Fig. 14.10*c*). También representamos los momentos lineales $m_i\mathbf{v}_i$ de las partículas que componen S y los impulsos de las fuerzas aplicadas sobre S por medio de los vectores correspondientes e indicamos por signos grises más e igual que el sistema de los momentos lineales e impulsos de las partes *a* y *b* de la figura 14.10 es equivalente al sistema de momentos lineales en la parte *c* de la misma figura.

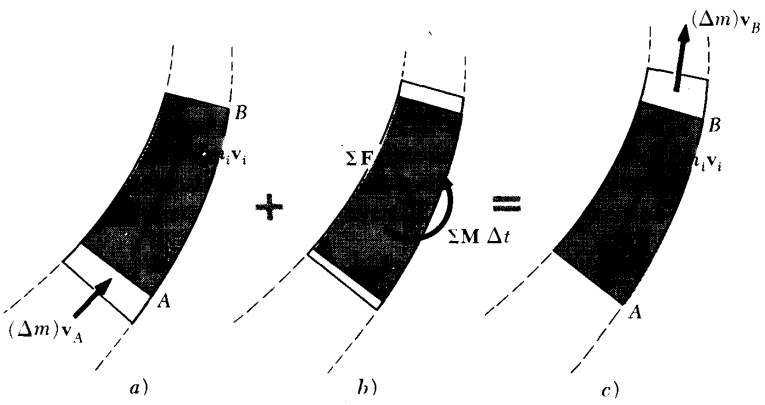


Fig. 14.10

Como la resultante $\Sigma m_i \mathbf{v}_i$ de los momentos lineales de las partículas de S se encuentra en ambos lados del signo igual, puede omitirse. Concluimos que *el sistema formado por el momento lineal* $(\Delta m)\mathbf{v}_A$ *de las partículas que entran a S en el tiempo* Δt *y los impulsos de las fuerzas aplicadas sobre S durante ese intervalo, es equivalente al momento lineal* $(\Delta m)\mathbf{v}_B$ *de las partículas que salen de S en el mismo intervalo* Δt. Por consiguiente, podemos escribir

$$(\Delta m)\mathbf{v}_A + \Sigma \mathbf{F}\, \Delta t = (\Delta m)\mathbf{v}_B \tag{14.38}$$

Se puede obtener una ecuación similar al tomar los momentos de los vectores que intervienen (véase el problema resuelto 14.5). Dividiendo todos los términos de la ecuación (14.38) entre Δt y haciendo tender Δt a cero, obtenemos en el límite

$$\Sigma \mathbf{F} = \frac{dm}{dt}(\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A) \tag{14.39}$$

en la cual $\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A$ representa la diferencia de los vectores $\mathbf{v}_B$ y $\mathbf{v}_A$.

Si se usan unidades del SI, dm/dt se expresa en kg/s y las velocidades en m/s; comprobamos que ambos miembros de la ecuación (14.39) están expresados en las mismas unidades (newtons). Si se emplean unidades del sistema inglés, dm/dt se debe expresar en slugs/s y las velocidades en ft/s; de nuevo comprobamos que ambos miembros de la ecuación están expresados en las mismas unidades (libras). †

El principio que acabamos de demostrar puede utilizarse para analizar gran número de aplicaciones en la ingeniería. A continuación se indican algunas de las más familiares.

Corriente de fluido desviada por un álabe. Si el álabe está fijo, el método de análisis proporcionado antes se puede aplicar directamente para encontrar la fuerza $\mathbf{F}$ aplicada por el álabe sobre la corriente. Observamos que $\mathbf{F}$ es la única fuerza que se requiere considerar, puesto que la presión en la corriente es constante (pre-

† Con frecuencia conviene expresar el caudal másico o gasto de masa dm/dt como el producto ρQ, en donde ρ es la densidad de la corriente (masa por unidad de volumen) y Q es el caudal (volumen por unidad de tiempo). Si se emplean unidades del SI, ρ se expresa en kg/m^3 (por ejemplo, $\rho = 1\,000$ kg/m^3 para el agua) y Q en m^3/s. Sin embargo, si se utilizan unidades del sistema inglés, se tendrá generalmente que calcular ρ a partir del correspondiente peso específico γ (peso por unidad de volumen), $\rho = \gamma/g$. Como γ se expresa en lb/ft^3 (por ejemplo, $\gamma = 62.4$ lb/ft^3 para el agua), ρ se obtiene en slugs/ft^3. El caudal Q se expresa en ft^3/s.

sión atmosférica). La fuerza que la corriente ejerce sobre el álabe será igual y opuesta a F. Si el álabe se mueve con una velocidad constante, la corriente no será estacionaria; sin embargo, sí parecerá estacionario para un observador que se mueve con el álabe. Por consiguiente, debemos elegir un sistema de ejes que se mueva con el álabe Como este sistema no está acelerado, aún se puede utilizar la ecuación (14.38), pero $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$ se deben sustituir por las *velocidades relativas* de la corriente con respecto al álabe (véase el problema resuelto 14.6).

Flujo de fluido en el interior de un tubo. La fuerza que ejerce un fluido sobre una transición del tubo, como una curva o un estrechamiento, puede deducirse al considerar al sistema de partículas S en contacto con la transición. Como, en general, variará la presión en el fluido, también debemos considerar las fuerzas que las partes colindantes del fluido ejercen sobre S.

Motor a reacción. En un motor a reacción, el aire entra sin velocidad por el frente del motor y sale por la parte de atrás a una gran velocidad. La energía necesaria para acelerar las partículas de aire se obtiene quemando el combustible. Aunque los gases de escape contienen combustible quemado, la masa del combustible es pequeña comparada con la masa del aire que fluye por el interior del motor y con frecuencia puede despreciarse. Por tanto, el análisis de un motor a reacción se reduce al de una corriente de aire. Esta corriente puede ser considerada estacionaria (o permanente) si se miden todas las velocidades con respecto al avión. En consecuencia, se supondrá que la corriente de aire entra al motor con una velocidad $\mathbf{v}$ de módulo igual a la velocidad del avión y que sale con una velocidad $\mathbf{u}$ igual a la velocidad relativa de los gases de escape (Fig. 14.11). Como las presiones de la entrada o admisión y de la salida o escape son casi la atmosférica, la única fuerza exterior que se necesita considerar es la fuerza que el motor ejerce sobre la corriente de aire, la cual es igual y opuesta al empuje. †

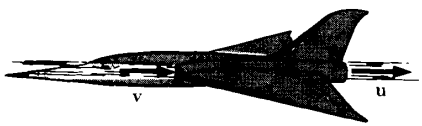


Fig. 14.11

† Tómese en cuenta que de acelerarse el avión, éste ya no puede tomarse como sistema de referencia. Sin embargo, se obtiene el mismo resultado para el empuje horizontal si se utiliza un sistema de referencia en reposo con respecto a la atmósfera, ya que entonces las partículas se verán entrar sin velocidad dentro del motor y salir con velocidad de módulo u-v.

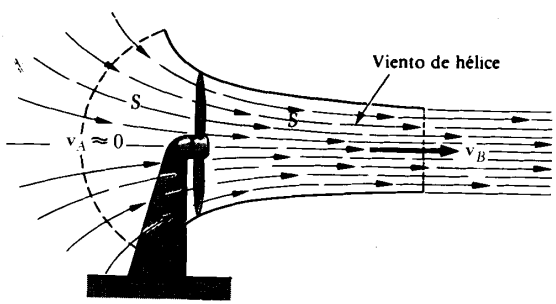


Fig. 14.12

Ventilador. Consideremos el sistema de partículas S que se muestra en la figura 14.12. La velocidad $\mathbf{v}_A$ de las partículas que entran al sistema se supone igual a cero y la velocidad $\mathbf{v}_B$ de las partículas que salen del sistema es la velocidad de la corriente (torbellino o corriente retrógrada). El caudal puede obtenerse al multiplicar v_B por la sección de la corriente. Como la presión alrededor de S es siempre la atmosférica, la única fuerza exterior que actúa sobre S es el empuje del ventilador.

Hélice de avión. A fin de obtener una corriente estacionaria de aire, las velocidades se deben medir con respecto al avión. Por lo tanto, se supondrá que las partículas de aire entran al sistema con una velocidad $\mathbf{v}$ de módulo igual a la velocidad del avión y que salen con una velocidad $\mathbf{u}$ igual a la velocidad relativa del viento de hélice.

***14.12. Sistemas que aumentan o disminuyen su masa.** Analizaremos ahora un tipo diferente de sistemas variables, es decir, un sistema que aumenta su masa mediante la absorción continua de partículas o que disminuye su masa mediante la expulsión continua de partículas. Consideremos el sistema S que se indica en la figura 14.13. Su masa, igual a m en el instante t, aumenta en Δm en el intervalo Δt. A fin de aplicar el principio del impulso y el del momento

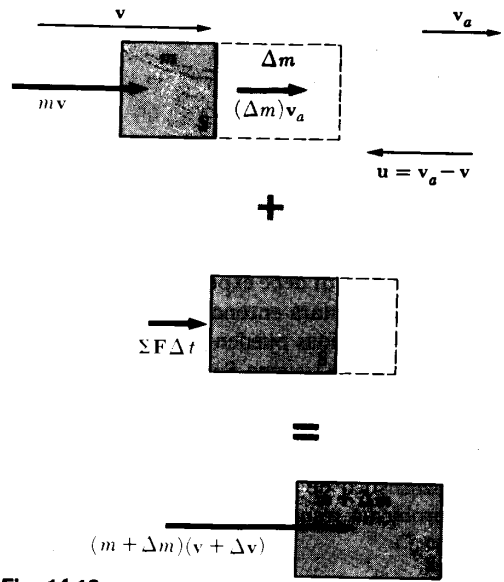


Fig. 14.13

al análisis del sistema, debemos considerar en el tiempo t al sistema S *más* las partículas de masa Δm que S absorbe durante el intervalo Δt. La velocidad de S en el instante t se representa por $\mathbf{v}$, y su velocidad al tiempo $t + \Delta t$ se indica por $\mathbf{v} + \Delta \mathbf{v}$, mientras que la velocidad absoluta de las partículas que se absorben se representa por $\mathbf{v}_a$. Aplicando el principio del impulso y del momento escribimos

$$m\mathbf{v} + (\Delta m)\mathbf{v}_a + \Sigma \mathbf{F}\,\Delta t = (m + \Delta m)(\mathbf{v} + \Delta \mathbf{v})$$

Despejando la suma $\Sigma \mathbf{F}\,\Delta t$ de los impulsos de las fuerzas exteriores que actúan sobre S (excluyendo las fuerzas que ejercen las partículas que se absorben), tenemos

$$\Sigma \mathbf{F}\,\Delta t = m\Delta \mathbf{v} + \Delta m(\mathbf{v} - \mathbf{v}_a) + (\Delta m)(\Delta \mathbf{v}) \tag{14.40}$$

Al introducir la *velocidad relativa* $\mathbf{u}$ con respecto a S de las partículas que se absorben, escribimos $\mathbf{u} = \mathbf{v}_a - \mathbf{v}$ y, como $v_a < v$, como notamos que la velocidad relativa $\mathbf{u}$ está dirigida hacia la izquierda, como indica la figura 14.13. Al despreciar el último término de la ecuación (14.40), que es de segundo orden, escribimos

$$\Sigma \mathbf{F}\,\Delta t = m\,\Delta \mathbf{v} - (\Delta m)\mathbf{u}$$

Dividiendo entre Δt y haciendo tender Δt a cero, tenemos en el límite †

$$\Sigma \mathbf{F} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} - \frac{dm}{dt}\mathbf{u} \tag{14.41}$$

Reordenando los términos y recordando que $d\mathbf{v}/dt = \mathbf{a}$, donde $\mathbf{a}$ es la aceleración del sistema S, escribimos

$$\Sigma \mathbf{F} + \frac{dm}{dt}\mathbf{u} = m\mathbf{a} \tag{14.42}$$

la cual demuestra que el efecto de las partículas que se absorben sobre S equivale a un empuje

$$\mathbf{P} = \frac{dm}{dt}\mathbf{u} \tag{14.43}$$

el cual tiende a frenar el movimiento de S, puesto que la velocidad relativa $\mathbf{u}$ de las partículas está dirigida hacia la izquierda. Si se utilizan unidades del SI, dm/dt está expresada en kg/s, la velocidad relativa u está en m/s y el correspondiente empuje en newtons. Si se emplean unidades del sistema inglés, dm/dt debe expresarse en slugs/s y u en ft/s; el empuje correspondiente estará entonces expresado en libras. ‡

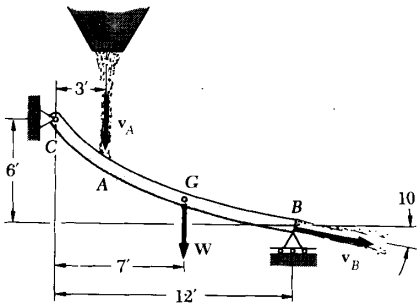
Las ecuaciones obtenidas pueden utilizarse también para determinar el movimiento de un sistema S que pierde masa. En este caso, la variación de la masa es negativa y el efecto de las partículas expelidas es equivalente a un empuje en dirección de $-\mathbf{u}$, es decir, en dirección opuesta a la de expulsión de las partículas. Un *cohete* es un ejemplo característico de un sistema que continuamente pierde masa (véase el problema resuelto 14.7).

† Cuando la velocidad absoluta $\mathbf{v}_a$ de las partículas absorbidas es cero, tenemos que $\mathbf{u} = -\mathbf{v}$, y la fórmula (14.41) se convierte en

$$\Sigma \mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v})$$

Comparando la fórmula obtenida con la ecuación (12.3) de la sección 12.3, observamos que la segunda ley de Newton se puede aplicar a un sistema que adquiere masa, *siempre que las partículas absorbidas estén inicialmente en reposo.* También se puede aplicar a un sistema que pierde masa, *siempre que la velocidad de las partículas expulsadas sea cero* con respecto al sistema de referencia elegido.

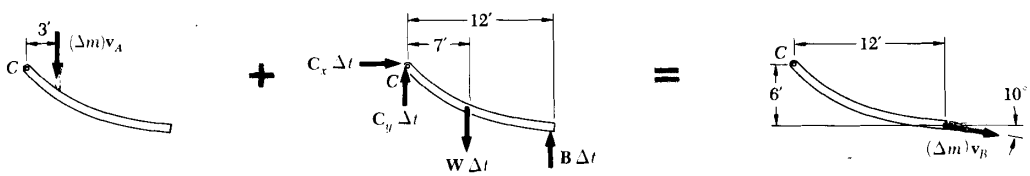
‡ Véase la nota al pie de la página 617.



PROBLEMA RESUELTO 14.6

De una tolva cae grano a una rampa CB a razón de 240 lb/s. El grano golpea la rampa en A con una velocidad de 20 ft/s y sale de la rampa en B con una velocidad de 15 ft/s, formando un ángulo de 10° con la horizontal. Si el peso combinado de la rampa y el grano que transporta es una fuerza **W** de módulo 600 lb aplicada en G, encuéntrese la reacción en el rodillo de soporte B y las componentes de la reacción en la articulación C.

Solución. Aplicamos el principio del impulso y del momento durante el intervalo de tiempo Δt al sistema que consiste en la rampa, el grano que contiene y la cantidad de grano que golpea la rampa en el intervalo Δt. Como el canal no se mueve, su momento lineal es cero. También notamos que la suma $\Sigma m_i \mathbf{v}_i$ de los momentos lineales de las partículas contenidas en la rampa es la misma al tiempo t que en $t + \Delta t$ y, por tanto, puede omitirse.



Como el sistema formado por el momento lineal $(\Delta m)\mathbf{v}_A$ y los impulsos es equivalente al momento lineal $(\Delta m)\mathbf{v}_B$, escribimos

$\stackrel{+}{\rightarrow}$ componentes x: $$C_x\,\Delta t = (\Delta m)v_B \cos 10° \tag{1}$$

$+\uparrow$ componentes y: $$-(\Delta m)v_A + C_y\,\Delta t - W\,\Delta t + B\,\Delta t = -(\Delta m)v_B \operatorname{sen} 10° \tag{2}$$

$+\circlearrowleft$ momentos con respecto a C: $$-3(\Delta m)v_A - 7(W\,\Delta t) + 12(B\,\Delta t) = 6(\Delta m)v_B \cos 10° - 12(\Delta m)v_B \operatorname{sen} 10° \tag{3}$$

Utilizando los datos proporcionados, $W = 600$ lb, $v_A = 20$ ft/s, $v_B = 15$ ft/s, $\Delta m/\Delta t = 240/32.2 = 7.45$ slugs/s y, despejando B de la ecuación (3) y C_x de la ecuación (1),

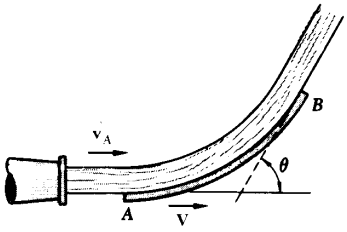
$$12B = 7(600) + 3(7.45)(20) + 6(7.45)(15)(\cos 10° - 2 \operatorname{sen} 10°)$$
$$12B = 5075 \qquad B = 423 \text{ lb} \qquad \mathbf{B} = 423 \text{ lb} \uparrow \blacktriangleleft$$

$$C_x = (7.45)(15)\cos 10° = 110.1 \text{ lb} \qquad \mathbf{C}_x = 110.1 \text{ lb} \rightarrow \blacktriangleleft$$

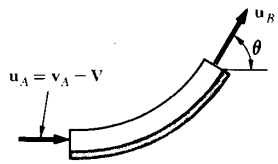
Al sustituir B y despejar C_y de la ecuación (2),

$$C_y = 600 - 423 + (7.45)(20 - 15 \operatorname{sen} 10°) = 307 \text{ lb}$$
$$\mathbf{C}_y = 307 \text{ lb} \uparrow \blacktriangleleft$$

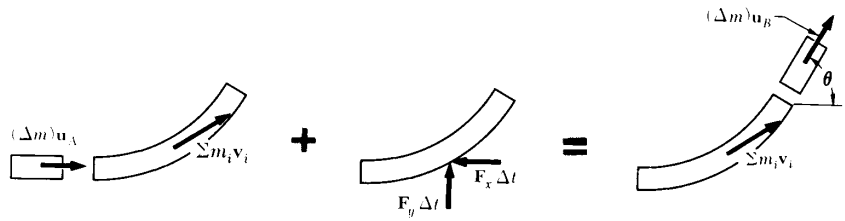
PROBLEMA RESUELTO 14.7



Una tobera descarga un chorro de agua de área transversal A con una velocidad $\mathbf{v}_A$. El chorro es desviado por un sólo álabe que se mueve hacia la derecha con una velocidad constante $\mathbf{V}$. Suponiendo que el agua se mueve sobre el álabe a velocidad constante, obténgase: *a*) las componentes de la fuerza $\mathbf{F}$ aplicada por el álabe sobre el chorro, y *b*) la velocidad $\mathbf{V}$ a la que se produce la potencia máxima.



a) **Componentes de la fuerza ejercida sobre la corriente.** Elegimos un sistema de coordenadas que se mueve con el álabe a una velocidad constante $\mathbf{V}$. Las partículas de agua chocan con el álabe con una velocidad relativa $\mathbf{u}_A = \mathbf{v}_A - \mathbf{V}$ y salen del álabe con una velocidad relativa $\mathbf{u}_B$. Como las partículas se mueven sobre el álabe a velocidad constante, las velocidades relativas $\mathbf{u}_A$ y $\mathbf{u}_B$ tienen el mismo módulo u. Indicando por ρ la densidad del agua, la masa de las partículas que chocan con el álabe durante el intervalo Δt es $\Delta m = A\rho(v_A - V)\Delta t$; una masa igual de partículas sale del álabe durante Δt. Aplicamos el principio del impulso y del momento al sistema formado por las partículas en contacto con el álabe y aquellas que chocan con el álabe en el tiempo Δt.



Recordando que $\mathbf{u}_A$ y $\mathbf{u}_B$ tienen el mismo módulo u y omitiendo el momento lineal $\Sigma m_i \mathbf{v}_i$ que aparece en ambos lados, escribimos

$$\pm\rightarrow \text{ componentes } x: \qquad (\Delta m)u - F_x \Delta t = (\Delta m)u \cos\theta$$

$$+\uparrow \text{ componentes } y: \qquad +F_y \Delta t = (\Delta m)u \operatorname{sen}\theta$$

Al sustituir $\Delta m = A\rho(v_A - V)\,\Delta t$ y $u = v_A - V$, obtenemos

$$\mathbf{F}_x = A\rho(v_A - V)^2(1 - \cos\theta)\leftarrow \qquad \mathbf{F}_y = A\rho(v_A - V)^2 \quad \theta\uparrow \blacktriangleleft$$

b) **Velocidad del álabe a la potencia máxima.** La potencia se obtiene al multiplicar la velocidad V del álabe por la componente F_x de la fuerza ejercida por la corriente sobre el álabe.

$$\text{Potencia} = F_x V = A\rho(v_A - V)^2(1 - \cos\theta)V$$

Derivando la potencia con respecto a V y haciendo la derivada igual a cero obtenemos

$$\frac{d(\text{potencia})}{dV} = A\rho(v_A^2 - 4v_A V + 3V^2)(1 - \cos\theta) = 0$$

$$V = v_A \qquad V = \tfrac{1}{3}v_A \qquad \text{Para la potencia máxima } \mathbf{V} = \tfrac{1}{3}v_A\rightarrow \blacktriangleleft$$

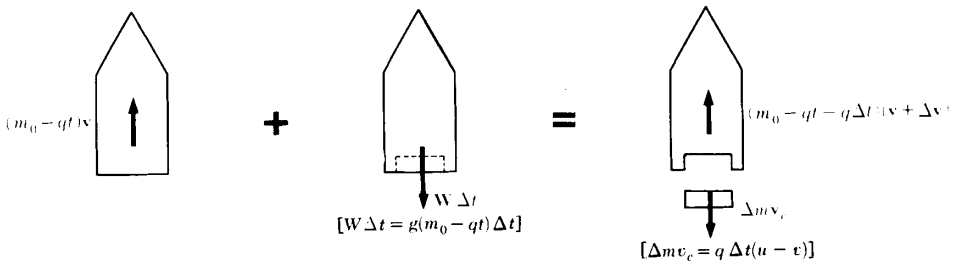
Nota. Estos resultados son válidos únicamente cuando un sólo álabe desvía al chorro. Cuando una serie de álabes desvían al chorro, como una turbina de rueda Pelton, se obtienen resultados diferentes. (Véase el problema 14.74.)



PROBLEMA RESUELTO 14.8

Un cohete de masa inicial m_0 (incluye armazón y combustible) se dispara verticalmente al tiempo $t = 0$. El combustible se consume a una velocidad constante $q = dm/dt$ y se expele con una velocidad constante u relativa al cohete. Dedúzcase una expresión para la velocidad del cohete al tiempo t, despreciando la resistencia al aire.

Solución. Al tiempo t, la masa del armazón del cohete y del combustible restante es $m = m_0 - qt$ y la velocidad es $\mathbf{v}$. Durante el intervalo Δt se expulsa una masa de combustible $\Delta m = q\,\Delta t$ con una velocidad u relativa al cohete. Representando por $\mathbf{v}_e$ la velocidad absoluta del combustible expulsado, aplicamos el principio del impulso y el del momento entre el tiempo t y el tiempo $t + \Delta t$.



Escribimos

$$(m_0 - qt)v - g(m_0 - qt)\,\Delta t = (m_0 - qt - q\,\Delta t)(v + \Delta v) - q\,\Delta t(u - v)$$

Al dividir entre Δt y hacer tender Δt a cero, obtenemos

$$-g(m_0 - qt) = (m_0 - qt)\frac{dv}{dt} - qu$$

Separando variables e integrando desde $t = 0$, $v = 0$ hasta $t = t$, $v = v$,

$$dv = \left(\frac{qu}{m_0 - qt} - g\right)dt \qquad \int_0^v dv = \int_0^t \left(\frac{qu}{m_0 - qt} - g\right)dt$$

$$v = [-u \ln (m_0 - qt) - gt]_0^t \qquad v = u \ln \frac{m_0}{m_0 - qt} - gt \quad \blacktriangleleft$$

Observación. La masa que queda al tiempo t_f, después que se ha quemado todo el combustible, es igual a la masa del armazón del cohete $m_s = m_0 - qt_f$ y la velocidad máxima que alcanza el cohete es $v_m = u \ln (m_0/m_s) - gt_f$. Suponiendo que el combustible se expulsa en un período relativamente corto, el término gt_f es pequeño y tenemos $v_m \approx u \ln (m_0/m_s)$. A fin de escapar del campo gravitacional de la Tierra, un cohete debe alcanzar una velocidad de 11.18 km/s. Suponiendo $u = 2\,200$ m/s y $v_m = 11.18$ km/s, obtenemos $m_0/m_s = 161$. Por consiguiente, para lanzar cada kilogramo del armazón del cohete al espacio, es necesario consumir más de 161 kg de combustible para un valor de $u = 2\,200$ m/s.

Problemas

Nota: En los siguientes problemas utilícese $\rho = 1000$ kg/m^3 para la densidad del agua en unidades del SI y $\gamma = 62.4$ lb/ft^3 para su peso específico en unidades del sistema inglés. (Véase la nota al pie de la página 679.)

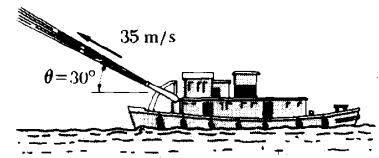


Fig. P14.50

14.50 Una manguera descarga agua a razón de 12 m^3/min de la popa de un bote de bomberos de 30 Mg. Si la velocidad del chorro de agua es 35 m/s, obténgase la reacción sobre el bote.

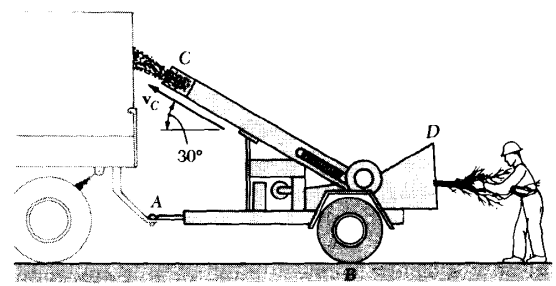


Fig. P14.52

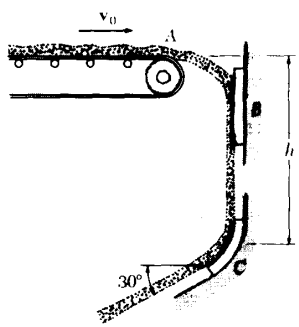


Fig. P14.51

14.51 Se descarga arena a la razón de m kg/s desde una banda transportadora que se mueve con una velocidad $\mathbf{v}_0$. La arena es desviada mediante una placa en B de manera que cae en un chorro vertical. Después de caer a una distancia h la arena es nuevamente desviada como se indica por una placa curva en C. Despreciando el rozamiento entre la arena y las placas, determínese la fuerza requerida para mantener cada placa en la posición que se muestra.

14.52 Se alimentan troncos y ramas en D a razón de 10 lb/s dentro de una picadora que lanza las astillas resultantes en C con una velocidad de 60 ft/s. Determínese la componente horizontal de la fuerza que ejerce la picadora en el acoplamiento del camión en A.

14.53 Un chorro de agua de sección A y velocidad $\mathbf{v}_1$ choca con una placa que se mantiene inmóvil por medio de una fuerza $\mathbf{P}$. Determínese el módulo de $\mathbf{P}$ si $A = 500$ mm^2, $v_1 = 25$ m/s, $V = 0$.

14.54 Un chorro de agua de sección A y velocidad $\mathbf{v}_1$ choca con una placa que se mueve hacia la derecha con una velocidad $\mathbf{V}$. Encuéntrese el módulo de $\mathbf{V}$ si $A = 600$ mm^2, $v_1 = 30$ m/s y $P = 400$ N.

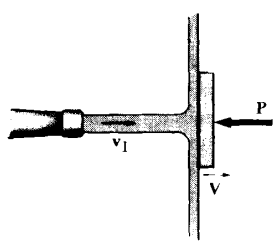


Fig. P14.53 y P14.54

14.55 Entre dos placas A y B fluye agua en forma de lámina continua con velocidad $\mathbf{v}$ de módulo 90 ft/s. Con una placa horizontal lisa C el chorro se separa en dos partes. Si el caudal de cada una de las corrientes resultantes es $Q_1 = 30$ gal/min, y $Q_2 = 150$ gal/min, respectivamente, calcúlense *a*) el ángulo θ y *b*) la fuerza total aplicada por los chorros sobre la placa (1 ft^3 = 7.48 gal).

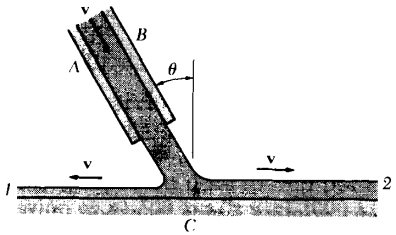


Fig. P14.55 y P14.56

14.56 Entre dos placas A y B fluye agua en forma de lámina continua con velocidad $\mathbf{v}$ de módulo 120 ft/s. Con una placa horizontal lisa C el chorro se separa en dos partes. Obténganse los caudales Q_1 y Q_2 en cada una de las corrientes resultantes si $\theta = 25°$ y la fuerza total que ejercen las corrientes sobre la placa es una fuerza vertical de 90 lb. (1 ft^3 = 7.48 gal).

14.57 La tobera de la figura descarga agua a razón de 250 gal/min. Si en A y en B el chorro del agua tiene una velocidad de módulo 90 ft/s y se desprecia el peso del álabe, determínense las componentes de las reacciones en C y en D. (1 ft_3 = 7.48 gal).

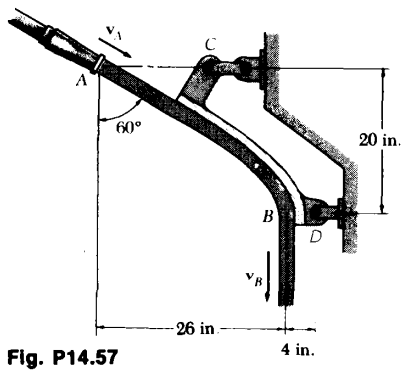


Fig. P14.57

14.58 La tobera de la figura descarga agua a razón de 1.2 m^3/min. Si en A y B el agua se mueve con una velocidad de módulo 50 m/s y se desprecia el peso del álabe, encuéntrese el sistema fuerza-par que se debe aplicar en C para que el álabe permanezca inmóvil.

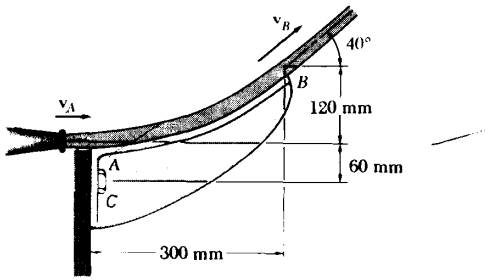


Fig. P14.58

14.59 Si el álabe AB del problema resuelto 14.7 tiene la forma de un arco de círculo, demuéstrese que la fuerza resultante $\mathbf{F}$ que ejerce sobre el chorro está aplicada en el punto medio C del arco AB. (*Sugerencia.* Demuéstrese primero que la línea de acción de $\mathbf{F}$ debe pasar por el centro O del círculo.)

14.60 El último elemento de un sistema transportador recibe arena a una razón de 240 lb/s en A y la descarga en B. La arena se mueve horizontalmente en A y en B con una velocidad de módulo $v_A = v_B = 15$ ft/s. Si el peso compuesto del elemento y de la arena que soporta es $W = 900$ lb, determínense las reacciones en C y en D.

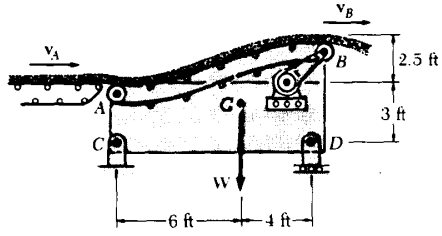


Fig. P14.60

14.61 De una primera banda transportadora se descarga carbón vegetal a razón de 150 kg/s, el cual es recibido en A por una segunda banda que a su vez lo descarga en B. Si $v_1 = 3$ m/s, $v_2 = 4.25$ m/s y se sabe que el conjunto de la segunda banda transportadora y el carbón vegetal que contiene tiene una masa total de 500 kg, obténganse las reacciones en C y D.

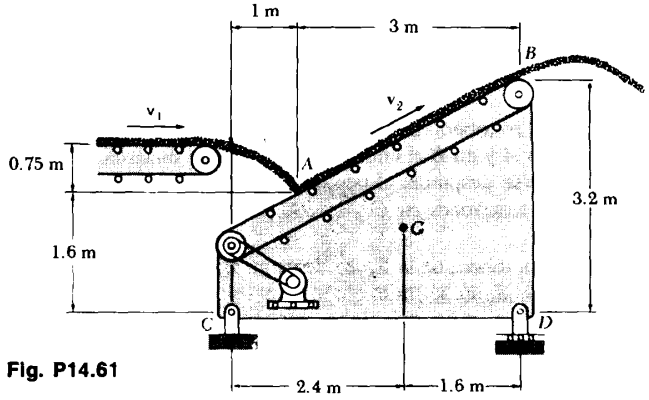


Fig. P14.61

14.62 Resuélvase el problema 14.61 suponiendo que la velocidad de la segunda banda transportadora se reduce a $v_2 = 2.55$ m/s y que la masa del carbón vegetal que contiene se aumenta en 50 kg.

14.63 La resistencia total debida al rozamiento con el aire de un avión de reacción que vuela a 900 km/h es 35 kN. Si la velocidad del escape es 600 m/s con relación al avión, determínese la masa del aire que debe pasar por el motor, por segundo, para que se mantenga la velocidad de 900 km/h en vuelo nivelado.

14.64 Al viajar en vuelo horizontal con una velocidad de 540 mi/h, un avión de reacción succiona aire a razón de 150 lb/s y lo descarga con una velocidad de 2000 ft/s relativa al avión. Encuéntrese la resistencia total por causa del rozamiento con el aire sobre el avión.

14.65 Para el ventilador montado en el techo que aquí se muestra obténgase la velocidad máxima del aire posible en la corriente si el momento de flexión en la barra de soporte AB no debe exceder 80 lb·ft. Supóngase $\gamma = 0.076$ lb/ft^3 en el aire y despréciese la velocidad de aproximación del aire.

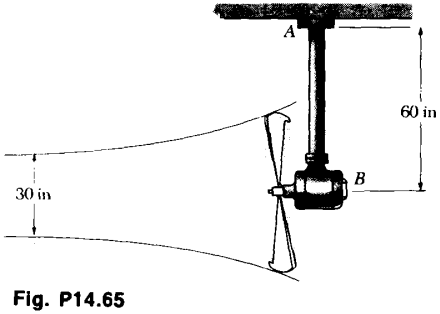


Fig. P14.65

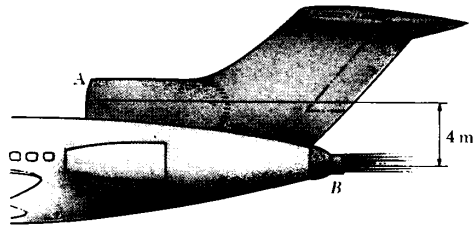


Fig. P14.66

14.66 El motor de reacción que se muestra en la figura succiona aire por A a razón de 90 kg/s y lo descarga por B con una velocidad de 750 m/s con relación al avión. Calcúlese el módulo y línea de acción del empuje propulsivo desarrollado por el motor cuando la velocidad del avión es *a*) 500 km/h y *b*) 1000 km/h.

14.67 Con el fin de reducir la distancia requerida durante el aterrizaje, un avión de propulsión se equipa con álabes móviles que cambian parcialmente la dirección del aire descargado por cada uno de sus motores. Cada motor succiona aire a razón de 250 lb/s y lo descarga con una velocidad de 2000 ft/s en relación al motor. En un instante cuando la velocidad del avión es de 150 mi/h, determínese el empuje de frenado que proporciona cada uno de los motores.

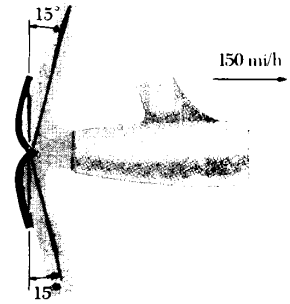


Fig. P14.67

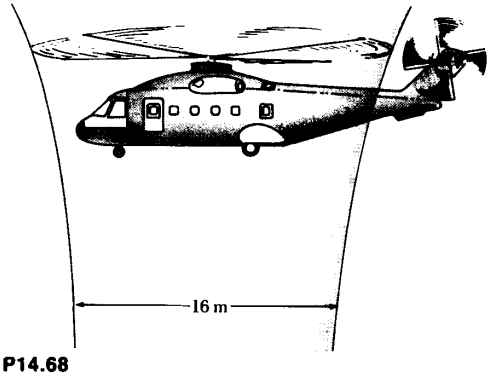


Fig. P14.68

14.68 El helicóptero que aquí se indica tiene una masa de 12 Mg estando vacío y puede producir una velocidad máxima del aire de 30 m/s hacia abajo en su estela de 16 m de diámetro. Suponiendo que para el aire $\rho = 1.21$ kg/m^3 determínese el total de carga útil y carga de combustible máxima que puede transportar el helicóptero estando suspendido en el aire.

14.69 Un avión comercial a reacción mantiene una velocidad constante de 900 km/h con cada uno de sus tres motores que descargan aire con una velocidad de 800 m/s con relación al avión. Determínese la velocidad del avión después de que ha dejado de funcionar *a*) uno de sus motores y *b*) dos de sus motores. Supóngase que la fuerza de resistencia del aire al avance es proporcional al cuadrado de la velocidad y que los motores en funcionamiento operan con la misma velocidad de descarga.

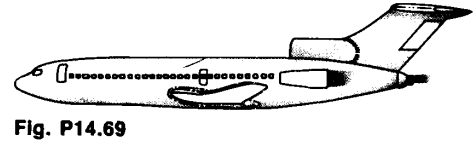


Fig. P14.69

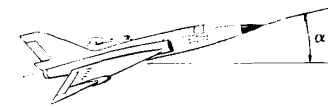


Fig. P14.70

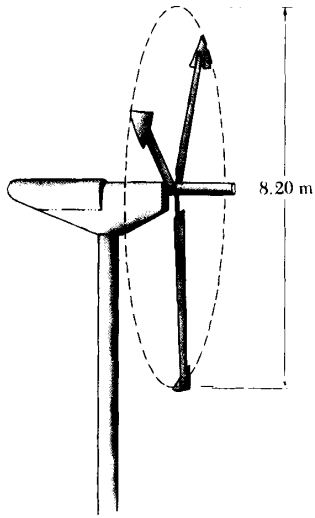


Fig. P14.71 y P14.72

14.70 Un avión a reacción de 35 000 lb mantiene una velocidad constante de 480 mi/h al ascender con un ángulo $\alpha = 15°$. El avión succiona aire a razón de 600 lb/s y lo descarga con una velocidad de 2250 ft/s en relación al avión. Si el piloto cambia a vuelo horizontal y conserva las mismas condiciones del motor, determínense *a*) la aceleración inicial del avión y *b*) la velocidad máxima horizontal que alcanza. Supóngase que la fuerza de resistencia al avance por causa del rozamiento con el aire es proporcional al cuadrado de la velocidad.

14.71 El generador con turbina de viento que se ilustra tiene una salida de potencia nominal de 20 kW con una velocidad del viento de 45 km/h. Para esta velocidad del viento, calcúlense *a*) la energía cinética de las partículas de aire que entran por segundo al círculo de 8.20 m de diámetro y *b*) el rendimiento de este sistema de conversión de energía. Supóngase que para el aire $\rho = 1.21$ kg/m^3.

14.72 Con cierta velocidad del viento el generador con turbina que se muestra produce energía eléctrica de 15 kW y como sistema de conversión de energía, tiene un rendimiento de 0.30. Determínense *a*) la energía cinética de las partículas de aire que entran por segundo al círculo de 820 m de diámetro, y *b*) la velocidad del viento.

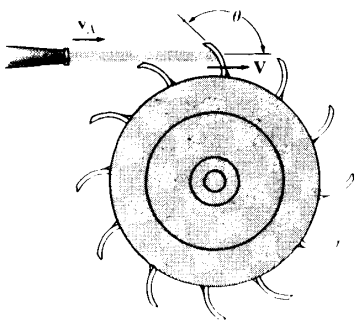


Fig. P14.73

14.73 En una turbina de rueda Pelton un chorro de agua es desviado por una serie de álabes de manera que el caudal con el que los álabes desvían el agua es igual al caudal con el que sale el agua de la tobera $(\Delta m/\Delta t = \Delta p v_A)]$. Utilizando la misma notación que en el problema resuelto 14.7, *a*) encuéntrese la velocidad V de los álabes a la cual se produce la potencia máxima, *b*) dedúzcase una expresión para la potencia máxima y *c*) dedúzcase una expresión para el rendimiento mecánico.

14.74 Al volar a nivel con una velocidad de 570 mi/h, un avión de reacción succiona aire a razón de 240 lb/s y lo descarga con una velocidad de 2200 ft/s en relación al avión. Obténgase *a*) la potencia usada realmente para impulsar el avión, *b*) la potencia total desarrollada por el motor y *c*) el rendimiento mecánico del avión.

*14.75 La profundidad del agua que fluye en un canal rectangular de ancho b, con una velocidad v_1 y profundidad d_1, aumenta a una profundidad d_2 en un salto hidráulico. Exprésese el caudal Q en función de b, d_1 y d_2.

*14.76 Obténgase el caudal del canal del problema 14.75, si sabemos que $d_1 = 1.2$ m, $d_2 = 1.5$ m y el canal rectangular tiene 4 m de ancho.

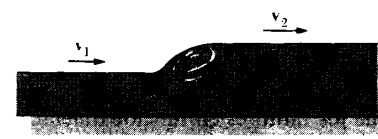


Fig. P14.75

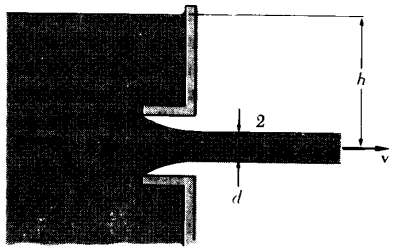


Fig. P14.77

14.77 Un orificio circular entrante (conocido también con el nombre de boquilla de Borda) de diámetro D se encuentra a una profundidad h bajo la superficie de un recipiente. Si la velocidad del chorro expulsado es $v = \sqrt{2gh}$ y suponiendo que la velocidad de acercamiento v_1 es cero, demuéstrese que el diámetro del chorro es $d = D/\sqrt{2}$. (*Sugerencia.* Considérese la sección indicada de agua y obsérvese que P es igual a la presión a una profundidad h multiplicada por el área del orificio.)

14.78 Un aspersor de jardín tiene cuatro brazos giratorios que consisten en dos tramos horizontales rectos de tubo que forman 120° entre sí. Cada brazo descarga agua a razón de 5 gal/min con velocidad de 60 ft/s en relación al brazo. Si sabemos que el rozamiento entre las partes móviles y las estacionarias es equivalente a un par $M = 0.275$ lb·ft, encuéntrese la velocidad constante a la que gira el aspersor (1 ft^3 = 7.48 gal).

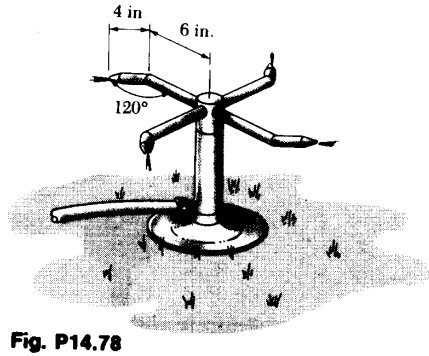


Fig. P14.78

14.79 Los extremos de una cadena se encuentran amontonados en A y en C. Al comunicarle una velocidad v la cadena sigue moviéndose libremente con esa velocidad sobre la polea en B. Despreciando el rozamiento, determínese el valor necesario de h.

14.80 Los extremos de una cadena se encuentran amontonados en A y en C. Al soltarse desde el reposo al tiempo $t = 0$, la cadena se mueve sobre la polea en B, que tiene masa despreciable. Simbolizando con L la longitud de la cadena que conecta a los dos montones y despreciando el rozamiento, encuéntrese la velocidad v de la cadena al tiempo t.

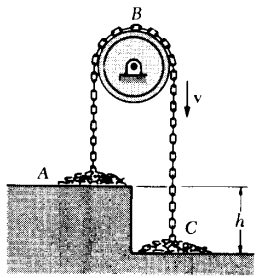


Fig. P14.79 y P14.80

14.81 Calcúlese la velocidad v de la cadena del problema 14.80 después de que se ha transferido una longitud x de cadena del montón A al montón C.

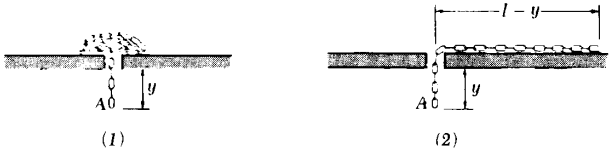


Fig. P14.82

14.82 Una cadena de longitud l y masa m cae a través de un pequeño orificio en una placa. Inicialmente, cuando y es muy pequeña, la cadena está en reposo. En cada caso indicado, determínense *a*) la aceleración del primer eslabón A en función de y y *b*) la velocidad de la cadena cuando el último eslabón pasa a través del orificio. En el caso 1 supóngase que cada eslabón individual está en reposo hasta que pasa por el orificio y, en el caso 2, supóngase que en cualquier instante todos los eslabones tienen la misma velocidad. Ignórese el efecto del rozamiento.

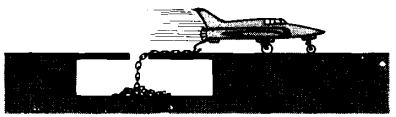


Fig. P14.83 y P14.84

14.83 Un método posible de reducción de la velocidad de un avión de entrenamiento que aterrice en un portaaviones consiste en que la cola del avión se enganche en el extremo de una cadena pesada de longitud l que forma un montón bajo la cubierta. Indicando por m la masa del avión y por v_0 su velocidad al hacer contacto con la cubierta y suponiendo que no hay ninguna otra fuerza de frenado, encuéntrese *a*) la masa necesaria de la cadena si se debe reducir la velocidad del avión a βv_0 con $\beta < 1$ y *b*) el valor máximo de la fuerza que ejerce la cadena sobre el avión.

14.84 Al aterrizar un avión de entrenamiento de 12 000 lb en un portaaviones con una velocidad de 105 mi/h, su cola se engancha en el extremo de una cadena larga que se encuentra amontonada bajo cubierta. Si la cadena pesa 24 lb/ft y se supone que no hay ninguna otra fuerza de frenado, obténgase la desaceleración máxima del avión.

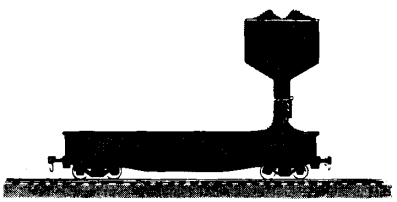


Fig. P14.85

14.85 Un vagón de longitud L y masa m_0 estando vacío se mueve libremente sobre una vía horizontal mientras se carga con arena de un alimentador, con caudal $q = dm/dt$. Sabiendo que el vagón se aproxima al alimentador con una velocidad v_0, determínense *a*) la masa del vagón y de su carga y *b*) la velocidad del vagón una vez que se ha separado del alimentador.

14.86 Para el vagón de ferrocarril del problema 14.85, exprésese en función de t la magnitud de la fuerza de horizontal **P** que se debe aplicar al carro para que mantenga un movimiento *a*) con la velocidad constante v_0 y *b*) con la aceleración constante a, mientras está cargando. Supóngase que, cuando comienza la operación de carga, $t = 0$.

14.87 El sistema propulsor principal de un transporte espacial consta de tres motores cohete idénticos, cada uno de los cuales quema el combustible de hidrógeno y oxígeno, con un caudal de 750 lb/s y lo expulsa con una velocidad relativa de 12 500 ft/s. Determínese el empuje total que proporcionan los tres motores.

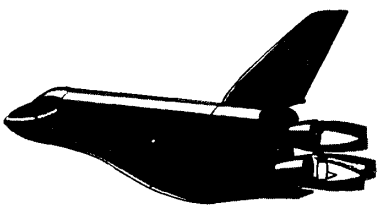


Fig. P14.87 y P14.88

14.88 El sistema propulsor principal de un transporte espacial consta de tres motores cohetes idénticos que desarrollan un empuje total de 1 200 kips. Determínese el caudal con el que se quema el combustible de hidrógeno y oxígeno en cada uno de los tres motores, si se sabe que se expulsa con una velocidad relativa de 12 500 ft/s.

14.89 Un vehículo espacial que describe una órbita circular con una velocidad de 24×10^3 km/h desprende de su extremo anterior una cápsula que tiene una masa total de 600 kg, incluyendo 400 kg de combustible. Si el combustible se consume a razón constante de 18 kg/s y se expulsa con velocidad relativa de 3000 m/s, determínense *a*) la aceleración tangencial de la cápsula conforme el motor es encendido y *b*) la máxima velocidad alcanzada por la cápsula.



Fig. P14.89

14.90 Un cohete tiene una masa de 1200 kg, que incluye 1000 kg de combustible que se consume con un caudal de 12.5 kg/s y se expulsa con una velocidad relativa de 4000 m/s. Si el cohete se dispara verticalmente desde el suelo, obténgase su aceleración *a*) en el instante del encendido y *b*) al consumirse la última partícula de combustible.

14.91 Un satélite meteorológico de masa 5000 kg, incluyendo combustible, ha sido lanzado al espacio desde un transporte espacial que describe una órbita circular de baja altura alrededor de la Tierra. Después de que el satélite se ha alejado lentamente con el impulso inicial hasta alcanzar una distancia segura, se enciende su motor para elevar su velocidad en 2430 m/s como primer paso de su transferencia a una órbita geoestacionaria. Si el combustible se expulsa con una velocidad relativa de 4200 m/s, determínese la masa del combustible consumido en esta maniobra.

14.92 Determínese el incremento en la velocidad del satélite meteorológico del problema 14.91 después que se han consumido 1500 kg de combustible.

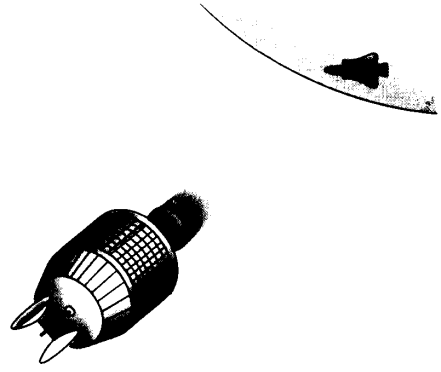


Fig. P14.91 y P14.92

14.93 Una nave espacial de 1200 lb está montada en la parte superior de un cohete que pesa 42 600 lb, lo cual incluye 40 000 lb de combustible. Si el combustible se consume a razón de 500 lb/s y se expulsa con una velocidad relativa de 12 000 ft/s, determínese la máxima velocidad que se comunica a la nave cuando el cohete se dispara verticalmente desde el suelo.

14.94 El cohete utilizado para lanzar la nave espacial del problema 14.93 se rediseña de manera que consiste en dos etapas *A* y *B*, cada una con un peso de 21 300 lb que incluyen 20 000 lb de combustible. El combustible se sigue consumiendo a razón de 500 lb/s y se expulsa con una velocidad relativa de 12 000 ft/s. Si se sabe que cuando la tapa *A* expulsa su última partícula de combustible su cubierta se desprende y es disparada, encuéntrense *a*) la velocidad del cohete en ese instante y *b*) la velocidad máxima que se proporciona a la nave.

14.95 Calcúlese la altitud máxima que alcanza la nave del problema 14.93 cuando se ha consumido todo el combustible del cohete de lanzamiento.

14.96 Para la nave espacial y el cohete de lanzamiento con dos etapas del problema 14.94 determínese la altitud a la que *a*) se separa la etapa *A* del cohete y *b*) a la que se ha consumido el combustible de las dos etapas.



Fig. P14.93



Fig. P14.94

14.97 En el problema 14.91 determínese la distancia de separación entre el satélite meteorológico y el transporte espacial 80 s después de que su motor se ha encendido, si el combustible se consume con un gasto de 18.75 kg/s.

14.98 Para el cohete del problema 14.90, encuéntrense *a*) la altitud a la que se ha consumido todo el combustible y *b*) la velocidad del cohete en ese instante.

14.99 En lo que respecta a la propulsión de un cohete, se desperdicia la energía cinética proporcionada al combustible consumido y expulsado, la potencia útil es igual al producto de la fuerza disponible para propulsar el cohete y la velocidad del cohete. Si v es la velocidad del cohete y u es la velocidad relativa del combustible expulsado, demuéstrese que el rendimiento mecánico del cohete es $\eta = 2uv/(u^2 + v^2)$. Explíquese por qué $\eta = 1$ cuando $u = v$.

14.100 En lo que respecta a la propulsión de un avión de reacción se desprecia la energía cinética proporcionada a los gases de escape. La potencia útil es igual al producto de la fuerza disponible para propulsar al avión y la velocidad del avión. Si v es la velocidad del avión y u es la velocidad relativa de los gases expulsados, demuéstrese que el rendimiento mecánico del avión es $\eta = 2v/(u + v)$. Explíquese por qué $\eta = 1$ cuando $u = v$.

Repaso y resumen

En este capítulo se analizó el movimiento de *sistemas de partículas*, es decir, el movimiento de un gran número de partículas consideradas juntas. En la primera parte del capítulo se consideraron sistemas formados por partículas bien definidas, mientras que en la segunda parte se analizaron sistemas que continuamente ganaban o perdían partículas o ambas cosas al mismo tiempo.

Fuerzas efectivas

Primero se definió la *fuerza efectiva* de una partícula P_i de determinado sistema como el producto $m_i\mathbf{a}_i$ de su masa m_i y su aceleración $\mathbf{a}_i$ respecto de un sistema de referencia newtoniano con origen en O (sección 14.2). Entonces se demostró que *el sistema de fuerzas exteriores que actúan sobre partículas y el sistema de vectores ma_i de las partículas son mecánicamente equivalentes*, es decir, ambos sistemas tienen *la misma resultante y el mismo momento resultante* respecto de O:

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{a}_i \tag{14.4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}_i \times m_i\mathbf{a}_i) \tag{14.5}$$

Momento lineal y momento angular de un sistema de partículas

Definiendo *el momento lineal* $\mathbf{L}$ y *el momento angular* $\mathbf{H}_O$ *respecto del punto O* del sistema de partículas (sección 14.3) como

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{v}_i \qquad \mathbf{H}_O = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}_i \times m_i\mathbf{v}_i) \tag{14.6, 14.7}$$

se demostró que las ecuaciones (14.4) y (14.5) se podrían reemplazar por las ecuaciones

$$\Sigma\mathbf{F} = \dot{\mathbf{L}} \qquad \Sigma\mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O \tag{14.10, 14.11}$$

que expresan que *la resultante y el momento resultante respecto de O de las fuerzas exteriores son, respectivamente, iguales a las derivadas temporales del momento lineal y del momento angular respecto de O del sistema de partículas.*

Movimiento del centro de masas de un sistema de partículas

En la sección 14.4 se definió el centro de masas de un sistema de partículas como el punto G cuyo vector de posición $\bar{\mathbf{r}}$ satisface la ecuación

$$m\bar{\mathbf{r}} = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i \tag{14.12}$$

donde m representa la masa total $\sum_{i=1}^{n} m_i$ de las partículas. Derivando ambos miembros de la ecuación (14.12) dos veces respecto de t, se obtuvieron las relaciones

$$\mathbf{L} = m\bar{\mathbf{v}} \qquad \dot{\mathbf{L}} = m\bar{\mathbf{a}} \tag{14.14, 14.15}$$

donde $\bar{\mathbf{v}}$ y $\bar{\mathbf{a}}$ representan, respectivamente, la velocidad y la aceleración del centro de masas G. Sustituyendo para $\dot{\mathbf{L}}$ de la (14.15) en la (14.10), se obtuvo la ecuación

$$\Sigma \mathbf{F} = m\bar{\mathbf{a}} \tag{14.16}$$

de lo que se concluyó que *el centro de masas de un sistema de partículas se mueve como si toda la masa del sistema y todas las fuerzas exteriores se concentran en ese punto* (problema resuelto 14.1).

Momento angular de un sistema de partículas respecto de su centro de masas

En la sección 14.5 se consideró el movimiento de las partículas de un sistema respecto a un sistema de referencia central $Gx'y'z'$ unido al centro de masas G del sistema y en movimiento respecto al sistema de referencia newtoniano $Oxyz$ (fig. 14.14). Se definió el *momento angular* del sistema *respecto a su centro de masas* G como la suma de los momentos respecto de G del momento lineal $m_i\mathbf{v}'_i$ de las partículas en su movimiento relativo al sistema de referencia $Gx'y'z'$. También se notó que se podría obtener el mismo resultado al considerar los momentos respecto a G del momento $m_i\mathbf{v}_i$ de las partículas en su movimiento absoluto. Por lo tanto, se escribió

$$\mathbf{H}_G = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}'_i \times m_i\mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}'_i \times m_i\mathbf{v}'_i) \tag{14.24}$$

y se obtuvo la relación

$$\Sigma \mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G \tag{14.23}$$

que expresa que el *momento resultante respecto a G de las fuerzas exteriores es igual a las derivadas temporales del momento angular respecto de G del sistema de partículas.* Como se verá posteriormente esta relación es fundamental para el estudio del movimiento de sólidos rígidos.

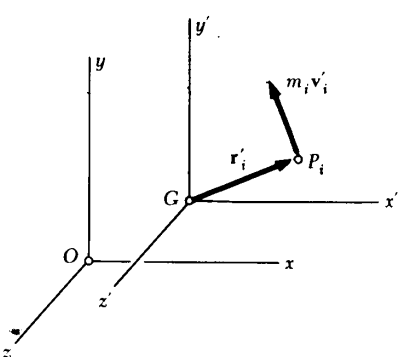


Fig. 14.14

Conservación del momento lineal y angular

Cuando no actúan fuerzas exteriores sobre un sistema de partículas (sección 14.6) se desprende de las ecuaciones (14.10) y (14.11) que el momento lineal $\mathbf{L}$ y el momento angular $\mathbf{H}_0$ del sistema se conservan (problemas resueltos 14.2 y 14.3). En problemas relacionados con fuerzas centrales también se conserva el momento angular del sistema respecto al centro de la fuerza O.

Energía cinética de un sistema de partículas

La energía cinética T de un sistema de partículas se definió como la suma de las energías cinéticas de las partículas (sección 14.7):

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2 \tag{14.28}$$

Utilizando el sistema de referencia central $Gx'y'z'$ de la figura 14.14, se notó que la energía cinética del sistema también se podía obtener al sumar la energía cinética $\frac{1}{2}m\bar{v}^2$ asociada con el movimiento del centro de masas G con la energía cinética del sistema en su movimiento relativo al sistema $Gx'y'z'$.

$$T = \tfrac{1}{2}m\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i'^2 \tag{14.29}$$

Teorema de las fuerzas vivas

El *teorema de las fuerzas vivas* se puede aplicar a un sistema de partículas tanto como a partículas individuales (sección 14.8). Se escribió

$$T_1 + U_{1\to 2} = T_2 \tag{14.30}$$

y se notó que $U_{1\to 2}$ representa el trabajo de *todas* las fuerzas que actúan sobre las partículas del sistema, tanto interiores como exteriores.

Conservación de la energía

Si todas las fuerzas que actúan sobre las partículas del sistema son *conservativas*, se puede determinar la energía potencial del sistema V y escribir

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \tag{14.31}$$

que expresa el *principio de la conservación de la energía* para un sistema de partículas.

Principio del impulso y del momento

Se vio en la sección 14.9 que el *principio del impulso y el momento* para un sistema de partículas se podría expresar gráficamente como se indica en la figura 14.15. Establece que los momentos lineales de las partículas en el tiempo t_1 y los impulsos de las fuerzas exteriores de t_1 a t_2 forman un sistema de vectores equivalente al sistema de momentos lineales de las partículas en el tiempo t_2.

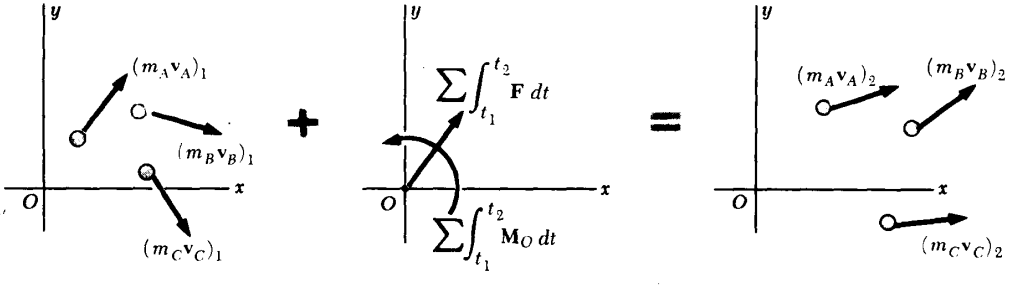


Fig. 14.15

Si no actúan fuerzas exteriores sobre las partículas del sistema, los sistemas de momento lineal mostrados en las partes *a* y *c* de la figura 14.15 son equivalentes y se tiene

$$\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_2 \qquad (\mathbf{H}_O)_1 = (\mathbf{H}_O)_2 \qquad (14.36,\ 14.37)$$

Uso de los principios de conservación en la solución de problemas relacionados con sistemas de partículas

Muchos problemas relacionados con el movimiento de sistemas de partículas se pueden resolver al aplicar simultáneamente el principio del impulso y del momento y el principio de la conservación de energía (problema resuelto 14.4) o expresando que el momento lineal, el momento angular y la energía del sistema se conservan (problema resuelto 14.5).

Sistemas de masa variable. Corriente estacionaria de partículas

En la segunda parte del capítulo se consideraron *sistemas de masa variable*. Primero se consideró una *corriente estacionaria de partículas* como una corriente de agua dividida por medio un álabe fijo o un flujo de aire a través de un motor de propulsión a chorro (sección 14.11). Aplicando el principio de impulso y del momento al sistema S de partículas durante un intervalo de tiempo Δt e incluyendo las partículas que entran al sistema en A durante ese intervalo de tiempo y aquellas (de la misma masa Δm) que lo abandonan en B se concluyó que *el sistema formado por el momento lineal* $(\Delta m)\mathbf{v}_A$ *de las partículas que entran a S en el tiempo* Δt *y los impulsos de las fuerzas ejercidas sobre S durante ese tiempo es equivalente al momento lineal* $(\Delta m)\mathbf{v}_B$ *de las partículas que abandonan S en el mismo tiempo* Δt. Fig. 14.16. Igualando los componentes x, los componentes y y los momentos respecto a puntos fijos de los vectores relacionados, se pueden obtener tantas como tres ecuaciones, que se pueden resolver para las incógnitas deseadas (problemas resueltos 14.6 y 14.7). A partir de este resultado, también se pudo obtener la siguiente expresión para la resultante $\Sigma\mathbf{F}$ de las fuerzas ejercidas sobre S,

$$\Sigma\mathbf{F} = \frac{dm}{dt}(\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A) \qquad (14.39)$$

donde $\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A$ representa la diferencia entre los *vectores* $\mathbf{v}_B$ y $\mathbf{v}_A$ y donde dm/dt es el caudal másico de la corriente (véase pie de página 679).

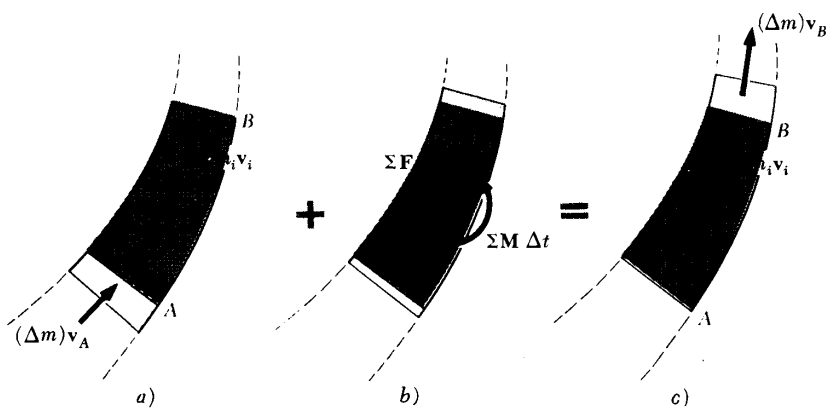


Fig. 14.16

Sistemas que aumentan o disminuyen su masa

A continuación se consideró un sistema de partículas que aumenta su masa al absorber continuamente partículas o que pierde masa al expulsar continuamente partículas (sección 14.12); como en el caso de un cohete, se aplicó el principio de impulso y del momento al sistema durante un intervalo de tiempo Δt, teniendo cuidado de incluir las partículas ganadas o perdidas durante ese intervalo de tiempo (problema resuelto 14.8).

También se notó que la sección sobre un sistema S de partículas que son ***absorbidas*** por S era equivalente a un empuje

$$\mathbf{P} = \frac{dm}{dt}\mathbf{u} \tag{14.43}$$

donde dm/dt es el caudal de masa absorbido y u la velocidad de las partículas ***relativas a S***. En el caso de partículas que son ***expulsadas*** de S, el caudal másico dm/dt es negativo y el empuje $\mathbf{P}$ se ejerce en una dirección opuesta de la de las partículas expulsadas.

Problemas de repaso

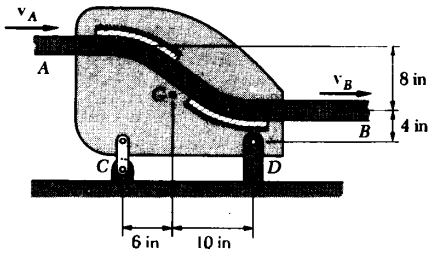


Fig. P14.101

14.101 Un chorro de agua, que tiene una sección transversal $A = 1.2$ in^2 y se mueve con una velocidad de módulo $v_A = v_B = 60$ ft/s, se desvía por medio de los dos álabes indicados, los cuales están soldados a una placa vertical. Si se sabe que los pesos combinados de la placa y los álabes es 10 lb, determínense las reacciones en C y D.

14.102 Se dispara una bala de 1 oz con una velocidad de 1600 ft/s a un bloque A que pesa 10 lb. El coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque A y el carro BC es 0.50. Si el vagón pesa 8 lb y puede rodar libremente, determínense *a*) la velocidad final del vagón y el bloque y *b*) la posición final del bloque sobre el vagón.

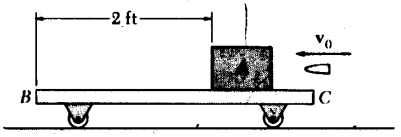


Fig. P14.102

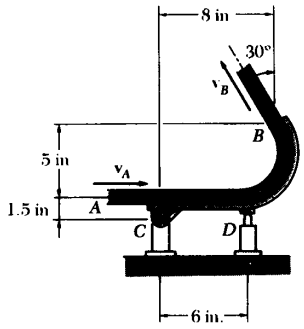


Fig. P14.104

14.103 Un vehículo espacial de 500 lb se desplaza a una velocidad $\mathbf{v}_0 = (1500)$ ft/s)**i** cuando cargas explosivas lo separan en tres partes A, B y C que pesan 120, 180 y 200 lb, respectivamente. Si inmediatamente después de la explosión la velocidad de la parte A es $\mathbf{v}_A = (2000$ ft/s)**i** $- (200$ ft/s)**j** $+ (300$ ft/s)**k** y la velocidad de la parte B es $\mathbf{v}_B = (1000$ ft/s)**i** $+ (300$ ft/s)**j** $- (500$ ft/s)**k**, determínese la velocidad correspondiente de la parte C.

14.104 El chorro de agua que se muestra fluye con un caudal de 200 gal/min y se mueve con una velocidad de magnitud 80 ft/s tanto en A como en B. El álabe se sostiene por una conexión articulada en C y por un gato elevador en D que sólo puede aplicar una fuerza vertical. Despreciando el peso del álabe, determínense las reacciones en C y en D. (1 ft^3 = 7.48 gal).

14.105 Una pala rotatoria de potencia se utiliza para quitar nieve de una sección horizontal de una vía de ferrocarril. El vagón pala se coloca delante de una locomotora que lo empuja con una velocidad constante de 15 mi/h. La pala quita 150 ton de nieve por minuto lanzándola en la dirección indicada con una velocidad de 50 ft/s en relación al vagón pala. Despreciando el rozamiento en la rotación, determínense *a*) el módulo de la fuerza **P** ejercida por la locomotora y *b*) la fuerza lateral ejercida sobre el vagón pala por la vía.

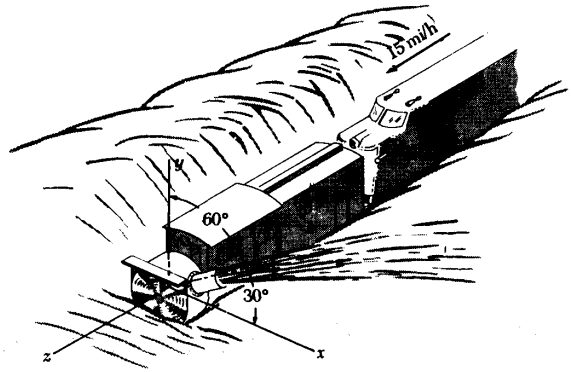


Fig. P14.105

14.106 Se observa que la aceleración de un cohete es 30 m/s² en $t = 0$ al ser disparado verticalmente desde el piso y de 350 m/s² en $t = 80$ s. Si el combustible se consume con un caudal de 10 kg/s, determínense *a*) la masa inicial del cohete y *b*) la velocidad relativa con la cual se expulsa el combustible.

14.107 Una cadena de longitud l y masa total m forma un montón sobre el piso. Si su extremo se eleva verticalmente con una velocidad constante v, determínense *a*) la fuerza **P** que se aplica en A en el momento en el que la mitad de la cadena se ha elevado del piso y *b*) la reacción ejercida por el piso en ese momento.

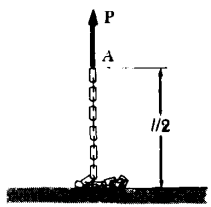


Fig. P14.107

14.108 Resuélvase el problema 14.107 suponiendo que el extremo A de la cadena se está bajando hacia el piso con una velocidad constante v.

14.109 Tres vagones de carga idénticos están situados sobre la misma vía. El vagón A se mueve a la derecha con una velocidad v_0, mientras que los vagones B y C están en reposo. Determínese la velocidad de cada vagón después de que todos los choques han tenido lugar, suponiendo que los vagones A y B rebotan uno con el otro con un coeficiente de restitución $e = 1$ y que los vagones B y C *a*) también rebotan uno con el otro con $e = 1$, *b*) se acoplan automáticamente cuando se golpean y *c*) ya estaban rígidamente acoplados cuando A chocó con B.

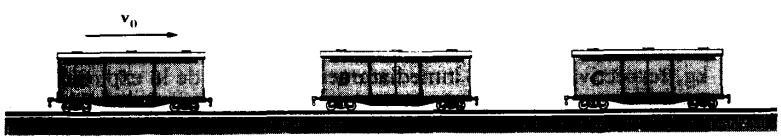


Fig. P14.109

14.110 Sobre una banda transportadora cae grava con una velocidad prácticamente cero y caudal constante $q = (dm/dt)$. *a*) Determínese el módulo de la fuerza **P** necesaria para mantener una velocidad v constante, de la banda. *b*) Demuéstrese que la energía cinética que gana la grava durante cualquier intervalo es igual a la mitad del trabajo realizado por la fuerza **P** durante ese intervalo. Explíquese qué ocurre con la otra mitad del trabajo realizado por **P**.

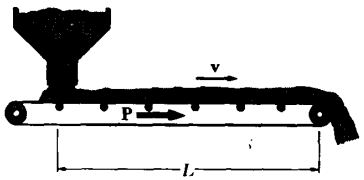


Fig. P14.110

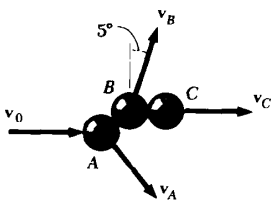


Fig. P14.111

14.111 En un juego de billar, la bola *A* se mueve con una velocidad $\mathbf{v}_0 = (3 \text{ m/s})\mathbf{i}$ cuando choca con las bolas *B* y *C* que están en reposo juntas. Después del choque se observa que *B* y *C* se mueven en las direcciones indicadas con velocidades de módulo $v_B = 1.375$ m/s y $v_C = 1.700$ m/s, respectivamente. Determínense *a*) el módulo y dirección de la velocidad $\mathbf{v}_A$ y *b*) el porcentaje de la energía inicial perdida en el choque.

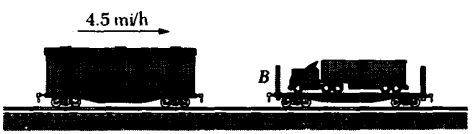


Fig. P14.112

14.112 Un vagón cerrado de 40 ton *A* se mueve con una velocidad de 4.5 mi/h en el patio de cambios cuando choca y se acopla automáticamente con una plataforma *B* de 20 ton que lleva un camión con remolque de *C* de 30 ton. Tanto la plataforma como el camión están en reposo, sin sus frenos. Determínese la velocidad de los vagones y del camión *a*) inmediatamente después del acoplamiento de los vagones y *b*) inmediatamente después de que el extremo de la plataforma choca con el camión. Despréciese el rozamiento y supóngase que el choque entre la plataforma y el camión es perfectamente plástico ($e = 0$).

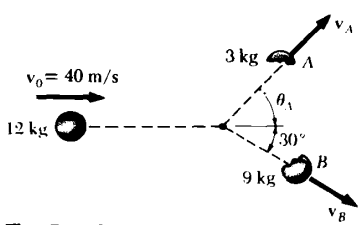


Fig. P14.C1

Los siguientes problemas están diseñados para ser resueltos con un ordenador.

14.C1 Un proyectil de 12 kg se desplaza con una velocidad de 40 m/s cuando explota en dos fragmentos *A* y *B* de masa 3 kg y 9 kg, respectivamente. Si inmediatamente después de la explosión los fragmentos *A* y *B* se desplazan en las direcciones descritas, elabórese un programa de ordenador y úsese para calcular la velocidad de cada fragmento para valores de θ_A de 30 a 120° en intervalos de 5°.

14.C2 El bloque B parte del reposo y desliza sobre la cuña A de 25 lb, la cual se sostiene sobre una superficie horizontal. Despreciando el rozamiento, escríbase un programa de ordenador que se pueda usar para calcular *a)* la velocidad de B relativa a A después de que ha deslizado 3 ft sobre la superficie inclinada, *b)* la velocidad correspondiente de A. Úsese este programa para calcular las velocidades para valores del peso del bloque B de 5 a 20 lb en intervalos de 1 lb.

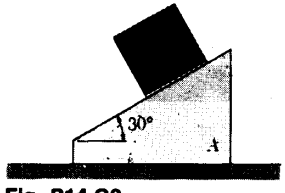


Fig. P14.C2

14.C3 Un avión de propulsión de 35 000 lb mantiene una velocidad constante de 480 mi/h mientras se eleva con un ángulo $\alpha_0 = 15°$. El avión succiona un caudal de aire de 600 lb/s y lo expulsa con una velocidad de 2 250 ft/s relativa al avión. Si el piloto cambia el ángulo de elevación α y se mantienen las mismas condiciones de los motores, escríbase un programa de ordenador y con él calcúlense, para valores de α (de 0 a 20° en intervalos de 1°), *a)* la aceleración inicial del avión y *b)* la velocidad máxima alcanzada. Supóngase que la resistencia debida al rozamiento del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad.

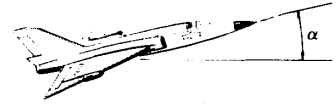


Fig. P14.C3

14.C4 El chorro de agua aquí mostrado fluye con un caudal de 1.25 m^3/min y se mueve con una velocidad de módulo 40 m/s en A y en B. El álabe se sostiene por medio de una articulación en C y por un gato elevador en D que sólo puede ejercer fuerzas verticales. Despreciando el peso del álabe, escríbase un programa de ordenador y con él calcúlense las reacciones en C y en D para valores de θ desde 0 hasta 90° en intervalos de 10°.

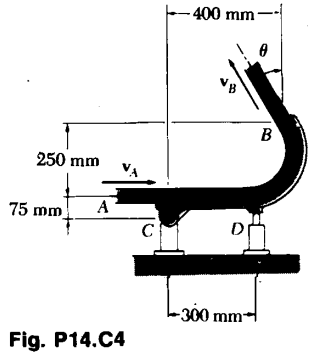


Fig. P14.C4

CAPÍTULO QUINCE

Cinemática del sólido rígido

15.1. Introducción. En este capítulo estudiaremos la cinemática de los *sólidos rígidos*. Investigaremos las relaciones que existen entre el tiempo, las posiciones, las velocidades y las aceleraciones de las distintas partículas que forman un sólido rígido. Como veremos, los diferentes tipos de movimiento de un sólido rígido pueden agruparse en forma conveniente como sigue:

1. *Traslación.* Se dice que un movimiento es de traslación si cualquier línea recta de un sólido permanece en la misma dirección durante el movimiento. Puede observarse también que en una traslación todas las partículas que forman el sólido se mueven a lo largo de trayectorias paralelas. Si estas trayectorias son líneas rectas, se dice que el movimiento es una *traslación rectilínea* (Fig. 15.1); si las trayectorias son líneas curvas, el movimiento es una *traslación curvilínea* (Fig. 15.2).
2. *Rotación alrededor de un eje fijo.* En este movimiento las partículas que forman el sólido rígido se mueven en planos paralelos a lo largo de circunferencias con centro sobre el mismo eje fijo (Fig. 15.3). Si este eje, llamado *eje de rotación*, corta al sólido rígido, las partículas localizadas sobre el eje tienen velocidad y aceleración nulas.

La rotación no debe confundirse con ciertos tipos de traslación curvilínea. Por ejemplo, la placa mostrada en la figura 15.4*a* está en traslación curvilínea con todas sus partículas

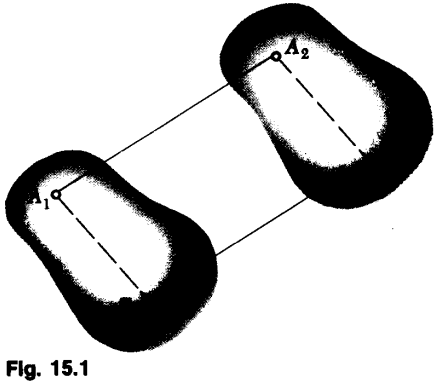


Fig. 15.1

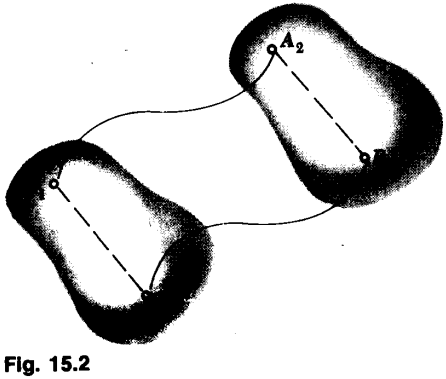
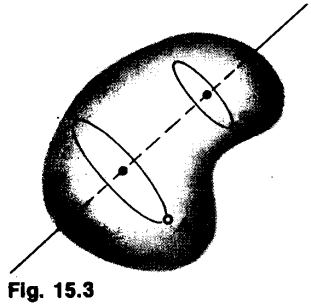
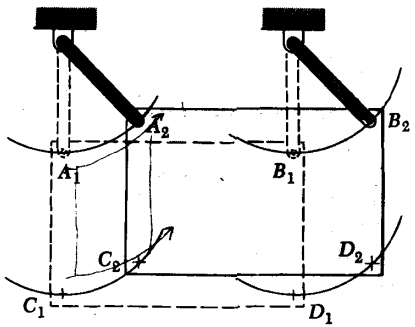
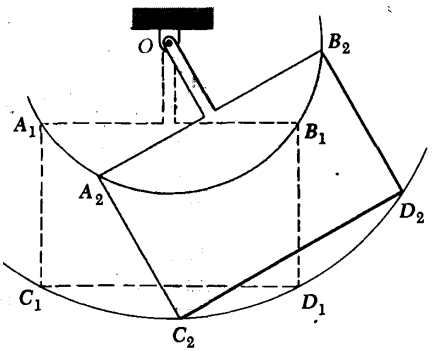


Fig. 15.2


Fig. 15.3



a) Traslación curvilinea



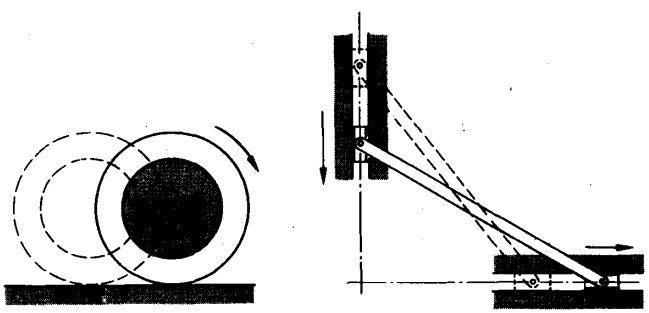
b) Rotaçiòn

Fig. 15.4

en movimiento a lo largo de circunferencias *paralelas* mientras que la placa mostrada en la figura 15.4*b* está en rotación con todas sus partículas en movimiento a lo largo de circunferencias *concéntricas*. En el primer caso, cualquier línea recta dada trazada sobre la placa permanecerá en la misma dirección mientras que en el segundo caso el punto O permanece fijo.

3. Como cada partícula se mueve en un plano dado se dice que la rotación de un sólido alrededor de un eje fijo es un *movimiento plano*.

Movimiento plano. Existen otros muchos tipos de movimiento plano, es decir, movimientos en que todas las partículas del sólido se mueven en planos paralelos. En la figura 15.5 se dan dos ejemplos de movimiento plano.



a) Rueda

b) Biela

Fig. 15.5

4. *Movimiento con un punto fijo.* Este es el movimiento tridimensional de un sólido rígido unido a un punto fijo O. Un ejemplo de movimiento con un punto fijo se encuentra en el movimiento de un trompo sobre una superficie rugosa (Fig. 15.6).
5. *Movimiento general.* A cualquier movimiento de un *sólido* rígido no incluido en ninguna de las categorías anteriores se le llama movimiento general.

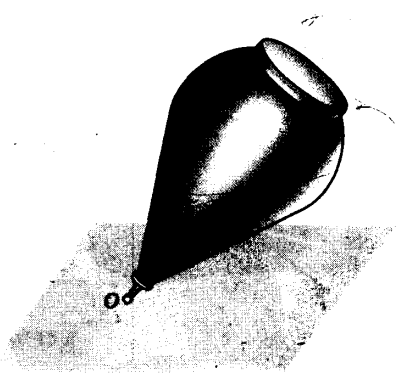


Fig. 15.6

Después de un breve análisis del movimiento de traslación en la sección 15.2, consideraremos en la sección 15.3 la rotación de un sólido rígido con respecto a un eje fijo. Definiremos la *velocidad angular* y la *aceleración angular* del sólido y aprenderemos a expresar la velocidad y la aceleración de un punto dado del sólido, en función de su vector de posición y de la velocidad y aceleración angulares del sólido.

Las secciones siguientes se dedican al estudio del movimiento plano de un sólido rígido y a su aplicación al análisis de mecanismos como engranajes, bielas y mecanismos. Descomponiendo el movimiento plano de una placa en una traslación y una rotación (Seccs. 15.5 y 15.6), expresaremos la velocidad de un punto B de la placa como la suma de la velocidad de un punto de referencia A y la velocidad de B relativa a un sistema de referencia que se traslada con A (es decir, moviéndose con A pero sin girar). El mismo planteamiento se emplea después en la sección 15.8 para expresar la aceleración de B en función de la aceleración de A y de la aceleración de B relativa a un sistema que se traslada con A.

Un método alternativo para el análisis de las velocidades en movimiento plano que se basa en el concepto de *centro instantáneo de rotación*, se da en la sección 15.7 y todavía se da otro método de análisis que se basa en el empleo de expresiones paramétricas para las coordenadas de un punto dado en la sección 15.9.

El movimiento de una partícula respecto a un sistema de referencia giratorio, y el concepto de la *aceleración de Coriolis*, se analizan en las secciones 15.10 y 15.11 y los resultados obtenidos se aplican al análisis del movimiento plano de mecanismos que contienen partes que deslizan entre sí.

La parte restante del capítulo se dedica al análisis del movimiento tridimensional de un sólido rígido, es decir, el movimiento de un sólido rígido con un punto fijo y el movimiento general de un sólido rígido. En las secciones 15.12 y 15.13 se utilizará un sistema de referencia fijo o un sistema de referencia en traslación para este análisis, mientras que en las secciones 15.14 y 15.15 consideraremos el movimiento del sólido en relación a un sistema giratorio, o a un sistema en movimiento general, y se empleará nuevamente el concepto de la aceleración de Coriolis.

15.2. Traslación. Considérese un sólido rígido en traslación (ya sea traslación rectilínea o curvilínea) y sean A y B cualesquiera de sus partículas (Fig. 15.7*a*). Representando por $\mathbf{r}_A$ y $\mathbf{r}_B$ los vectores de posición de A y B con respecto a un sistema de referencia fijo y por $\mathbf{r}_{B/A}$ al vector que une a A y B, escribimos

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A} \tag{15.1}$$

Derivemos esta relación con respecto a t. Notamos que de la definición de una traslación el vector $\mathbf{r}_{B/A}$ debe mantener una dirección constante; su módulo debe ser también constante, ya que A y B corresponden al mismo sólido rígido. Entonces la derivada de $\mathbf{r}_{B/A}$ es nula y tenemos



(15.2)

Derivando una vez más escribimos

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A \tag{15.3}$$

Así que, *cuando un sólido rígido está en traslación, todos los puntos del sólido tienen la misma velocidad y la misma aceleración en cualquier instante* (Fig. 15.7*b* y *c*). En el caso de la traslación curvilínea, la velocidad y la aceleración cambian tanto de dirección como de módulo en cada instante. En el caso de la traslación rectilínea todas las partículas del sólido se mueven a lo largo de líneas rectas paralelas y su velocidad y aceleración mantienen la misma dirección durante todo el movimiento.

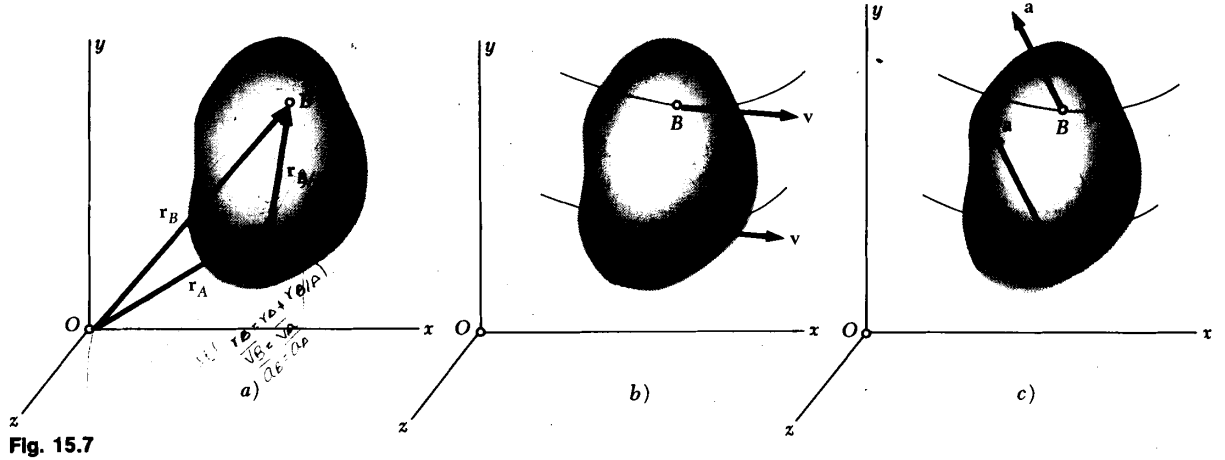


Fig. 15.7

15.3. Rotación alrededor de un eje fijo. Consideremos un sólido rígido que gira alrededor de un eje fijo AA'. Sea P un punto del sólido y $\mathbf{r}$ su vector de posición con respecto a un sistema de referencia fijo. Por conveniencia supondremos que el sistema está centrado en el punto O sobre AA' y que el eje z coincide con AA' (Fig. 15.8). Sea B la proyección de P sobre AA', como P debe permanecer a una distancia constante de B, describirá una circunferencia de centro B y de radio r sen ϕ, donde ϕ representa el ángulo formado por $\mathbf{r}$ y AA'.

La posición de P y de todo el sólido está definida completamente por el ángulo θ que forma la línea BP con el plano zx. El ángulo θ se conoce como la *coordenada angular* del sólido. La coordenada angular se define como positiva cuando se recorre en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj vista desde A; se expresará en radianes (rad) y ocasionalmente en grados (°) o revoluciones (rev). Recordamos que

$$1 \text{ rev} = 2\pi \text{ rad} = 360°$$

De la sección 11.9 recordamos que la velocidad $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ de una partícula P es un vector tangente a la trayectoria de P y de módulo $v = ds/dt$. Observando que la longitud Δs del arco descrito por P cuando el sólido gira hasta $\Delta\theta$ es

$$\Delta s = (BP)\,\Delta\theta = (r \operatorname{sen}\phi)\,\Delta\theta$$

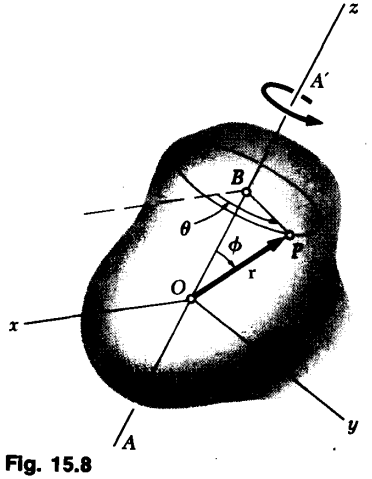


Fig. 15.8

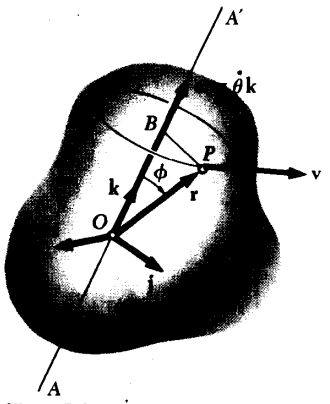


Fig. 15.9

y dividiendo ambos miembros entre Δt, obtenemos en el límite cuando Δt tiende a cero,

$$v = \frac{ds}{dt} = r\dot{\theta} \operatorname{sen} \phi \tag{15.4}$$

donde $\dot{\theta}$ representa la derivada de θ respecto al tiempo. (Nótese que aunque el ángulo θ depende de la posición de P dentro del cuerpo, la velocidad angular $\dot{\theta}$ es independiente de P.) Concluimos que la velocidad $\mathbf{v}$ de P es un vector perpendicular al plano que contiene a AA' y $\mathbf{r}$, de módulo v definida por (15.4). Pero es precisamente el resultado que obtendríamos si trazáramos a lo largo de AA' un vector $\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\mathbf{k}$ y formásemos el producto vectorial $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ (Fig. 15.9). Entonces escribimos

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \tag{15.5}$$

El vector

$$\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k} = \dot{\theta}\mathbf{k} \tag{15.6}$$

se le llama *velocidad angular* del sólido. Está dirigida a lo largo del eje de rotación y es igual en módulo a la derivada temporal $\dot{\theta}$ de la coordenada angular y su sentido puede obtenerse por la regla de la mano derecha (Secc. 3.6) a partir del sentido de rotación del sólido†.

Determinaremos ahora la aceleración $\mathbf{a}$ de la partícula P. Derivando (15.5) y recordando la regla para la derivación de un producto vectorial (Secc. 11.10), escribimos

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \\ &= \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \\ &= \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \end{aligned} \tag{15.7}$$

El vector $d\boldsymbol{\omega}/dt$ se representa por $\boldsymbol{\alpha}$ y se llama *aceleración angular* del sólido. Sustituyendo también $\mathbf{v}$ de (15.5), tenemos

$$\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \tag{15.8}$$

Derivando (15.6) y recordando que $\mathbf{k}$ es de módulo y dirección constante, tenemos

$$\boldsymbol{\alpha} = \alpha\mathbf{k} = \ddot{\omega}\mathbf{k} = \ddot{\theta}\mathbf{k} \tag{15.9}$$

† Se demostrará en la sección 15.12, en el caso más general de un sólido rígido que gira simultáneamente alrededor de ejes que tienen direcciones diferentes, que las velocidades angulares obedecen la ley del paralelogramo para la adición y que por ello son magnitudes vectoriales.

Entonces la aceleración angular de un sólido rígido que gira con respecto a un eje fijo es un vector dirigido a lo largo del eje de rotación, e igual en módulo a la derivada temporal $\dot{\omega}$ de la velocidad angular. Regresando a (15.8), notamos que la aceleración de P es la suma de dos vectores. El primer vector es igual al producto vectorial $\alpha \times \mathbf{r}$; es tangente a la circunferencia descrita por P y representa por consiguiente a la componente tangencial de la aceleración. El segundo vector es igual al *triple producto vectorial* $\omega \times (\omega \times \mathbf{r})$ obtenido al formar el producto vectorial de ω y $\omega \times \mathbf{r}$; como $\omega \times \mathbf{r}$ es tangente a la circunferencia descrita por P, el triple producto vectorial se dirige hacia el centro B del círculo y representa, por consiguiente, a la componente normal de la aceleración.

Rotación de una sección representativa. La rotación de un sólido rígido con respecto a un eje fijo puede definirse por el movimiento de una sección representativa en un plano de referencia perpendicular al eje de rotación. Escojamos el plano xy como el plano de referencia y supongamos que coincide con el plano de la figura, con el eje z apuntando hacia afuera del papel (Fig. 15.10). Recordando de (15.6) que $\omega = \omega\mathbf{k}$, notamos que un valor positivo del escalar $\dot{\omega}$ corresponde a una rotación en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj de la sección representativa, y un valor negativo corresponde a una rotación en el sentido de movimiento de las manecillas del reloj. Sustituyendo $\omega\mathbf{k}$ por ω en la ecuación (15.5), expresamos la velocidad de cualquier punto P de la sección como

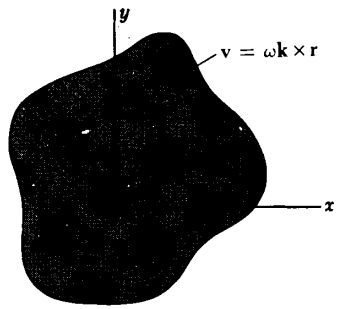


Fig. 15.10

$$\mathbf{v} = \omega\mathbf{k} \times \mathbf{r} \tag{15.10}$$

Como los vectores $\mathbf{k}$ y $\mathbf{r}$ son mutuamente perpendiculares, el módulo de la velocidad $\mathbf{v}$ es

$$v = r\omega \tag{15.10'}$$

y su dirección puede obtenerse girando $\mathbf{r}$ un ángulo de 90° en el sentido de rotación de la sección.

Sustituyendo $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k}$ y $\boldsymbol{\alpha} = \alpha\mathbf{k}$ en la ecuación (15.8), y observando que multiplicando vectorialmente dos veces a $\mathbf{r}$ por $\mathbf{k}$ produce una rotación de 180° del vector $\mathbf{r}$, expresamos la aceleración del punto P como

$$\mathbf{a} = \alpha\mathbf{k} \times \mathbf{r} - \omega^2\mathbf{r} \tag{15.11}$$

Descomponiendo $\mathbf{a}$ en sus componentes tangencial y normal (Fig. 15.11), escribimos

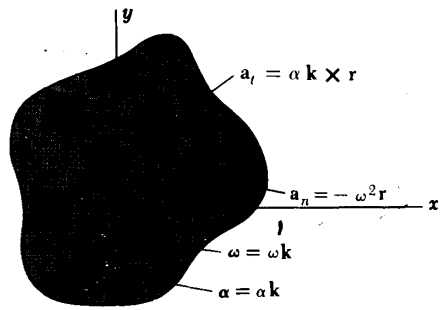


Fig. 15.11

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_t &= \alpha\mathbf{k} \times \mathbf{r} & a_t &= r\alpha \\ \mathbf{a}_n &= -\omega^2\mathbf{r} & a_n &= r\omega^2 \end{aligned} \tag{15.11'}$$

La componente tangencial $\mathbf{a}_t$, apunta en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj si el escalar α es positivo, y en el sentido de movimiento de las manecillas del reloj si α es negativo. La componente normal $\mathbf{a}_n$ siempre apunta en el sentido contrario al de $\mathbf{r}$, es decir, hacia O.

15.4. Ecuaciones que definen la rotación de un sólido rígido alrededor de un eje fijo. Decimos que se *conoce* el movimiento de un sólido rígido que gira con respecto a un eje fijo AA', cuando su coordenada angular θ puede expresarse como una función conocida de t. Sin embargo, en la práctica sólo ocasionalmente se define la rotación de un sólido rígido por una relación entre θ y t. Más frecuentemente, las condiciones de movimiento se especificarán por el tipo de aceleración angular que el sólido posee. Por ejemplo, α puede darse como una función de t, como una función de θ o como función de ω. Recordando las relaciones (15.6) y (15.9), escribimos



(15.12)



(15.13)

o despejando dt de (15.12) y sustituyendo en (15.13),



(15.14)

Como estas ecuaciones son similares a las obtenidas en el capítulo 11 para el movimiento rectilíneo de una partícula, su integración puede realizarse siguiendo el procedimiento indicado en la sección 11.3.

Con frecuencia se encuentran dos casos especiales de rotación:

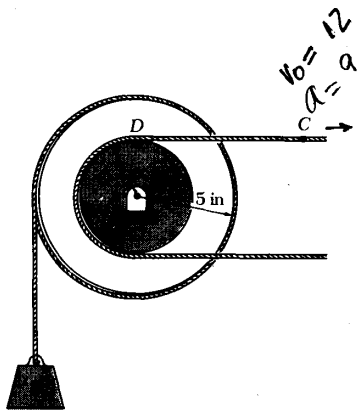
1. *Rotación uniforme.* Este caso se caracteriza por el hecho de que la aceleración angular es cero. La velocidad angular es por tanto constante y la coordenada angular está dada por la fórmula

$$\theta = \theta_0 + \omega t \tag{15.15}$$

2. *Rotación uniformemente acelerada.* En este caso la aceleración angular es constante. Las fórmulas siguientes que relacionan a la velocidad angular, la coordenada angular y el tiempo pueden deducirse en forma similar a la descrita en la sección 11.5. La semejanza entre las fórmulas encontradas aquí y las obtenidas para el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado de una partícula se nota fácilmente.

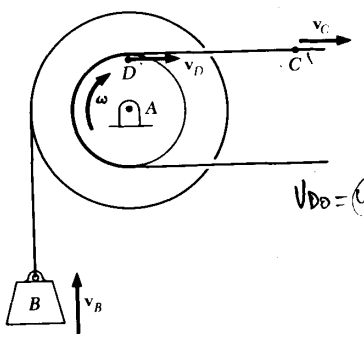
$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0 + \alpha t \\ \theta &= \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2 \\ \omega^2 &= \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0) \end{aligned} \tag{15.16}$$

Debe hacerse hincapié en que la fórmula (15.15) sólo puede utilizarse cuando $\alpha = 0$ y las fórmulas (15.16) sólo cuando $\alpha =$ constante. En cualquier otro caso deben utilizarse las fórmulas generales (15.12) a la (15.14).



PROBLEMA RESUELTO 15.1

La pesa B está conectada a una polea doble por uno de los dos cables inextensibles mostrados en la figura. El movimiento de la polea es controlado por el cable C que tiene una aceleración constante de 9 in/s^2 y una velocidad inicial de 12 in/s, ambas dirigidas a la derecha. Determínense: *a*) el número de revoluciones ejecutadas por la polea en 2 s, *b*) la velocidad y el cambio en la posición de la pesa B después de 2 s, y *c*) la aceleración del punto D sobre el borde de la polea interior en $t = 0$.



a) **Movimiento de la polea.** Como el cable es inextensible, la velocidad del punto D es igual a la velocidad del punto C *y la componente tangencial de la aceleración de* D es igual a la aceleración de C.

$$(\mathbf{v}_D)_0 = (\mathbf{v}_C)_0 = 12 \text{ in /s} \rightarrow \qquad (\mathbf{a}_D)_t = \mathbf{a}_C = 9 \text{ in /s}^2 \rightarrow$$

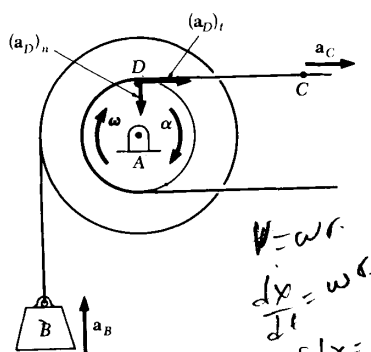
Observando que la distancia de D al centro de la polea es 3 in, escribimos

$$(v_D)_0 = r\omega_0 \qquad 12 \text{ in /s} = (3 \text{ in})\omega_0 \qquad \omega_0 = 4 \text{ rad/s} \downarrow$$
$$(a_D)_t = r\alpha \qquad 9 \text{ in /s}^2 = (3 \text{ in})\alpha \qquad \alpha = 3 \text{ rad/s}^2 \downarrow$$

Utilizando las ecuaciones del movimiento uniformemente acelerado obtenemos para $t = 2$ s,

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = 4 \text{ rad/s} + (3 \text{ rad/s}^2)(2 \text{ s}) = 10 \text{ rad/s}$$
$$\omega = 10 \text{ rad/s} \downarrow$$
$$\theta = \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2 = (4 \text{ rad/s})(2 \text{ s}) + \tfrac{1}{2}(3 \text{ rad/s}^2)(2 \text{ s})^2 = 14 \text{ rad}$$
$$\theta = 14 \text{ rad} \downarrow$$

$$\text{Número de revoluciones} = (14 \text{ rad})\left(\frac{1 \text{ rev}}{2\pi \text{ rad}}\right) = 2.23 \text{ rev}$$



b) **Movimiento de la pesa** B. Empleando las siguientes relaciones entre el movimiento lineal y angular con $r = 5$ in, escribimos

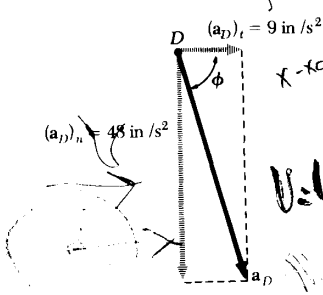
$$v_B = r\omega = (5 \text{ in})(10 \text{ rad/s}) = 50 \text{ in /s} \qquad v_B = 50 \text{ in /s} \uparrow$$
$$\Delta y_B = r\theta = (5 \text{ in})(14 \text{ rad}) = 70 \text{ in} \qquad \Delta y_B = 70 \text{ in hacia arriba}$$

c) **Aceleración del punto** D **en** $t = 0$. La componente tangencial de la aceleración es

$$(\mathbf{a}_D)_t = \mathbf{a}_C = 9 \text{ in /s}^2 \rightarrow$$

Como en $t = 0$, $\omega_0 = 4$ rad/s, la componente normal de la aceleración es

$$(a_D)_n = r_D\omega_0^2 = (3 \text{ in})(4 \text{ rad/s})^2 = 48 \text{ in /s}^2 \qquad (\mathbf{a}_D)_n = 48 \text{ in /s}^2 \downarrow$$



El módulo y la dirección de la aceleración total pueden obtenerse escribiendo

$$\tan\phi = (48 \text{ in /s}^2)/(9 \text{ in /s}^2) \qquad \phi = 79.4°$$
$$a_D \operatorname{sen} 79.4° = 48 \text{ in /s}^2 \qquad a_D = 48.8 \text{ in /s}^2$$
$$\mathbf{a}_D = 48.8 \text{ in /s}^2 \measuredangle 79.4°$$

Problemas

15.1 El movimiento de una manivela giratoria está definido por la relación $\theta = \theta_0 \cos(2\pi t)/T)$ donde θ se expresa en radianes y t en segundos. Si $\theta_0 = 0.75$ rad y $T = 1.20$ s, determínense la velocidad angular máxima y la aceleración angular máxima de la manivela.

15.2 El movimiento de un disco que gira en un baño de aceite está determinado por la relación $\theta = \theta_0 (1 - e^{-t/3})$, donde θ se expresa en radianes y t en segundos. Si $\theta_0 = 1.20$ rad, determínense las coordenadas angulares, la velocidad y la aceleración del disco cuando *a*) $t = 0$. *b*) $t = 3$ s y *c*) $t = \infty$.

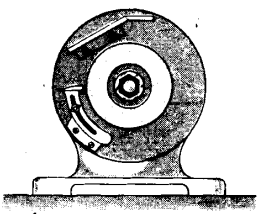


Fig. P15.3

15.3 Una pequeña rueda de afilar está unida al eje o árbol de un motor eléctrico cuya velocidad nominal es de 3600 rpm. Cuando se enciende alcanza su velocidad nominal en 5 s y, al cortarse la energía, la unidad llega al reposo en 70 s. Suponiendo el movimiento uniformemente acelerado, determínese el número de revoluciones que da el motor *a*) para alcanzar su velocidad nominal y *b*) para detenerse.

15.4 Durante la fase de arranque de un ordenador se observa que su disco de memoria que estaba inicialmente en reposo ejecutó 2.5 revoluciones en 0.3 s. Suponiendo que el movimiento fue uniformemente acelerado, determínense *a*) la aceleración angular del disco y *b*) la velocidad final del disco.

15.5 Conforme se inyecta lentamente un caudal en una turbina, se observa que la aceleración angular del rotor se incrementa linealmente con el tiempo t. Si el rotor arranca del reposo en $t = 0$ y después de 10 s ha completado 20 revoluciones, escríbanse las ecuaciones del movimiento para el rotor y determínense *a*) la velocidad angular en $t = 20$ s y *b*) el tiempo requerido para que el rotor complete sus primeras 40 revoluciones.

15.6 La barra doblada *ABCD* gira con respecto a una línea que une los puntos *A* y *D* con una velocidad angular constante de 75 rad/s. Sabiendo que en el instante considerado la velocidad del vértice *C* es hacia arriba, determínense la velocidad y la aceleración del vértice *B*.

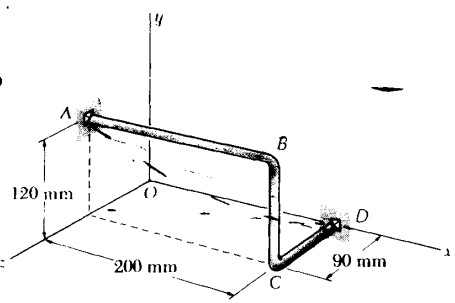


Fig. P15.6

15.7 En el problema 15.6 determínense la velocidad y la aceleración del vértice *B*, suponiendo que la velocidad angular es de 75 rad/s y decrece a razón de 600 rad/s^2.

15.8 Una placa circular de 6 in de radio se sostiene por medio de dos rodillos *A* y *B* como se indica. La placa rota respecto de la

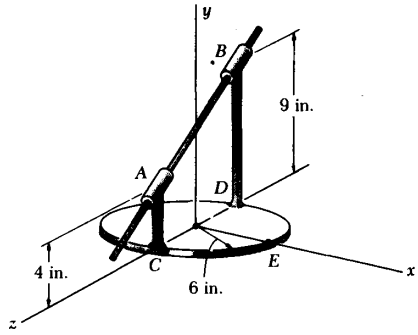


Fig. P15.8

barra que une a A con B con una velocidad angular constante de 26 rad/s. Sabiendo que, en el instante considerado, la velocidad del punto C se dirige a la derecha, determínense la velocidad y la aceleración del punto E.

15.9 El conjunto mostrado en la figura adjunta es una barra recta ABC que pasa a través de la placa rectangular $DEFH$ a la cual está soldada. El conjunto gira con respecto al eje AC con una velocidad angular constante de 9 rad/s. Si se sabe que el movimiento visto desde C es contrario al movimiento de las manecillas del reloj, determínense la velocidad y la aceleración del vértice F.

15.10 En el problema 15.9, suponiendo que la velocidad angular es de 9 rad/s y disminuye a razón de 18 rad/s^2, determínense la velocidad y la aceleración del vértice H.

15.11 En el problema 15.8 determínense la velocidad y la aceleración del punto E suponiendo que la velocidad angular es de 26 rad/s y se incrementa a razón de 65 rad/s^2.

15.12 La Tierra realiza una revolución completa alrededor del Sol en 365.24 días. Suponiendo que la órbita de la Tierra es circular y tiene un radio de 93 000 000 mi, determínense la velocidad y la aceleración de la Tierra.

15.13 La Tierra da una revolución completa sobre su eje en 23.93 h. Sabiendo que su radio medio es de 3960 mi, determínese la velocidad lineal y la aceleración de un punto sobre la superficie de la Tierra *a*) en el ecuador *b*) en Filadelfia con latitud 40° norte y *c*) en el Polo Norte.

15.14 La banda aquí mostrada se mueve sin deslizar sobre dos poleas tensoras. En el instante mostrado, la velocidad del punto C es 400 mm/s a la izquierda y su aceleración es de 600 mm/s^2 a la derecha. Determínense *a*) la velocidad angular y la aceleración angular de cada polea, *b*) la aceleración total del punto A y *c*) la aceleración total del punto B.

15.15 La banda mostrada en la figura se mueve sin deslizar sobre dos poleas tensoras. En el instante mostrado la velocidad angular de la polea de 80 mm de radio es de 5 rad/s en el sentido de las manecillas del reloj. Determínese la aceleración angular de la polea de 80 mm de radio para la cual la aceleración total del punto B es de 3.5 m/s^2.

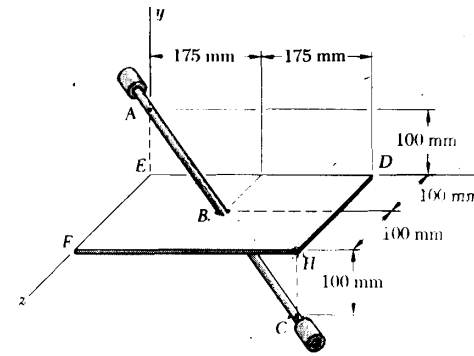


Fig. P15.9

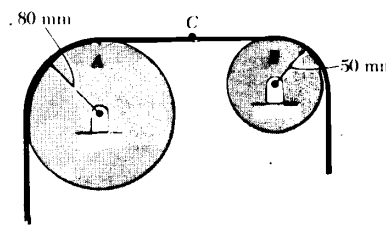


Fig. P15.14 y P15.15

15.16 Se sabe que se excederá la fuerza de rozamiento estático entre el bloque pequeño B y la placa y que el bloque empezará a deslizar sobre la placa cuando la aceleración total del bloque alcance 4 m/s^2. Si la placa parte del reposo en $t = 0$ y es acelerada uniformemente a razón de 5 rad/s^2, determínense el tiempo t y la velocidad angular de la placa cuando el bloque empieza a deslizar suponiendo $r = 250$ mm.

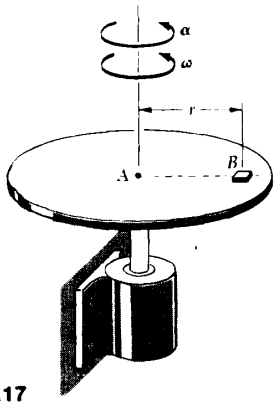
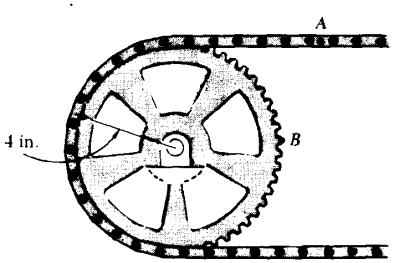


Fig. P15.16 y P15.17

15.17 Un bloque pequeño B descansa sobre una placa horizontal que gira con respecto a un eje fijo. La placa parte del reposo en $t = 0$ y es acelerada a una razón constante de 0.4 rad/s^2. Sabiendo que $r = 250$ mm, determínese el módulo de la aceleración total del bloque cuando: *a*) $t = 0$, *b*) $t = 1$ s y *c*) $t = 3$ s.



P15.18 y P15.19

15.18 La rueda dentada y la cadena que se indican están inicialmente en reposo. Si la rueda tiene una aceleración angular uniforme de 90 rad/s^2 en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, determínese *a*) la aceleración del punto A de la cadena y *b*) el módulo de la aceleración del punto B de la rueda 3 s después.

15.19 La rueda dentada que aquí se muestra funciona a una velocidad de 600 rpm en sentido contrario a las manecillas del reloj. Cuando se apaga el suministro de potencia se observa que la rueda y la cadena alcanzan el reposo en 4 s. Suponiendo movimiento uniformemente desacelerado, determínense los módulos de la velocidad y de la aceleración del punto B de la rueda *a*) inmediatamente antes de que se apague el suministro de energía y *b*) 2.5 s después.

15.20 El anillo C tiene un radio interior de 55 mm y un radio exterior de 60 mm y se encuentra colocado entre dos ruedas A y B, cada una de 24 mm de radio exterior. Si la rueda A gira con una velocidad constante de 300 rpm y no hay deslizamiento, determínense *a*) la velocidad angular del anillo C y de la rueda B y *b*) la aceleración de los puntos A y B que están en contacto con C.

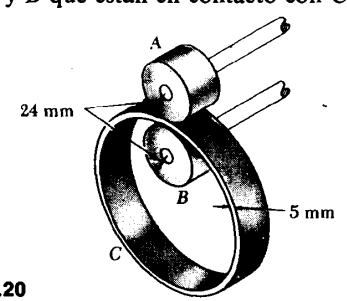


Fig. P15.20

15.21 Una cinta de ordenador se desplaza sobre dos tambores. Durante un intervalo de 4 s aumenta uniformemente la velocidad de $v_0 = 2$ ft/s a $v_1 = 6$ ft/s. Sabiendo que la cinta no desliza sobre los tambores, determínense *a*) la aceleración angular del tambor *A* y *b*) el número de revoluciones ejecutadas por el tambor *A* durante el intervalo de 4 s.

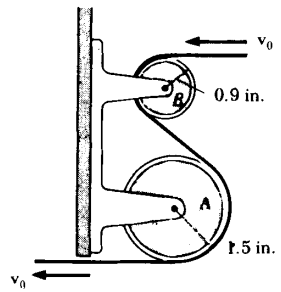


Fig. P15.21

15.22 Resuélvase el problema 15.21 considerando el tambor *B* en vez del tambor *A*.

15.23 Un tambor mezclador de 125 mm de radio exterior descansa sobre dos ruedas pequeñas de 25 mm de radio cada una. El tambor da 15 vueltas durante el tiempo *t* mientras su velocidad angular aumenta uniformemente desde 20 hasta 50 rpm. Si no hay deslizamiento entre el tambor y las ruedas pequeñas, determínense *a*) la aceleración angular de las ruedas y *b*) el intervalo de tiempo *t*.

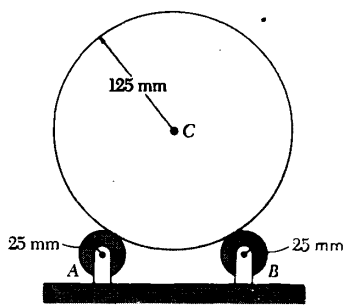


Fig. P15.23

15.24 Una polea y dos pesas están unidas por cuerdas inextensibles en la forma que se indica. La pesa *A* tiene una aceleración constante de 300 mm/s^2 y una velocidad inicial de 240 mm/s, ambas dirigidas hacia arriba. Determínense *a*) el número de revoluciones realizadas por la polea en 3 s, *b*) la velocidad y la posición de la pesa *B* después de 3 s, y *c*) la aceleración del punto *D* del borde en $t = 0$.

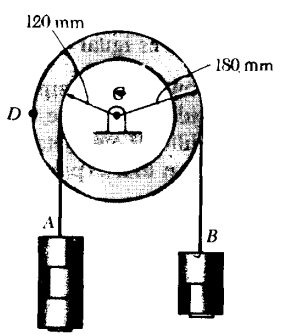


Fig. P15.24 y P15.25

15.25 Una polea y dos pesas se unen por cuerdas inextensibles como se muestra en la figura. La polea parte del reposo en $t = 0$ y se acelera con una aceleración constante de 2.4 rad/s^2 en el sentido de las manecillas del reloj. Para $t = 4$ s, determínense la velocidad y la posición *a*) de la pesa *A* y *b*) de la pesa *B*.

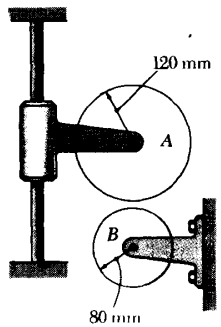


Fig. P15.26 y P15.27

15.26 El disco A se encuentra en reposo cuando entra en contacto con el disco B que está girando libremente a 500 rpm en el sentido de las manecillas del reloj. Después de 8 s de deslizamiento, durante los cuales cada disco tenía una aceleración angular constante, el disco B alcanza una velocidad angular final de 150 rpm en el sentido de las manecillas del reloj. Determínese la aceleración angular de cada disco durante el periodo de deslizamiento.

15.27 y 15.28 Un sistema sencillo de trasmisión por rozamiento consiste en dos discos A y B. Inicialmente el disco B tiene una velocidad angular de 500 rpm en el sentido de las manecillas del reloj y el disco A está en reposo. Se sabe que el disco B se parará en 60 s. Sin embargo, en lugar de esperar hasta que ambos discos estén en reposo para ponerlos en contacto se da al disco A una aceleración angular constante de 3 rad/s^2, contraria al movimiento de las manecillas del reloj. Determínense *a*) en qué tiempo los discos pueden ponerse en contacto sin que deslicen y *b*) la velocidad angular de cada disco cuando entran en contacto.

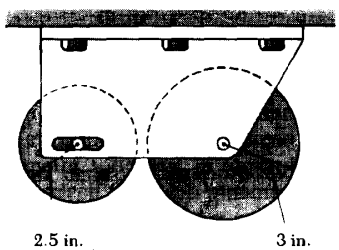


Fig P15.28 y P15.29

15.29 Dos ruedas de rozamiento A y B están girando libremente a 300 rpm en sentido opuesto al de las manecillas del reloj cuando se ponen en contacto. Después de 12 s de deslizamiento durante los cuales cada rueda tiene una aceleración angular constante, la rueda B alcanza una velocidad angular de 75 rpm en sentido opuesto a las manecillas del reloj. Determínense *a*) la aceleración angular de cada rueda durante el período de deslizamiento y *b*) el tiempo en que la velocidad angular de la rueda A es igual a cero.

*15.30 En un proceso continuo de impresión se introduce papel en las prensas a una velocidad constante v. Representando con r el radio del papel sobre el rodillo en un instante cualquiera y por b el espesor del papel, encuéntrese una expresión para la aceleración angular del rollo de papel.

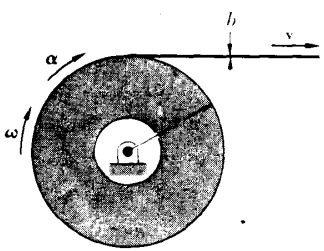
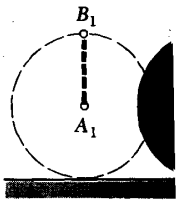


Fig. P15.30

15.5. Movimiento plano. Como se indicó en la sección 15.1, en general el movimiento plano no es ni una traslación ni una rotación; pero como veremos ahora, *un movimiento plano puede considerarse siempre como la suma de una traslación y una rotación.*

Considérese por ejemplo una rueda que gira sobre una vía recta (Fig. 15.12). Durante cierto intervalo de tiempo, dos puntos arbitrarios A y B se habrán movido respectivamente desde A_1 hasta A_2 y desde B_1 hasta B_2. El mismo resultado pudo obtenerse mediante una traslación que hubiera traído a A y B hasta A_2 y B_1' (la línea AB sigue siendo vertical), seguida por una rotación respecto a A que trae B

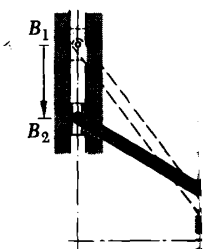
hasta B_2. Aunqu
la combinación d
tos se toman en
completamente p
ción simultáneas.



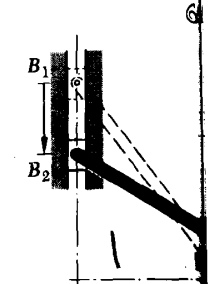
Movimiento

Fig. 15.12

Otro ejemplo
15.13, que represe
go de una vía horiz
vimiento puede su
zontal y una rota
traslación en una
(Fig. 15.13*b*).



Movim



Movim

Fig. 15.13

hasta B_2. Aunque el movimiento original de rodadura es distinto a la combinación de la traslación y la rotación cuando estos movimientos se toman en sucesión, el movimiento original puede duplicarse completamente por una combinación de una traslación y una rotación simultáneas.

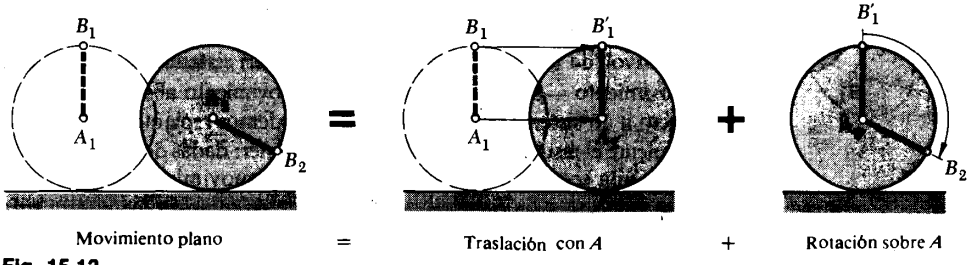


Fig. 15.12

Otro ejemplo del movimiento plano está dado en la figura 15.13, que representa a la barra cuyas extremidades deslizan a lo largo de una vía horizontal y una vía vertical, respectivamente. Este movimiento puede sustituirse por una traslación en una dirección horizontal y una rotación con respecto a A (Fig. 15.13*a*), o por una traslación en una dirección vertical y una rotación con respecto a B (Fig. 15.13*b*).

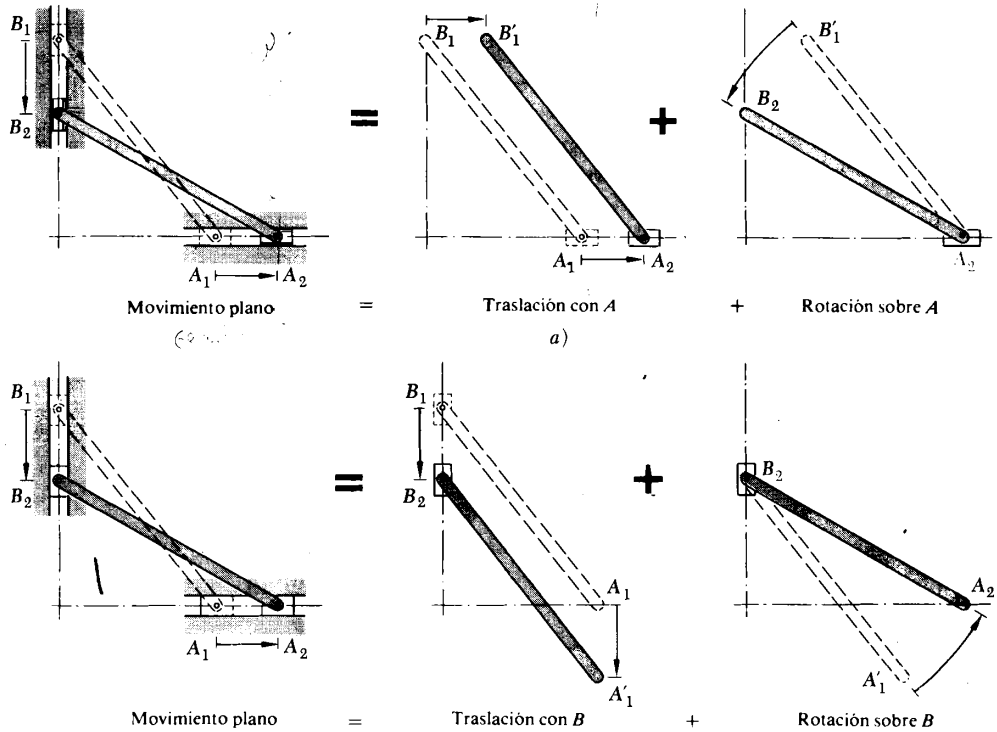


Fig. 15.13

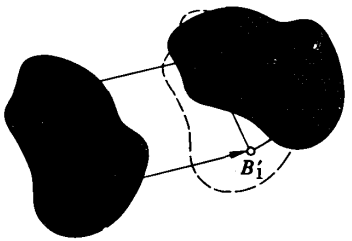


Fig. 15.14

En general consideraremos un pequeño desplazamiento que trae dos partículas A y B de una sección representativa desde A_1 y B_1 hasta A_2 y B_2 (Fig. 15.14), respectivamente. Este desplazamiento puede dividirse en dos partes, una en la que las partículas se mueven hasta A_2 y B'_1 mientras la línea AB mantiene la misma dirección, y otra en el que B se mueve hasta B_2 mientras A permanece fija. La primera parte del movimiento es claramente una traslación y la segunda una rotación con respecto a A.

Recordando de la sección 11.12 la definición del "movimiento relativo" de una partícula con respecto a un sistema de referencia en movimiento —en contraposición a su "movimiento absoluto" con respecto a un sistema de referencia fijo— podemos replantear en la forma siguiente el resultado que acabamos de obtener: dadas dos partículas A y B de una sección en movimiento plano, el movimiento relativo de B con respecto a un sistema unido a A y de orientación fija es una rotación. A un observador moviéndose con A, pero sin girar, le parecerá que la partícula describe un arco de circunferencia con centro en A.

15.6. Velocidad absoluta y relativa en el movimiento plano. Vimos en la sección anterior que cualquier movimiento plano de una sección puede sustituirse por una traslación definida por el movimiento de un punto de referencia arbitrario A y por una rotación simultánea respecto a A. La velocidad absoluta $\mathbf{v}_B$ de una partícula B de la sección se obtiene de la fórmula de velocidad relativa encontrada en la sección 11.12,

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} \tag{15.17}$$

donde el segundo miembro representa una suma vectorial. La velocidad $\mathbf{v}_A$ corresponde a la traslación de la sección con A, mientras que

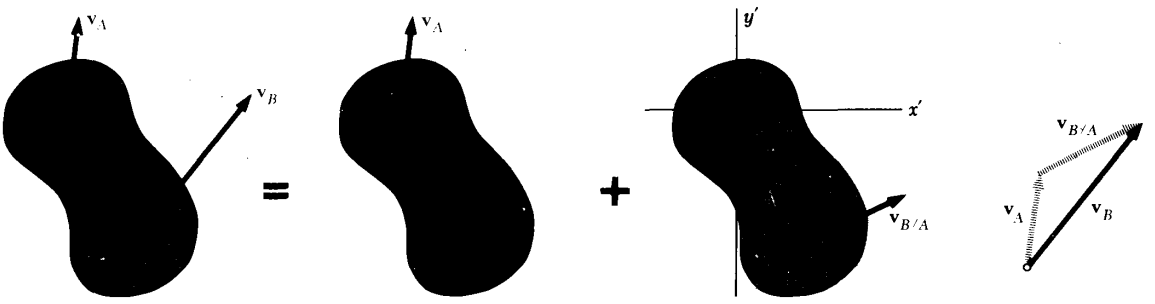


Fig. 15.15

la velocidad relativa $\mathbf{v}_{B/A}$ está asociada con la rotación de la sección respecto de A y se mide respecto a ejes centrados en A y de orientación fija (Fig. 15.15). Sea $\mathbf{r}_{B/A}$ el vector de posición de B relativo a A, $\omega\mathbf{k}$ la velocidad angular de la sección respecto a ejes de orientación fija; tenemos de (15.10) y (15.10').

$$\mathbf{v}_{B/A} = \omega\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{B/A} \qquad v_{B/A} = r\omega \tag{15.18}$$

donde r es la distancia de A a B. Sustituyendo el valor de $\mathbf{v}_{B/A}$ de (15.18) en (15.17) podemos escribir también

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \omega\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{B/A} \tag{15.17'}$$

Como un ejemplo consideraremos nuevamente la barra AB de la figura 15.13. Suponiendo que la velocidad $\mathbf{v}_A$ del extremo A se conoce, nos proponemos encontrar la velocidad $\mathbf{v}_B$ del extremo B y la velocidad angular ω de la barra en función de la velocidad $\mathbf{v}_A$, la longitud l y el ángulo θ. Escogiendo A como un punto de referencia, expresamos que el movimiento dado es equivalente a una traslación con A y una rotación simultánea con respecto a A (Fig. 15.16). La velocidad absoluta de B debe por tanto ser igual a la suma vectorial

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} \tag{15.17}$$

Notamos que aunque la dirección de $\mathbf{v}_{B/A}$ se conoce, su módulo $l\omega$ es desconocido. Pero esto se compensa por el hecho de que la dirección de $\mathbf{v}_B$ se conoce. Podemos por tanto completar el diagrama de la figura 15.16. Resolviendo para los módulos v_B y ω escribimos

$$v_B = v_A \tan\theta \qquad \omega = \frac{v_{B/A}}{l} = \frac{v_A}{l\cos\theta} \tag{15.19}$$

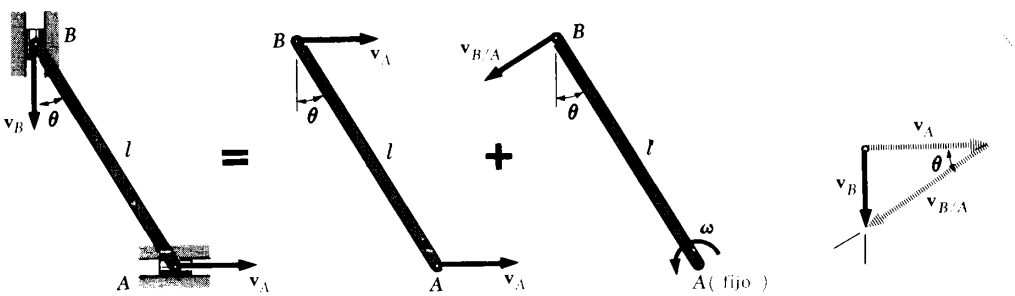


Fig. 15.16

El mismo resultado pudo obtenerse empleando B como punto de referencia. Descomponiendo el movimiento dado en una traslación con B y una rotación simultánea con respecto a B (Fig. 15.17) escribimos la ecuación

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B} \tag{15.20}$$

que está representada gráficamente en la figura 15.17. Notamos que $\mathbf{v}_{A/B}$ y $\mathbf{v}_{B/A}$ tienen el mismo módulo $l\omega$ pero sentido opuesto. El sentido de la velocidad relativa depende, por consiguiente, del punto de referencia que se ha seleccionado y debe averiguarse con cuidado del diagrama apropiado (Fig. 15.16 o 15.17).

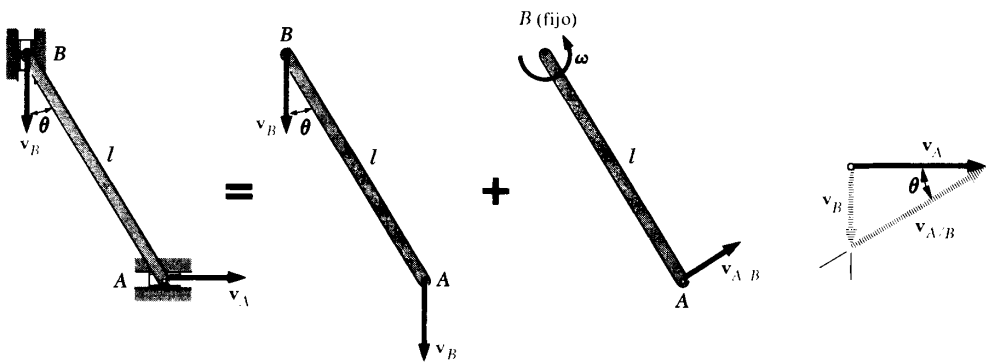
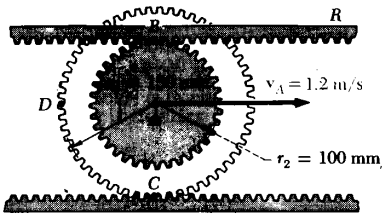


Fig. 15.17

Finalmente observamos que la velocidad angular ω de la barra en su rotación con respecto a B es la misma que la de rotación con respecto a A. En ambos casos se mide por la derivada temporal del ángulo θ. Este resultado es bastante general; por consiguiente debemos tener presente que *la velocidad angular ω de un sólido rígido en un movimiento plano es independiente del punto de referencia.*

La mayor parte de los mecanismos consisten no en una sino en *varias* partes en movimiento. Cuando las distintas partes de un mecanismo contienen articulaciones o uniones con pasadores, su análisis puede realizarse considerando cada parte como un sólido rígido, pero teniendo presente que los puntos donde dos partes están conectadas deben tener la misma velocidad absoluta (véase problema resuelto 15.3). Un análisis semejante puede emplearse cuando se estudian engranajes ya que los dientes en contacto deben tener también la misma velocidad absoluta. Sin embargo, cuando un mecanismo contiene partes que deslizan unas sobre otras, la velocidad relativa de la parte en contacto debe tomarse en consideración (véanse las Secc 15.10 y 15.11).



PROBLEMA RESUELTO 15.2

El engranaje doble mostrado en la figura rueda sobre la cremallera inferior que permanece fija; la velocidad de su centro A es 1.2 m/s dirigida a la derecha. Determínese: *a*) la velocidad angular del engranaje, y *b*) las velocidades de la cremallera superior R y del punto D del engranaje.

a) **Velocidad angular del engranaje.** Como el engranaje rueda sobre la cremallera inferior, su centro A se mueve hasta una distancia igual a la circunferencia exterior $2\pi r_1$ por cada revolución completa. Notando que 1 rev = 2π rad y que cuando A se mueve a la derecha ($x_A > 0$) el engranaje gira en el sentido de movimiento de las manecillas del reloj ($\theta < 0$), escribimos

$$\frac{x_A}{2\pi r_1} = -\frac{\theta}{2\pi} \qquad x_A = -r_1\theta$$

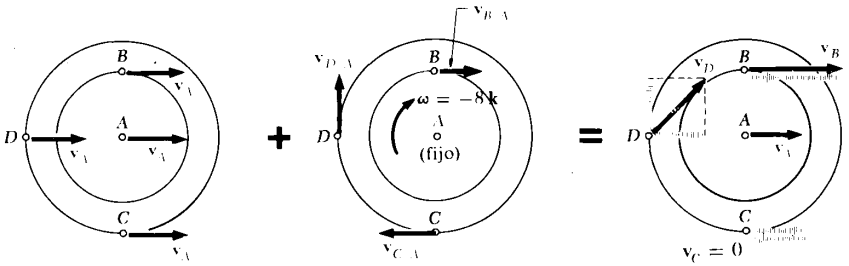
Derivando respecto al tiempo t y sustituyendo los valores conocidos $v_A = 1.2$ m/s y $r_1 = 150$ mm = 0.150 m, obtenemos

$$v_A = -r_1\omega \qquad 1.2 \text{ m/s} = -(0.150 \text{ m})\omega \qquad \omega = -8 \text{ rad/s}$$

$$\dot{\omega} = \omega\mathbf{k} = -(8 \text{ rad/s})\mathbf{k} \blacktriangleleft$$

donde $\mathbf{k}$ es un vector unitario que apunta hacia afuera del papel.

b) **Velocidades.** El movimiento de rodadura se descompone en dos componentes: una traslación con el centro A y una rotación con respecto al centro A. En la traslación todos los puntos del engranaje se mueven con la misma velocidad $\mathbf{v}_A$. En la rotación cada punto P del engranaje se mueve con respecto a A con una velocidad relativa $\mathbf{v}_{P/A} = \omega\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{P/A}$, donde $\mathbf{r}_{P/A}$ es el vector de posición de P relativo a A.

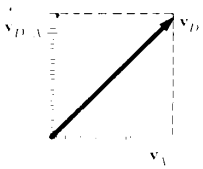


Traslación + Rotación = Rodadura

Velocidad de la cremallera superior. La velocidad de la cremallera superior es igual a la velocidad del punto B; escribimos

$$\mathbf{v}_R = \mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} = \mathbf{v}_A + \omega\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{B/A}$$
$$= (1.2 \text{ m/s})\mathbf{i} - (8 \text{ rad/s})\mathbf{k} \times (0.100 \text{ m})\mathbf{j}$$
$$= (1.2 \text{ m/s})\mathbf{i} + (0.8 \text{ m/s})\mathbf{i} = (2 \text{ m/s})\mathbf{i}$$

$$\mathbf{v}_R = 2 \text{ m/s} \rightarrow \blacktriangleleft$$

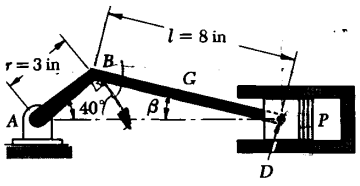


Velocidad del punto D:

$$\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{D/A} = \mathbf{v}_A + \omega\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{D/A}$$
$$= (1.2 \text{ m/s})\mathbf{i} - (8 \text{ rad/s})\mathbf{k} \times (-0.150 \text{ m})\mathbf{i}$$
$$= (1.2 \text{ m/s})\mathbf{i} + (1.2 \text{ m/s})\mathbf{j}$$

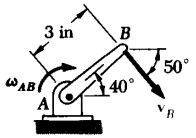
$$\mathbf{v}_D = 1.697 \text{ m/s} \measuredangle 45° \blacktriangleleft$$

PROBLEMA RESUELTO 15.3



En el sistema mecánico mostrado, la manivela AB tiene una velocidad angular constante en el sentido de movimiento de las manecillas del reloj de 2 000 rpm. Para la posición de la manivela indicada, determinense: *a*) la velocidad angular de la biela BD, y *b*) la velocidad del émbolo P.

Movimiento de la manivela AB. La manivela AB gira con respecto al punto A. Expresando ω_{AB} en rad/s y escribiendo $v_B = r\omega_{AB}$, obtenemos



$$\omega_{AB} = \left(2000\,\frac{\text{rev}}{\text{min}}\right)\left(\frac{1\text{ min}}{60\text{ s}}\right)\left(\frac{2\pi\text{ rad}}{1\text{ rev}}\right) = 209\text{ rad/s}$$

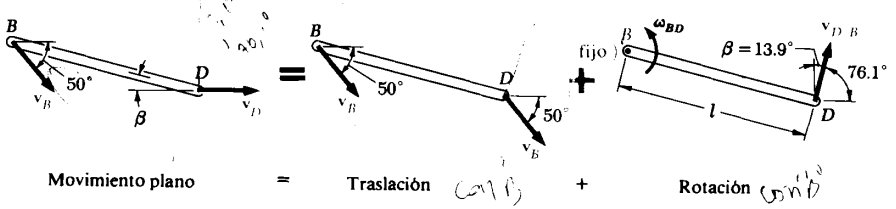
$$v_B = (AB)\omega_{AB} = (3\text{ in})(209\text{ rad/s}) = 627\text{ in /s}$$

$$\mathbf{v}_B = 627\text{ in /s} \measuredangle 50°$$

Movimiento de la biela BD. Consideramos este movimiento como un movimiento plano. Aplicando el teorema de los senos, calculamos el ángulo β entre la biela y la horizontal:

$$\frac{\text{sen } 40°}{8\text{ in}} = \frac{\text{sen } \beta}{3\text{ in}} \qquad \beta = 13.9°$$

La velocidad $\mathbf{v}_D$ del punto D donde la biela está unida al émbolo debe ser horizontal, mientras que la velocidad del punto B es igual a la velocidad $\mathbf{v}_B$ obtenida arriba. Descomponiendo el movimiento de BD en una traslación con B y una rotación con respecto a B, obtenemos

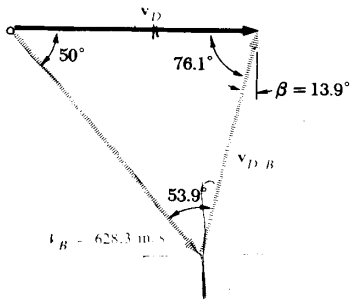


Movimiento plano = Traslación + Rotación

Expresando la relación entre las velocidades $\mathbf{v}_D$, $\mathbf{v}_B$ y $\mathbf{v}_{D/B}$, escribimos

$$\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{D/B}$$

Trazamos el diagrama vectorial correspondiente a esta ecuación. Recordando que $\beta = 13.9°$ determinamos los ángulos del triángulo y escribimos



$$\frac{v_D}{\text{sen } 53.9°} = \frac{v_{D/B}}{\text{sen } 50°} = \frac{627\text{ in /s}}{\text{sen } 76.1°}$$

$$v_{D/B} = 495\text{ in /s} \qquad \mathbf{v}_{D/B} = 495\text{ in /s} \measuredangle 76.1°$$

$$v_D = 522\text{ in /s} = 43.5\text{ ft/s} \qquad \mathbf{v}_D = 43.5\text{ ft/s} \rightarrow$$

$V_P = V_D = 43.16$ ft/s → ◄

Como $v_{D/B} = l\omega_{BD}$, tenemos

$$495\text{ in /s} = (8\text{ in})\omega_{BD} \qquad \omega_{BD} = 62.0\text{ rad/s} \text{ (↑)} \quad ◄$$

Problemas

15.31 Un automóvil viaja a la derecha con una velocidad constante de 90 km/h. Si el diámetro de una rueda es 550 mm, determínense las velocidades de los puntos *B*, *C*, *D* y *E* del borde de la rueda.

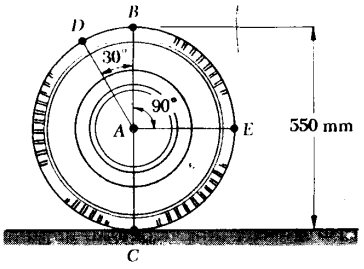


Fig. P15.31

15.32 El collarín *B* se mueve hacia arriba con una velocidad constante de 5 ft/s. En el instante en que $\theta = 50°$, determínense *a*) la velocidad angular de la barra *AB* y *b*) la velocidad del extremo *A* de la barra.

15.33 Resuélvase el problema 15.32 suponiendo que $\theta = 30°$.

15.34 El collarín *A* se mueve con velocidad constante de 900 mm/s hacia la derecha. En el instante cuando $\theta = 30°$, determínense *a*) la velocidad angular de la barra *AB* y *b*) la velocidad del collarín *B*.

15.35 La placa mostrada se mueve en el plano *xy*. Si $(v_A)_x = 250$ mm/s, $(v_B)_y = -450$ mm/s y $(v_C)_x = -500$ mm/s, determínense *a*) la velocidad angular de la placa y *b*) la velocidad del punto *A*.

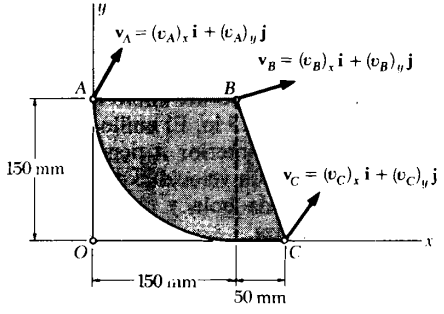


Fig. P15.35

15.36 La placa que se muestra se mueve en el plano *xy*. Si $(v_A)_x = 12$ in/s, $(v_B)_x = -4$ in/s y $(v_C)_y = -24$ in/s, determínense *a*) la velocidad angular de la placa y *b*) la velocidad del punto *B*.

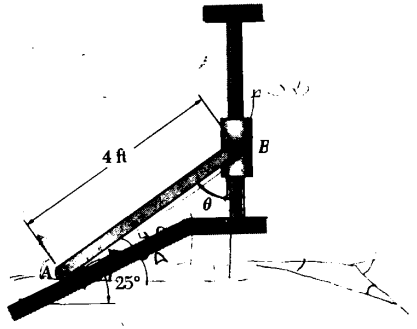


Fig. P15.32

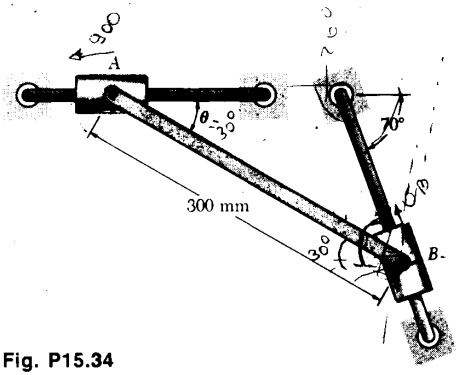


Fig. P15.34

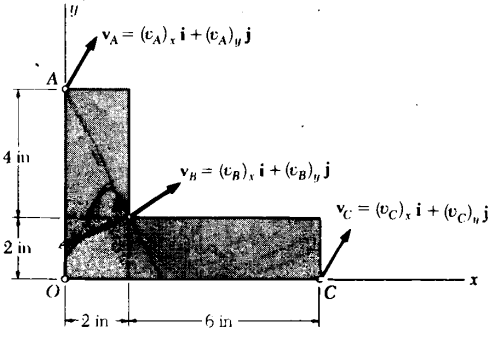


Fig. P15.36

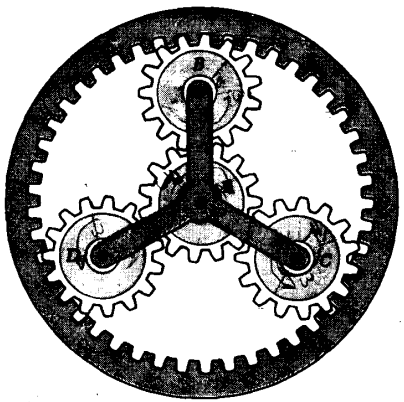


Fig. P15.39 y P15.40

15.37 En el problema 15.36, determínense *a*) la velocidad del punto *A* y *b*) el punto de la placa con velocidad nula.

15.38 En el problema 15.35 determínense *a*) la velocidad del punto *B* y *b*) el punto de la placa con velocidad nula.

15.39 En el sistema de engranaje móvil aquí mostrado, el radio de los engranajes *A*, *B*, *C* y *D* es *a* y el radio del engranaje exterior *E* es 3*a*. Sabiendo que la velocidad angular del engranaje *A* es ω_A en el sentido de las manecillas del reloj y que el engranaje exterior *E* permacene fijo, determínense *a*) la velocidad angular de cada engranaje móvil y *b*) la velocidad angular de la pieza (estrella) que conecta los engranajes móviles.

15.40 En el sistema de engranaje móvil que aquí se muestra el radio de los engranajes *A*, *B*, *C* y *D* es de 30 mm y el radio del engranaje exterior *E* es de 90 mm. Si el engranaje *E* tiene una velocidad angular de 180 rpm en el sentido de las manecillas del reloj y el engranaje central *A* tiene una velocidad angular de 240 rpm en el mismo sentido, determínense *a*) la velocidad angular de cada engranaje móvil y *b*) la velocidad angular de la pieza que los conecta.

15.41 El engranaje *A* gira en el sentido de las manecillas del reloj a una velocidad angular constante de 60 rpm. Determínese la velocidad angular del engranaje *B* si la velocidad angular del brazo *AB* es *a*) 40 rpm contraria al movimiento de las manecillas del reloj y *b*) 40 rpm en el sentido de las manecillas del reloj.

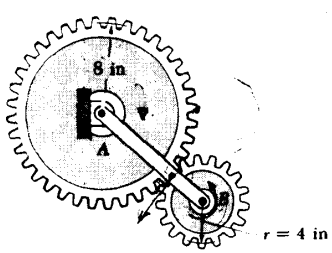


Fig. P15.41

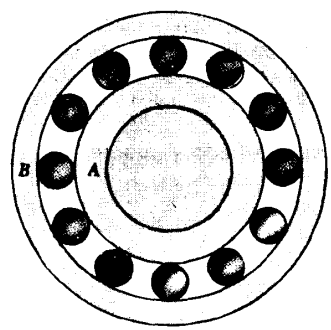


Fig. P15.42

15.42 En el dibujo simplificado de un rodamiento de bolas que aquí se muestra, el diámetro del anillo interior es de 2.5 in y el diámetro de cada bola es de 0.5 in. El anillo exterior *B* está estacionario, mientras que el anillo interior *A* tiene una velocidad angular de 3600 rpm. Determínese *a*) la velocidad del centro de cada bola, *b*) la velocidad angular de cada bola y *c*) el número de vueltas por minuto que cada bola realiza.

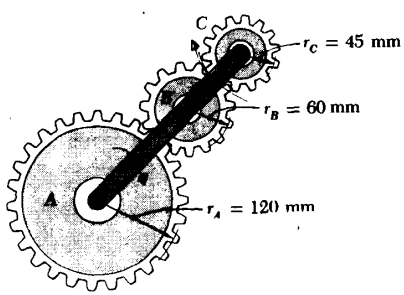


Fig. P15.43 y P15.44

15.43 Los tres engranajes *A*, *B* y *C* están unidos por un pasador en su centro a la barra *ABC*. Si el engranaje *A* no gira; determínese la velocidad angular de los engranajes *B* y *C* cuando la barra *ABC* gira en el sentido de las manecillas del reloj con una velocidad angular constante de 75 rpm.

15.44 Los tres engranajes *A*, *B* y *C* están unidos por pasadores en sus centros a la barra *ABC*. Sabiendo que el engranaje *C* no gira,

determínese la velocidad angular de los engranajes A y B cuando la biela ABC gira en el sentido de las manecillas del reloj con una velocidad angular constante de 80 rpm.

15.45 El disco que se muestra tiene una velocidad angular constante de 500 rpm en sentido contrario a las manecillas del reloj. Si la barra BD tiene una longitud de 250 mm, determínense la velocidad angular de la barra BD y la velocidad del collarín D cuando *a*) $\theta = 0$ y *b*) $\theta = 90°$.

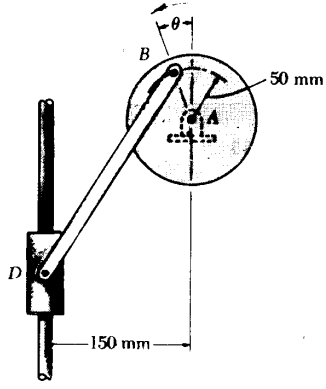


Fig. P15.45

15.46 En el sistema mecánico aquí mostrado $l = 8$ in y $b = 3$ in; la manivela AB gira con una velocidad constante de 2000 rpm en el sentido de las manecillas del reloj. Determínense la velocidad del émbolo P y la velocidad angular de la biela para la posición correspondiente a *a*) $\theta = 0$, *b*) $\theta = 90°$ y *c*) $\theta = 180°$.

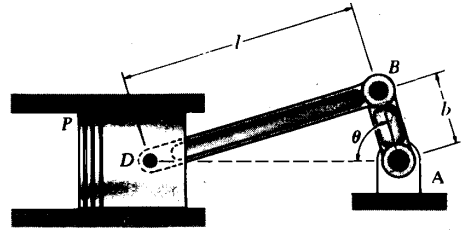


Fig. P15.46

15.47 Resuélvase el problema 15.46 para la posición correspondiente a $\theta = 30°$.

15.48 Resuélvase el problema 15.45 para la posición correspondiente a $\theta = 60°$.

15.49 al 15.52 En la posición mostrada la barra AB tiene una velocidad angular constante de 3 rad/s en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj. Determínese la velocidad angular de las barras BD y DE.

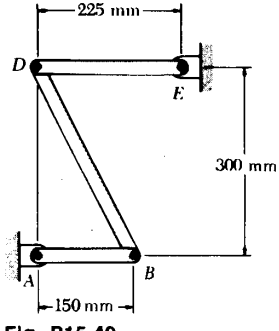


Fig. P15.49

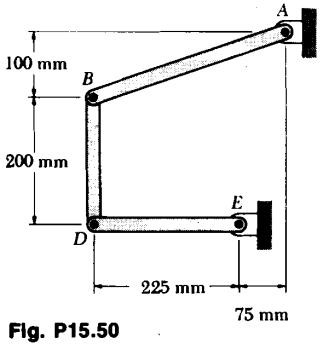


Fig. P15.50

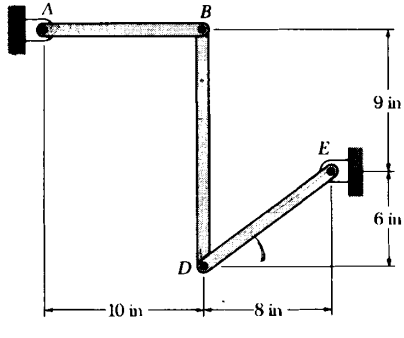


Fig. P15.51

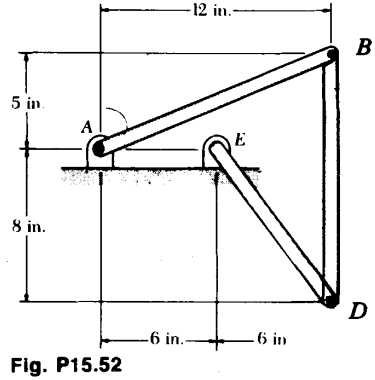


Fig. P15.52

15.53 La rueda con reborde mostrada en la figura se desplaza a la derecha con una velocidad constante de 1.5 m/s. Si la barra AB tiene 0.9 m de longitud, determínense la velocidad de A y la velocidad angular de la barra cuando *a*) $\beta = 0$, y *b*) $\beta = 90°$.

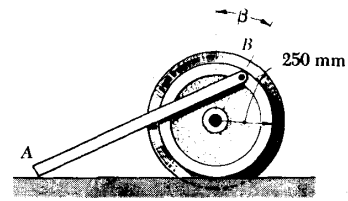


Fig. P15.53

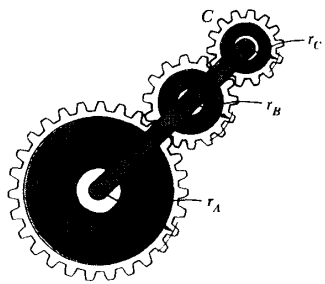


Fig. P15.55

15.54 Resuélvase el problema 15.53 suponiendo que $\beta = 30°$.

*15.55 Para el sistema de engranajes mostrado, dedúzcase una expresión para la velocidad angular ω_C del engranaje C y demuéstrese que ω_C es independiente del radio del engranaje B. Supóngase que el punto A está fijo y represéntense las velocidades angulares de la barra ABC y del engranaje A por ω_{ABC} y ω_A, respectivamente.

15.7. Centro instantáneo de rotación en el movimiento plano. Considérese el movimiento plano de una sección. Demostraremos que en cualquier instante las velocidades de las distintas partículas de la sección son las mismas que las que tendrían si la sección estuviese girando con respecto a cierto eje perpendicular a su plano, llamado *eje instantáneo de rotación*. Este eje corta el plano de la sección en el punto C llamado *centro instantáneo de rotación* de la sección.

Para probar nuestro enunciado anterior, recordemos primero que el movimiento plano de una sección puede sustituirse siempre por una traslación, definida por el movimiento de un punto de referencia arbitrario A, y por una rotación con respecto a A. Por lo que a la velocidad respecta, la traslación está caracterizada por una velocidad $\mathbf{v}_A$ del punto de referencia A y la rotación está caracterizada por la velocidad angular ω de la sección (que es independiente de la elección de A). Entonces, la velocidad $\mathbf{v}_A$ del punto A y la velocidad angular ω de la sección definen completamente las velocidades de todas las otras partículas de la sección (Fig. 15.18*a*). Supongamos ahora que $\mathbf{v}_A$ y ω se conocen y que ambas son diferentes de cero. (Si $\mathbf{v}_A = 0$ el punto A es él mismo el centro instantáneo de rotación y si $\omega = 0$ todas las partículas tienen la misma velocidad $\mathbf{v}_A$.) Estas velocidades pueden obtenerse permitiendo que la sección gire con

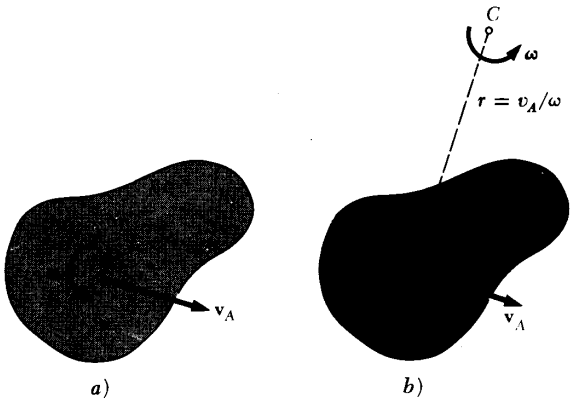


Fig. 15.18

velocidad angular ω, con respecto al punto C situado sobre la perpendicular a $\mathbf{v}_A$ a la distancia $r = v_A/\omega$ desde A, como se muestra en la figura 15.18*b*. Comprobamos que la velocidad de A será perpendicular a AC y que su módulo será $r\omega = (v_A/\omega)\omega = v_A$. De manera que las velocidades de todas las otras partículas de la sección serán las mismas que se definieron originalmente. Así, *por lo que respecta a las velocidades, la sección parece girar con respecto a su centro instantáneo C* en el instante considerado.

La posición del centro instantáneo puede definirse en otras dos formas. Si las direcciones de las velocidades de dos partículas A y B de la sección se conocen y son diferentes, el centro instantáneo C se obtiene trazando la perpendicular a $\mathbf{v}_A$ que pasa por A, y la perpendicular a $\mathbf{v}_B$ que pasa por B, y determinando el punto en el cual estas dos líneas se cortan (Fig. 15.19*a*). Si las velocidades $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$ de las dos partículas A y B son perpendiculares a la línea AB y si sus módulos se conocen, el centro instantáneo puede encontrarse cortando la línea AB con la línea que une los extremos de los vectores $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$ (Fig. 15.19*b*). Nótese que si $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$ fuesen paralelas en la figura 15.19*a*, o si $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$ tuviera el mismo módulo en la figura 15.19*b*, el centro instantáneo C estaría a una distancia infinita y ω sería cero; todos los puntos de la sección tendrían la misma velocidad.

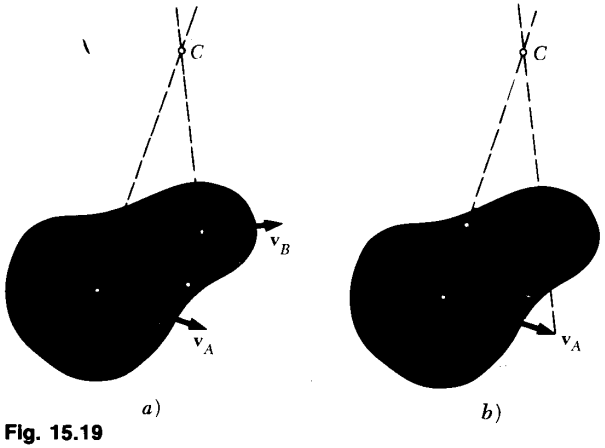


Fig. 15.19

Para ver cómo puede aplicarse el concepto de centro instantáneo de rotación, consideremos nuevamente la barra de la sección 15.6. Trazando la perpendicular a $\mathbf{v}_A$ que pasa por A y la perpendicular a $\mathbf{v}_A$ que pasa por B (Fig. 15.20), obtenemos el centro instantáneo C. En el instante considerado las velocidades de todas las partículas de la

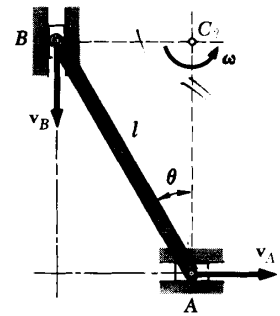


Fig. 15.20

barra son entonces las mismas que la barra tendría si girara con respecto a C. Ahora, si el módulo v_A de la velocidad de A se conoce, el módulo ω de la velocidad angular de la barra puede obtenerse escribiendo

$$\omega = \frac{v_A}{AC} = \frac{v_A}{l \cos \theta}$$

El módulo de la velocidad de B puede obtenerse entonces escribiendo

$$v_B = (BC)\omega = l \operatorname{sen} \theta \frac{v_A}{l \cos \theta} = v_A \tan \theta$$

Nótese entonces que sólo intervienen en el cálculo velocidades *absolutas*.

El centro instantáneo de la sección en movimiento plano puede localizarse dentro o fuera de la sección. Si se localiza sobre la sección, la partícula C que coincide con el centro instantáneo en un instante dado t debe tener velocidad nula en ese instante. Sin embargo, debe notarse que el centro instantáneo de rotación es válido sólo en un instante dado, así que la partícula C de la sección que coincide con el centro instantáneo en el tiempo t no coincidirá generalmente con el centro instantáneo en el tiempo $t + \Delta t$; mientras su velocidad es nula en el tiempo t, generalmente no lo será en el tiempo $t + \Delta t$. Esto significa que, en general, la partícula C *no tiene aceleración nula* y por consiguiente que la *aceleración* de las distintas partículas de la sección *no puede* determinarse como si la sección estuviese girando con respecto a C.

Conforme el movimiento de la sección continúa, el centro instantáneo se mueve en el espacio. Pero se acaba de establecer que la posición del centro instantáneo de la sección permanece cambiada. Así que el centro instantáneo describe una curva en el espacio, llamada *base*, y otra curva sobre la sección, llamada *ruleta* (Fig. 15.21). Puede demostrarse que en cualquier instante estas dos curvas son tangentes a C y que conforme la sección se mueve la ruleta parece *rodar* sobre la base.

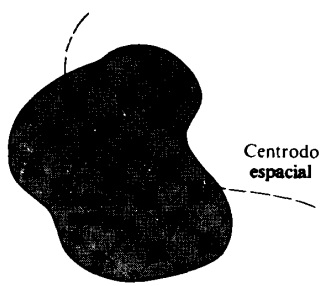
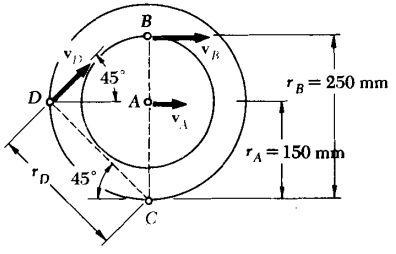


Fig. 15.21

PROBLEMA RESUELTO 15.4

Resuélvase el problema 15.2 utilizando el método del centro instantáneo de rotación.



a) **Velocidad angular del engranaje.** Como el engranaje rueda sobre la cremallera inferior fija, el punto de contacto C del engranaje con la cremallera no tiene velocidad; el punto C es por consiguiente el centro instantáneo de rotación. Escribimos

$$v_A = r_A\omega \qquad 1.2 \text{ m/s} = (0.150 \text{ m})\omega \qquad \omega = 8 \text{ rad/s} \circlearrowleft$$

b) **Las velocidades.** Todos los puntos del engranaje parecen girar con respecto al centro instantáneo por lo que a las velocidades respecta.

Velocidades de la cremallera superior. Recordando que $v_R = v_B$, escribimos

$$v_R = v_B = r_B\omega \qquad v_R = (0.250 \text{ m})(8 \text{ rad/s}) = 2 \text{ m/s}$$

$$v_R = 2 \text{ m/s} \rightarrow$$

Velocidad del punto D. Como $r_D = (0.150 \text{ m})\sqrt{2} = 0.2121$ m, escribimos

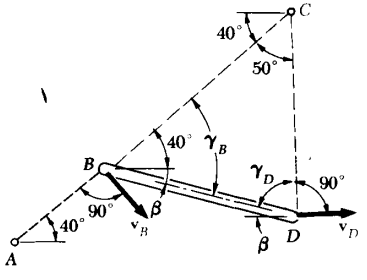
$$v_D = r_D\omega \qquad v_D = (0.2121 \text{ m})(8 \text{ rad/s}) = 1.697 \text{ m/s}$$

$$v_D = 1.697 \text{ m/s} \measuredangle 45°$$

PROBLEMA RESUELTO 15.5

Resuélvase el problema resuelto 15.3, empleando el método del centro instantáneo de rotación.

Movimiento de la manivela *AB*. Con referencia al problema resuelto 15.3 obtenemos la velocidad del punto B: $v_B = 627$ in/s $\measuredangle 50°$.



Movimiento de la biela *BD*. Localizamos primero al centro instantáneo C trazando las líneas perpendiculares a las velocidades v_B y v_D. Recordando del problema resuelto 15.3 que $\beta = 13.9°$ y que $BD = 8$ in, resolvemos el triángulo BCD.

$$\gamma_B = 40° + \beta = 53.9° \qquad \gamma_D = 90° - \beta = 76.1°$$

$$\frac{BC}{\text{sen } 76.1°} = \frac{CD}{\text{sen } 53.9°} = \frac{8 \text{ in}}{\text{sen } 50°}$$

$$BC = 10.14 \text{ in} \qquad CD = 8.44 \text{ in}$$

Como la biela BD parece girar alrededor del punto C escribimos

$$v_B = (BC)\omega_{BD}$$

$$627 \text{ in/s} = (10.14 \text{ in})\omega_{BD}$$

$$\omega_{BD} = 61.9 \text{ rad/s} \circlearrowleft$$

$$v_D = (CD)\omega_{BD} = (8.44 \text{ in})(61.9 \text{ rad/s})$$

$$= 522 \text{ in/s} = 43.5 \text{ ft/s}$$

$$v_P = v_D = 43.5 \text{ ft/s} \rightarrow$$

Problemas

15.56 Un helicóptero se mueve horizontalmente en la dirección x a una velocidad de 120 mi/h. Sabiendo que la hélice principal gira en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj a una velocidad de 180 rpm, determínese el eje instantáneo de rotación de la hélice principal.

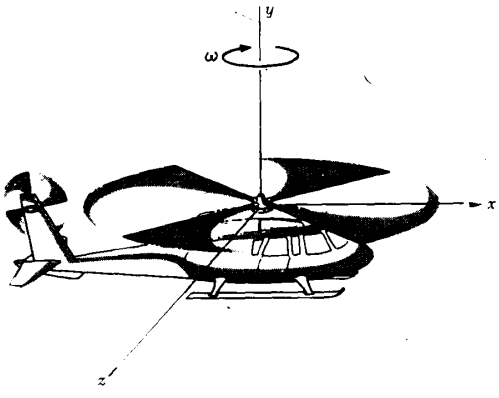


Fig. P15.56

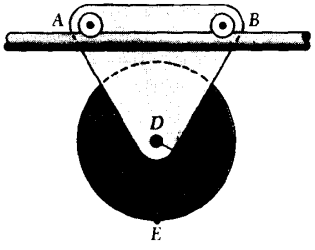


Fig. P15.57

15.57 La carretilla mostrada en la figura se mueve hacia la izquierda sobre un soporte tubular horizontal a una velocidad de 15 in/s. Si el disco de radio 4 in tiene una velocidad angular de 6 rad/s en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, determínense *a*) el centro instantáneo de rotación del disco y *b*) la velocidad del punto E.

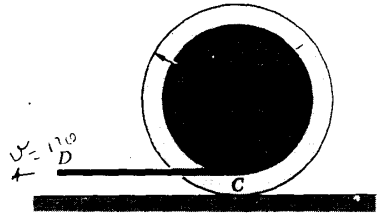


Fig. P15.58

15.58 Un tambor de radio 80 mm está montado sobre un cilindro de 100 mm de radio. Una cuerda está enrollada en el tambor y en su extremo D se tira hacia la izquierda a una velocidad constante de 120 mm/s, haciendo que el cilindro ruede sin deslizar. Determínense *a*) la velocidad angular del cilindro, *b*) la velocidad del centro del cilindro y *c*) la longitud que se enrolla o desenrolla por segundo.

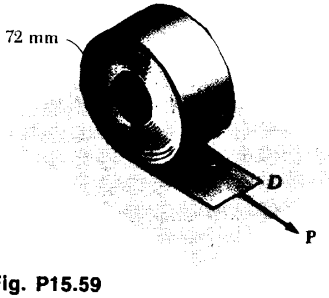


Fig. P15.59

15.59 Un rollo de papel descansa sobre una superficie horizontal como se indica. Se tira del extremo D del papel a la derecha con una velocidad constante de 195 mm/s y se observa que el centro A del rollo se mueve a la derecha con una velocidad constante de 75 mm/s. Determínense *a*) el eje instantáneo de rotación del rollo de papel, *b*) la velocidad del punto B y *c*) el número de milímetros de papel desenrollados por segundo.

15.60 Si en el instante mostrado la velocidad angular de la barra *BE* es de 4 rad/s en sentido contrario al de las manecillas del reloj, determínense *a*) la velocidad angular de la barra *AD*, *b*) la velocidad del collarín *D* y *c*) la velocidad del punto *A*.

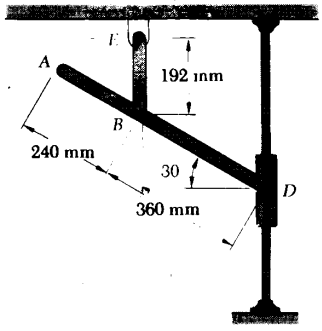


Fig. P15.60 y P15.61

15.61 Sabiendo que en el instante mostrado la velocidad del collarín *D* es de 1.6 m/s hacia arriba, determínense *a*) la velocidad angular de la barra *AD*, *b*) la velocidad del punto *B* y *c*) la velocidad del punto *A*.

15.62 Si en el instante aquí mostrado la velocidad del collarín *D* es de 4.8 in/s hacia la izquierda, determínense *a*) el centro instantáneo de rotación de la barra *BE*, *b*) la velocidad angular de la manivela *AB* y de la barra *BE* y *c*) la velocidad del punto *E*.

15.63 Sabiendo que en el instante mostrado la velocidad angular de la manivela *AB* es de 4.5 rad/s en el sentido de las manecillas del reloj, determínense *a*) la velocidad angular de la barra *BE*, *b*) la velocidad del collarín *D* y *c*) la velocidad del punto *E*.

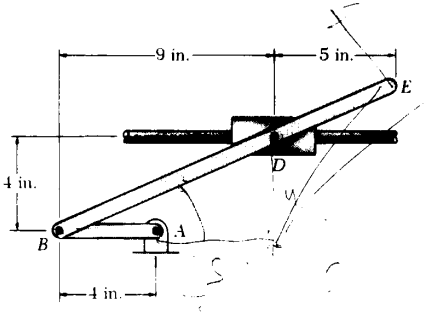


Fig. P15.62 y P15.63

15.64 La barra *BDE* está parcialmente guiada por una rueda en *D* que desliza en una vía vertical. Si en el instante mostrado en la figura la velocidad angular de la manivela *AB* es de 5 rad/s en el sentido de las manecillas del reloj y $\beta = 25°$, determínense *a*) la velocidad angular de la barra y *b*) la velocidad del punto *E*.

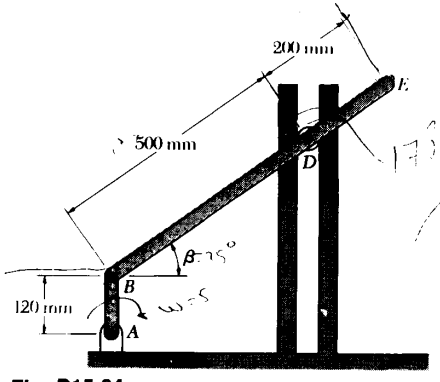


Fig. P15.64

15.65 Resuélvase el problema 15.64 suponiendo que $\beta = 40°$.

15.66 Dos barras *AB* y *BD*, cada una de 500 mm de longitud, están articulados en *B* y dirigidos por cilindros en *A* y *D*.

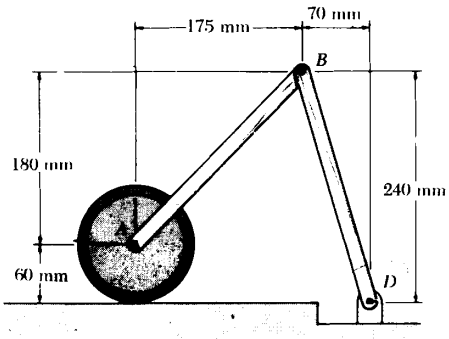


Fig. P15.67

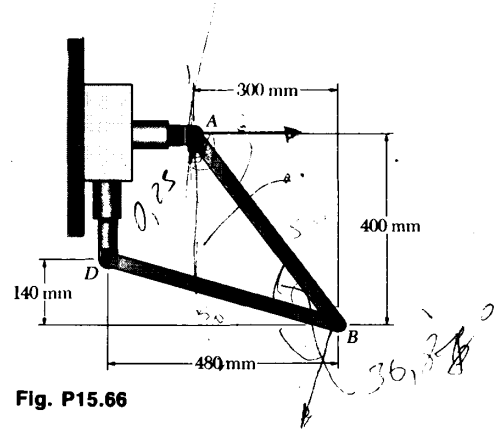


Fig. P15.66

Sabiendo que el extremo D no se mueve y que la velocidad de A es de 750 mm/s hacia la derecha, determínense en el instante mostrado *a*) la velocidad angular de cada barra y *b*) la velocidad de B.

15.67 Una rueda de 60 mm de radio se conecta a un soporte fijo D por medio de las dos barras AB y BD. En el instante indicado, la velocidad del centro A de la rueda es de 300 mm/s a la izquierda; determínense *a*) la velocidad angular de cada barra y *b*) la velocidad del pasador B.

15.68 La placa FG se ha colocado de manera que las ranuras se adapten a dos pasadores fijos A y B. Sabiendo que en el instante mostrado la velocidad angular de la manivela DE es de 6 rad/s en el sentido de las manecillas del reloj, determínense *a*) la velocidad del punto F y *b*) la velocidad del punto G.

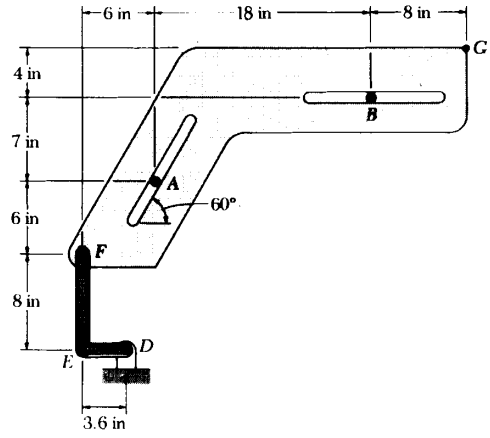


Fig. P15.68

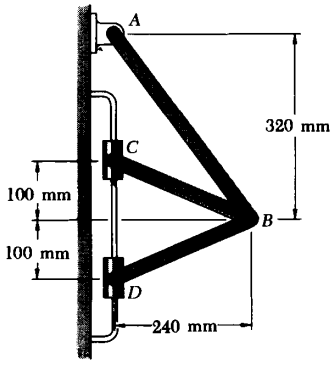


Fig. P15.70

15.69 En el problema 15.68 determínese la velocidad del punto de la placa que está en contacto con *a*) el pasador A y *b*) el pasador B.

15.70 Dos collarines, C y D, se mueven a lo largo de la barra vertical que aquí se muestra. Si se sabe que la velocidad del collarín C es de 660 mm/s hacia abajo, determínense *a*) la velocidad del collarín D y *b*) la velocidad angular del elemento AB.

15.71 Dos barras AB y BD cada una de 30 in de longitud, se conectan a tres collarines. En el instante aquí mostrado $\beta = 55°$, y la velocidad del collarín A es de 90 in/s a la derecha. Determínense *a*) el valor correspondiente de γ y *b*) la velocidad del collarín D.

15.72 y 15.73 Dos barras de 500 mm están conectadas por medio de un pasador D como se muestra en la figura. Si B se mueve a la izquierda con una velocidad constante de 360 mm/s, determínense en el instante mostrado *a*) la velocidad angular de cada barra y *b*) la velocidad de E.

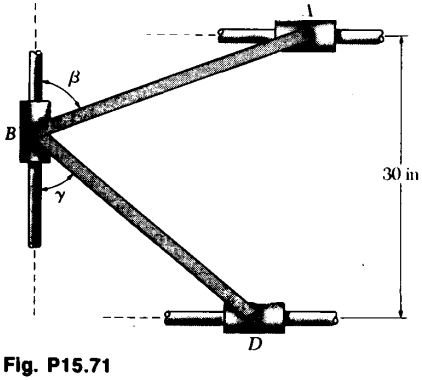


Fig. P15.71

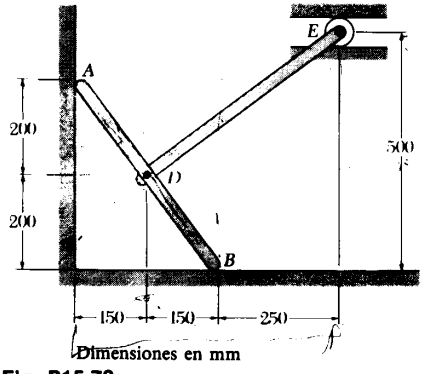


Fig. P15.72

15.74 Determinar la base y la ruleta de la barra AB del problema 15.71 conforme el collarín B se mueve hacia arriba.

(*Nota.* La ruleta no queda necesariamente sobre una porción física de la barra.)

15.75 Determinar la base y la ruleta del problema 15.58 conforme el tambor rueda sobre la superficie horizontal.

15.76 Empleando el método de la sección 15.7 resuélvase el problema 15.50.

15.77 Utilizando el método de la sección 15.7 resuélvase el problema 15.51.

15.78 Resuélvase el problema 15.52 por el método de la sección 15.7.

15.79 Resuélvase el problema 15.53 usando el método de la sección 15.7.

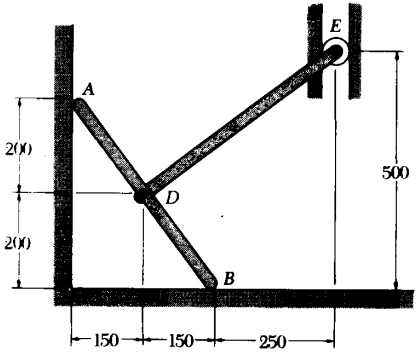


Fig. P15.73

15.8. Aceleración absoluta y relativa en el movimiento plano. Vimos en la sección 15.5 que cualquier movimiento plano puede sustituirse por una traslación definida por el movimiento de un punto de referencia arbitrario A y una rotación simultánea con respecto a A. Esta propiedad se empleó en la sección 15.6 para determinar la velocidad de distintos puntos de una sección en movimiento. Ahora la emplearemos para determinar la aceleración de los puntos de la sección.

Recordemos primero que la aceleración absoluta $\mathbf{a}_B$ de una partícula de la sección puede obtenerse de la fórmula de aceleración relativa derivada en la sección 11.12,



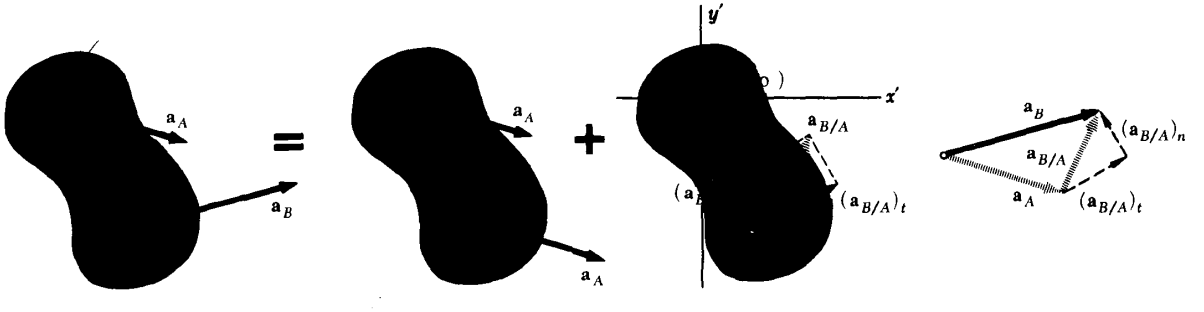
(15.21)

donde el segundo miembro representa una suma vectorial. La aceleración $\mathbf{a}_A$ corresponde a la traslación de la sección con A, mientras que la aceleración relativa $\mathbf{a}_{B/A}$ está asociada con la rotación de la placa alrededor de A y se mide con respecto a ejes con origen en A y de orientación fija. De la sección 15.3 recordamos que la aceleración relativa $\mathbf{a}_{B/A}$ puede descomponerse en dos componentes, una *componente tangencial* $(\mathbf{a}_{B/A})_t$ perpendicular a la línea AB y una *componente normal* $(\mathbf{a}_{B/A})_n$ dirigida hacia A (Fig. 15.22). Representando por $\mathbf{r}_{B/A}$ al vector de posición B relativa a A y por $\omega\mathbf{k}$ y $\alpha\mathbf{k}$, respectivamente, la velocidad angular y la aceleración angular de la sección con respecto a los ejes de orientación fija, tenemos

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}_{B/A})_t &= \alpha\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{B/A} & (a_{B/A})_t &= r\alpha \\ (\mathbf{a}_{B/A})_n &= -\omega^2\mathbf{r}_{B/A} & (a_{B/A})_n &= r\omega^2 \end{aligned} \tag{15.22}$$

donde r es la distancia de A a B. Sustituyendo en (15.21) las expresiones obtenidas para las componentes tangencial y normal de $\mathbf{a}_{B/A}$, podemos escribir también

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \alpha\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{B/A} - \omega^2\mathbf{r}_{B/A} \tag{15.21'}$$



Movimiento plano = Traslación con A + Rotación en A

Fig. 15.22

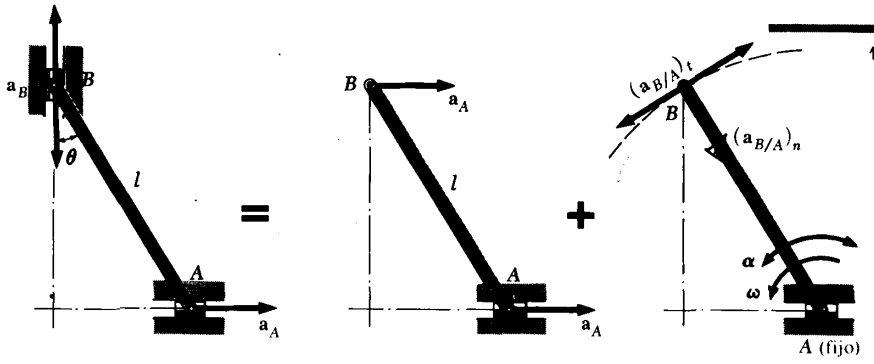


Fig. 15.23

Como ejemplo, consideraremos nuevamente la biela AB cuyos extremos deslizan a lo largo de una vía horizontal y una vía vertical, respectivamente (Fig. 15.23). Suponiendo que la velocidad $\mathbf{v}_A$ y la aceleración $\mathbf{a}_A$ de A se conocen, nos proponemos determinar la aceleración $\mathbf{a}_B$ de B y la aceleración angular α de la biela. Escogiendo A como un punto de referencia expresamos que el movimiento es equivalente a una traslación con A y a una rotación con respecto a A. La aceleración absoluta de B debe ser igual a la suma

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_B &= \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A} \\ &= \mathbf{a}_A + (\mathbf{a}_{B/A})_n + (\mathbf{a}_{B/A})_t \end{aligned} \tag{15.23}$$

donde $(\mathbf{a}_{B/A})_n$ tiene el módulo $l\omega^2$ y está *dirigida hacia A*, mientras que $(\mathbf{a}_{B/A})_t$ tiene el módulo $l\alpha$ y es perpendicular a AB. No hay manera de decir en este momento si la componente tangencial $(\mathbf{a}_{B/A})_t$ se dirige a la izquierda o a la derecha y los estudiantes no deben confiar en su intuición en este asunto. Por consiguiente indicaremos ambos sentidos posibles para esta componente en la figura 15.23. En forma semejante indicamos ambos sentidos posibles para $\mathbf{a}_B$ ya que no sabemos si el punto B tiene una aceleración hacia arriba o hacia abajo.

La ecuación (15.23) se ha expresado en forma geométrica en la figura 15.24. Dependiendo del sentido de $\mathbf{a}_A$ y del valor relativo de los módulos de a_A y $(a_{B/A})_n$ pueden obtenerse cuatro polígonos vectoriales diferentes. Si vamos a determinar a_B y α de uno de estos diagramas debemos conocer no sólo a_A y θ sino también ω. La velocidad angular de la biela debe por tanto determinarse independientemente por uno de los métodos indicados en las secciones 15.6 y 15.7. Los valores de a_B y α pueden obtenerse entonces considerando sucesivamente las componentes x e y de los vectores mostrados en la figura 15.24. Por ejemplo, en el caso del polígono a, escribimos

$$\begin{aligned} &\stackrel{+}{\rightarrow} x \text{ componentes en } x: && 0 = a_A + l\omega^2 \operatorname{sen}\theta - l\alpha\cos\theta \\ &+\uparrow y \text{ componentes en } y: && -a_B = -l\omega^2\cos\theta - l\alpha\operatorname{sen}\theta \end{aligned}$$

y resolvemos para a_B y α. Las dos incógnitas pueden obtenerse también por mediciones directas sobre el polígono vectorial. En este caso debe tenerse cuidado de trazar primero los vectores conocidos $\mathbf{a}_A$ y $(\mathbf{a}_{B/A})_n$.

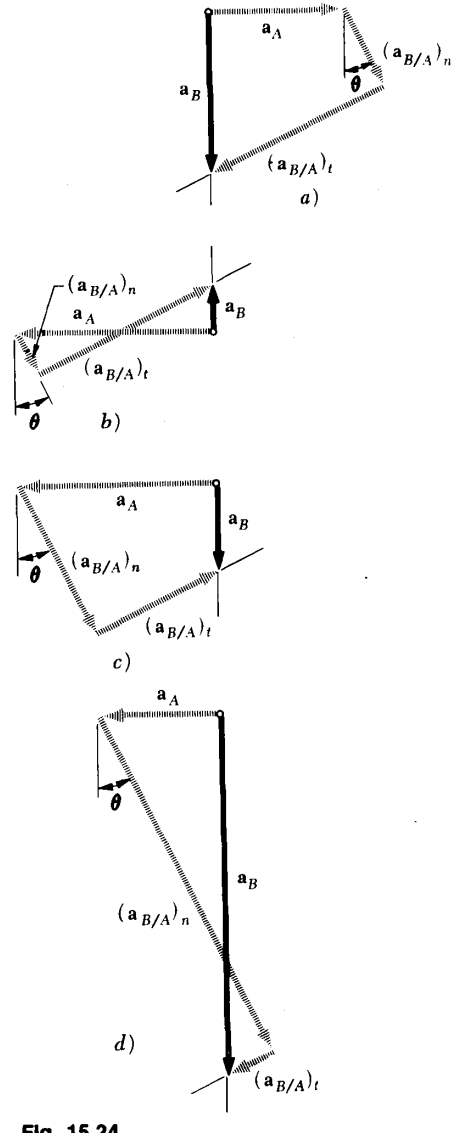


Fig. 15.24

Es evidente que la determinación de las aceleraciones es mucho más complicada que la determinación de las velocidades. Como en el ejemplo aquí considerado los extremos A y B de la barra se movían sobre guías rectas, los diagramas que trazamos fueron relativamente simples. Si A y B se hubieran movido sobre guías curvas, las aceleraciones $\mathbf{a}_A$ y $\mathbf{a}_B$ deberían haberse descompuesto en sus componentes normal y tangencial y la solución del problema habría requerido seis vectores diferentes.

Cuando un mecanismo consta de varias partes rígidas en movimiento conectadas por pasadores, su análisis puede realizarse considerando cada parte como un sólido rígido y teniendo presente que los puntos donde se conectan dos partes deben tener la misma aceleración absoluta (véase problema resuelto 15.7). En el caso de engranajes dentados, las componentes tangenciales de las aceleraciones de los dientes en contacto son iguales, pero sus componentes normales son diferentes.

***15.9. Análisis del movimiento plano mediante un parámetro.** En el caso de ciertos mecanismos es posible expresar las coordenadas x e y de todos los puntos significativos de un mecanismo por medio de expresiones analíticas simples que contienen un solo parámetro. Puede ser ventajoso en tal caso determinar directamente la velocidad absoluta y la aceleración absoluta de distintos puntos del mecanismo, ya que las componentes de la velocidad y de la aceleración de un punto dado pueden obtenerse derivando las coordenadas x e y de ese punto.

Consideremos nuevamente la barra AB cuyos extremos se mueven sobre una guía horizontal y una guía vertical, respectivamente (Fig. 15.25). Las coordenadas x_A e y_B de los extremos de la barra pueden expresarse en función del ángulo θ que ésta forma con la vertical:

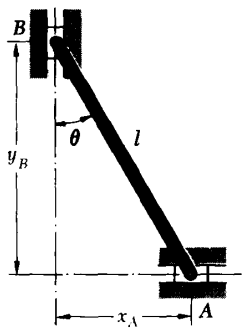


Fig. 15.25

$$x_A = l \operatorname{sen}\theta \qquad y_B = l\cos\theta \tag{15.24}$$

Derivando las ecuaciones (15.24) dos veces con respecto a t, escribimos

$$\begin{aligned} v_A &= \dot{x}_A = l\dot{\theta}\cos\theta \\ a_A &= \ddot{x}_A = -l\dot{\theta}^2 \operatorname{sen}\theta + l\ddot{\theta}\cos\theta \end{aligned}$$

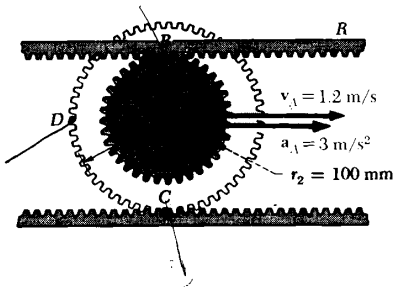
$$\begin{aligned} v_B &= \dot{y}_B = -l\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta \\ a_B &= \ddot{y}_B = -l\dot{\theta}^2\cos\theta - l\ddot{\theta}\operatorname{sen}\theta \end{aligned}$$

Si recordamos que $\theta = \omega$ y $\ddot{\theta} = \alpha$, obtenemos

$$v_A = l\omega\cos\theta \qquad v_B = -l\omega\operatorname{sen}\theta \tag{15.25}$$

$$a_A = -l\omega^2\operatorname{sen}\theta + l\alpha\cos\theta \qquad a_B = -l\omega^2\cos\theta - l\alpha\operatorname{sen}\theta \tag{15.26}$$

Notamos que un signo positivo para v_A o a_A indica que la velocidad $\mathbf{v}_A$ o la aceleración $\mathbf{a}_A$ se dirige a la derecha; un signo positivo para v_B o a_B indica que $\mathbf{v}_B$ o $\mathbf{a}_B$ se dirige hacia arriba. Las ecuaciones (15.25) pueden utilizarse, por ejemplo, para determinar v_B y ω cuando v_A y θ se conocen. Sustituyendo ω en (15.26) podemos determinar a_B y α si conocemos a_A.



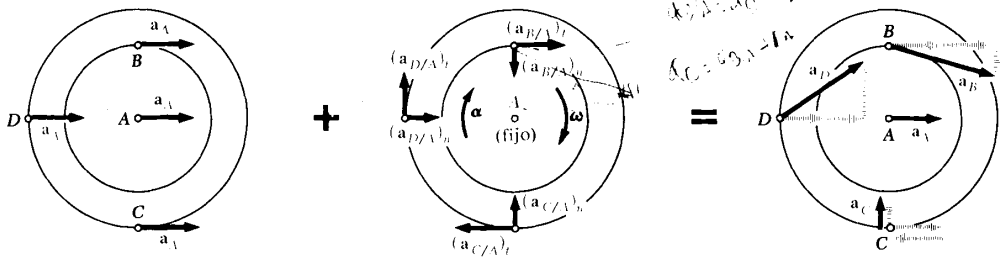
PROBLEMA RESUELTO 15.6

El centro del engranaje doble del problema resuelto 15.2 tiene una velocidad de 1.2 m/s a la derecha y una aceleración de 3 m/s² a la derecha. Recordando que la cremallera inferior no se mueve, determínense: *a*) la aceleración angular del engranaje, y *b*) la aceleración de los puntos *B*, *C* y *D* del engranaje.

a) **Aceleración angular del engranaje.** En el problema resuelto 15.2 encontramos que $x_A = -r_1\theta$ y $v_A = -r_1\omega$. Derivando la última con respecto al tiempo obtenemos $a_A = -r_1\alpha$.

$$v_A = -r_1\omega \qquad 1.2 \text{ m/s} = -(0.150 \text{ m})\omega \qquad \omega = -8 \text{ rad/s}$$
$$a_A = -r_1\alpha \qquad 3 \text{ m/s}^2 = -(0.150 \text{ m})\alpha \qquad \alpha = -20 \text{ rad/s}^2$$
$$\boldsymbol{\alpha} = \alpha\mathbf{k} = -(20 \text{ rad/s}^2)\mathbf{k} \blacktriangleleft$$

b) **Aceleraciones.** El movimiento de rodadura del engranaje se descompone en una traslación con *A* y una rotación con respecto a *A*.



Aceleración del punto B. Sumando vectorialmente las aceleraciones correspondientes a la traslación y a la rotación, obtenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_B &= \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A} = \mathbf{a}_A + (\mathbf{a}_{B/A})_t + (\mathbf{a}_{B/A})_n \\ &= \mathbf{a}_A + \alpha\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{B/A} - \omega^2\mathbf{r}_{B/A} \\ &= (3 \text{ m/s}^2)\mathbf{i} - (20 \text{ rad/s}^2)\mathbf{k} \times (0.100 \text{ m})\mathbf{j} - (8 \text{ rad/s})^2(0.100 \text{ m})\mathbf{j} \\ &= (3 \text{ m/s}^2)\mathbf{i} + (2 \text{ m/s}^2)\mathbf{i} - (6.40 \text{ m/s}^2)\mathbf{j}\end{aligned}$$
$$\mathbf{a}_B = 8.12 \text{ m/s}^2 \measuredangle 52.0° \blacktriangleleft$$

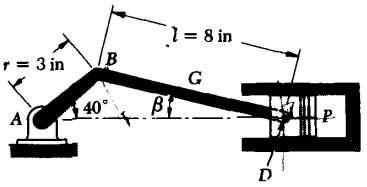
Aceleración del punto C

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_C &= \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{C/A} = \mathbf{a}_A + \alpha\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{C/A} - \omega^2\mathbf{r}_{C/A} \\ &= (3 \text{ m/s}^2)\mathbf{i} - (20 \text{ rad/s}^2)\mathbf{k} \times (-0.150 \text{ m})\mathbf{j} - (8 \text{ rad/s})^2(-0.150 \text{ m})\mathbf{j} \\ &= (3 \text{ m/s}^2)\mathbf{i} - (3 \text{ m/s}^2)\mathbf{i} + (9.60 \text{ m/s}^2)\mathbf{j}\end{aligned}$$
$$\mathbf{a}_C = 9.60 \text{ m/s}^2 \uparrow \blacktriangleleft$$

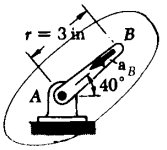
Aceleración del punto D

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_D &= \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{D/A} = \mathbf{a}_A + \alpha\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{D/A} - \omega^2\mathbf{r}_{D/A} \\ &= (3 \text{ m/s}^2)\mathbf{i} - (20 \text{ rad/s}^2)\mathbf{k} \times (-0.150 \text{ m})\mathbf{i} - (8 \text{ rad/s})^2(-0.150 \text{ m})\mathbf{i} \\ &= (3 \text{ m/s}^2)\mathbf{i} + (3 \text{ m/s}^2)\mathbf{j} + (9.60 \text{ m/s}^2)\mathbf{i}\end{aligned}$$
$$\mathbf{a}_D = 12.95 \text{ m/s}^2 \measuredangle 13.4° \blacktriangleleft$$

PROBLEMA RESUELTO 15.7



La manivela AB del sistema mecánico del problema resuelto 15.3 tiene una velocidad angular constante de 2 000 rpm en el sentido de movimiento de las manecillas del reloj. Para la posición de la manivela indicada en la figura determínese la aceleración angular de la barra BD y la aceleración del punto D.



Movimiento de la manivela *AB*. Como la manivela gira con respecto a A con $\omega_{AB} = 2\,000$ rpm $= 209$ rad/s constante, tenemos $\alpha_{AB} = 0$. La aceleración de B está por lo tanto dirigida hacia A y su módulo es

$$a_B = r\omega_{AB}^2 = (\tfrac{3}{12}\text{ ft})(209\text{ rad/s})^2 = 10{,}920\text{ ft/s}^2$$
$$\mathbf{a}_B = 10{,}920\text{ ft/s}^2 \measuredangle 40°$$

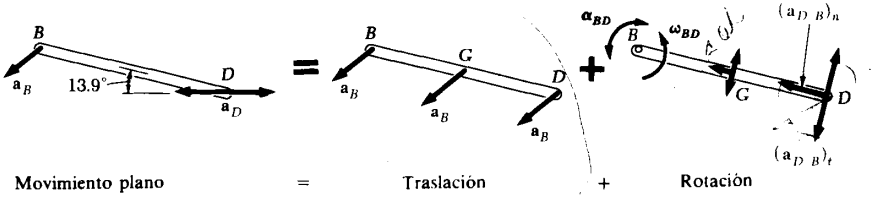
Movimiento de la biela *BD*. La velocidad angular ω_{BD} y el valor de β se obtuvieron en el problema resuelto 15.3.

$$\omega_{BD} = 61.9\text{ rad/s} \circlearrowleft \qquad \beta = 13.9°$$

El movimiento de BD se descompone en una traslación con B y una rotación con respecto a B. La aceleración relativa $\mathbf{a}_{D/B}$ se descompone en sus componentes normal y tangencial:

$$(a_{D/B})_n = (BD)\omega_{BD}^2 = (\tfrac{8}{12}\text{ ft})(61.9\text{ rad/s})^2 = 2550\text{ ft/s}^2$$
$$(\mathbf{a}_{D/B})_n = 2550\text{ ft/s}^2 \measuredangle 13.9°$$
$$(a_{D/B})_t = (BD)\alpha_{BD} = (\tfrac{8}{12})\alpha_{BD} = 0.667\alpha_{BD}$$
$$(\mathbf{a}_{D/B})_t = 0.667\alpha_{BD} \measuredangle 76.1°$$

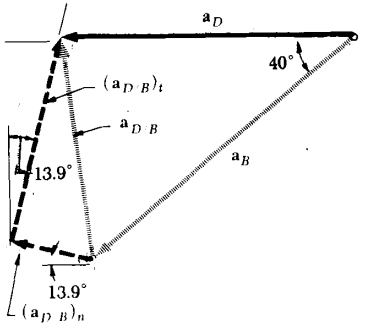
Mientras que $(\mathbf{a}_{D/B})_t$ debe ser perpendicular a BD, su sentido se desconoce.



Movimiento plano = Traslación + Rotación

Notando que la aceleración $\mathbf{a}_D$ debe ser horizontal escribimos

$$\mathbf{a}_D = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{D/B} = \mathbf{a}_B + (\mathbf{a}_{D/B})_n + (\mathbf{a}_{D/B})_t$$
$$[a_D \leftrightarrow] = [10{,}920 \measuredangle 40°] + [2560 \measuredangle 13.9°] + [0.667\alpha_{BD} \measuredangle 76.1°]$$



Igualando las componentes x e y obtenemos las siguientes ecuaciones escalares:

$\rightarrow$ componentes en x:

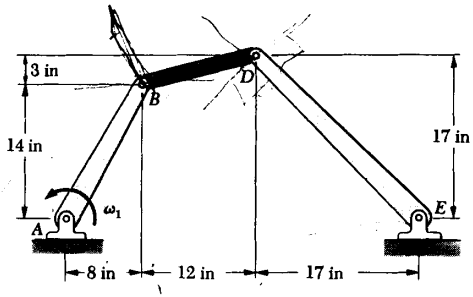
$$-a_D = -10{,}920\cos 40° - 2550\cos 13.9° + 0.667\alpha_{BD}\,\text{sen}\,13.9°$$

$+\uparrow$ componentes en y:

$$0 = -10{,}920\,\text{sen}\,40° + 2550\,\text{sen}\,13.9° + 0.667\alpha_{BD}\cos 13.9°$$

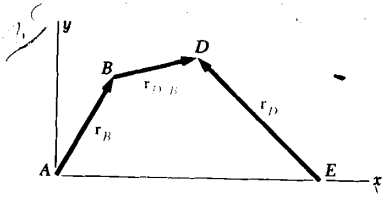
Resolviendo las ecuaciones simultáneamente obtenemos $\alpha_{BD} = +9\,890$ rad/s^2 y $a_D = +9\,260$ ft/s^2. Los signos positivos indican que los sentidos mostrados sobre el polígono vectorial son los correctos; escribimos

$$\alpha_{BD} = 9890\text{ rad/s}^2 \circlearrowleft$$
$$\mathbf{a}_D = 9260\text{ ft/s}^2 \leftarrow$$



PROBLEMA RESUELTO 15.8

El mecanismo *ABDE* se mueve en un plano vertical. Sabiendo que la manivela *AB* tiene una velocidad angular constante ω_1 de 20 rad/s de sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, determínense las velocidades angulares y las aceleraciones angulares de la biela *BD* y de la manivela *DE* en la posición mostrada.



$\mathbf{r}_B = 8\mathbf{i} + 14\mathbf{j}$
$\mathbf{r}_D = -17\mathbf{i} + 17\mathbf{j}$
$\mathbf{r}_{D/B} = 12\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

Solución. Aunque este problema pudo haberse resuelto por el método utilizado en el problema resuelto 15.7, aplicaremos el planteamiento vectorial en este caso. Los vectores de posición $\mathbf{r}_B$, $\mathbf{r}_D$ y $\mathbf{r}_{D/B}$ se escogen como se indica en el diagrama.

Las velocidades. Como el movimiento de cada elemento del mecanismo está contenido en el plano de la figura, tenemos

$$\boldsymbol{\omega}_{AB} = \omega_{AB}\mathbf{k} = (20 \text{ rad/s})\mathbf{k} \qquad \boldsymbol{\omega}_{BD} = \omega_{BD}\mathbf{k} \qquad \boldsymbol{\omega}_{DE} = \omega_{DE}\mathbf{k}$$

donde $\mathbf{k}$ es un vector unitario que apunta hacia afuera del papel. Ahora escribimos

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_D &= \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{D/B} \\
\omega_{DE}\mathbf{k} \times \mathbf{r}_D &= \omega_{AB}\mathbf{k} \times \mathbf{r}_B + \omega_{BD}\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{D/B} \\
\omega_{DE}\mathbf{k} \times (-17\mathbf{i} + 17\mathbf{j}) &= 20\mathbf{k} \times (8\mathbf{i} + 14\mathbf{j}) + \omega_{BD}\mathbf{k} \times (12\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) \\
-17\omega_{DE}\mathbf{j} - 17\omega_{DE}\mathbf{i} &= 160\mathbf{j} - 280\mathbf{i} + 12\omega_{BD}\mathbf{j} - 3\omega_{BD}\mathbf{i}
\end{aligned}$$

Igualando los coeficientes de los vectores unitarios $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ obtenemos las dos siguientes ecuaciones escalares:

$$\begin{aligned}
-17\omega_{DE} &= -280 - 3\omega_{BD} \\
-17\omega_{DE} &= +160 + 12\omega_{BD}
\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\omega}_{BD} = -(29.33 \text{ rad/s})\mathbf{k} \qquad \boldsymbol{\omega}_{DE} = (11.29 \text{ rad/s})\mathbf{k} \blacktriangleleft$$

Las aceleraciones. Notando que la manivela *AB* tiene una velocidad angular constante, escribimos

$$\boldsymbol{\alpha}_{AB} = 0 \qquad \boldsymbol{\alpha}_{BD} = \alpha_{BD}\mathbf{k} \qquad \boldsymbol{\alpha}_{DE} = \alpha_{DE}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a}_D = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{D/B} \tag{1}$$

Cada término de la ecuación (1) se calcula por separado:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_D &= \alpha_{DE}\mathbf{k} \times \mathbf{r}_D - \omega_{DE}^2\mathbf{r}_D \\
&= \alpha_{DE}\mathbf{k} \times (-17\mathbf{i} + 17\mathbf{j}) - (11.29)^2(-17\mathbf{i} + 17\mathbf{j}) \\
&= -17\alpha_{DE}\mathbf{j} - 17\alpha_{DE}\mathbf{i} + 2170\mathbf{i} - 2170\mathbf{j} \\
\mathbf{a}_B &= \alpha_{AB}\mathbf{k} \times \mathbf{r}_B - \omega_{AB}^2\mathbf{r}_B = 0 - (20)^2(8\mathbf{i} + 14\mathbf{j}) \\
&= -3200\mathbf{i} - 5600\mathbf{j} \\
\mathbf{a}_{D/B} &= \alpha_{BD}\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{D/B} - \omega_{BD}^2\mathbf{r}_{D/B} \\
&= \alpha_{BD}\mathbf{k} \times (12\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) - (29.33)^2(12\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) \\
&= 12\alpha_{BD}\mathbf{j} - 3\alpha_{BD}\mathbf{i} - 10{,}320\mathbf{i} - 2580\mathbf{j}
\end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación (1) e igualando los coeficientes de $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$, obtenemos

$$\begin{aligned}
-17\alpha_{DE} + 3\alpha_{BD} &= -15{,}690 \\
-17\alpha_{DE} - 12\alpha_{BD} &= -6010
\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{BD} = -(645 \text{ rad/s}^2)\mathbf{k} \qquad \boldsymbol{\alpha}_{DE} = (809 \text{ rad/s}^2)\mathbf{k} \blacktriangleleft$$

Problemas

15.80 Una viga de acero de 3.6 m se baja por medio de dos cables que se desenrollan a la misma rapidez desde cilindros colocados en lo alto. Conforme la viga se acerca al suelo los operadores de los cilindros aplican los frenos para disminuir su velocidad de giro. En el instante considerado la desaceleración del cable unido en A es de 4.2 m/s^2 mientras que la del cable sujeto en B es de 1.5 m/s^2. Determínense *a*) la aceleración angular de la viga y *b*) la aceleración del punto C.

15.81 La aceleración del punto C es de 0.3 m/s^2 hacia abajo y la aceleración angular de la viga es de 0.8 rad/s^2 en el sentido de las manecillas del reloj. Sabiendo que la velocidad angular de la viga es cero en el instante considerado, determínense la aceleración de cada cable.

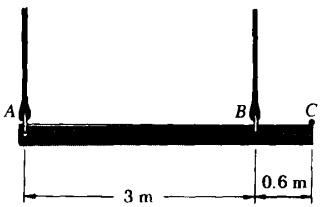


Fig. P15.80 y P15.81

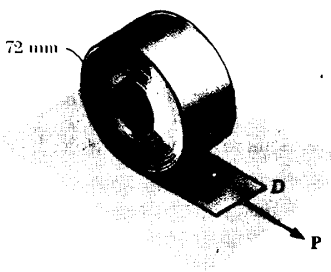


Fig. P15.82

15.82 Un rollo de papel está en reposo sobre una superficie horizontal. Una fuerza **P** aplicada al papel provoca las siguientes aceleraciones: $\mathbf{a}_A = 300$ mm/s^2 y $\mathbf{a}_D = 780$ mm/s^2 ambas hacia la derecha. Determínense *a*) la aceleración angular del rollo y *b*) la aceleración del punto B.

15.83 En el problema 15.82 determínese el punto sobre la superficie vertical del rollo de papel que *a*) no tiene aceleración *b*) tiene una aceleración de 500 mm/s^2 a la derecha.

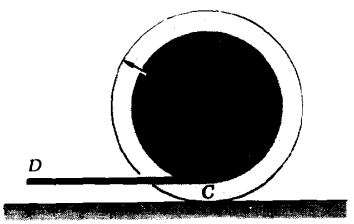


Fig. P15.84

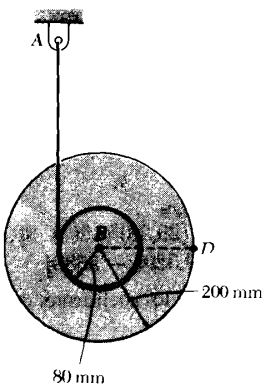


Fig. P15.85

15.84 Un tambor de 80 mm de radio está montado sobre un cilindro de 100 mm de radio. Una cuerda se enrolla alrededor del tambor y se tira de ella en tal forma que el punto D tiene una velocidad de 75 mm/s y una aceleración de 400 mm/s^2 ambas dirigidas a la izquierda. Suponiendo que el cilindro rueda sin deslizar, determínese la aceleración *a*) del punto A, *b*) del punto B y *c*) del punto C.

15.85 En el instante aquí mostrado, el centro B de la polea doble tiene una velocidad de 0.6 m/s y una aceleración de 2.4 m/s^2 dirigidas hacia abajo. Sabiendo que la cuerda enrollada alrededor de la polea interior está unida a un soporte fijo en A, determínese la aceleración del punto D.

15.86 Un automóvil se dirige hacia la derecha a una velocidad constante de 90 km/h. Sabiendo que el diámetro de una rueda es de 550 mm, determínese la aceleración *a*) del punto *C* y *b*) del punto *D*.

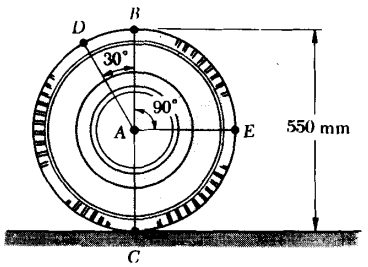


Fig. P15.86 y P15.87

15.87 Un automóvil que parte del reposo tiene una aceleración constante de 2.4 m/s² hacia la derecha. Si la rueda mostrada en la figura rueda sin deslizar, determínese la velocidad del automóvil para la cual el módulo de la aceleración del punto *B* de la rueda es de 16 m/s².

15.88 Un tambor de 5 in de radio rueda sin deslizar sobre una porción de una banda que se mueve hacia abajo y hacia la izquierda con una velocidad constante de 6 in/s. Si en un instante dado la velocidad y la aceleración del centro *A* del tambor son los que se indican en la figura, determínese la aceleración del punto *D*.

15.89 En el problema 15.88 determínese la aceleración del punto *E*.

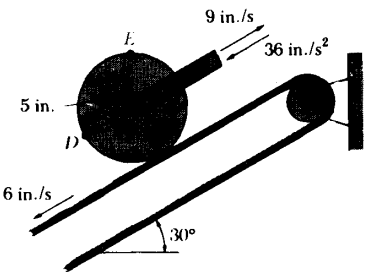


Fig. P15.88

15.90 El disco mostrado tiene una velocidad angular constante de 500 rpm en sentido opuesto al movimiento de las manecillas del reloj. Si la barra *BD* es de 250 mm de longitud, determínese la aceleración del collarín *D* cuando *a*) $\theta = 90°$ y *b*) $\theta = 180°$.

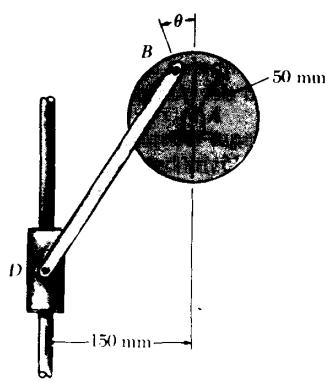


Fig. P15.90

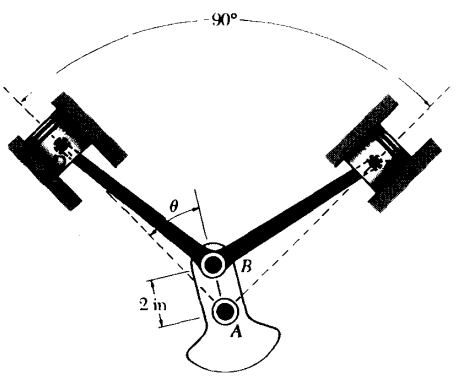


Fig. P15.91

15.91 En el compresor de aire de dos cilindros mostrado en la figura las bielas *BD* y *BE* tienen 7.5 in de longitud cada una y la manivela *AB* gira con respecto al punto fijo *A* con una velocidad angular de 1500 rpm en el sentido de las manecillas del reloj. Determínese la aceleración de cada émbolo cuando $\theta = 0$.

15.92 En el problema 15.91 determínese la aceleración de cada émbolo cuando $\theta = 45°$.



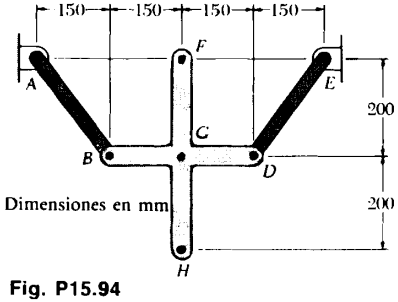


Fig. P15.94

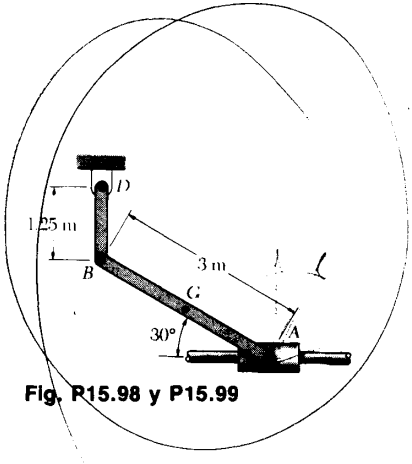


Fig. P15.98 y P15.99

15.93 El brazo AB gira con una velocidad angular constante de 60 rpm en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj. Sabiendo que el engranaje A no gira, determínese la aceleración del diente del engranaje B que está en contacto con el engranaje A.

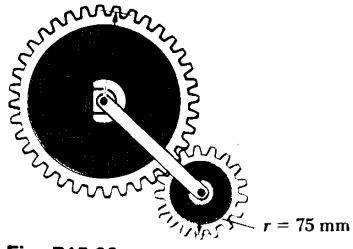


Fig. P15.93

15.94 La cruz $BHDF$ se sostiene por medio de dos barras AB y DE. Si se sabe que en el instante mostrado la barra AB gira con una velocidad angular constante de 4 rad/s en el sentido de las manecillas del reloj, determínense *a*) la velocidad angular de la cruz, *b*) la aceleración angular de la cruz y *c*) la aceleración del punto H.

15.95 En el problema 15.94 determínense la aceleración *a*) del punto F, *b*) del punto G.

15.96 y 15.97 Para el mecanismo indicado determínense *a*) la aceleración angular de la barra BD y *b*) de la barra DE.

15.96 Mecanismo del problema 15.52.

15.97 Mecanismo del problema 15.51.

15.98 El extremo A de la barra AB se mueve hacia la derecha con una velocidad constante de 2 m/s. Para la posición aquí mostrada, determínense, *a*) la aceleración angular de la barra AB y *b*) la aceleración del punto medio G de la barra AB.

15.99 En la posición mostrada el extremo A de la barra AB tiene una velocidad de 2.5 m/s y una aceleración de 1.5 m/s^2 ambas dirigidas a la derecha. Determínense *a*) la aceleración angular de la barra AB y *b*) la aceleración del punto medio G de la barra AB.

15.100 En la posición aquí mostrada el extremo A de la barra AB tiene una velocidad de 2.5 ft/s y una aceleración de 1.8 ft/s^2 ambas dirigidas hacia la izquierda. Determínense *a*) la aceleración angular de la barra AB y *b*) la aceleración del punto medio G de la barra AB.

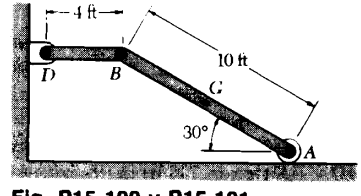


Fig. P15.100 y P15.101

15.101 El extremo A de la barra AB se mueve hacia la izquierda con una velocidad constante de 2.5 ft/s. Para la posición mostrada determínense *a*) la aceleración angular de la barra AB y *b*) la aceleración del punto medio G de la barra AB.

15.102 Representando por $\mathbf{r}_A$ el vector de posición de un punto A de una placa rígida que se mueve en movimiento plano, demuestrése que *a*) el vector de posición $\mathbf{r}_C$ del centro instantáneo de rotación es

$$\mathbf{r}_C = \mathbf{r}_A + \frac{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_A}{\omega^2}$$

donde $\boldsymbol{\omega}$ es la velocidad angular de la placa y $\mathbf{v}_A$ la velocidad del punto A y *b*) que la aceleración del centro instantáneo de rotación es nula si y sólo si

$$\mathbf{a}_A = \frac{\alpha}{\omega}\mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_A$$

donde $\alpha = \alpha\mathbf{k}$ es la aceleración angular de la placa.

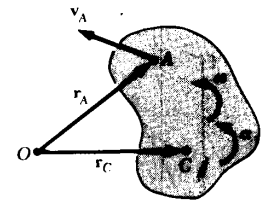


Fig. P15.102

*15.103 Los extremos de la barra AB deslizan sobre el piso y el plano inclinado. Empleando el método de la sección 15.9, obténgase una expresión para la velocidad angular de la barra en función de v_B, θ, l y β.

*15.104 Dedúzcase una expresión para la aceleración angular de la barra AB en términos de v_B, θ, l y β, sabiendo que la aceleración del punto B es cero.

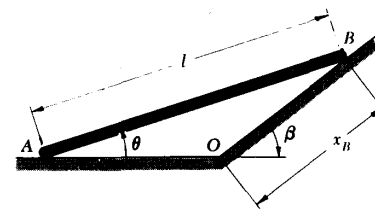


Fig. P15.103 y P15.104

*15.105 La manivela AB gira con una velocidad angular constante ω en el sentido de las manecillas del reloj y $\theta = 0$ en $t = 0$. Empleando el método de la sección 15.9 dedúzcase una expresión para la velocidad del émbolo P en función del tiempo t.

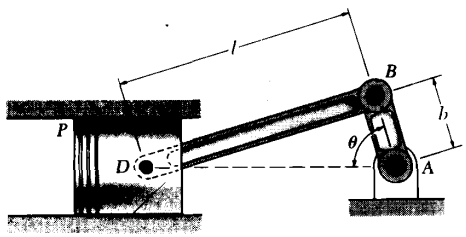


Fig. P15.105

*15.106 El disco impulsor del mecanismo de cruceta escocés aquí mostrado tiene una velocidad angular ω y una aceleración angular α, ambas en el sentido de las manecillas del reloj. Empleando el método de la sección 15.9 y suponiendo que $\beta = 0$ dedúzcase una expresión para obtener *a*) la velocidad del punto A y *b*) la aceleración del punto A.

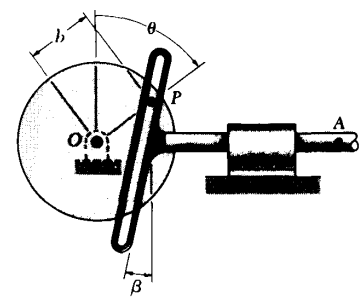


Fig. P15.106

*15.107 Resuélvase el problema 15.106 para un valor arbitrario del ángulo β.

*15.108 Sabiendo que la barra AB gira con una velocidad angular ω y una aceleración angular α, ambas opuestas al sentido del movimiento de las manecillas del reloj, obténganse las expresiones para la velocidad y la aceleración del collarín C.

*15.109 Si el collarín C se mueve hacia la derecha con una velocidad constante $\mathbf{v}_0$, obténganse expresiones para la velocidad y la aceleración angular de la barra AB en la posición mostrada en la figura.

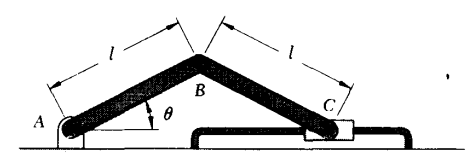


Fig. P15.108 y P15.109

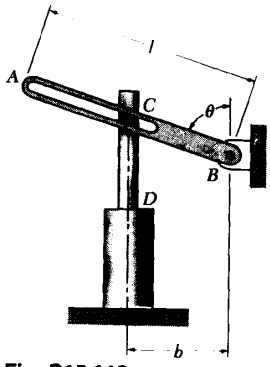


Fig. P15.110

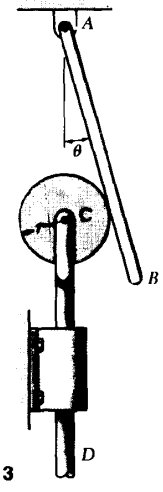


Fig. P15.113

*15.110 El pasador C está unido a la barra CD y desliza en una ranura practicada en el brazo AB. Si la barra CD se mueve verticalmente hacia arriba con una velocidad constante $\mathbf{v}_0$, dedúzcanse expresiones para *a*) la velocidad angular del brazo AB y *b*) las componentes de la velocidad del punto A.

*15.111 En el problema 15.110 dedúzcase una expresión para la aceleración angular del brazo AB.

*15.112 Un disco de radio r rueda hacia la derecha con una velocidad constante $\mathbf{v}$. Representando con P el punto del borde en contacto con el piso en $t = 0$, obténganse expresiones para las componentes horizontal y vertical de la velocidad de P en cualquier tiempo. (La curva descrita por el punto P es una cicloide.)

*15.113 La posición de la barra AB se controla por medio de un disco de radio r que está unido a la horquilla CD. Si la horquilla se mueve verticalmente hacia arriba con una velocidad constante $\mathbf{v}_0$, dedúzca una expresión para la velocidad angular de la barra AB.

*15.114 En el problema 15.113, dedúzcase una expresión para la aceleración angular de la barra AB.

15.10. Derivada temporal de un vector con respecto a un sistema en rotación. Vimos en la sección 11.10 que la derivada temporal de un vector es la misma respecto a un sistema fijo que respecto a un sistema de traslación. En esta sección compararemos la derivada temporal de un vector $\mathbf{Q}$ con respecto a un sistema fijo y con respecto a un sistema en rotación†. Aprenderemos también a determinar la derivada temporal de $\mathbf{Q}$ con respecto a un sistema de referencia cuando $\mathbf{Q}$ está definida por sus componentes en otro sistema.

Consideremos dos sistemas de referencia con origen en O, un sistema fijo $OXYZ$ y un sistema $Oxyz$ que gira con respecto al eje fijo OA; sea Ω la velocidad angular del sistema $Oxyz$ en un instante dado (Fig. 15.26). Consideremos ahora una función vectorial $\mathbf{Q}(t)$ representada por el vector $\mathbf{Q}$ de origen O; conforme el tiempo t varía, tanto la dirección como el módulo de $\mathbf{Q}$ cambian. Como la variación de

† Recuérdese que la selección de un sistema de referencia fijo es arbitraria. Cualquier sistema puede designarse como "fijo"; entonces, todos los demás se considerarán como sistemas móviles.

Q se observa en forma diferente por un observador empleando $OXYZ$ como sistema de referencia, y por un observador que usa $Oxyz$, esperaríamos que la derivada temporal de **Q** dependiera del sistema de referencia que haya sido seleccionado. Por consiguiente, representaremos por $(\dot{\mathbf{Q}})_{Oxyz}$ la derivada temporal de **Q** con respecto al sistema fijo $OXYZ$ y por $(\dot{\mathbf{Q}})_{Oxyz}$ la derivada temporal con respecto al sistema giratorio de $Oxyz$. Nos proponemos determinar la relación que existe entre ambas derivadas temporales.

Descompongamos primero al vector **Q** en sus componentes a lo largo de los ejes x, y y z del sistema giratorio. Representando por **i**, **j** y **k** los vectores unitarios correspondientes, escribimos

$$\mathbf{Q} = Q_x\mathbf{i} + Q_y\mathbf{j} + Q_z\mathbf{k} \tag{15.27}$$

Derivando (15.27) con respecto a t y considerando los vectores unitarios **i**, **j**, **k** fijos, obtenemos la derivada temporal de **Q** *con respecto al sistema rotatorio Oxyz*:

$$(\dot{\mathbf{Q}})_{Oxyz} = \dot{Q}_x\mathbf{i} + \dot{Q}_y\mathbf{j} + \dot{Q}_z\mathbf{k} \tag{15.28}$$

Para obtener la derivada temporal de **Q** *con respecto al sistema fijo OXYZ* debemos considerar los vectores unitarios **i**, **j**, **k** como variables al derivar (15.27). Por consiguiente, escribimos

$$(\dot{\mathbf{Q}})_{OXYZ} = \dot{Q}_x\mathbf{i} + \dot{Q}_y\mathbf{j} + \dot{Q}_z\mathbf{k} + Q_x\frac{d\mathbf{i}}{dt} + Q_y\frac{d\mathbf{j}}{dt} + Q_z\frac{d\mathbf{k}}{dt} \tag{15.29}$$

Recordando (15.28), observamos que la suma de los primeros tres términos en el segundo miembro de (15.29) representa la derivada temporal $(\dot{\mathbf{Q}})_{Oxyz}$. Notamos que por otra parte que la derivada temporal $(\dot{\mathbf{Q}})_{OXYZ}$ debe reducirse a los últimos tres términos en (15.29) si el vector **Q** estuviese fijo dentro del sistema $Oxyz$, ya que $(\dot{\mathbf{Q}})_{Oxyz}$ sería entonces nulo. Pero en ese caso, $(\dot{\mathbf{Q}})_{OXYZ}$ representaría la velocidad de una partícula ubicada en la punta de **Q** y que pertenece a un sólido rígidamente unido al sistema $Oxyz$. Entonces los últimos tres términos en (15.29) representan la velocidad de esa partícula; como el sistema $Oxyz$ tiene una velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ con respecto a $OXYZ$ en el instante considerado, escribimos de (15.5).

$$Q_x\frac{d\mathbf{i}}{dt} + Q_y\frac{d\mathbf{j}}{dt} + Q_z\frac{d\mathbf{k}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{Q} \tag{15.30}$$

Sustituyendo (15.28) y (15.30) en (15.29) obtenemos la relación fundamental

$$(\dot{\mathbf{Q}})_{OXYZ} = (\dot{\mathbf{Q}})_{Oxyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{Q} \tag{15.31}$$

Concluimos que la derivada temporal del vector **Q** con respecto al sistema fijo $OXYZ$ consta de dos partes: la primera parte representa la derivada temporal de **Q** con respecto al sistema giratorio $Oxyz$; la segunda parte $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{Q}$, se induce por la rotación del sistema $Oxyz$.

El empleo de la relación (15.31) simplifica la determinación de la derivada temporal de un vector **Q**, con respecto a un sistema de referencia fijo $OXYZ$, cuando el vector **Q** está definidio por sus com-

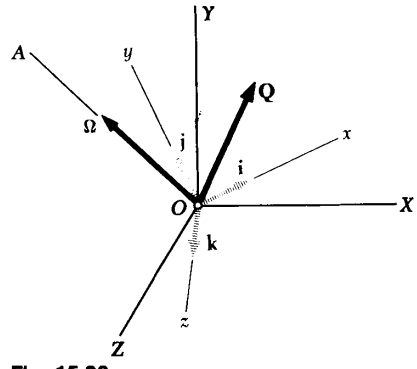


Fig. 15.26

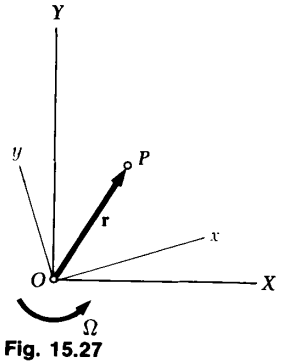


Fig. 15.27

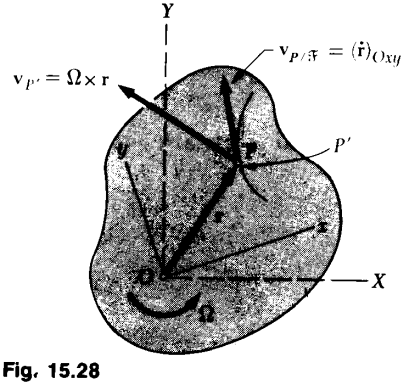


Fig. 15.28

ponentes a lo largo de los ejes de un sistema giratorio $Oxyz$, ya que esta relación no requiere el cálculo separado de las derivadas de los vectores unitarios que definen la orientación del sistema giratorio.

15.11. Movimiento plano de una partícula con relación a un sistema en rotación: Aceleración de Coriolis. Consideremos dos sistemas de referencia, ambos con origen en O y ambos en el plano de la figura, un sistema fijo OXY, y un sistema en rotación Oxy (Fig. 15.27). Sea P una partícula que se mueve en el plano de la figura. Aunque el vector de posición $\mathbf{r}$ de P es el mismo en ambos sistemas, su derivada temporal depende del sistema de referencia que se haya seleccionado.

La velocidad absoluta $\mathbf{v}_p$ de la partícula se define como la velocidad observada desde el sistema fijo OXY y es igual a la derivada temporal $(\dot{\mathbf{r}})_{OXY}$ de $\mathbf{r}$ con respecto a ese sistema. Pero podemos expresar $\mathbf{v}_P$ en términos de la derivada temporal $(\dot{\mathbf{r}})_{Oxy}$ observada desde un sistema giratorio si empleamos la ecuación (15.31). Sea Ω la velocidad angular del sistema Oxy respecto a OXY en el instante considerado; escribimos

$$\mathbf{v}_P = (\dot{\mathbf{r}})_{OXY} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} + (\dot{\mathbf{r}})_{Oxy} \tag{15.32}$$

Pero $(\dot{\mathbf{r}})_{Oxy}$ define la velocidad de la partícula P relativa al sistema en rotación Oxy. Representando al sistema giratorio por $\mathcal{F}$ para abreviar, representamos la velocidad $(\dot{\mathbf{r}})_{Oxy}$ de P relativa al sistema giratorio por el símbolo $\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$. Si imaginamos que una sección rígida se mueve solidariamente con el sistema giratorio, $v_{P/\mathcal{F}}$ representará la velocidad de P a lo largo de la trayectoria que describe sobre la sección (Fig 15.28). Por otra parte, el término $\Omega \times \mathbf{r}$ en (15.32) representará a la velocidad $\mathbf{v}_{P'}$ del punto P' de la sección —o sistema giratorio— que coincide con P en el instante considerado. Tenemos entonces

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{P'} + \mathbf{v}_{P/\mathcal{F}} \tag{15.33}$$

donde $\mathbf{v}_P$ = velocidad absoluta de la partícula P
$\mathbf{v}_{P'}$ = velocidad del punto P' del sistema en movimiento $\mathcal{F}$, que coincide con P
$\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$ = velocidad de P relativa al sistema en movimiento $\mathcal{F}$

La aceleración absoluta $\mathbf{a}_p$ de la partícula está definida como la derivada temporal de $\mathbf{v}_p$ respecto al sistema fijo OXY. Calculando la derivada temporal con respecto a OXY de los términos en (15.32), escribimos

$$\mathbf{a}_P = \dot{\mathbf{v}}_P = \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}} + \frac{d}{dt}[(\dot{\mathbf{r}})_{Oxy}] \tag{15.34}$$

donde todas las derivadas están definidas con respecto a OXY excepto donde se indique lo contrario. En relación con la ecuación (15.31) notamos que el último término en (15.34) puede expresarse como

$$\frac{d}{dt}[(\dot{\mathbf{r}})_{Oxy}] = (\ddot{\mathbf{r}})_{Oxy} + \boldsymbol{\Omega} \times (\dot{\mathbf{r}})_{Oxy}$$

Por otra parte, $\dot{\mathbf{r}}$ representa la velocidad $\mathbf{v}_P$ y puede sustituirse por el segundo miembro de la ecuación (15.32). Después de completar estas dos sustituciones en (15.34), escribimos

$$\mathbf{a}_P = \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\dot{\mathbf{r}})_{Oxy} + (\ddot{\mathbf{r}})_{Oxy} \tag{15.35}$$

Haciendo referencia a la expresión (15.8) obtenida en la sección 15.3 para la aceleración de una partícula en un sólido rígido que gira con respecto a un eje fijo, notamos que la suma de los primeros dos términos representan la aceleración $\mathbf{a}_{P'}$ del punto P' del sistema giratorio que coincide con P en el instante considerado. Por otra parte, el último término define la aceleración $\mathbf{a}_{P/\mathcal{F}}$ de P relativa al sistema giratorio. Si no fuera por el tercer término que no se ha tomado en cuenta, una relación similar a (15.33) podría escribirse para las aceleraciones y $\mathbf{a}_P$ podría expresarse como la suma de $\mathbf{a}_{P'}$ y $\mathbf{a}_{P/\mathcal{F}}$. Sin embargo, es evidente que *tal relación sería incorrecta* y que debemos incluir un término adicional. Este término, que representaremos por $\mathbf{a}_c$, se conoce como la *aceleración complementaria* o *aceleración de Coriolis*, en honor al matemático francés De Coriolis (1792-1843). Escribimos

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_{P'} + \mathbf{a}_{P/\mathcal{F}} + \mathbf{a}_c \tag{15.36}$$

donde $\mathbf{a}_P$ = aceleración absoluta de la partícula P
$\mathbf{a}_{P'}$ = aceleración del punto P' del sistema en movimiento $\mathcal{F}$ que coincide con P
$\mathbf{a}_{P/\mathcal{F}}$ = aceleración de P relativa al sistema en movimiento $\mathcal{F}$
$\mathbf{a}_c = 2\boldsymbol{\Omega} \times (\dot{\mathbf{r}})_{Oxy} = 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$
= aceleración complementaria o de Coriolis †

Notamos que como el punto P' se mueve sobre una circunferencia alrededor del origen O, su aceleración $\mathbf{a}_{P'}$ tiene en general dos componentes: una componente $(\mathbf{a}_{P'})_t$ tangente a la circunferencia y una componente $(\mathbf{a}_{P'})_n$ dirigida hacia O. En forma semejante la aceleración $\mathbf{a}_{P/\mathcal{F}}$ tiene generalmente dos componentes: una componente $(\mathbf{a}_{P/\mathcal{F}})_t$ tangente a la trayectoria que describe P sobre la sección giratoria, y una componente $(\mathbf{a}_{P/\mathcal{F}})_n$ dirigida hacia el centro de curvatura de esa trayectoria. Notamos además que como el vector $\boldsymbol{\Omega}$ es perpendicular al plano del movimiento y entonces a $\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$, la magnitud de la aceleración de Coriolis $\mathbf{a}_c = 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$ es igual a $2\Omega v_{P/\mathcal{F}}$ y su dirección puede obtenerse girando el vector $\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$ 90° en el sentido de rotación del sistema en movimiento (Fig. 15.29). La aceleración de Coriolis será nula cuando Ω o $\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$ sean nulos.

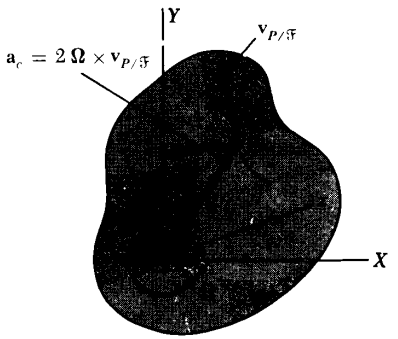


Fig. 15.29

† Es importante advertir la diferencia entre la ecuación (15.36) y la ecuación (15.21) de la sección 15.8. Cuando escribimos

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A} \tag{15.21}$$

en la sección 15.8 estábamos expresando la aceleración absoluta del punto B como la suma de su aceleración $\mathbf{a}_{B/A}$ relativa a un *sistema en traslación* y de la aceleración $\mathbf{a}_A$ de un punto de ese sistema. Ahora estamos tratando de relacionar la aceleración absoluta del punto P con su aceleración $\mathbf{a}_{P/\mathcal{F}}$ relativa a un *sistema giratorio* $\mathcal{F}$ *y con la aceleración* $\mathbf{a}_{P'}$ del punto P' del sistema que coincide con P; la ecuación (15.36) muestra que, como el sistema está girando, es necesario incluir un término adicional que represente la aceleración de Coriolis $\mathbf{a}_c$.

El ejemplo siguiente ayudará a comprender el significado físico de la aceleración de Coriolis. Consideraremos un anillo P que se hace deslizar a una velocidad relativa constante u sobre una barra OB que gira a velocidad constante ω con respecto a O (Fig. 15.30*a*). De acuerdo con la fórmula (15.36), la aceleración absoluta de P puede obtenerse sumando vectorialmente la aceleración $\mathbf{a}_A$ del punto A de la barra que coincide con P, la aceleración relativa $\mathbf{a}_{P/OB}$ de P con respecto a la barra y la aceleración de Coriolis $\mathbf{a}_c$. Como la velocidad angular ω de la barra es constante, $\mathbf{a}_A$ se reduce a su componente normal $(\mathbf{a}_A)_n$ de magnitud $r\omega^2$; y como u es constante, la aceleración relativa $\mathbf{a}_{P/OB}$ es nula. Por la definición antes dada, la aceleración de Coriolis es un vector perpendicular a OB de módulo $2\omega u$ y dirigida como muestra la figura. La aceleración del anillo P consiste, por tanto, en los dos vectores mostrados en la figura 15.30*a*. Nótese que la resultante obtenida puede comprobarse aplicando la relación (11.44).

Para comprender mejor el significado de la aceleración de Coriolis, consideraremos la velocidad absoluta de P en el instante t y en el instante $t + \Delta t$ (Fig. 15.30*b*). En el instante t la velocidad puede descomponerse en sus dos componentes $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}_A$ y en el instante $t + \Delta t$ en sus componentes $\mathbf{u}'$ y $\mathbf{v}_{A'}$. Trazando estas componentes desde el mismo origen (Fig. 15.30*c*) notamos que el cambio en la velocidad durante el tiempo Δt puede representarse por la suma de tres vectores $\overrightarrow{RR'}$, $\overrightarrow{TT''}$ y $\overrightarrow{T''T'}$. El vector $\overrightarrow{TT''}$ mide el cambio en la direccion de la velocidad $\mathbf{v}_A$, y el cociente $\overrightarrow{TT''}/\Delta t$ representa la aceleración $\mathbf{a}_A$ cuando Δt tiende a cero. Comprobamos que la dirección de $\overrightarrow{TT''}$ es la de $\mathbf{a}_A$ cuando Δt tiende a cero y que

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{TT''}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} v_A \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = r\omega\omega = r\omega^2 = a_A$$

El vector $\overrightarrow{RR'}$ mide el cambio en la dirección de $\mathbf{u}$ que proviene de la rotación de la barra; el vector $\overrightarrow{T''T'}$ mide el cambio en el módulo de $\mathbf{v}_A$ que proviene del movimiento de P sobre la barra. Los vectores $\overrightarrow{RR'}$ y $\overrightarrow{T''T'}$ son el resultado del *efecto combinado* del movimiento relativo de P y de la rotación de la barra; se anularían si no hubiera *alguno* de los dos movimientos. Podemos comprobar fácilmente que la suma de estos dos vectores define a la aceleración de Coriolis. Su dirección es la de $\mathbf{a}_c$ cuando Δt tiende a cero y como $RR' = u\,\Delta\theta$ y $T''T' = v_{A'} - v_A = (r + \Delta r)\omega - r\omega = \omega\,\Delta r$, comprobamos que

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{RR'}{\Delta t} + \frac{T''T'}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \to 0} \left(u \frac{\Delta \theta}{\Delta t} + \omega \frac{\Delta r}{\Delta t} \right) = u\omega + \omega u = 2\omega u = a_c$$

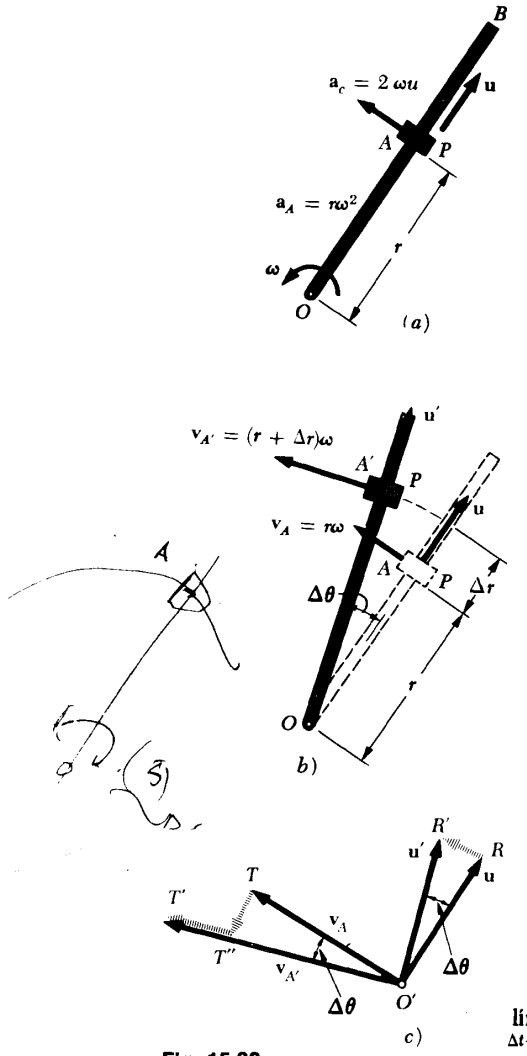
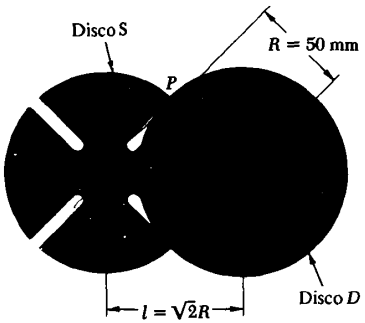


Fig. 15.30

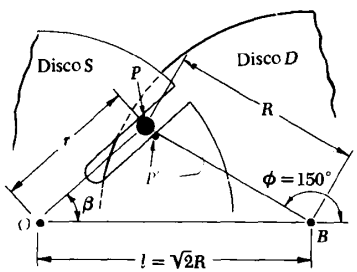
Las fórmulas (15.33) y (15.36) sirven para analizar el movimiento de mecanismos que contienen partes que se deslizan entre sí. Por ejemplo, permiten relacionar los movimientos absoluto y relativo de pasadores y collarines deslizantes (véanse problemas resueltos 15.9 y 15.10). El concepto de la aceleración de Coriolis es también muy útil en el estudio de proyectiles de largo alcance y de otros cuerpos cuyo movimiento es afectado apreciablemente por la rotación de la Tierra. Como se estableció en la sección 12.2, un sistema de ejes fijo a la Tierra no constituye un verdadero sistema de referencia newtoniana; en realidad debe considerarse como un sistema de ejes giratorios. Por tanto, las fórmulas deducidas en esta sección facilitarán el estudio del movimiento de cuerpos con respecto a ejes fijos a la Tierra.



PROBLEMA RESUELTO 15.9

El mecanismo de cruz de Malta mostrado se utiliza en contadores y en otras aplicaciones donde se requiere un movimiento giratorio intermitente. El disco D gira con una velocidad angular constante en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj ω_D de 10 rad/s. Un pasador P está unido al disco D y desliza en una de las ranuras en el disco S. Se desea que la velocidad angular del disco S sea cero cuando el pasador entre y salga de cada ranura; en el caso de cuatro ranuras esto ocurrirá si la distancia entre los centros de los discos es $l = \sqrt{2}R$.

En el instante cuando $\phi = 150°$ determínense: *a*) la velocidad angular del disco S, y *b*) la velocidad del pasador P relativa al disco S.



Solución. Resolvemos el triángulo OPB que corresponde a la posición $\phi = 150°$. Empleando el teorema del coseno escribimos

$$r^2 = R^2 + l^2 - 2Rl\cos 30° = 0.551R^2 \qquad r = 0.742R = 37.1 \text{ mm}$$

El teorema de los senos,

$$\frac{\operatorname{sen}\beta}{R} = \frac{\operatorname{sen} 30°}{r} \qquad \operatorname{sen}\beta = \frac{\operatorname{sen} 30°}{0.742} \qquad \beta = 42.4°$$

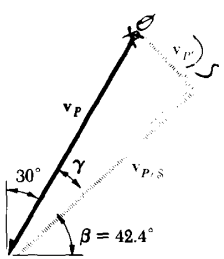
Como el pasador P está unido al disco D y éste gira alrededor del punto B, el módulo de la velocidad absoluta de P es

$$v_P = R\omega_D = (50 \text{ mm})(10 \text{ rad/s}) = 500 \text{ mm/s}$$
$$\mathbf{v}_P = 500 \text{ mm/s} \measuredangle 60°$$

Consideremos ahora el movimiento del pasador P a lo largo de la ranura en el disco S. Representando por P' el punto del disco S que coincide con P en el instante considerado, y seleccionando un sistema giratorio $\mathcal{S}$ unido al disco S, escribimos

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{P'} + \mathbf{v}_{P/\mathcal{S}}$$

Notando que $\mathbf{v}_{P'}$ es perpendicular al radio OP y que $\mathbf{v}_{P/\mathcal{S}}$ se dirige a lo largo de la ranura, trazamos el triángulo de velocidades correspondientes a la ecuación anterior. Del triángulo calculamos



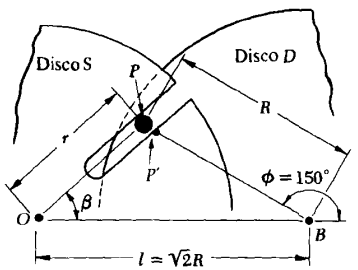
$$\gamma = 90° - 42.4° - 30° = 17.6°$$
$$v_{P'} = v_P \operatorname{sen}\gamma = (500 \text{ mm/s}) \operatorname{sen} 17.6°$$
$$\mathbf{v}_{P'} = 151.2 \text{ mm/s} \measuredangle 42.4°$$
$$v_{P/\mathcal{S}} = v_P \cos\gamma = (500 \text{ mm/s}) \cos 17.6°$$
$$\mathbf{v}_{P/\mathcal{S}} = \mathbf{v}_{P/\mathcal{S}} = 477 \text{ mm/s} \measuredangle 42.4° \quad \blacktriangleleft$$

Como $\mathbf{v}_{P'}$ es perpendicular al radio OP escribimos

$$v_{P'} = r\omega_{\mathcal{S}} \qquad 151.2 \text{ mm/s} = (37.1 \text{ mm})\omega_{\mathcal{S}}$$
$$\omega_{\mathcal{S}} = \omega_{\mathcal{S}} = 4.08 \text{ rad/s} \curvearrowleft \quad \blacktriangleleft$$

PROBLEMA RESUELTO 15.10

En el mecanismo de cruz de Malta del problema resuelto 15.9 el disco D gira con una velocidad angular constante en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj ω_D de 10 rad/s. En el instante en que $\phi = 150°$ determínese la aceleración angular del disco S.



Solución. En relación con el problema resuelto 15.9 obtenemos la velocidad angular del sistema $\mathcal{S}$ unido al disco S y la velocidad del pasador relativa a S:

$$\omega_{\mathcal{S}} = 4.08 \text{ rad/s} \downarrow$$

$$\beta = 42.4° \qquad \mathbf{v}_{P/\mathcal{S}} = 477 \text{ mm/s} \measuredangle 42.4°$$

Como el pasador P se mueve con respecto al sistema giratorio $\mathcal{S}$ escribimos

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_{P'} + \mathbf{a}_{P/\mathcal{S}} + \mathbf{a}_c \tag{1}$$

Cada término de esta ecuación vectorial se investiga separadamente.

La aceleración absoluta $\mathbf{a}_P$. Como el disco D gira con una velocidad angular constante, la aceleración absoluta $\mathbf{a}_P$ se dirige hacia B. Tenemos

$$a_P = R\omega_D^2 = (50 \text{ mm})(10 \text{ rad/s})^2 = 5000 \text{ mm/s}^2$$

$$\mathbf{a}_P = 5000 \text{ mm/s}^2 \measuredangle 30°$$

La aceleración $\mathbf{a}_{P'}$ *del punto coincidente* P'. La aceleración $\mathbf{a}_{P'}$ del punto P' del sistema $\mathcal{S}$ que coincide con P en el instante considerado se descompone en sus componentes normal y tangencial. (Recordemos del problema resuelto 15.9 que $r = 37.1$ mm.)

$$(a_{P'})_n = r\omega_{\mathcal{S}}^2 = (37.1 \text{ mm})(4.08 \text{ rad/s})^2 = 618 \text{ mm/s}^2$$

$$(\mathbf{a}_{P'})_n = 618 \text{ mm/s}^2 \measuredangle 42.4°$$

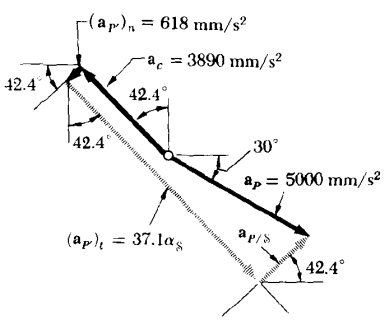
$$(a_{P'})_t = r\alpha_{\mathcal{S}} = 37.1\alpha_{\mathcal{S}} \qquad (\mathbf{a}_{P'})_t = 37.1\alpha_{\mathcal{S}} \measuredangle 42.4°$$

La aceleración relativa $\mathbf{a}_{P/\mathcal{S}}$. Como el pasador P se mueve en una ranura recta en el disco S, la aceleración relativa $\mathbf{a}_{P/\mathcal{S}}$ debe ser paralela a la ranura; es decir, su dirección debe ser $\measuredangle 42.4°$.

La aceleración de Coriolis $\mathbf{a}_c$. Girando la velocidad relativa $\mathbf{v}_{P/\mathcal{S}}$ 90° en el sentido de $\omega_{\mathcal{S}}$ obtenemos la dirección de la componente de Coriolis de la aceleración: $\measuredangle 42.4°$. Escribimos

$$a_c = 2\omega_{\mathcal{S}} v_{P/\mathcal{S}} = 2(4.08 \text{ rad/s})(477 \text{ mm/s}) = 3890 \text{ mm/s}^2$$

$$\mathbf{a}_c = 3890 \text{ mm/s}^2 \measuredangle 42.4°$$



Reescribimos la ecuación (1) y sustituimos las aceleraciones encontradas anteriormente:

$$\mathbf{a}_P = (\mathbf{a}_{P'})_n + (\mathbf{a}_{P'})_t + \mathbf{a}_{P/\mathcal{S}} + \mathbf{a}_c$$

$$[5000 \measuredangle 30°] = [618 \measuredangle 42.4°] + [37.1\alpha_{\mathcal{S}} \measuredangle 42.4°] + [a_{P/\mathcal{S}} \measuredangle 42.4°] + [3890 \measuredangle 42.4°]$$

Igualando las componentes en una dirección perpendicular a la ranura,

$$5000 \cos 17.6° = 37.1\alpha_{\mathcal{S}} - 3890$$

$$\alpha_{\mathcal{S}} = \alpha_{\mathcal{S}} = 233 \text{ rad/s}^2 \downarrow$$

Problemas

15.115 y 15.116 Dos barras giratorias están conectadas por un bloque deslizante P. La barra articulada en A gira con una velocidad angular constante en el sentido de las manecillas del reloj ω_A. A partir de los datos proporcionados, determínense para la posición aquí mostrada *a)* la velocidad angular de la barra articulada en B y *b)* la velocidad relativa del bloque deslizante P con respecto a la barra sobre la cual desliza.

15.115 $b = 8$ in, $\omega_A = 6$ rad/s.
15.116 $b = 300$ mm, $\omega_A = 10$ rad/s.

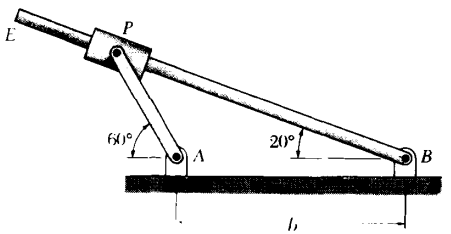


Fig. P15.115 y P15.117

15.117 y 15.118 Dos barras giratorias están conectadas por un bloque deslizante P. La velocidad $\mathbf{v}_0$ del bloque deslizante relativa a la barra sobre la cual desliza es constante y se dirige hacia afuera. A partir de los datos proporcionados determínese la velocidad angular de cada barra para la posición aquí mostrada.

15.117 $b = 300$ mm, $v_0 = 480$ mm/s.
15.118 $b = 8$ in, $v_0 = 9$ in/s.

15.119 El movimiento del pasador P está guiado por las ranuras de las barras AE y BD. Si se sabe que las barras giran con velocidades angulares constantes $\omega_A = 4$ rad/s y $\omega_B = 5$ rad/s, determínese la velocidad del pasador P en la posición aquí mostrada.

15.120 El movimiento del pasador P está guiado por las ranuras de las barras AE y BD. Sabiendo que las barras giran con velocidades angulares constantes $\omega_A = 4$ rad/s y $\omega_B = 5$ rad/s, determínese la velocidad del pasador P para la posición indicada en la figura.

15.121 Cuatro pasadores deslizan en las cuatro ranuras de una placa circular como aquí se muestra. Cuando la placa está en reposo cada pasador tiene una velocidad dirigida en la forma aquí mostrada y de igual módulo constante u. Si cada pasador mantiene la misma velocidad en relación con la placa cuando ésta gira con respecto a O con una velocidad constante ω de sentido contrario a las manecillas del reloj, determínese la aceleración de cada pasador.

15.122 Resuélvase el problema 15.121, suponiendo que la placa gira con respecto a O con una velocidad angular constante ω en el sentido de las manecillas del reloj.

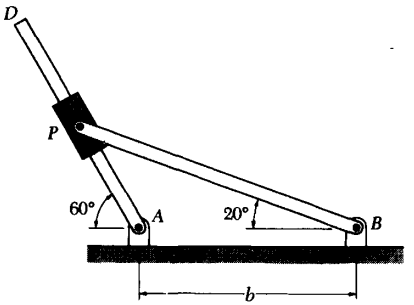


Fig. P15.116 y P15.118

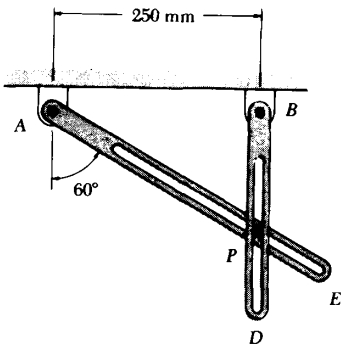


Fig. P15.119 y P15.120

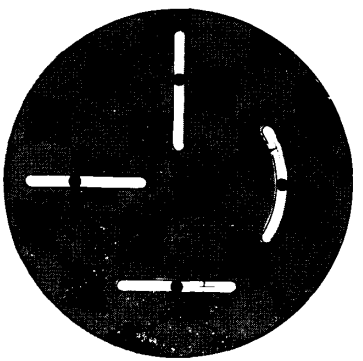


Fig. P15.121

15.123 En el instante mostrado en la figura la longitud de la pluma está siendo reducida a una velocidad constante de 6 in/s y la pluma se está bajando con una velocidad de 0.075 rad/s. Sabiendo que $\theta = 30°$, determínense *a*) la velocidad del punto *B* y *b*) la aceleración del punto *B*.

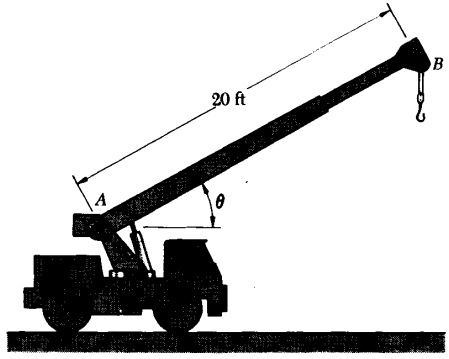


Fig. P15.123 y P15.124

15.124 En el instante que se muestra la longitud de la pluma está aumentando a una velocidad constante de 6 in/s y la pluma se baja a una velocidad constante de 0.075 rad/s. Si $\theta = 30°$, determínese *a*) la velocidad del punto *B* y *b*) la aceleración del punto *B*.

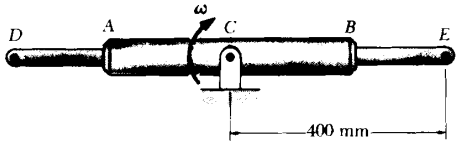


Fig. P15.125

15.125 El cilindro hueco *AB* gira en el sentido de las manecillas del reloj con una velocidad angular constante $\omega = 8$ rad/s respecto de un eje en *C*. Si en la posición mostrada la barra *DE* se mueve hacia la derecha a una velocidad constante de 2.5 m/s, determínese *a*) la aceleración del punto *E* y *b*) la aceleración del punto de la barra que coincide con el punto *C*.

15.126 En el dispositivo de soldadura automática mostrado en la figura, la posición de los dos extremos para soldar, *G* y *H* se controla por el cilindro hidráulico *D* y la barra *BC*. El cilindro se sujeta con un perno a la barra vertical, la cual gira en sentido contrario a las manecillas del reloj con respecto a *A*, con una velocidad angular constante de 1.6 rad/s. Sabiendo que la longitud *EF* del ensamblaje de soldadura aumenta a una velocidad constante de 300 mm/s, determínense en el instante mostrado *a*) la velocidad del extremo *H* y *b*) la aceleración del extremo *H*.

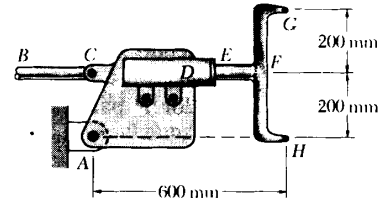


Fig. P15.126

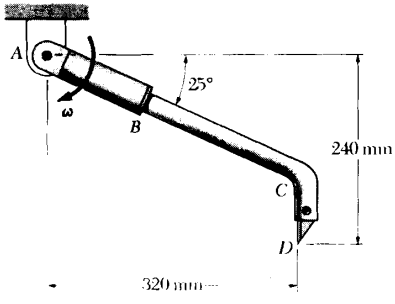


Fig. P15.128

15.127 En el problema 15.126, determínense *a*) la velocidad del extremo *G* y *b*) la aceleración del extremo *G*.

15.128 El movimiento de la cuchilla *D* se controla mediante el brazo robotizado *ABC*. En el instante indicado el brazo está girando en el sentido de las manecillas del reloj a una velocidad constante $\omega = 1.8$ rad/s y la longitud del tramo *BC* se está reduciendo a una velocidad constante de 250 mm/s, determínense *a*) la velocidad de *D* y *b*) la aceleración de *D*.

15.129 El cilindro hidráulico *CD* está soldado a un brazo que gira en el sentido de las manecillas del reloj respecto a *A*, a una velocidad constante $\omega = 2.4$ rad/s. Sabiendo que la barra *BE* se mueve hacia la derecha a una velocidad constante de 15 in/s respecto al cilindro, determínense en la posición mostrada *a*) la velocidad del punto *B* y *b*) la aceleración del punto *B*.

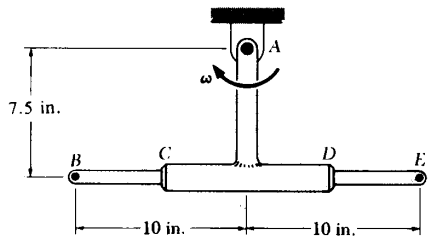


Fig. P15.129

15.130 En el problema 15.129 determínense *a*) la velocidad del punto *E* y *b*) la aceleración del punto *E*.

15.131 El mecanismo de cruz de Malta mostrado se emplea para proporcionar un movimiento giratorio intermitente del disco *S*. El disco *D* gira con una velocidad angular constante ω_D de 10 rad/s en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj. Un pasador *P* está unido al disco *D* y puede deslizar en una de las seis ranuras igualmente espaciadas del disco *S*. Se desea que la velocidad angular del disco *S* sea cero cuando el pasador entre y salga de cada una de las seis ranuras; esto ocurrirá si la distancia entre los centros de los discos y los radios de los discos se relacionan en la forma indicada. Determínese la velocidad y la aceleración angular del disco *S* en el instante en que $\phi = 150°$.

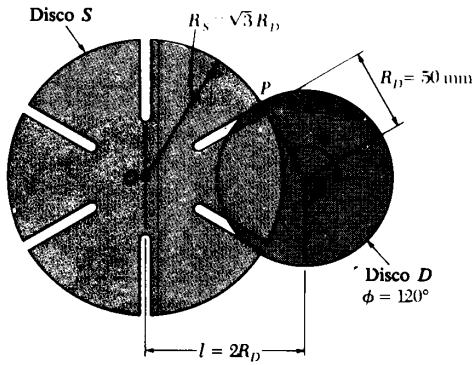


Fig. P15.131

15.132 En el problema 15.131 determínense la velocidad y la aceleración angulares del disco *S* en el instante en que $\phi = 135°$.

15.133 En el problema 15.115 determínese la aceleración angular de la barra articulada en *B*.

15.134 En el problema 15.118 determínese la velocidad angular de la barra articulada en *B*.

15.135 El pasador *P* desliza en la ranura circular de la placa que se indica con una velocidad relativa constante $u = 16$ in/s. Suponiendo que en el instante mostrado la velocidad angular ω de la placa es de 6 rad/s y se incrementa a razón de 20 rad/s^2, determínese la aceleración del pasador *P* cuando $\theta = 90°$.

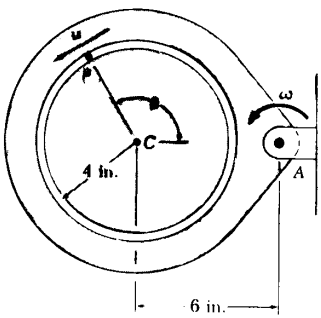


Fig. P15.135

15.136 Resuélvase el problema 15.135 cuando $\theta = 120°$.

15.137 La barra *AD* está doblada en forma de un arco de circunferencia de radio $b = 150$ mm. La posición de la barra se controla mediante el pasador *B* que desliza en la ranura horizontal y que también desliza a lo largo de la barra. Sabiendo que en el instante mostrado el pasador *B* se mueve a la derecha con una velocidad constante de 75 mm/s, determínense *a*) la velocidad angular de la barra y *b*) la aceleración angular de la barra.

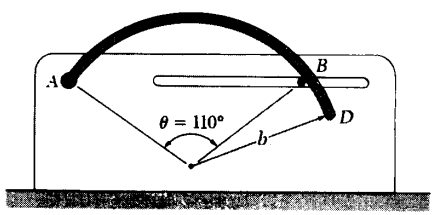


Fig. P15.137

15.138 Resuélvase el problema 15.137 cuando $\theta = 90°$.

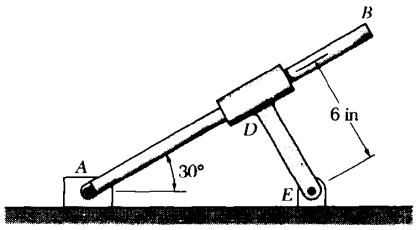


Fig. P15.141

*15.139 En el problema 15.119 determínese la aceleración del pasador *P*.

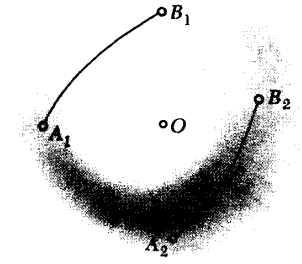
*15.140 En el problema 15.120 determínese la aceleración del pasador *P*.

*15.141 La barra *AB* pasa por un collarín que está soldado a la barra *DE*. Sabiendo que en el instante mostrado el bloque *A* se mueve a la derecha con una velocidad de 75 in/s, determínense *a*) la velocidad angular de la barra *AB*, *b*) la velocidad relativa al collarín del punto de la barra en contacto con el mismo y *c*) la aceleración del punto de la barra en contacto con el collarín. (*Sugerencia*. La barra *AB* y la barra *DE* tienen la misma ω y la misma α.)

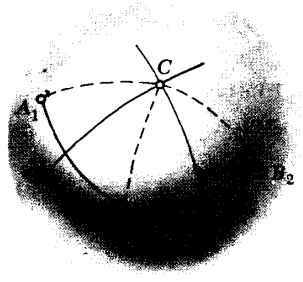
*15.142 Resuélvase el problema 15.141 suponiendo que el bloque se mueve hacia la izquierda con una velocidad constante de 75 in/s.

***15.12. Movimiento con un punto fijo.** Hemos estudiado en la sección 15.3 el movimiento de un sólido rígido forzado a girar alrededor de un eje fijo. Consideraremos ahora el caso más general del movimiento de un sólido rígido que tiene un punto fijo *O*.

Probaremos primero que *el desplazamiento más general de un sólido rígido con un punto fijo O es equivalente a una rotación del sólido con respecto a un eje que pasa por O*†. En vez de considerar al sólido rígido por sí mismo, podemos separar una esfera de centro *O* del sólido y analizar el movimiento de esa esfera. Naturalmente, el movimiento de la esfera caracteriza por completo el movimiento del sólido dado. Como tres puntos definen la posición de un sólido en el espacio, el centro *O* y los dos puntos *A* y *B* sobre la superficie de la esfera definirán la posición de ésta y por tanto la posición del sólido. Sean A_1 y B_1 los puntos que caracterizan la posición de la esfera en un instante *y* A_2 y B_2 su posición en un instante posterior (Fig. 15.31*a*). Como la esfera es rígida, la longitud de los arcos de círculo máximo A_1B_1 y A_2B_2 deben ser iguales, pero excepto por esta condición, las posiciones de A_1, A_2, B_1 y B_2 son arbitrarias. Nos proponemos probar que los puntos *A* y *B* pueden traerse respectivamente de A_1 y B_1 hasta A_2 y B_2 con una sola rotación de la esfera alrededor de un eje.



a)



b)

Fig. 15.31

Por conveniencia y sin perder generalidad podemos seleccionar el punto *B* de manera que su posición inicial coincida con la posición final de *A*; entonces $B_1 = A_2$ (Fig. 15.31*b*). Trazamos los arcos de círculo máximo A_1A_2, A_2B_2 y sus respectivas circunferencias bisectrices. Sea *C* el punto de la intersección de estas últimas; completamos la construcción trazando A_1C, A_2C y B_2C. Como se estableció antes, $A_1B_1 = A_2B_2$ tomando en cuenta la rigidez de la esfera; Por otra parte, como *C* es por construcción equidistante a A_1, A_2 y B_2, tenemos $A_1C = A_2C = B_2C$. En consecuencia, los triángulos esféricos A_1CA_2 y B_1CB_2 son congruentes y los ángulos A_1CA_2 y B_1CB_2 son iguales. Representando por θ el valor común de estos ángulos concluimos que la esfera puede traerse desde su posición inicial hasta su posición final por una sola rotación de θ con respecto al eje *OC*.

† Esto se conoce con el nombre de teorema de Euler.

Se sigue que el movimiento durante un intervalo de tiempo Δt de un sólido rígido con un punto fijo O puede considerarse como una rotación de $\Delta\theta$ con respecto a cierto eje. Trazando a lo largo de ese eje un vector de módulo $\Delta\theta/\Delta t$ y haciendo Δt tender a cero, obtenemos en el límite el *eje instantáneo de rotación* y la velocidad angular ω del sólido en el instante considerado (Fig. 15.32). La velocidad de una partícula P del sólido puede obtenerse entonces como en la sección 15.3, formando el producto vectorial de ω y del vector de posición $\mathbf{r}$ de la partícula:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \tag{15.37}$$

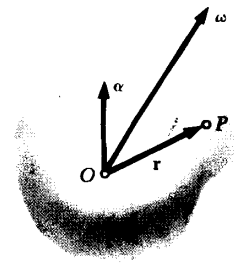


Fig. 15.32

La aceleración de la partícula se obtiene derivando (15.37) con respecto a t. Como en la sección 15.3, tenemos

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \tag{15.38}$$

donde la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ está definida como la derivada

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \tag{15.39}$$

de la velocidad angular ω.

En el caso del movimiento de un sólido rígido con un punto fijo, la dirección de ω y del eje instantáneo de rotación cambia de un instante al siguiente. Por consiguiente, la aceleración angular α refleja el cambio de ω tanto en dirección como en módulo y, en general, *no está dirigida a lo largo del eje instantáneo de rotación.* Aunque las partículas del sólido situadas sobre el eje instantáneo de rotación tienen velocidad nula, en el instante considerado su aceleración no es nula. Tampoco la aceleración de las distintas partículas del sólido *puede* determinarse como si el sólido estuviese girando en forma permanente con respecto al eje instantáneo.

Recordando la definición de la velocidad de una partícula con vector de posición $\mathbf{r}$, notamos que la aceleración angular α, expresada en (15.39), representa la velocidad del extremo del vector ω. Esta propiedad puede ser útil en la determinación de la aceleración angular de un sólido rígido. Por ejemplo, se sigue que el vector α es tangente a la curva descrita en el espacio por el extremo del vector ω.

Debemos observar que el vector ω se mueve dentro del sólido y en el espacio. Generando dos conos llamados *axoide móvil* y *axoide fijo* respectivamente (Fig. 15.33)†. Debe observarse que en cualquier instante los dos conos son tangentes a lo largo del eje instantáneo de rotación y que conforme el sólido se mueve, el axoide móvil parece *rodar* sobre el axoide fijo.

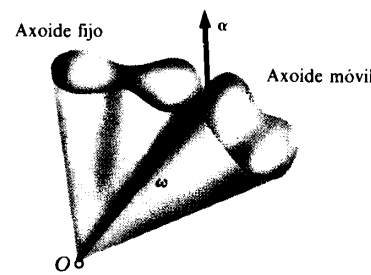
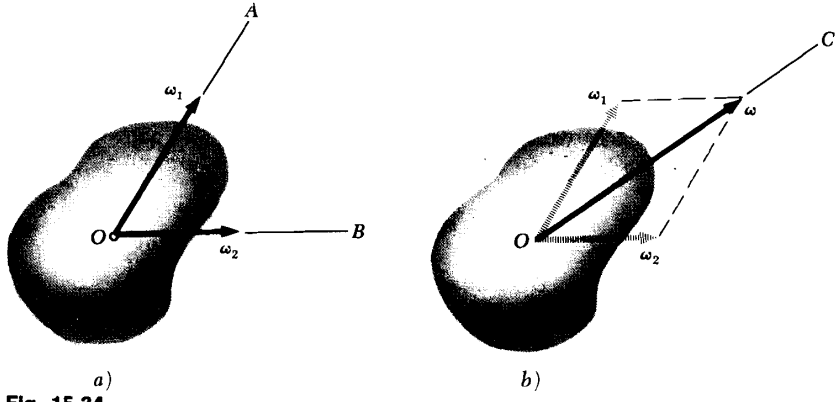


Fig. 15.33

† Recuérdese que un *cono* es, por definición, la superficie generada por una línea recta que pasa por un punto fijo. En general, los conos considerados aquí *no son conos circulares.*

Antes de concluir nuestro análisis del movimiento de un sólido rígido con un punto fijo debemos probar que las velocidades angulares son realmente vectores. Como se indicó en la sección 2.3, algunas magnitudes, como las *rotaciones finitas* de un sólido rígido, tienen módulo y dirección pero no obedecen la ley del paralelogramo para la suma; estas magnitudes no pueden considerarse como vectores. Ahora veremos que las velocidades angulares (y también las *rotaciones infinitesimales*) *obedecen* la ley del paralelogramo y por tanto son magnitudes vectoriales verdaderas.



a) *b)*

Fig. 15.34

Consideremos a un sólido rígido con un punto fijo O que en un instante dado gira simultáneamente con respecto a los ejes OA y OB, con velocidades angulares $\boldsymbol{\omega}_1$ y $\boldsymbol{\omega}_2$ (Fig. 15.34*a*). Sabemos que este movimiento, en el instante considerado, debe ser equivalente a una sola rotación de velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$. Nos proponemos comprobar que

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 \tag{15.40}$$

es decir, que la velocidad angular resultante puede obtenerse sumando $\boldsymbol{\omega}_1$ y $\boldsymbol{\omega}_2$ por la ley del paralelogramo (Fig. 15.34*b*).

Considérese una partícula P del sólido definida por el vector de posición $\mathbf{r}$. Representando por $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}$, respectivamente, la velocidad de P cuando el sólido gira con respecto a OA solamente, con respecto a OB únicamente y con respecto a ambos ejes simultáneamente, escribimos

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \qquad \mathbf{v}_1 = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r} \qquad \mathbf{v}_2 = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r} \tag{15.41}$$

Pero el carácter vectorial de las velocidades *lineales* está bien establecido (ya que representan las derivadas de vectores de posición). Por consiguiente, tenemos

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$$

donde el signo más indica la suma vectorial. Sustituyendo de (15.41), escribimos

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}$$
$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = (\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2) \times \mathbf{r}$$

donde el signo más sigue indicando la suma vectorial. Como la relación obtenida se cumple para cualquier $\mathbf{r}$, concluimos que (15.40) debe ser cierto.

***15.13. Movimiento general.** Consideraremos ahora el movimiento más general de un sólido rígido en el espacio. Sean A y B dos partículas del sólido. Recordemos de la sección 11.12 que la velocidad de B con respecto al sistema de referencia $OXYZ$ fijo puede expresarse como

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} \tag{15.42}$$

donde $\mathbf{v}_{B/A}$ es la velocidad de B relativa al sistema $AX'_Y'Z'$ unido a A y de rotación fija (Fig. 15.35). Como A está fija en este sistema, el movimiento del sólido relativo a $AX'Y'Z'$ es el movimiento de un sólido con un punto fijo. La velocidad relativa $\mathbf{v}_{B/A}$ puede, por tanto, obtenerse de (15.37) después de que $\mathbf{r}$ se ha sustituido por el vector de posición $\mathbf{r}_{B/A}$ de B relativa a A. Sustituyendo el valor de $\mathbf{v}_{B/A}$ en (15.42) escribimos

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A} \tag{15.43}$$

donde ω es la velocidad angular del sólido en el instante considerado.

La aceleración de B se obtiene por un razonamiento semejante. Escribimos primero

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$

y recordando la ecuación (15.38),

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) \tag{15.44}$$

donde α es la aceleración angular del sólido en el instante considerado.

Las ecuaciones (15.43) y (15.44) muestran que *el movimiento más general de un sólido rígido es equivalente, en cualquier instante, a la suma de una traslación* en la que todas las partículas del sólido tienen la misma velocidad y aceleración de la partícula de referencia A, y *a un movimiento en el que la partícula A se supone fija.* †

Puede comprobarse fácilmente al despejar $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{a}_A$, de las ecuaciones (15.43) y (15.44), que el movimiento del sólido con respecto a un sistema ligado a B debe caracterizarse por los mismos vectores ω y α de su movimiento relativo a $AX'Y'Z'$. Por tanto, la velocidad y aceleración angulares de un sólido rígido en un instante dado son independientes de la elección del punto de referencia. Por otra parte, se debe recordar que si está ligado a A o a B, el sistema en movimiento debe mantener una orientación fija, esto es, debe permanecer paralelo al sistema de referencia fijo $OXYZ$ durante todo el movimiento del sólido rígido. En muchos problemas es más conveniente utilizar un sistema en movimiento al que se les permite girar tanto como trasladarse. El empleo de tales sistemas móviles se verá en las secciones 15.14 y 15.15.

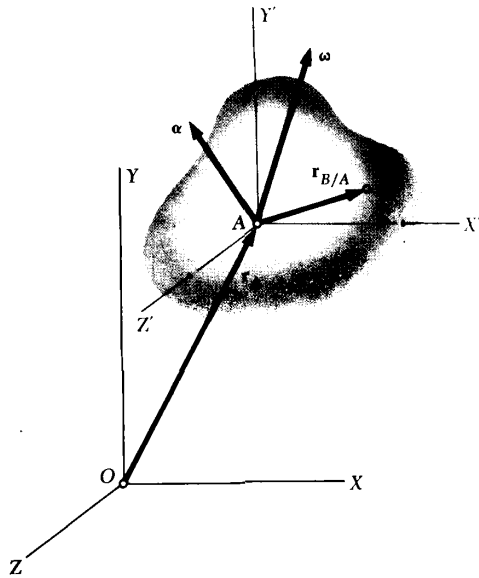
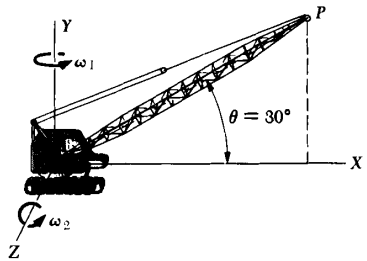


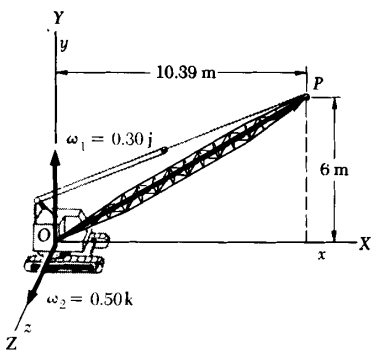
Fig. 15.35

† Recuérdese de la sección 15.12 que, en general, los vectores ω y α no son colineales y además, que las aceleraciones de las partículas del sólido en su movimiento relativo al sistema de referencia $AX'Y'Z'$ no se pueden determinar como si el sólido estuviese girando permanentemente sobre el eje instantáneo que pasa por A.



PROBLEMA RESUELTO 15.11

La grúa mostrada gira con una velocidad angular constante ω_1 de 0.30 rad/s. Simultáneamente, la pluma se eleva con una velocidad angular constante ω_2 de 0.50 rad/s relativa a la cabina. Sabiendo que la longitud de la pluma OP es l = 12 m, determínense: *a*) la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ de la pluma, *b*) la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ de la pluma, *c*) la velocidad **v** del extremo de la pluma, y *d*) la aceleración **a** del extremo de la pluma.



***a*) Velocidad angular de la pluma.** Sumando la velocidad angular ω_1 de la cabina y la velocidad angular ω_2 de la pluma relativa a la cabina, obtenemos la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ de la pluma en el instante considerado:

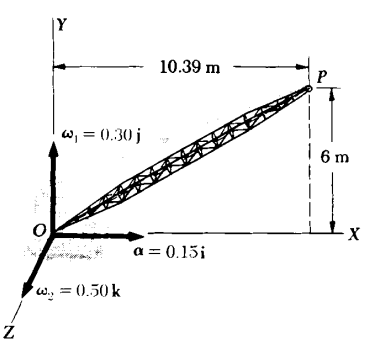
$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 \qquad \boldsymbol{\omega} = (0.30 \text{ rad/s})\mathbf{j} + (0.50 \text{ rad/s})\mathbf{k} \blacktriangleleft$$

***b*) Aceleración angular de la pluma.** La aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ de la pluma se obtiene diferenciando $\boldsymbol{\omega}$. Como el vector $\boldsymbol{\omega}_1$ es constante en módulo y dirección tenemos

$$\boldsymbol{\alpha} = \dot{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 + \dot{\boldsymbol{\omega}}_2 = 0 + \dot{\boldsymbol{\omega}}_2$$

donde la derivada temporal $\dot{\boldsymbol{\omega}}_2$ se calculará con respecto al sistema fijo $OXYZ$. Sin embargo, es más conveniente utilizar un sistema $Oxyz$ unido a la cabina y girando con ella ya que el vector $\boldsymbol{\omega}_2$ también gira con la cabina y por consiguiente tiene una derivada temporal nula con respecto a ese sistema. Aplicando la ecuación (15.31) con $\mathbf{Q} = \boldsymbol{\omega}_2$ y $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_1$ escribimos

$$(\dot{\mathbf{Q}})_{OXYZ} = (\dot{\mathbf{Q}})_{Oxyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{Q}$$
$$(\dot{\boldsymbol{\omega}}_2)_{OXYZ} = (\dot{\boldsymbol{\omega}}_2)_{Oxyz} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_2$$
$$\boldsymbol{\alpha} = (\dot{\boldsymbol{\omega}}_2)_{OXYZ} = 0 + (0.30 \text{ rad/s})\mathbf{j} \times (0.50 \text{ rad/s})\mathbf{k}$$
$$\boldsymbol{\alpha} = (0.15 \text{ rad/s}^2)\mathbf{i} \blacktriangleleft$$



c) **Velocidad del extremo de la pluma.** Notando que el vector de posición del punto P es $\mathbf{r} = (10.39 \text{ m})\mathbf{i} + (6 \text{ m})\mathbf{j}$ y mediante la expresión encontrada para $\boldsymbol{\omega}$ en la parte *a*, escribimos

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0.30 \text{ rad/s} & 0.50 \text{ rad/s} \\ 10.39 \text{ m} & 6 \text{ m} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{v} = -(3 \text{ m/s})\mathbf{i} + (5.20 \text{ m/s})\mathbf{j} - (3.12 \text{ m/s})\mathbf{k} \blacktriangleleft$$

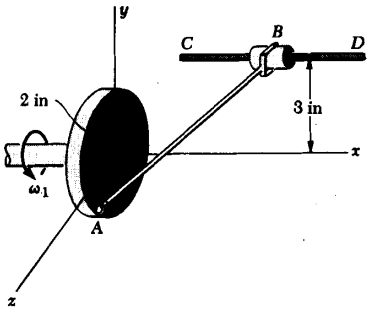
d) **Aceleración del extremo de la pluma.** Recordando que $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, escribimos

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$$

$$\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.15 & 0 & 0 \\ 10.39 & 6 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0.30 & 0.50 \\ -3 & 5.20 & -3.12 \end{vmatrix}$$

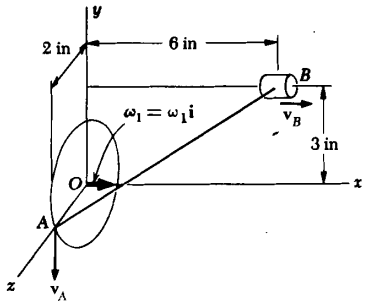
$$= 0.90\mathbf{k} - 0.94\mathbf{i} - 2.60\mathbf{i} - 1.50\mathbf{j} + 0.90\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a} = -(3.54 \text{ m/s}^2)\mathbf{i} - (1.50 \text{ m/s}^2)\mathbf{j} + (1.80 \text{ m/s}^2)\mathbf{k} \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESUELTO 15.12

La barra AB de longitud 7 in está unida al disco mediante una articulación esférica y al collarín B por una horquilla. El disco gira en el plano yz a una velocidad angular constante $\omega_1 = 12$ rad/s mientras que el collarín puede deslizar libremente sobre la barra CD. Para la posición $\theta = 0$ determínense: *a*) la velocidad del collarín, y *b*) la velocidad angular de la barra.



$\boldsymbol{\omega}_1 = 12\mathbf{i}$
$\mathbf{r}_A = 2\mathbf{k}$
$\mathbf{r}_B = 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$
$\mathbf{r}_{B/A} = 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

a) **Velocidad del collarín.** Como el punto A está unido al disco y el collarín B se mueve paralelo al eje x, tenemos

$$\mathbf{v}_A = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_A = 12\mathbf{i} \times 2\mathbf{k} = -24\mathbf{j} \qquad \mathbf{v}_B = v_B\mathbf{i}$$

Representando por $\boldsymbol{\omega}$ la velocidad angular de la barra escribimos

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$$

$$v_B\mathbf{i} = -24\mathbf{j} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ 6 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$v_B\mathbf{i} = -24\mathbf{j} + (-2\omega_y - 3\omega_z)\mathbf{i} + (6\omega_z + 2\omega_x)\mathbf{j} + (3\omega_x - 6\omega_y)\mathbf{k}$$

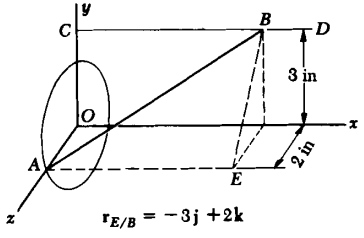
Igualando los coeficientes de los vectores unitarios tenemos

$$v_B = -2\omega_y - 3\omega_z \tag{1}$$
$$24 = 2\omega_x + 6\omega_z \tag{2}$$
$$0 = 3\omega_x - 6\omega_y \tag{3}$$

Multiplicando las ecuaciones (1), (2) y (3) por 6, 3 y -2 respectivamente, y sumándolas, escribimos

$$6v_B + 72 = 0 \qquad v_B = -12 \qquad \mathbf{v}_B = -(12 \text{ in./s})\mathbf{i} \blacktriangleleft$$

b) **Velocidad angular de la barra AB.** Notamos que la velocidad angular no puede determinarse de las ecuaciones (1), (2) y (3) ya que el determinante formado por los coeficientes de ω_x, ω_y y ω_z es cero. Por lo tanto, debemos obtener una ecuación adicional considerando la restricción impuesta por la horquilla en B.



$\mathbf{r}_{E/B} = -3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

La conexión horquilla-collarín en B permite la rotación de AB con respecto a la barra CD y también con respecto a un eje perpendicular al plano que contiene AB y a CD. Impide la rotación de AB con respecto al eje EB que es perpendicular a CD y que se encuentra en el plano que contiene a AB y CD. Entonces, la proyección de $\boldsymbol{\omega}$ sobre $\mathbf{r}_{E/B}$ debe ser nula y escribimos†

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_{E/B} = 0 \qquad (\omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k}) \cdot (-3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = 0$$
$$-3\omega_y + 2\omega_z = 0 \tag{4}$$

Resolviendo las ecuaciones de la (1) a la (4) simultáneamente, obtenemos

$$v_B = -12 \qquad \omega_x = 3.69 \qquad \omega_y = 1.846 \qquad \omega_z = 2.77$$

$$\boldsymbol{\omega} = (3.69 \text{ rad/s})\mathbf{i} + (1.846 \text{ rad/s})\mathbf{j} + (2.77 \text{ rad/s})\mathbf{k} \blacktriangleleft$$

† Podríamos observar también que la dirección de EB es la del triple producto vectorial $\mathbf{r}_{B/C} \times (\mathbf{r}_{B/C} \times \mathbf{r}_{B/A})$ y escribir $\boldsymbol{\omega} \cdot [\mathbf{r}_{B/C} \times (\mathbf{r}_{B/C} \times \mathbf{r}_{B/A})] = 0$. Esta formulación sería especialmente útil si la barra CD estuviese inclinada.

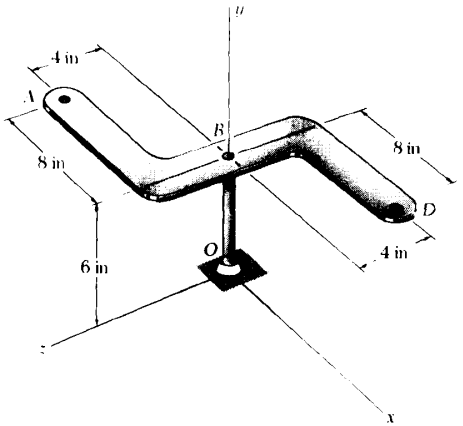


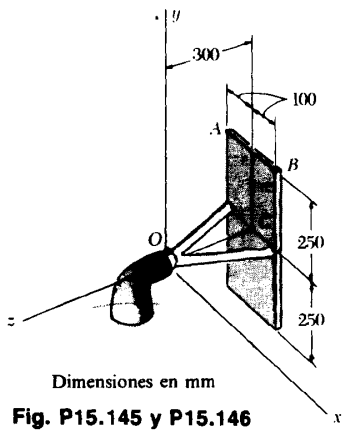
Fig. P15.143

Problemas

15.143 La placa ABD y la barra OB están unidas rígidamente y giran con respecto a la articulación esférica O con una velocidad angular $\boldsymbol{\omega} = \omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k}$. Sabiendo que $\mathbf{v}_A = (3 \text{ in/s})\mathbf{i} + (14 \text{ in/s})\mathbf{j} + (v_A)_z\mathbf{k}$ y que $\omega_x = 1.5$ rad/s, determínense *a*) la velocidad angular del conjunto y *b*) la velocidad del punto D.

15.144 Resuélvase el problema 15.143 suponiendo que $\omega_x = -1.5$ rad/s.

15.145 La placa y las barras que se indican están unidas mediante soldaduras para formar un ensamblaje que gira respecto a la articulación esférica O con una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$. Representando la velocidad del punto A mediante $\mathbf{V}_A = (v_A)_x\mathbf{i} + (v_A)_y\mathbf{j} + (v_A)_z\mathbf{k}$ y sabiendo que $(v_A)_x = 10$ mm/s y $(v_A)_z = 80$ mm/s, determínese la componente $(v_A)_y$ de velocidad.



Dimensiones en mm

Fig. P15.145 y P15.146

15.146 La placa y las barras mostradas están unidas mediante soldadura para formar un ensamblaje que gira respecto a la articulación esférica O con una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$. Si $(v_A)_z = 500$ mm/s, $(v_B)_z = 100$ mm/s y $\omega_z = 3$ rad/s, determínense *a*) la velocidad angular del ensamblaje y *b*) las velocidades de los puntos A y B.

15.147 El disco de una lijadora portátil gira a una velocidad constante $\omega_1 = 4400$ rpm en la forma indicada. Determínese la aceleración angular del disco conforme el operador hace girar la lijadora alrededor del eje z con una velocidad angular de 0.5 rad/s y una

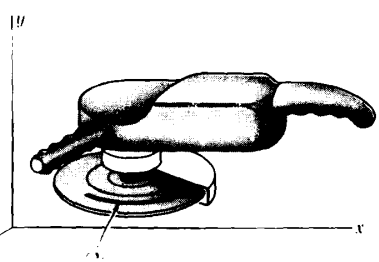


Fig. P15.147

aceleración angular de 2.5 rad/s², ambas en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj vista desde el eje z positivo.

15.148 Si el rotor de la turbina que se indica gira a una velocidad constante $\omega_1 = 9000$ rpm, determínese la aceleración angular del rotor si la carcasa de la turbina tiene una velocidad angular constante de 2,4 rad/s en el sentido de las manecillas del reloj vista desde *a*) el eje y positivo y *b*) el eje z positivo.

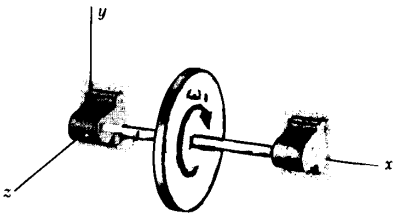


Fig. P15.148

15.149 El ventilador del motor de un automóvil gira alrededor de un eje horizontal a razón de 2750 rpm en el sentido de las manecillas del reloj visto desde la parte trasera del motor. Sabiendo que el automóvil está tomando una curva de 50 ft de radio a la derecha a una velocidad constante de 12 mi/h, determínese la aceleración angular del ventilador en el instante en que el automóvil se está moviendo hacia el norte.

15.150 Dos discos A y B están montados sobre un eje de longitud $2R$ y ruedan sin deslizar sobre un plano horizontal. Si el eje gira con una velocidad constante ω_1, determínense *a*) la velocidad angular del disco A y *b*) la aceleración angular del disco A.

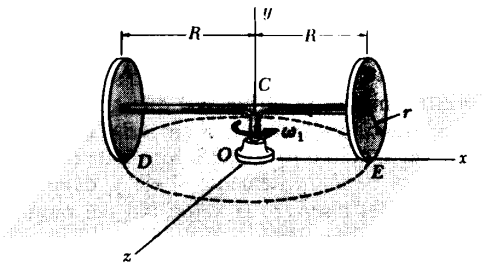


Fig. P15.150

15.151 En el problema 15.150 determínense *a*) la velocidad angular del disco B y *b*) la aceleración angular del disco B.

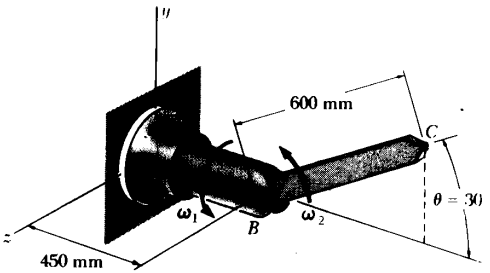


Fig. P15.152

15.152 La pieza de robot aquí mostrada gira con una velocidad angular constante de 3 rad/s alrededor del eje x. En el instante mostrado el brazo BC está girando respecto al eje z con una velocidad angular ω_2 que tiene un módulo $\omega_2 = 4$ rad/s y que se incrementa a razón $\dot{\omega}_2 = 5$ rad/s². Determínese la aceleración angular del brazo BC.

15.153 En el problema 15.152 determínense *a*) la velocidad del punto C y *b*) la aceleración del punto C.

15.154 Un disco de radio r gira a una velocidad angular constante ω_2 en torno a un eje horizontal sostenido por una barra vertical con extremo de horquilla que gira a una velocidad angular constante ω_1. Para la posición mostrada en la figura, determínense *a*) la aceleración angular del disco, *b*) la aceleración del punto P sobre el borde del disco si $\theta = 0$ y *c*) la aceleración de P si $\theta = 90°$.

15.155 Un disco de radio r gira a una velocidad angular constante ω_2 en torno a un eje horizontal sostenido por una barra vertical con extremo de horquilla, que gira a una velocidad angular constante ω_1. Para la posición mostrada, determínese la aceleración del punto P para un valor arbitrario del ángulo θ.

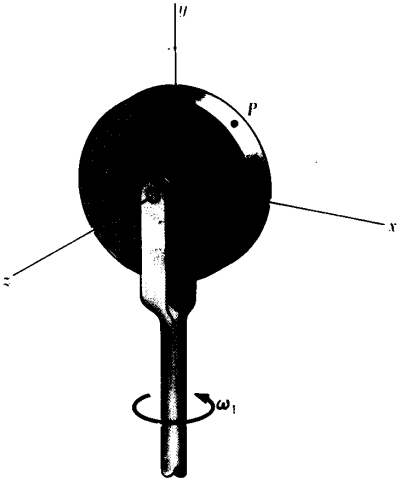


Fig. P15.154 y P15.155

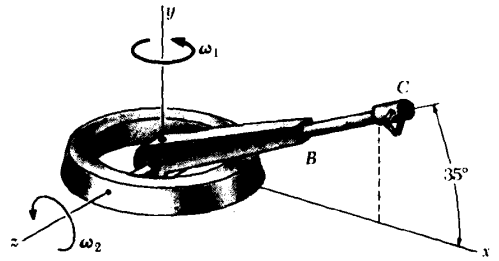


Fig. P15.156

15.156 En el instante aquí mostrado, el brazo de robot ABC está girando simultáneamente a una velocidad constante $\omega_1 = 0.15$ rad/s con respecto al eje y, y a una velocidad constante $\omega_2 = 0.25$ rad/s con respecto al eje z. Sabiendo que la longitud del brazo ABC es 40 in, determínense *a*) la aceleración angular del brazo, *b*) la velocidad del punto C, *c*) la aceleración del punto C.

15.157 Resuélvase el problema 15.156 suponiendo que $\omega_1 = 0.25$ rad/s y $\omega_2 = 0.15$ rad/s.

15.158 Resuélvase el problema 15.156 suponiendo que en el instante mostrado ambas velocidades angulares ω_1 y ω_2 decrecen a razón de 0.02 rad/s^2.

15.159 Un disco de radio r está montado sobre un eje de longitud $2r$. El eje está unido a un árbol AD que gira a una velocidad constante ω_1 y el disco gira respecto al eje AB a la razón constante ω_2. Sabiendo que el ángulo θ permanece constante de manera que el borde del disco toca permanentemente al eje y, determínense *a*) la aceleración angular del disco, *b*) la velocidad del punto C y *c*) la aceleración del punto C del disco.

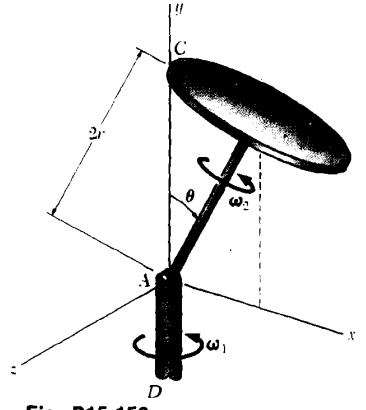
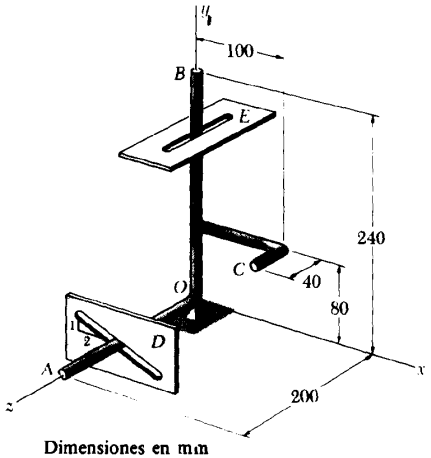


Fig. P15.159

15.160 Varias barras se sueldan juntas para formar el brazo guía de robot mostrado en la figura que está unido a una articulación esférica en O. La barra OA desliza en una ranura recta inclinada mientras la barra OB desliza en una ranura paralela al eje z. Sabiendo que en el instante mostrado $\mathbf{v}_B = (180 \text{ mm/s})\mathbf{k}$, determínense *a*) la velocidad angular del brazo guía, *b*) la velocidad del punto A y *c*) la velocidad del punto C.

15.161 En el problema 15.160 se sabe que la velocidad del punto B es constante. Para la posición mostrada, determínense *a*) la aceleración angular del brazo guía y *b*) la aceleración del punto C.



Dimensiones en mm

Fig. P15.160

15.162 En el sistema de engranaje móvil aquí mostrado, los engranajes A y B están unidos rígidamente entre sí y giran solidariamente con respecto al árbol inclinado. Los engranajes C y D giran con velocidades angulares constantes de 30 rad/s y 20 rad/s, respectivamente (ambos en sentido contrario a las manecillas del reloj vistos desde la derecha). Escogiendo el eje x a la derecha y el eje y hacia arriba y el eje z apuntando hacia afuera de la figura. Determínense *a*) la velocidad angular común de los engranajes A y B y *b*) la velocidad angular del árbol FH que está unido rígidamente al árbol inclinado.

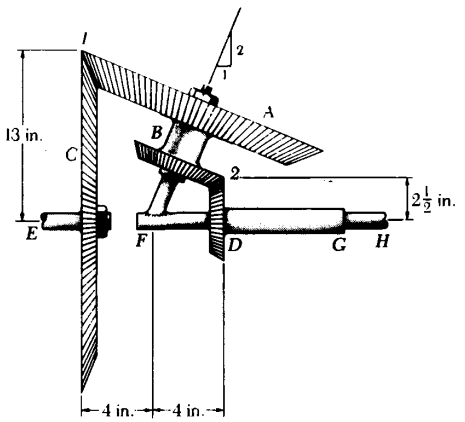


Fig. P15.162

15.163 En el problema 15.162 determínense *a*) la aceleración angular común de los engranajes A y B y *b*) la aceleración del diente del engranaje A que está en contacto con el engranaje C en el punto 1.

15.164 El cono pequeño mostrado gira sin deslizar sobre la superficie interior del cono mayor fijo. Representando por ω_1 la velocidad angular constante del eje OB alrededor del eje y, determínense en términos de ω_1, β y γ *a*) la velocidad de giro del cono alrededor del eje OB, *b*) la velocidad angular del cono y *c*) la aceleración angular del cono.

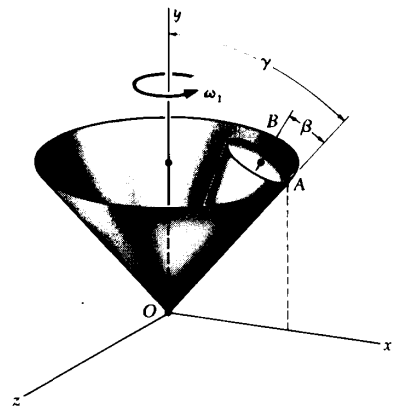


Fig. P15.164

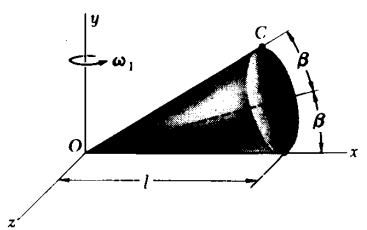


Fig. P15.165

15.165 El cono mostrado en la figura gira sobre el plano zx con su vértice en el origen de las coordenadas. Representando por ω_1 la velocidad angular constante del eje OB del cono con respecto al eje y, determínense *a*) la velocidad de giro del cono con respecto al eje OB, *b*) la velocidad angular total del cono y *c*) la aceleración angular del cono.

15.166 La barra BC de longitud 21 in está articulada al collarín C y el brazo giratorio AB. Sabiendo que el brazo AB gira en el plano xy a la velocidad angular constante $\omega_0 = 18$ rad/s, determínese la velocidad del collarín C para la posición que se indica.

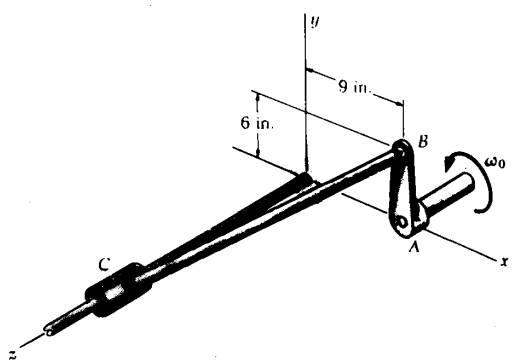


Fig. P15.166

15.167 La barra AB de longitud 11 in está articulada a los collarines A y B que deslizan a lo largo de las dos barras mostradas. Sabiendo que el collarín B se mueve hacia abajo con un velocidad constante de 54 in/s, determínese la velocidad del collarín A cuando $c = 2$ in.

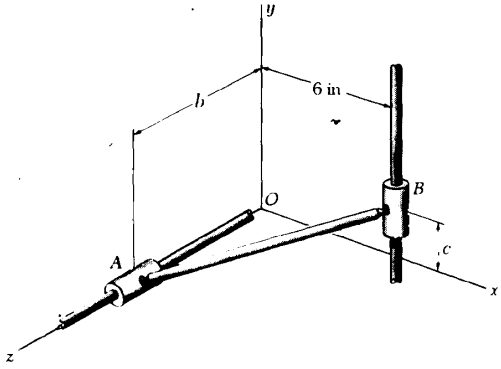


Fig. P15.167

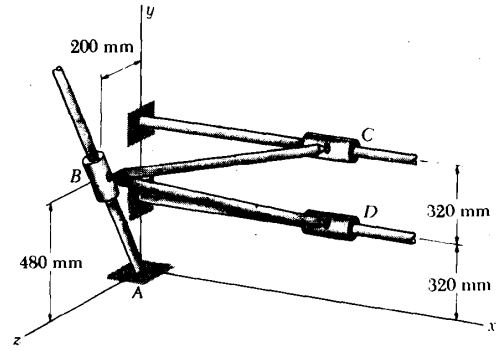


Fig. P15.168

15.168 Las barras BC y BD, cada una de 840 mm de longitud, están articuladas a collarines que pueden deslizar sobre las barras mostradas. Si en el instante que se indica el collarín B se mueve hacia A con una velocidad constante de 390 mm/s, determínense la velocidad del collarín C para esta posición.

15.169 En el problema 15.168 determínese la velocidad del collarín D.

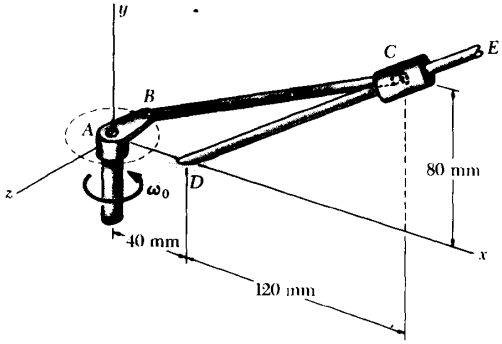


Fig. P15.170

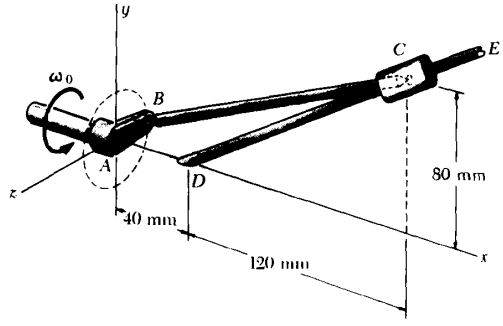


Fig. P15.171

15.170 y 15.171 La barra BC de longitud 180 mm está articulada al brazo giratorio B y al collarín C que puede deslizar sobre la barra fija DE. El brazo AB tiene una longitud de 20 mm y gira a una velocidad angular constante $\omega_0 = 20$ rad/s. Para la posición indicada determínese la velocidad del collarín C.

15.172 Dos ejes AC y GE situados en el plano vertical yz están conectados por una junta universal en D. El eje AC gira con una velocidad angular constante ω_1, en la forma indicada. En el momento en que el eje de la pieza transversal unida al eje AC está vertical, determínese la velocidad angular del eje EG.

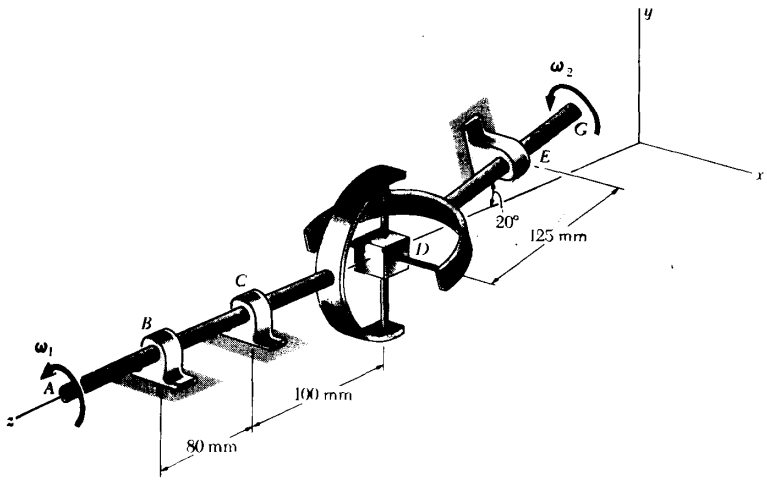


Fig. P15.172

15.173 Resuélvase el problema 15.172 suponiendo que el brazo de la cruceta unida al eje AC es horizontal.

15.174 En el problema 15.167 la articulación esférica entre la barra y el collarín B se sustituye por la conexión de horquilla mostrada en la figura. Determínense *a*) la velocidad angular de la barra y *b*) la velocidad del collarín A.

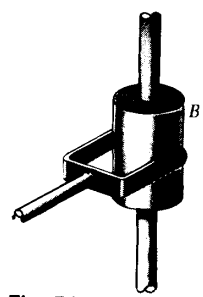


Fig. P15.174

15.175 En el problema 15.168 la articulación esférica entre la barra y el collarín C se sustituye por la conexión de horquilla indicada. Determínense *a*) la velocidad angular de la barra y *b*) la velocidad del collarín C.

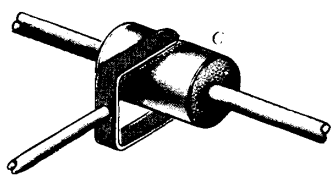


Fig. P15.175

*15.176 En el problema 15.167 determínese la aceleración del collarín A cuando $c = 7$ in.

*15.177 En el problema 15.167 determínese la aceleración del collarín A cuando $c = 2$ in.

*15.178 En el problema 15.168 determínese la aceleración del collarín C.

*15.179 En el problema 15.170 determínese la aceleración del collarín C.

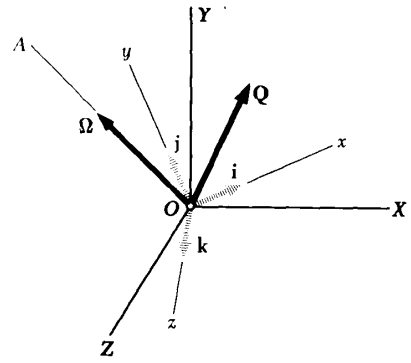


Fig. 15.36

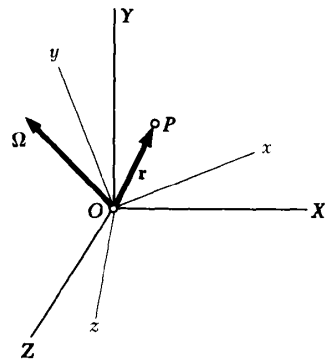


Fig. 15.37

***15.14. Movimiento tridimensional de una partícula respecto a un sistema en rotación: Aceleración de Coriolis.** Vimos en la sección 15.10 que dada una función vectorial $\mathbf{Q}(t)$ y dos sistemas de referencia con origen en O —un sistema fijo $OXYZ$ y un sistema giratorio $Oxyz$—, la derivada temporal de $\mathbf{Q}$ con respecto a los dos sistemas satisfacen la relación

$$(\dot{\mathbf{Q}})_{OXYZ} = (\dot{\mathbf{Q}})_{Oxyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{Q} \tag{15.31}$$

Supusimos que el sistema $Oxyz$ únicamente podía girar alrededor de un eje fijo OA. Sin embargo, la deducción de la sección 15.10 continúa siendo válida cuando el sistema $Oxyz$ puede moverse con un punto fijo O. Bajo esta suposición más general, el eje OA representa el eje *instantáneo* de rotación del sistema $Oxyz$ (Secc. 15.12), y el vector $\boldsymbol{\Omega}$ su velocidad angular en el instante considerado (Fig. 15.36).

Consideraremos ahora el movimiento tridimensional de la partícula P respecto a una sistema giratorio $Oxyz$ con un origen fijo O. Sea $\mathbf{r}$ el vector de posición de P en un instante dado y $\boldsymbol{\Omega}$ la velocidad angular del sistema $Oxyz$ con respecto al sistema fijo $OXYZ$ en el mismo instante (Fig. 15.37). Los resultados obtenidos en la sección 15.11 para el movimiento bidimensional de una partícula pueden extenderse al caso tridimensional y podemos expresar la velocidad absoluta $\mathbf{v}_P$ de P (es decir, su velocidad con respecto al sistema fijo $OXYZ$) como

$$\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} + (\dot{\mathbf{r}})_{Oxyz} \tag{15.45}$$

Representando por $\mathcal{F}$ al sistema giratorio $Oxyz$, escribimos esta relación en la forma alternativa

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{P'} + \mathbf{v}_{P/\mathcal{F}} \tag{15.46}$$

donde $\mathbf{v}_P$ = velocidad absoluta de la partícula P
$\mathbf{v}_{P'}$ = velocidad del punto P' del sistema móvil $\mathcal{F}$ que coincide con P
$\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$ = velocidad de P relativa al sistema móvil $\mathcal{F}$

La aceleración absoluta $\mathbf{a}_P$ de P puede expresarse como

$$\mathbf{a}_P = \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\dot{\mathbf{r}})_{Oxyz} + (\ddot{\mathbf{r}})_{Oxyz} \tag{15.47}$$

Podemos utilizar también la forma alternativa

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_{P'} + \mathbf{a}_{P/\mathcal{F}} + \mathbf{a}_c \tag{15.48}$$

donde $\mathbf{a}_P$ = aceleración absoluta de la partícula P
$\mathbf{a}_{P'}$ = aceleración del punto P' del sistema móvil $\mathcal{F}$ que coincide con P

$\mathbf{a}_{P/\mathcal{F}}$ = aceleración de P relativa al sistema móvil $\mathcal{F}$

$2\boldsymbol{\Omega} \times (\dot{\mathbf{r}})_{Oxyz} = 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$

$\mathbf{a}_c$ = aceleración complementaria o de Coriolis†

Notamos que la aceleración de Coriolis es perpendicular al vector $\boldsymbol{\Omega}$ y a $\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$. Sin embargo, como estos vectores no son necesariamente perpendiculares entre sí, el módulo de $\mathbf{a}_c$ *no es* igual por lo general a $2\Omega_{P/\mathcal{F}}$ como en el caso del movimiento plano de una partícula. Notamos además que la aceleración de Coriolis se reduce a cero cuando los vectores $\boldsymbol{\Omega}$ y $\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$ son paralelos o cuando alguno de ellos es nulo.

Los sistemas de referencia giratorios son particularmente útiles en el estudio del movimiento tridimensional de los sólidos rígidos. Si un sólido rígido tiene un punto fijo O, como en el caso de la grúa del problema resuelto 15.11, podemos utilizar un sistema $Oxyz$ que no esté ni fijo ni rígidamente unido al sólido rígido. Representando por $\boldsymbol{\Omega}$ la velocidad angular del sistema $Oxyz$ podemos descomponer la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del sólido en las componentes $\boldsymbol{\Omega}$ y $\boldsymbol{\omega}_{B/\mathcal{F}}$ donde la segunda componente representa la velocidad angular del sólido relativa al sistema $Oxyz$ (véase problema resuelto 15.14). Una elección adecuada del sistema giratorio conducirá con frecuencia a un análisis más sencillo de movimiento de sólido rígido que el que se obtendría con ejes de orientación fija. Esto es especialmente cierto en el caso del movimiento tridimensional de un sólido rígido, es decir, cuando el sólido rígido que se considera no tiene un punto fijo (véase problema resuelto 15.15).

*15.15. Sistema de referencia en el movimiento general.

Considérese un sistema de referencia fijo $OXYZ$ y un sistema $Axyz$ que se mueve de forma conocida pero arbitraria con respecto a $OXYZ$ (Fig. 15.38). Sea P una partícula moviéndose en el espacio. La posición de P está definida en cualquier instante por el vector $\mathbf{r}_P$ en el sistema fijo y por el vector $\mathbf{r}_{P/A}$ en el sistema en movimiento. Representando por $\mathbf{r}_A$ el vector de posición de A en el sistema fijo, tenemos

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{P/A} \tag{15.49}$$

La velocidad absoluta $\mathbf{v}_p$ de la partícula se obtiene escribiendo

$$\mathbf{v}_P = \dot{\mathbf{r}}_P = \dot{\mathbf{r}}_A + \dot{\mathbf{r}}_{P/A} \tag{15.50}$$

donde las derivadas están definidas respecto al sistema fijo $OXYZ$. El primer término del segundo miembro de (15.50) representa entonces la velocidad $\mathbf{v}_A$ del origen A de los ejes en movimiento. Por otra parte, como la derivada temporal del vector es la misma con respecto a un sistema fijo y con respecto a un sistema de traslación (Secc. 11.10), el segundo término puede considerarse como la velocidad $\mathbf{v}_{P/A}$ de P relativa al sistema $AX'Y'Z'$ de la misma orientación que $OXYZ$ y el mismo origen que $Axyz$. Por consiguiente tenemos

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{P/A} \tag{15.51}$$

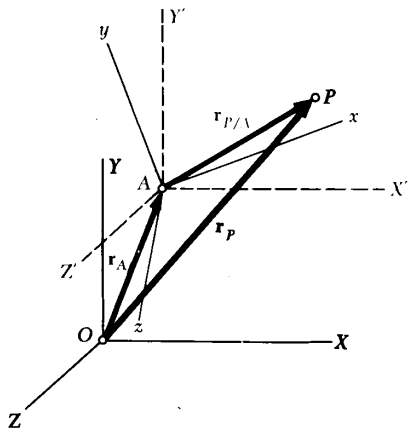


Fig. 15.38

† Es importante advertir la diferencia entre la ecuación (15.48) y la ecuación (15.21) de la sección 15.8. Véase la nota al pie de la página 677.

Pero la velocidad $\mathbf{v}_{P/A}$ de P relativa a $AX'Y'Z'$ puede obtenerse de (15.45) sustituyendo $\mathbf{r}_{P/A}$ por $\mathbf{r}$ en esa ecuación. Escribimos

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{P/A} + (\dot{\mathbf{r}}_{P/A})_{Axyz} \tag{15.52}$$

donde $\boldsymbol{\Omega}$ es la velocidad angular del sistema $Axyz$ en el instante considerado.

La aceleración absoluta $\mathbf{a}_P$ de la partícula se obtiene al derivar (15.51) y escribiendo

$$\mathbf{a}_P = \dot{\mathbf{v}}_P = \dot{\mathbf{v}}_A + \dot{\mathbf{v}}_{P/A} \tag{15.53}$$

donde las derivadas están definidas con respecto a cualquiera de los sistemas $OXYZ$ o $AX'Y'Z'$. Por tanto, el primer término del segundo miembro de (15.53) representa la aceleración $\mathbf{a}_A$ del origen A de los ejes en movimiento y el segundo término la aceleración $\mathbf{a}_{P/A}$ de P relativa al sistema $AX'Y'Z'$. Esta aceleración puede obtenerse de (15.47) sustituyendo $\mathbf{r}_{P/A}$ por $\mathbf{r}$. Por consiguiente, escribimos

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{P/A} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{P/A}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\dot{\mathbf{r}}_{P/A})_{Axyz} + (\ddot{\mathbf{r}}_{P/A})_{Axyz} \tag{15.54}$$

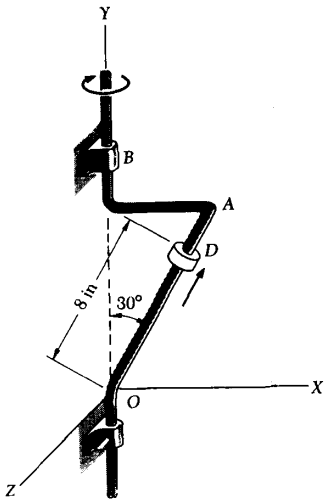
Las fórmulas (15.52) y (15.54) permiten determinar la velocidad y aceleración de una partícula dada con respecto a un sistema de referencia fijo cuando se conoce el movimiento de la partícula con respecto a un sistema en movimiento. Estas fórmulas son más importantes y considerablemente más fáciles de recordar si observamos que la suma de los primeros dos términos (15.52) representa la velocidad del punto P' del sistema en movimiento que coincide con P en el instante considerado y que la suma de los primeros tres términos en (15.54) representa la aceleración del mismo punto. Entonces, las relaciones (15.46) y (15.48) de la sección anterior siguen siendo válidas en el caso de un sistema de referencia en movimiento general y escribimos

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{P'} + \mathbf{v}_{P/\mathcal{F}} \tag{15.46}$$

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_{P'} + \mathbf{a}_{P/\mathcal{F}} + \mathbf{a}_c \tag{15.48}$$

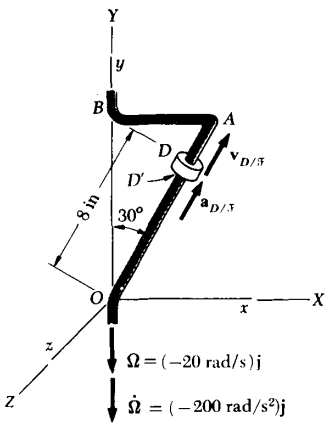
donde los distintos vectores que aparecen han sido definidos en la sección 15.14.

Podemos observar que si el sistema de referencia en movimiento $\mathcal{F}$ (o $Axyz$) se está trasladando, la velocidad y la aceleración del punto P' que coincide con P se convierten en la velocidad y la aceleración del origen A del sistema. Por otra parte, como el sistema mantiene una orientación fija, $\mathbf{a}_c$ es nula y las relaciones (15.46) y (15.48) se reducen a las relaciones (11.33) y (11.34), respectivamente, encontradas en la sección 11.12.



PROBLEMA RESUELTO 15.13

La barra doblada *OAB* gira con respecto a la vertical *OB*. En el instante considerado su velocidad y su aceleración angulares son 20 rad/s y 200 rad/s^2, respectivamente, ambas en el sentido de las manecillas del reloj vistas desde el eje *Y* positivo. El collarín *D* se mueve a lo largo de la barra y en el instante considerado *OD* = 8 in, la velocidad y la aceleración del collarín relativas a la barra son 50 in/s y 600 in/s^2, respectivamente, ambas hacia arriba. Determínense: *a*) la velocidad del collarín, y *b*) la aceleración del collarín.



Sistemas de referencia. El sistema *OXYZ* está fijo. Unimos el sistema giratorio *Oxyz* a la barra doblada. Su velocidad y aceleración angulares relativas a *OXYZ* son, por consiguiente, $\boldsymbol{\Omega} = (-20 \text{ rad/s})\mathbf{j}$ y $\dot{\boldsymbol{\Omega}} = (-200 \text{ rad/s}^2)\mathbf{j}$, respectivamente. El vector de posición de *D* es

$$\mathbf{r} = (8 \text{ in})(\text{sen } 30°\mathbf{i} + \cos 30°\mathbf{j}) = (4 \text{ in})\mathbf{i} + (6.93 \text{ in})\mathbf{j}$$

***a*) La velocidad $\mathbf{v}_D$.** Representando por *D'* el punto de la barra que coincide con *D* y por $\mathcal{F}$ el sistema giratorio *Oxyz*, escribimos de la ecuación (15.46)

$$\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_{D'} + \mathbf{v}_{D/\mathcal{F}} \tag{1}$$

donde

$$\mathbf{v}_{D'} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} = (-20 \text{ rad/s})\mathbf{j} \times [(4 \text{ in})\mathbf{i} + (6.93 \text{ in})\mathbf{j}] = (80 \text{ in/s})\mathbf{k}$$
$$\mathbf{v}_{D/\mathcal{F}} = (50 \text{ in/s})(\text{sen } 30°\mathbf{i} + \cos 30°\mathbf{j}) = (25 \text{ in/s})\mathbf{i} + (43.3 \text{ in/s})\mathbf{j}$$

Sustituyendo los valores obtenidos por $\mathbf{v}_{D'}$ y $\mathbf{v}_{D/\mathcal{F}}$ en (1) encontramos que

$$\mathbf{v}_D = (25 \text{ in/s})\mathbf{i} + (43.3 \text{ in/s})\mathbf{j} + (80 \text{ in/s})\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$$

***b*) La aceleración $\mathbf{a}_D$.** De la ecuación (15.48) escribimos

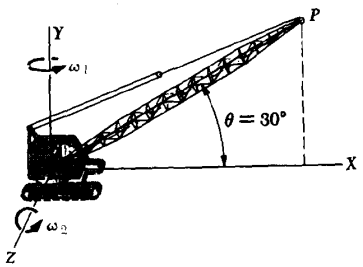
$$\mathbf{a}_D = \mathbf{a}_{D'} + \mathbf{a}_{D/\mathcal{F}} + \mathbf{a}_c \tag{2}$$

donde

$$\mathbf{a}_{D'} = \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$$
$$= (-200 \text{ rad/s}^2)\mathbf{j} \times [(4 \text{ in})\mathbf{i} + (6.93 \text{ in})\mathbf{j}] - (20 \text{ rad/s})\mathbf{j} \times (80 \text{ in/s})\mathbf{k}$$
$$= +(800 \text{ in/s}^2)\mathbf{k} - (1600 \text{ in/s}^2)\mathbf{i}$$
$$\mathbf{a}_{D/\mathcal{F}} = (600 \text{ in/s}^2)(\text{sen } 30°\mathbf{i} + \cos 30°\mathbf{j}) = (300 \text{ in/s}^2)\mathbf{i} + (520 \text{ in/s}^2)\mathbf{j}$$
$$\mathbf{a}_c = 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_{D/\mathcal{F}}$$
$$= 2(-20 \text{ rad/s})\mathbf{j} \times [(25 \text{ in/s})\mathbf{i} + (43.3 \text{ in/s})\mathbf{j}] = (1000 \text{ in/s}^2)\mathbf{k}$$

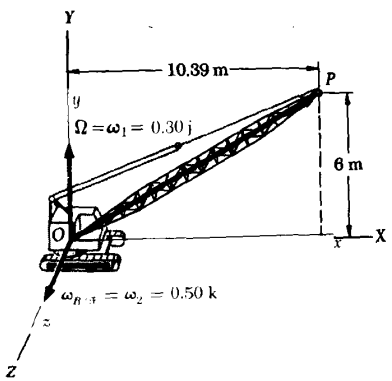
Sustituyendo los valores obtenidos para $\mathbf{a}_{D'}$, $\mathbf{a}_{D/\mathcal{F}}$ y $\mathbf{a}_c$ en (2)

$$\mathbf{a}_D = -(1300 \text{ in/s}^2)\mathbf{i} + (520 \text{ in/s}^2)\mathbf{j} + (1800 \text{ in/s}^2)\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESUELTO 15.14

La grúa mostrada gira con una velocidad angular constante ω_1 de 0.30 rad/s. Simultáneamente la pluma se eleva con una velocidad angular constante ω_2 de 0.50 rad/s relativa a la cabina. Sabiendo que la longitud de la pluma OP es $l = 12$ m, determínense: *a*) la velocidad del extremo de la pluma, y *b*) la aceleración del extremo de la pluma.



Sistemas de referencia. El sistema *OXYZ* está fijo. Unimos el sistema giratorio *Oxyz* a la cabina. Su velocidad angular con respecto al sistema *OXYZ* es por tanto $\Omega = \omega_1 = (0.30 \text{ rad/s})\mathbf{j}$. La velocidad angular de la pluma relativa a la cabina y el sistema giratorio *Oxyz* ($o\mathfrak{F}$, por brevedad) es $\omega_{B/\mathfrak{F}} = \omega_2 = (0.50 \text{ rad/s})\mathbf{k}$.

a) **La velocidad $\mathbf{v}_P$.** De la ecuación (15.46) escribimos

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{P'} + \mathbf{v}_{P/\mathfrak{F}} \tag{1}$$

donde $\mathbf{v}_{P'}$ es la velocidad del punto P' del sistema giratorio que coincide con P:

$$\mathbf{v}_{P'} = \Omega \times \mathbf{r} = (0.30 \text{ rad/s})\mathbf{j} \times [(10.39 \text{ m})\mathbf{i} + (6 \text{ m})\mathbf{j}] = -(3.12 \text{ m/s})\mathbf{k}$$

y donde $\mathbf{v}_{P/\mathfrak{F}}$ es la velocidad de P relativa al sistema giratorio *Oxyz*. Pero se encontró que la velocidad angular de la pluma relativa a *Oxyz* era $\omega_{B/\mathfrak{F}} = (0.50 \text{ rad/s})\mathbf{k}$. La velocidad en su extremo P relativa a *Oxyz* es por consiguiente

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{P/\mathfrak{F}} = \omega_{B/\mathfrak{F}} \times \mathbf{r} &= (0.50 \text{ rad/s})\mathbf{k} \times [(10.39 \text{ m})\mathbf{i} + (6 \text{ m})\mathbf{j}] \\ &= -(3 \text{ m/s})\mathbf{i} + (5.20 \text{ m/s})\mathbf{j}\end{aligned}$$

Sustituyendo los valores obtenidos para $\mathbf{v}_{P'}$ y $\mathbf{v}_{P/\mathfrak{F}}$ en (1) encontramos

$$\mathbf{v}_P = -(3 \text{ m/s})\mathbf{i} + (5.20 \text{ m/s})\mathbf{j} - (3.12 \text{ m/s})\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$$

b) **La aceleración $\mathbf{a}_P$.** De la ecuación (15.48) escribimos

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_{P'} + \mathbf{a}_{P/\mathfrak{F}} + \mathbf{a}_c \tag{2}$$

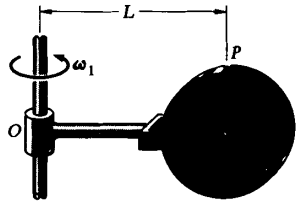
Como Ω y $\omega_{B/\mathfrak{F}}$ son constantes tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_{P'} &= \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}) = (0.30 \text{ rad/s})\mathbf{j} \times (-3.12 \text{ m/s})\mathbf{k} = -(0.94 \text{ m/s}^2)\mathbf{i} \\ \mathbf{a}_{P/\mathfrak{F}} &= \omega_{B/\mathfrak{F}} \times (\omega_{B/\mathfrak{F}} \times \mathbf{r}) \\ &= (0.50 \text{ rad/s})\mathbf{k} \times [-(3 \text{ m/s})\mathbf{i} + (5.20 \text{ m/s})\mathbf{j}] \\ &= -(1.50 \text{ m/s}^2)\mathbf{j} - (2.60 \text{ m/s}^2)\mathbf{i} \\ \mathbf{a}_c &= 2\Omega \times \mathbf{v}_{P/\mathfrak{F}} \\ &= 2(0.30 \text{ rad/s})\mathbf{j} \times [-(3 \text{ m/s})\mathbf{i} + (5.20 \text{ m/s})\mathbf{j}] = (1.80 \text{ m/s}^2)\mathbf{k}\end{aligned}$$

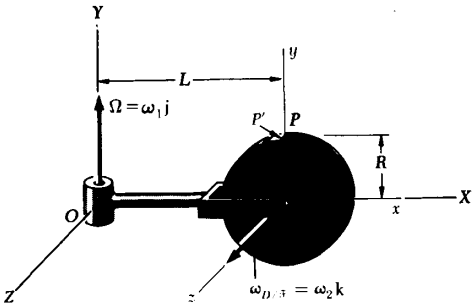
Sustituyendo los valores de $\mathbf{a}_{P'}$, $\mathbf{a}_{P/\mathfrak{F}}$, y $\mathbf{a}_c$ en (2) obtenemos

$$\mathbf{a}_P = -(3.54 \text{ m/s}^2)\mathbf{i} - (1.50 \text{ m/s}^2)\mathbf{j} + (1.80 \text{ m/s}^2)\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$$

PROBLEMA RESUELTO 15.15



El disco D de radio R está unido por un pasador al extremo A del brazo OA de longitud L. El brazo gira con respecto a un eje vertical alrededor de O a la velocidad angular constante ω_1, y el disco gira con respecto a A a una velocidad angular constante ω_2. Determínese: *a*) la velocidad del punto P situado en la vertical de A, *b*) la aceleración de P, *c*) la velocidad y la aceleración angular del disco.



Sistemas de referencia. El sistema $OXYZ$ está fijo. Unimos el sistema en movimiento $Axyz$ al brazo OA. Su velocidad angular con respecto al sistema $OXYZ$ es, por consiguiente, $\boldsymbol{\Omega} = \omega_1 \mathbf{j}$. La velocidad angular del disco D relativo al sistema en movimiento $Axyz$ (o por brevedad $\mathcal{F}$,) es $\boldsymbol{\omega}_{D/\mathcal{F}} = \omega_2 \mathbf{k}$. El vector de posición de P relativo a O es $\mathbf{r} = L\mathbf{i} + R\mathbf{j}$ y su vector de posición relativo a A es $\mathbf{r}_{P/A} = R\mathbf{j}$.

a) **La velocidad $\mathbf{v}_P$.** Representando por P' el punto del sistema en movimiento que coincide con P, escribimos de la ecuación (15.46)

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{P'} + \mathbf{v}_{P/\mathcal{F}} \tag{1}$$

donde $\mathbf{v}_{P'} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} = \omega_1 \mathbf{j} \times (L\mathbf{i} + R\mathbf{j}) = -\omega_1 L\mathbf{k}$

$$\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}} = \boldsymbol{\omega}_{D/\mathcal{F}} \times \mathbf{r}_{P/A} = \omega_2 \mathbf{k} \times R\mathbf{j} = -\omega_2 R\mathbf{i}$$

Sustituyendo los valores obtenidos para $\mathbf{v}_{P'}$ y $\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$ en (1), encontramos

$$\mathbf{v}_P = -\omega_2 R\mathbf{i} - \omega_1 L\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$$

b) **La aceleración $\mathbf{a}_P$.** De la ecuación (15.48) escribimos

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_{P'} + \mathbf{a}_{P/\mathcal{F}} + \mathbf{a}_c \tag{2}$$

Como $\boldsymbol{\Omega}$ y $\boldsymbol{\omega}_{\Delta/\mathcal{F}}$ son ambas constantes tenemos

$$\mathbf{a}_{P'} = \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) = \omega_1 \mathbf{j} \times (-\omega_1 L\mathbf{k}) = -\omega_1^2 L\mathbf{i}$$
$$\mathbf{a}_{P/\mathcal{F}} = \boldsymbol{\omega}_{D/\mathcal{F}} \times (\boldsymbol{\omega}_{D/\mathcal{F}} \times \mathbf{r}_{P/A}) = \omega_2 \mathbf{k} \times (-\omega_2 R\mathbf{i}) = -\omega_2^2 R\mathbf{j}$$
$$\mathbf{a}_c = 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_{P/\mathcal{F}} = 2\omega_1 \mathbf{j} \times (-\omega_2 R\mathbf{i}) = 2\omega_1 \omega_2 R\mathbf{k}$$

Sustituyendo los valores obtenidos en (2) encontramos

$$\mathbf{a}_P = -\omega_1^2 L\mathbf{i} - \omega_2^2 R\mathbf{j} + 2\omega_1 \omega_2 R\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$$

c) **Velocidad y Aceleración angulares del disco.**

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\omega}_{D/\mathcal{F}} \qquad \boldsymbol{\omega} = \omega_1 \mathbf{j} + \omega_2 \mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$$

Empleando la ecuación (15.31) con $\mathbf{Q} = \boldsymbol{\omega}$, escribimos

$$\boldsymbol{\alpha} = (\dot{\boldsymbol{\omega}})_{OXYZ} = (\dot{\boldsymbol{\omega}})_{Axyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\omega}$$
$$= 0 + \omega_1 \mathbf{j} \times (\omega_1 \mathbf{j} + \omega_2 \mathbf{k})$$
$$\boldsymbol{\alpha} = \omega_1 \omega_2 \mathbf{i} \quad \blacktriangleleft$$

Problemas

15.180 La barra AB está soldada a una placa con un radio de 12 in, la cual gira a la velocidad angular constante $\omega_1 = 6$ rad/s. Sabiendo que el collarín D se desplaza hacia el extremo B de la barra a una velocidad relativa a la barra constante $u = 78$ in/s, para la posición mostrada en la figura determínese *a*) la velocidad de D y *b*) la aceleración de D.

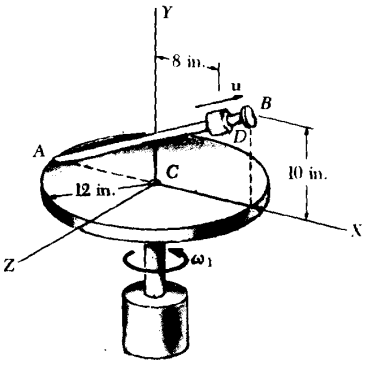


Fig. P15.180

15.181 La barra doblada gira a velocidad angular constante $\omega_1 = 4$ rad/s. Sabiendo que el collarín D se desplaza hacia abajo a lo largo de ella con velocidad constante relativa $u = 65$ in/s, para la posición mostrada en la figura determínense *a*) la velocidad de D y *b*) la aceleración de D.

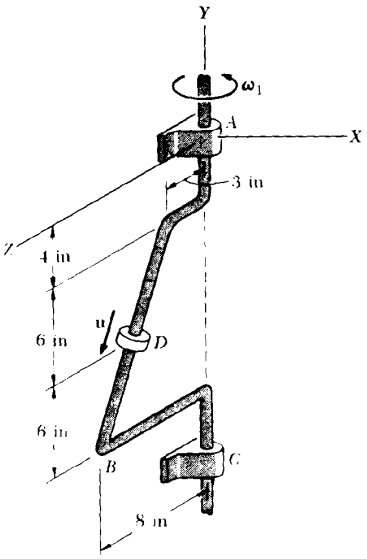


Fig. P15.181

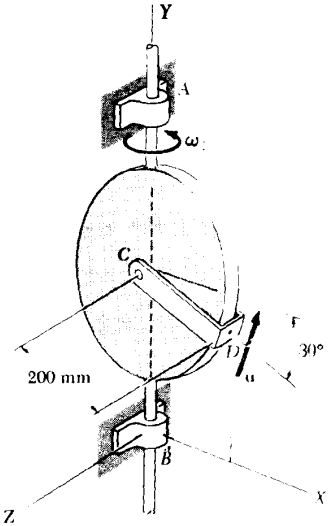


Fig. P15.182

15.182 La placa circular aquí mostrada gira alrededor de su diámetro vertical a velocidad angular constante $\omega_1 = 10$ rad/s. Si se sabe que en la posición aquí mostrada el disco se encuentra en el

plano XY y que el punto D de la correa CD se mueve hacia arriba a una velocidad relativa constante $u = 1.5$ m/s. Determínense *a*) la velocidad de D y *b*) la aceleración de D.

15.183 Ciertos productos manufacturados se pintan con un rociador al pasar por una estación de trabajo que se muestra. Sabiendo que el tubo doblado ACE gira a una velocidad angular constante $\omega_1 = 0.4$ rad/s y que en el punto D la pintura se mueve respecto al tubo con una velocidad relativa constante $u = 150$ mm/s, determínense, para la posición aquí mostrada, *a*) la velocidad de la pintura en D y *b*) la aceleración de la pintura en D.

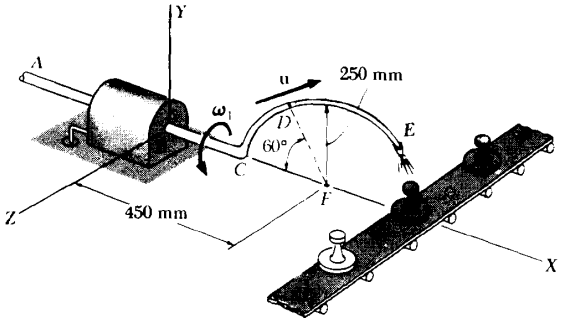


Fig. P15.183

15.184 Resuélvase el problema 15.180 suponiendo que en el instante aquí mostrado la velocidad angular ω_1 de la placa es 6 rad/s y que se está reduciendo a razón de 10 rad/s^2, mientras que la velocidad relativa u del collarín es 78 in/s y disminuye a una razón de 208 in/s^2.

15.185 Resuélvase el problema 15.182, suponiendo que en el instante mostrado, la velocidad angular ω_1 de la placa es 10 rad/s y decrece a razón de 25 rad/s^2, mientras que la velocidad relativa u del punto D de la pieza CD es 1.5 m/s y decrece a razón de 3 m/s^2.

15.186 Usando el método de la sección 15.14, resuélvase el problema 15.153.

15.187 Utilizando el método de la sección 15.14, resuélvase el problema 15.159.

15.188 Empleando el método de la sección 15.14, resuélvase el problema 15.156.

15.189 Utilizando el método de la sección 15.14, resuélvase el problema 15.157.

15.190 El sólido AB y la barra BC del dispositivo mostrado gira a velocidad angular constante $\omega_1 = 0.60$ rad/s alrededor del eje Y. Simultáneamente un mecanismo de hilo y polea hace que el brazo CD gire con respecto a C a una velocidad angular constante $\omega_2 = d\beta/dt = 0.45$ rad/s. Sabiendo que $\beta = 120°$, determínense *a*) la aceleración angular del brazo CD, *b*) la velocidad de D, *c*) la aceleración de D.

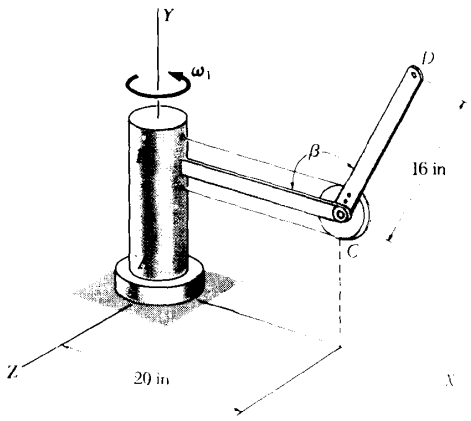


Fig. P15.190

15.191 Resuélvase el problema 15.190 suponiendo que $\beta = 60°$.

15.192 Un disco de radio $r = 180$ mm gira a una velocidad angular constante $\omega_2 = 8$ rad/s con respecto al brazo ABC, que a su vez gira a una velocidad angular constante $\omega_1 = 6$ rad/s alrededor del eje X. Determínense la velocidad y la aceleración del punto D del borde del disco.

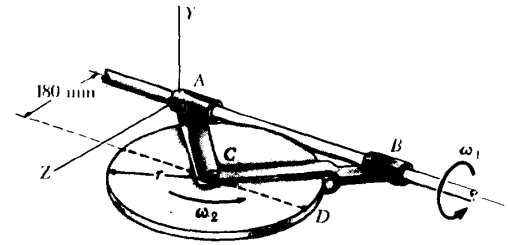
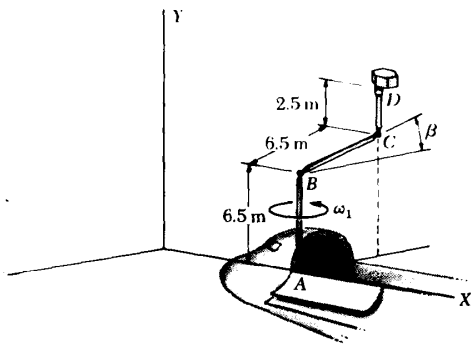


Fig. P15.192

15.193 Resuélvase el problema 15.192 suponiendo que $\omega_1 = 8$ rad/s y $\omega_2 = 6$ rad/s.



ig. P15.194

15.194 El sistema manipulador (SMR) mostrado se emplea para poner en órbita cargas útiles desde el compartimiento de carga de los transportes espaciales. En el instante aquí mostrado, el SMR completo está girando a una velocidad angular constante de $\omega_1 = 0.03$ rad/s alrededor del eje AB. Al mismo tiempo el conjunto BCD gira como un sólido rígido a una velocidad angular constante $\omega_2 = d\beta/dt = 0.04$ rad/s alrededor de un eje que pasa por B paralelo al eje X. Sabiendo que $\beta = 30°$, determínense *a*) la aceleración angular de BCD, *b*) la velocidad de D y *c*) la aceleración de D.

15.195 El mecanismo aquí mostrado se emplea para situar al operario a la altura de los cables aéreos, eléctricos y telefónicos. El mecanismo completo gira a una velocidad angular constante $\omega_1 = 0.15$ rad/s alrededor del eje Y. El ángulo entre el brazo AB y la horizontal es constante mientras que el brazo BC desciende a una velocidad angular constante $\omega_2 = d\beta/dt = -0.20$ rad/s. Si AB y BC tienen cada uno 4.5 m de longitud, determínese la aceleración de C en el instante mostrado en la figura.

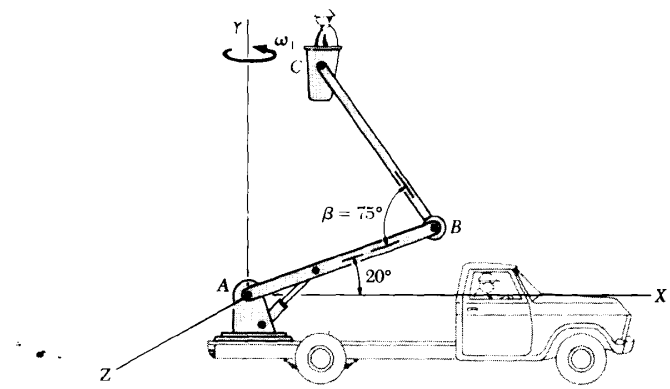


Fig. P15.195

15.196 Un disco de 6 in de radio gira a una velocidad angular constante $\omega_2 = 4$ rad/s con respecto al brazo ABC, que a su vez gira a una velocidad constante $\omega_1 = 3$ rad/s con respecto al eje Y. Determínense *a*) la aceleración angular del disco, *b*) la aceleración del punto D sobre el borde del disco.

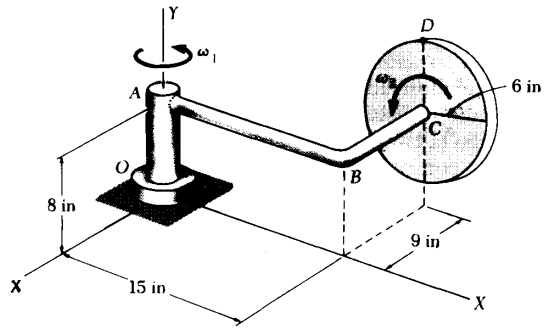


Fig. P15.196

15.197 En el dispositivo de un robot industrial mostrado en la figura, la placa ABC gira a una velocidad angular constante $\omega_1 = 2.4$ rad/s con respecto a la pieza DEG. Al mismo tiempo el conjunto gira alrededor del eje Y a una velocidad angular constante $\omega_2 = 2$ rad/s. Sabiendo que en el instante mostrado DE es paralelo al eje X y la placa ABC es paralela al plano YZ, determínense *a*) la velocidad del punto A y *b*) la aceleración del punto A.

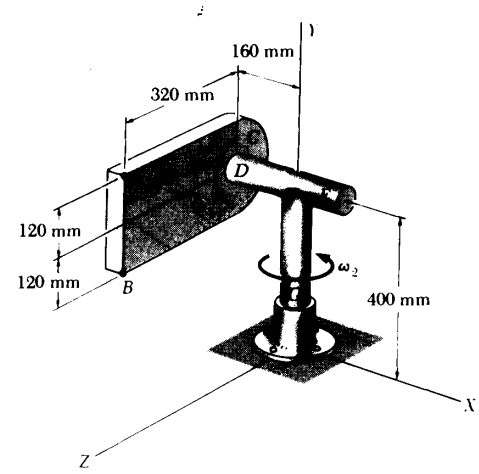


Fig. P15.197

15.198 En el problema 15.197 determínense *a*) la velocidad del punto B y *b*) la aceleración del punto B.

15.199 Dos discos, cada uno de 5 in de radio, están unidos al brazo CD de 18 in. El conjunto gira a una velocidad constante $\omega_2 = 3$ rad/s con respecto al brazo AB. Sabiendo que en el instante aquí mostrado el brazo AB gira con respecto al eje Y a una velocidad constante $\omega_1 = 4$ rad/s, determínense la velocidad y aceleración de *a*) el punto E y *b*) del punto F.

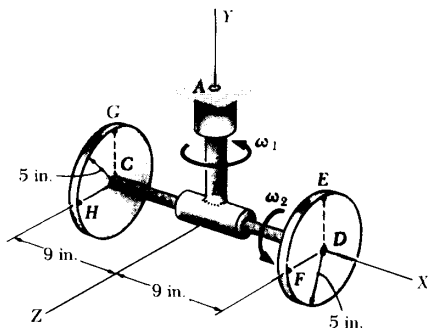


Fig. P15.199

15.200 En el problema 15.199 determínense la velocidad y la aceleración de *a*) en el punto G y *b*) en el punto H.

15.201 Una placa cuadrada de lado $2r$ está soldada a un eje vertical que gira con una velocidad angular constante ω_1. Al mismo tiempo la barra AB de longitud r gira alrededor del centro de la placa

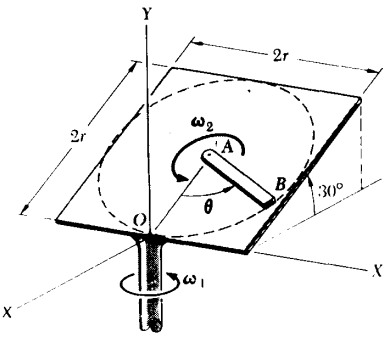
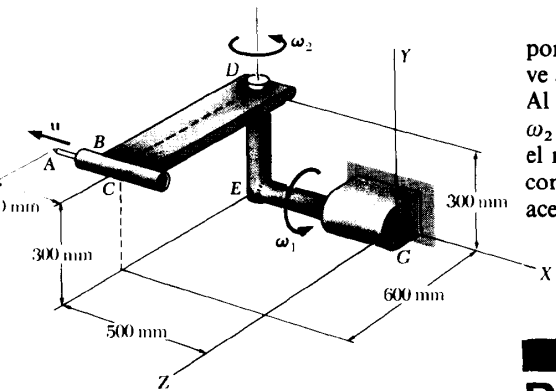


Fig. P15.201

con una velocidad angular constante ω_2 con respecto a la placa. Para la posición de la placa que se muestra en la figura, determínese la aceleración del extremo B de la barra si: *a*) $\theta = 0$, *b*) $\theta = 90°$ y *c*) $\theta = 180°$.

15.202 Resuélvase el problema 15.201, suponiendo que $\omega_1 = 3$ rad/s, $\omega_2 = 2$ rad/s y $r = 120$ mm.

15.203 La posición de la punta de la aguja A está controlada por el robot aquí mostrado. En la posición indicada la punta se mueve a una velocidad constante $u = 180$ mm/s relativa al solenoide BC. Al mismo tiempo el brazo CD gira a una velocidad angular constante $\omega_2 = 1.6$ rad/s con respecto a la componente DEG. Sabiendo que el robot completo gira alrededor del eje X a una velocidad angular constante $\omega_1 = 1.2$ rad/s, determínense *a*) la velocidad de A y *b*) la aceleración de A.



g. P15.203

Repaso y resumen

Este capítulo se dedicó al estudio de la cinemática del sólido rígido.

Traslación de sólidos rígidos

Primero se consideró la *traslación* de un sólido rígido (sección 15.2) y se observó que, en tal movimiento, *todos los puntos del sólido tienen la misma velocidad y la misma aceleración en cualquier instante.*

Rotación de un sólido rígido con respecto a un eje fijo

Luego se consideró la *rotación* de un sólido rígido con respecto a un eje fijo (sección 15.3). La posición del sólido se define por el ángulo θ que la línea BP, dibujada a partir del eje de rotación al punto P del sólido, forma con un plano fijo (fig. 15.39). Se encontró que el módulo de la velocidad de P es

$$v = \frac{ds}{dt} = r\dot{\theta} \operatorname{sen} \phi \tag{15.4}$$

donde $\dot{\theta}$ es la derivada de θ con respecto al tiempo. Entonces se expresó la velocidad de P como

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \tag{15.5}$$

donde el vector

$$\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k} = \dot{\theta}\mathbf{k} \tag{15.6}$$

se dirige a lo largo del eje fijo de rotación y representa la *velocidad angular* del sólido.

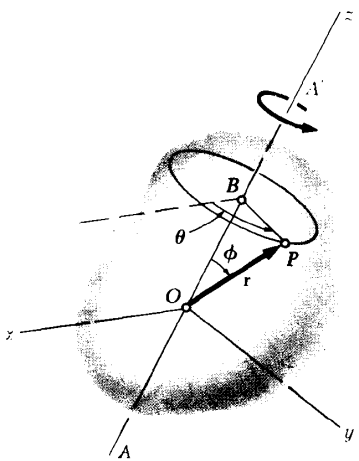


Fig. 15.39

Simbolizando con $\boldsymbol{\alpha}$ la derivada $d\omega/dt$ de la velocidad angular, se expresó la aceleración de P como

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \tag{15.8}$$

Derivando (15.6) y recordando que **k** es constante en módulo y dirección se encontró que

$$\boldsymbol{\alpha} = \alpha\mathbf{k} = \dot{\omega}\mathbf{k} = \ddot{\theta}\mathbf{k} \tag{15.9}$$

El vector $\boldsymbol{\alpha}$ representa la *aceleración angular* del sólido y se dirige a lo largo del eje fijo de rotación.

Rotación de una sección representativa

En seguida será considerado el movimiento de una sección representativa situada en un plano perpendicular al eje de rotación del sólido (fig. 15.40). Puesto que la velocidad angular es perpendicular a la sección, la velocidad de un punto P de la sección se expresó así:

$$\mathbf{v} = \omega\mathbf{k} \times \mathbf{r} \tag{15.10}$$

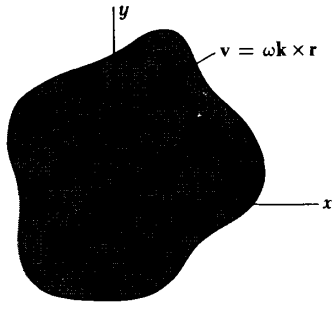


Fig. 15.40

donde **v** está contenida en el plano de la sección.

Componentes tangenciales y normales

Sustituyendo $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k}$ y $\boldsymbol{\alpha} = \alpha\mathbf{k}$ en la (15.8), se observó que la aceleración de P se podía descomponer en los componentes tangencial y normal (Fig. 15.41), respectivamente iguales a

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_t &= \alpha\mathbf{k} \times \mathbf{r} & a_t &= r\alpha \\ \mathbf{a}_n &= -\omega^2\mathbf{r} & a_n &= r\omega^2 \end{aligned} \tag{15.11'}$$

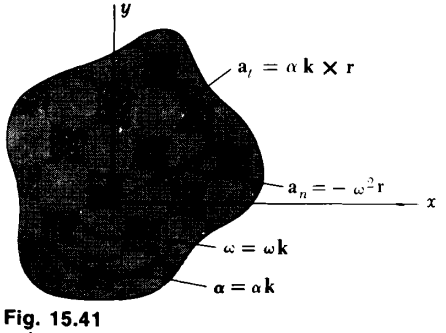


Fig. 15.41

Velocidad y aceleración angulares de una sección giratoria

Reutilizando las ecuaciones (15.6) y (15.9) se obtuvieron las siguientes expresiones para la *velocidad angular* y para la *aceleración angular* de la sección (sección 15.4):

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \tag{15.12}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{15.13}$$

$$\alpha = \omega\frac{d\omega}{d\theta} \tag{15.14}$$

Se observó que estas expresiones son similares a las que se obtuvieron en el capítulo 11 para el movimiento rectilíneo de una partícula.

Dos casos particulares de rotación se presentan frecuentemente: *rotación uniforme* y *rotación uniformemente acelerada*. Los problemas relacionados con cualquiera de estos movimientos se pueden resolver usando ecuaciones similares a las utilizadas en las secciones 11.4 y 11.5 para movimiento uniformemente rectilíneo y para movimiento rectilíneo uniformemente acelerado de una partícula, reemplazando x, v y a por θ, ω y α, respectivamente. (Problema resuelto 15.1.)

Velocidades en movimiento plano

El *movimiento plano más general* de un sólido rígido puede considerarse como *la suma de una traslación y de un rotación* (sección 15.5). Por ejemplo, puede suponerse que el sólido mostrado en la figura 15.42 se traslada con el punto A, mientras que simultáneamente rota alrededor de A. Se desprende que la velocidad de cualquier punto D (sección 15.6) del sólido se puede expresar como

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} \tag{15.17}$$

donde $\mathbf{v}_A$ es la velocidad de A y $\mathbf{v}_{B/A}$ es la velocidad de B respecto de A o, con mayor precisión, con respecto a ejes $x'y'$ que se trasladan con A. Representando con $\mathbf{r}_{B/A}$ el vector de posición de B relativo a A, se descubrió que

$$\mathbf{v}_{B/A} = \omega\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{B/A} \qquad v_{B/A} = r\omega \tag{15.18'}$$

La ecuación fundamental (15.17) que relaciona las velocidades absolutas de los puntos A y B y la velocidad relativa de B respecto a A se expresó en forma de un diagrama vectorial y se usó para resolver problemas relacionados con el movimiento de varios tipos de mecanismos (problemas resueltos 15.2 y 15.3).

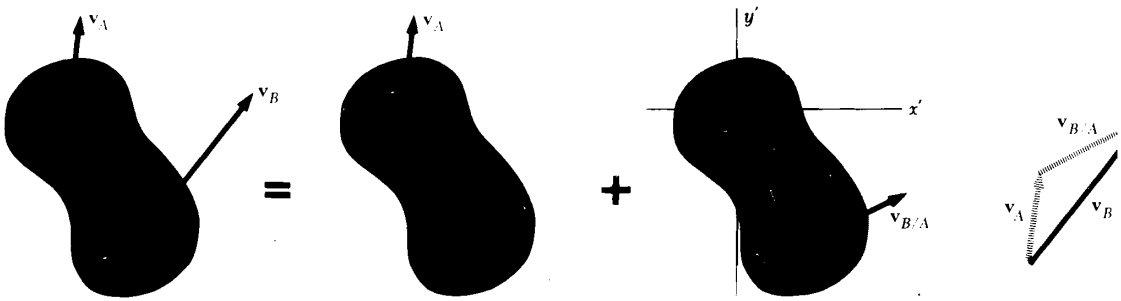


Fig. 15.42 Movimiento plano = Traslación de A + Rotación alrededor de A $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$

Otro enfoque en la solución de problemas relacionados con la velocidad de los puntos de una sección rígida en movimiento plano se presentó en la sección 15.7 y se usó en los problemas resueltos 15.4 y 15.5. Se basa en la determinación del *centro instantáneo de rotación* C de la sección (Fig. 15.43).

Centro instantáneo de rotación

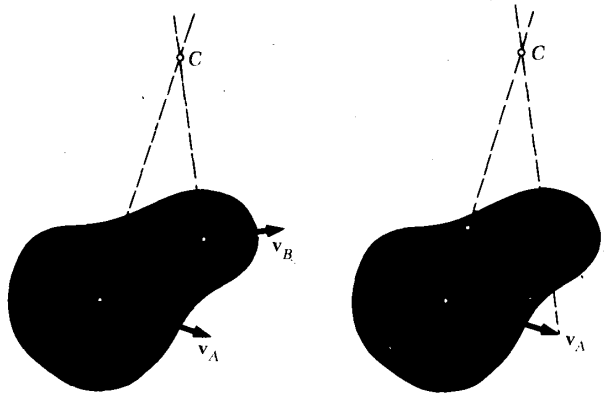


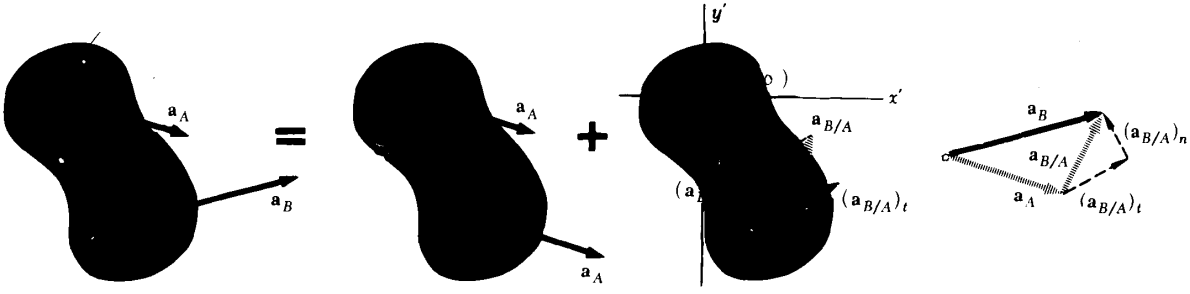
Fig. 15.43

El hecho de que cualquier movimiento plano de una sección rígida se pueda considerar como la suma de una traslación de la sección con un punto de referencia A y una rotación respecto de A se usó en la sección 15.8 para relacionar las aceleraciones absolutas de dos puntos A y B cualesquiera de la sección y la aceleración relativa de B respecto de A obtuvimos

Aceleraciones en movimiento plano

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A} \tag{15.21}$$

donde $\mathbf{a}_{B/A}$ constaba de una *componente normal* $(\mathbf{a}_{B/A})n$ de módulo $r\omega^2$ dirigido hacia A y una *componente tangencial* $(\mathbf{a}_{B/A})t$ de módulo $r\alpha$, perpendicular a la línea AB (Fig. 15-44). La relación fundamental (15.21) se expresó en términos de diagramas vectoriales o ecuaciones vectoriales y se usó para determinar la aceleración de ciertos puntos de algunos mecanismos (problemas resueltos 15.6 al 15.8). Deberá observarse que el centro instantáneo de rotación C considerado en la sección 15.7 no se puede usar para la determinación de aceleraciones, puesto que el punto C, en general no tiene aceleración nula.



ig. 15.44 Movimiento plano = Traslación de A + Rotación alrededor de A

Coordenadas expresadas en función de un parámetro

En el caso de ciertos mecanismos es posible expresar las coordenadas x y y de todos los puntos significativos de un mecanismo mediante expresiones analíticas sencillas que dependen de un *solo parámetro*. Los componentes de la velocidad absoluta y de la aceleración de cierto punto puede entonces obtenerse al derivar dos veces respecto al tiempo las coordenadas x y y del punto (sección 15.9).

Derivada temporal de un vector respecto a un sistema de referencia en rotación

Mientras que la derivada temporal de un vector es la misma respecto a un sistema de referencia fijo y respecto a un sistema en traslación, la derivada temporal de un vector a un sistema de referencia en rotación es diferente. Por lo tanto, para estudiar el movimiento de una partícula relativo a un sistema en rotación primero se tuvieron que comparar (sección 15.10) las derivadas temporales de un vector genérico $\mathbf{Q}$ respecto a un sistema fijo $OXYZ$ y a un sistema $Oxyz$ en rotación con una velocidad angular Ω (Fig. 15.45). Se obtuvo la relación fundamental

$$(\dot{\mathbf{Q}})_{OXYZ} = (\dot{\mathbf{Q}})_{Oxyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{Q} \tag{15.31}$$

y se concluyó que la derivada temporal del vector $\mathbf{Q}$ respecto al sistema fijo $OXYZ$ se compone de dos partes: la primera representa la derivada temporal de $\mathbf{Q}$ respecto al sistema en rotación $Oxyz$; la segunda $\boldsymbol{\Omega}\mathbf{x}\mathbf{Q}$, se debe a la rotación del sistema $Oxyz$.

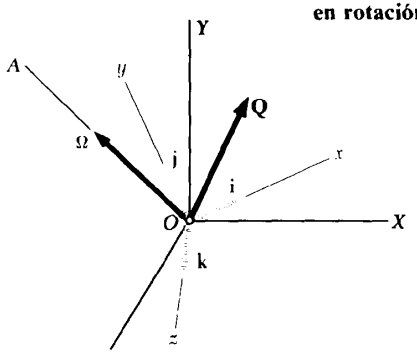


Fig. 15.45

Movimiento plano de una partícula relativo a un sistema en rotación

La siguiente parte del capítulo (sección 15.11) se dedicó al análisis de cinemática bidimensional de una partícula P que se mueve respecto a un sistema F en rotación con una velocidad angular Ω respecto a un eje fijo (Fig. 15.46). Se encontró que la velocidad absoluta de P se podía expresar como

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{P'} + \mathbf{v}_{P/\mathfrak{F}} \tag{15.33}$$

donde
$\mathbf{v}_P$ = velocidad absoluta de la partícula P
$\mathbf{v}_{P'}$ = velocidad del punto P' del sistema $\mathfrak{F}$ en movimiento que coincide con P
$\mathbf{v}_{P/\mathfrak{F}}$ = velocidad de P relativa al sistema en movimiento $\mathfrak{F}$

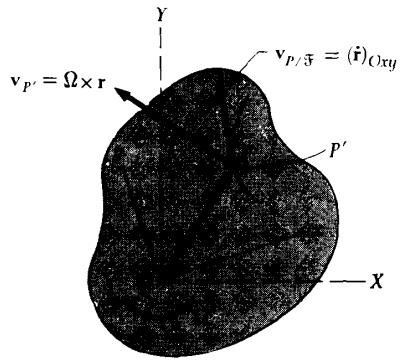


Fig. 15.46

Se observó que la misma expresión para $\mathbf{v}_P$ se obtiene si el sistema está en traslación en vez de estar en rotación. Sin embargo, cuando el sistema está en rotación, se observa que la expresión para la aceleración de P contiene un término adicional $\mathbf{a}_C$ llamado *aceleración complementaria* o *aceleración de Coriolis*. Se escribió

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_{P'} + \mathbf{a}_{P/\mathfrak{F}} + \mathbf{a}_C \tag{15.36}$$

donde
$\mathbf{a}_P$ = aceleración absoluta de la partícula P
$\mathbf{a}_{P'}$ = aceleración del punto P' del sistema en movimiento $\mathfrak{F}$ que coincide con P
$\mathbf{a}_{P/\mathfrak{F}}$ = aceleración de P relativa al sistema en movimiento $\mathfrak{F}$
$\mathbf{a}_C = 2\boldsymbol{\Omega}\mathbf{x}(\dot{\mathbf{r}})_{Oxy} = 2\boldsymbol{\Omega}\mathbf{X}\,\mathbf{v}_{P/\mathfrak{F}}$
= aceleración complementaria o de Coriolis

Puesto que Ω y $\mathbf{v}_{P/\mathfrak{F}}$ son perpendiculares entre sí en el caso del movimiento plano, se descubrió que la aceleración de Coriolis tiene un módulo $a_C = 2\Omega v_{P/\mathfrak{F}}$ y que apunta en la dirección obtenida al girar el vector $\mathbf{v}_{P/\mathfrak{F}}$ 90° en el sentido de la rotación del sistema en movi-

miento. Se pueden utilizar las fórmulas (15.33) y (15.36) para analizar el movimiento de mecanismos que contienen partes que deslizan unas sobre otras (problemas resueltos 15.9 y 15.10).

En la última parte del capítulo se estudió la cinemática del sólido rígido en tres dimensiones. Primero se consideró el movimiento de un sólido rígido con un punto fijo (sección 15.12). Tras probar que el desplazamiento más general de un sólido rígido con un punto fijo O es equivalente a una rotación del sólido respecto a un eje que pase por O fue posible definir la velocidad angular ω y el *eje instantáneo de rotación* del sólido en cierto momento. La velocidad de un punto P del sólido (Fig. 15.47) puede nuevamente expresarse como

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \tag{15.37}$$

Derivando esta expresión, también se escribió

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \tag{15.38}$$

Sin embargo, puesto que la dirección de ω cambia de un instante a otro, la aceleración angular de α en general no se dirige a lo largo del eje instantáneo de rotación (problema resuelto 15.11).

Se demostró en la sección 15.13 que *el movimiento más general de un sólido rígido en el espacio es equivalente, en cualquier instante, a la suma de una rotación y de una traslación.* Considerando dos partículas A y B del sólido, se encontró que

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} \tag{15.42}$$

donde $\mathbf{v}_{B/A}$ es la velocidad de B relativa a un sistema $AX'Y'Z'$ unido a A y de orientación fija (Fig. 15.48). Representando por $\mathbf{r}_{B/A}$ el vector de posición de B relativo a A, se escribió

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A} \tag{15.43}$$

donde ω es la velocidad angular del sólido en el instante considerado (problema resuelto 15.12). La aceleración de B se obtuvo mediante un razonamiento similar. Primero se escribió

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$

y recordando la ecuación 15.38,

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) \tag{15.44}$$

En las dos últimas secciones del capítulo se consideró el movimiento tridimensional de una partícula P relativa a un sistema $Oxyz$ en rotación con una velocidad angular Ω respecto a un sistema fijo $OXYZ$ (Fig. 15.49). En la sección 15.14 se expresó la velocidad absoluta $\mathbf{v}_P$ de P como

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{P'} + \mathbf{v}_{P/\mathfrak{F}} \tag{15.46}$$

donde $\mathbf{v}_P$ = velocidad absoluta de la partícula P
$\mathbf{v}_{P'}$ = velocidad del punto P del sistema en movimiento $\mathfrak{F}$ que coincide con P

Movimiento de un sólido rígido con un punto fijo

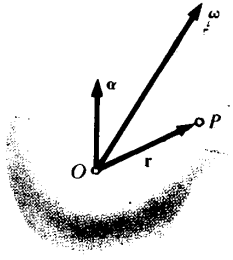


Fig. 15.47

Movimiento general en el espacio

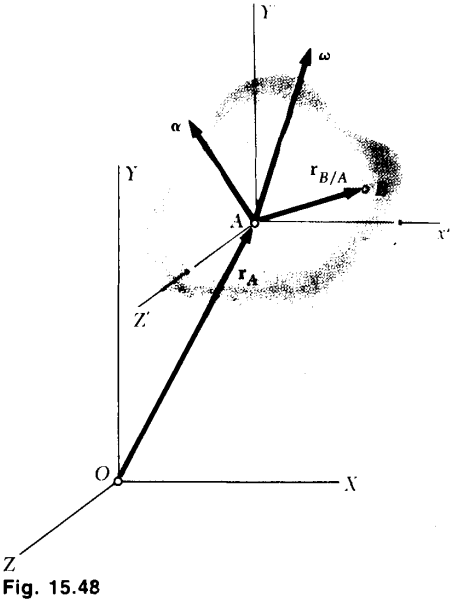


Fig. 15.48

Movimiento tridimensional de una partícula respecto a un sistema en rotación

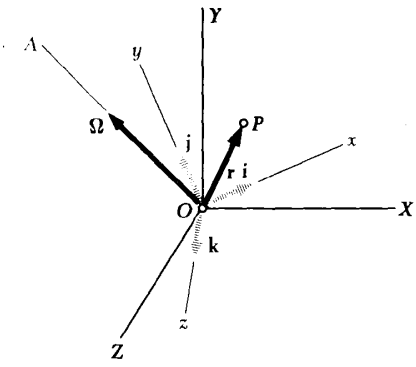


Fig. 15.49

Sistema de referencia en el movimiento general

$\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$ = velocidad de P relativa al sistema en movimiento $\mathcal{F}$

La aceleración absoluta $\mathbf{a}_P$ de P se expresó entonces como

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_{P'} + \mathbf{a}_{P/\mathcal{F}} + \mathbf{a}_c \qquad (15.48)$$

donde
$\mathbf{a}_P$ = aceleración absoluta de la partícula P
$\mathbf{a}_{P'}$ = aceleración del punto P' del sistema en movimiento $\mathcal{F}$ que coincide con P
$\mathbf{a}_{P/\mathcal{F}}$ = aceleración de P relativa al sistema en movimiento $\mathcal{F}$
$\mathbf{a}_c = 2\Omega\mathbf{X}(\mathbf{r})_{Oxyz} = 2\Omega\mathbf{X}\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$
= aceleración complementaria o de Coriolis

Se observó que el módulo a_c de la aceleración de Coriolis no es igual a $2\Omega v_{P/\mathcal{F}}$ (problema resuelto 15.13) excepto en el caso particular cuando Ω y $\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$ son perpendiculares uno al otro.

También se observó (sección 15.15) que las ecuaciones (15.46) y (15.48) siguen siendo válidas cuando el sistema $Axyz$ se mueve de manera conocida, pero arbitraria, respecto al sistema fijo $OXYZ$ (Fig. 15.50), puesto que el movimiento de A se incluye en los términos $\mathbf{v}_{P'}$ y $\mathbf{a}_{P'}$, que representan la velocidad absoluta y la aceleración del punto P'.

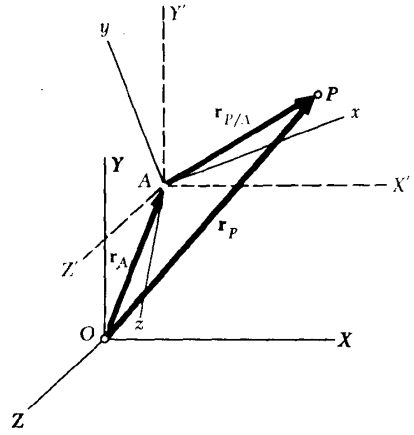
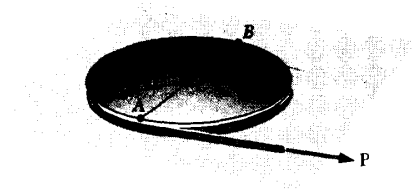


Fig. 15.50

Los sistemas de referencia en rotación son particularmente útiles en el estudio del movimiento del sólido rígido en tres dimensiones. De hecho, existen muchos casos donde una elección apropiada del sistema en rotación conllevará un análisis más sencillo del movimiento del sólido rígido que el que hubiera sido posible con ejes de orientación fija (problemas resueltos 15.14 y 15.15).

Problemas de repaso

15.204 Una cinta se enrolla alrededor de un disco de 10 in de diámetro que está en reposo sobre una mesa horizontal. Una fuerza **P** que se aplica como se indica en la figura produce las siguientes aceleraciones: $\mathbf{a}_A = 45$ in/s^2 a la derecha, $\alpha = 6$ rad/s^2 en sentido opuesto a las manecillas del reloj cuando se observa desde arriba. Determínense *a*) la aceleración del punto B y *b*) el punto del disco que no tiene aceleración.



P15.204

15.205 Un chorro de agua fluye a través del tubo curvado OB, que tiene un radio uniforme de 18 in y que gira con una velocidad angular constante en sentido opuesto a las manecillas del reloj de 150 rpm. Si la velocidad del agua relativa al tubo es de 45 ft/s, determínese la aceleración total de la partícula de agua P.

15.206 El engranaje A rueda sobre el engranaje fijo B y gira alrededor del eje AD que está sujeto rígidamente en B al eje vertical DE. Sabiendo que el eje DE gira con una velocidad angular constante ω_1, determínense *a*) la velocidad de giro del engranaje A alrededor

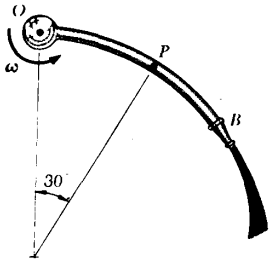


Fig. P15.205

del eje AD, *b*) la aceleración angular del engranaje A y *c*) la aceleración del diente C del engranaje A.

15.207 Una rueda con pestaña rueda sin deslizar sobre un riel horizontal. Si en un instante dado la velocidad y la aceleración del centro de la rueda son como se muestra en la figura, determínense las aceleraciones *a*) del punto B, *b*) del punto C y *c*) del punto D.

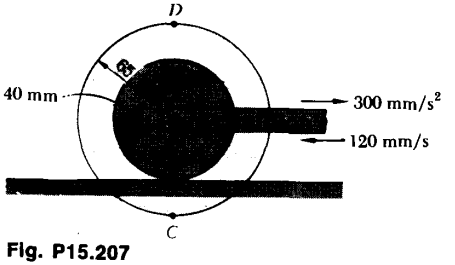


Fig. P15.207

15.208 Una serie de pequeñas piezas de maquinaria que son transportadas por una banda pasan sobre una polea tensora de 125 mm de radio que aquí se muestra. En el instante que se indica, la velocidad del punto A es de 350 mm/s a la izquierda y su aceleración es de 400 mm/s² a la derecha. Determínense *a*) la velocidad angular y la aceleración angular de la polea tensora y *b*) la aceleración total de la pieza que pasa por B.

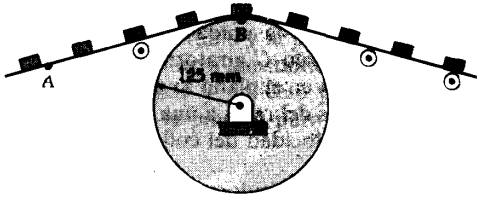


Fig. P15.208

15.209 Si en el instante que aquí se muestra el collarín D se mueve hacia abajo con una velocidad constante de 60 in/s, determínense *a*) el centro instantáneo de rotación de la barra BD, *b*) las velocidades angulares de la manivela AB y de la barra BD y *c*) la velocidad del punto medio de la barra BD.

15.210 Si en el instante que aquí se muestra el collarín D se mueve con una velocidad constante de 60 in/s, determínese la aceleración angular de *a*) la barra BD, *b*) la manivela AB.

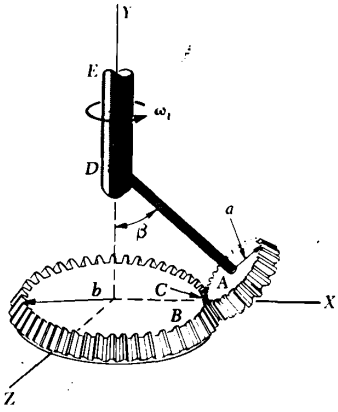


Fig. P15.206

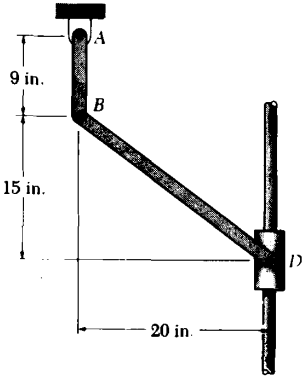


Fig. P15.209 y P15.210

15.211 La barra AC de longitud $2b$ está unida a un collarín en A y pasa por un collarín articulado en B. Sabiendo que el collarín A se mueve hacia arriba con velocidad constante $\mathbf{v}_A$, obténgase una expresión para *a*) la velocidad angular de la barra AC, *b*) la velocidad del punto de la barra en contacto con el collarín articulado B y *c*) la aceleración angular de la barra AC.

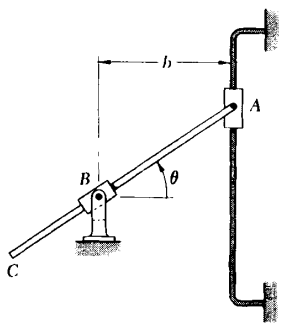


Fig. P15.211

15.212 El brazo telescópico AB se emplea para situar al operario a la altura de los cables aéreos, eléctricos y de teléfonos. Si la longitud AB aumenta a una velocidad constante $(dl/dt) = 0.20$ m/s y el brazo gira a una velocidad angular constante $\omega_1 = 0.25$ rad/s respecto al eje vertical, mientras que el ángulo θ que forma con la horizontal mantiene un valor constante, determínese la aceleración del punto B cuando $l = 5$ m.

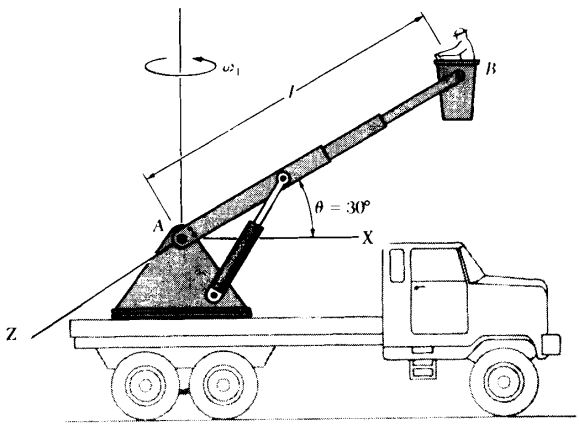


Fig. P15.212

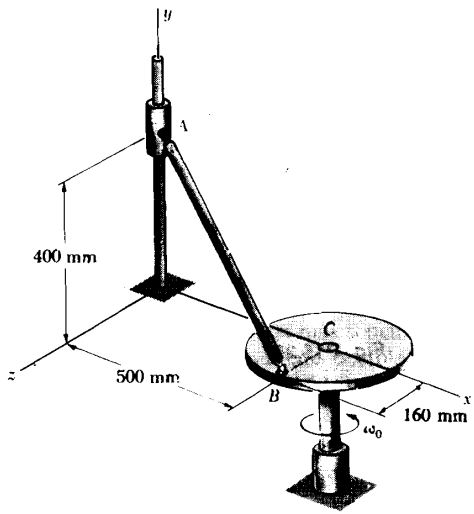


Fig. P15.213

15.213 La barra AB está unida mediante articulaciones esféricas al collarín A y al disco C giratorio de 320 mm de diámetro. Sabiendo que el disco gira en el plano zx en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, a una velocidad constante $\omega_0 = 4$ rad/s, determínese la velocidad del collarín A.

15.214 Una placa rectangular se sostiene mediante dos barras de 150 mm como se muestra. Sabiendo que en el instante que se indica la velocidad angular de la barra AB es de 4 rad/s en el sentido de las manecillas del reloj, determínense *a*) la velocidad angular de la placa, *b*) la velocidad del centro de la placa y *c*) la velocidad del vértice F.

15.215 Sabiendo que en el instante que aquí se muestra, la velocidad angular de la barra AB es de 4 rad/s en el sentido de las manecillas del reloj, determínense *a*) la velocidad angular de la placa y *b*) los puntos de la placa con una velocidad igual o menor que 150 mm/s.

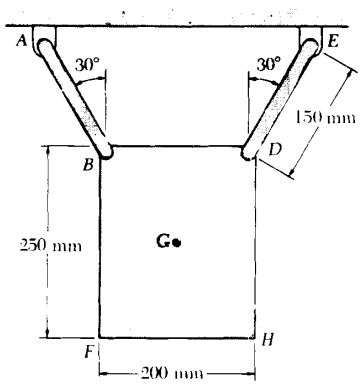


Fig. P15.214 y P15.215

Los siguientes problemas están diseñados para ser resueltos con un ordenador.

15.C1 Una barra AB de 400 mm se guía mediante ruedas en A y en B que deslizan en la vía que aquí se muestra. Sabiendo que B se mueve con una velocidad constante $v_B = 1.2$ m/s, escríbase un programa de ordenador y úsese para calcular la velocidad angular de la barra y la velocidad de A para valores de θ de 0 a 150°, en intervalos de 10°.

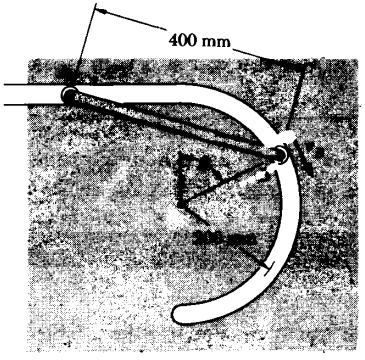


Fig. P15.C1

15.C2 En el sistema motriz que se muestra $l = 8$ in y $b = 3$ in. Durante una prueba del sistema la manivela AB gira con una velocidad angular constante de 2000 rpm en el sentido de las manecillas del reloj. Elabórese un programa de ordenador y calcúlense con él, para valores de θ, de 0 a 180°, en intervalos de 10° *a*) la velocidad y aceleración angulares de la barra de unión BD y *b*) la velocidad y aceleración del émbolo P.

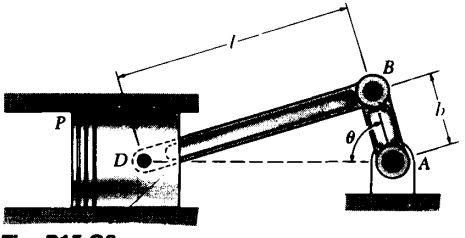


Fig. P15.C2

15.C3 Escríbase un programa de ordenador y úsese para resolver el problema resuelto 15.12 para valores de θ de 0 a 360°, en intervalos de 30°.

15.C4 Se pintan mediante aspersión artículos manufacturados conforme pasan a través de la estación de trabajo automática que se muestra en la figura. El tubo doblado ACE gira con una velocidad angular constante $\omega_l = 0.4$ rad/s y la pintura se mueve a través del tubo con una velocidad relativa constante $u = 150$ mm/s. Elabórese un programa de ordenador y utilícese para calcular la velocidad y la aceleración en D de la pintura para valores de θ de 0 a 150°; en intervalos de 10°.

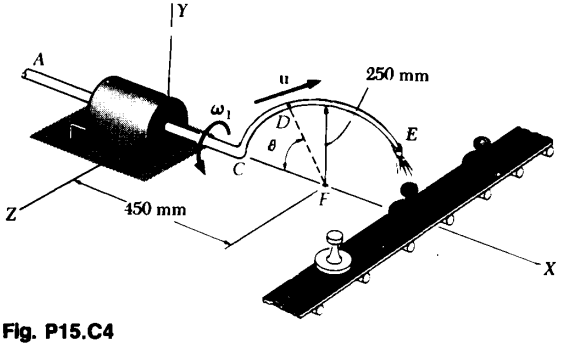


Fig. P15.C4

CAPÍTULO DIECISÉIS

Movimiento plano del sólido rígido: fuerzas y aceleraciones

16.1. Introducción. En este capítulo, y en el 17 y el 18 estudiaremos la *cinética del sólido rígido*, es decir, las relaciones que existen entre las fuerzas que actúan sobre un sólido rígido, su forma y masa y el movimiento que se produce. Estudiamos relaciones similares en los capítulos 12 y 13, suponiendo que un sólido podía ser considerado como una partícula, es decir, que su masa se podía concentrar en un punto y que todas las fuerzas actúan en ese punto. Ahora tomaremos en cuenta la forma del sólido, así como la posición exacta de los puntos en que se aplican las fuerzas. Nos ocuparemos no sólo del movimiento del sólido como un todo, sino también del movimiento del sólido alrededor de su centro de masas.

Nuestro punto de vista será considerar a los sólidos rígidos formados por un gran número de partículas y utilizaremos los resultados obtenidos en el capítulo 14 para el movimiento de sistemas de partículas. Específicamente, emplearemos en este capítulo la ecuación (14.16) $\Sigma \mathbf{F} = m\bar{\mathbf{a}}$, que relaciona a la resultante de las fuerzas externas con la aceleración del centro de masas G del sistema de partículas y, además, la ecuación (14.23), $\Sigma \mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G$, que relaciona al momento resultante de las fuerzas externas y el momento angular del sistema de partículas respecto a G.

Excepto la sección 16.2, que se aplica al caso más general del movimiento de un sólido rígido, los resultados deducidos en este capítulo estarán limitados de dos maneras: **1)** Se restringirán al *movimiento plano* del sólido rígido, es decir, a un movimiento en el que cada partícula del sólido permanece a una distancia constante de un plano de referencia fijo. **2)** Los sólidos rígidos que consideremos serán sólo secciones planas y cuerpos que son simétricos con respecto al plano de referencia†. El estudio del movimiento de sólidos tridimensionales asimétricos en un plano y, más generalmente, el

† O bien, con mayor generalidad, sólidos que tienen un eje principal central de inercia perpendicular al plano de referencia.

movimiento de sólidos rígidos en el espacio tridimensional se pospondrá hasta el capítulo 18.

En la sección 16.3 definiremos momento angular de un sólido rígido con un movimiento plano y demostraremos que la derivada temporal del momento angular $\dot{\mathbf{H}}_G$ *alrededor del centro de masa, es igual al producto* $\bar{I}\alpha$ del momento de inercia central de la masa, $\bar{I}$, y la aceleración angular α del sólido. El principio de d'Alembert, introducido en la sección 16.4, se emplea para demostrar que las fuerzas exteriores que actúan sobre un sólido rígido son equivalentes a un vector $m\bar{\mathbf{a}}$ fijo al centro de masa y un par de momento $\bar{I}\alpha$.

En la sección 16.5 deduciremos el principio de transmisibilidad utilizando sólo la ley del paralelogramo y las leyes del movimiento de Newton. Por consiguiente, el principio de transmisibilidad puede retirarse de la lista de axiomas (Secc. 1.2) necesarios en el estudio de la estática y la dinámica de los sólidos rígidos.

El concepto de las ecuaciones del diagrama de sólido libre se introduce en la sección 16.6. Se hará hincapié en el empleo de ecuaciones del diagrama de sólido libre en la solución de todos los problemas en los que interviene el movimiento plano de sólidos rígidos.

Después de considerar el movimiento plano de sólidos rígidos unidos, en la sección 16.7, esteremos preparados para resolver una variedad de problemas en los que intervienen la traslación, rotación central o el movimiento de los sólidos rígidos sin restricciones. En la sección 16.8 y en el resto del capítulo consideraremos la solución de problemas relacionados con rotación no central, el movimiento de rodadura o algún otro movimiento plano parcialmente restringido de los sólidos rígidos.

16.2. Ecuación del movimiento de un sólido rígido. Considérese un sólido rígido sobre el cual actúan varias fuerzas $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, etc. (Fig. 16.1). Podemos suponer que el sólido está formado por gran número n partículas de masa Δm_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) y aplicar los resultados obtenidos en el capítulo 14 para un sistema de partículas (Fig. 16.2). Considerando primero el movimiento del centro de masa G del sólido con respecto al sistema newtoniano de referencia $Oxyz$, recordemos la ecuación (14.16) y escribimos

$$\Sigma\mathbf{F} = m\bar{\mathbf{a}} \tag{16.1}$$

en la que m es la masa del sólido y $\bar{\mathbf{a}}$ la aceleración del centro de masa G. Pasando ahora al movimiento del sólido respecto al sistema de referencia central $Gx'y'z'$, recordemos la ecuación (14.23) y escribimos

$$\Sigma\mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G \tag{16.2}$$

en donde $\dot{\mathbf{H}}_G$, representa la derivada temporal de $\mathbf{H}_G$, el momento angular alrededor de G del sistema de partículas que forman al sólido rígido. En lo que sigue nos referimos a $\mathbf{H}_G$ simplemente como el momento angular del sólido rígido alrededor de su centro de masa G. Las ecuaciones (16.1) y (16.2) expresan juntas que *el sistema de las*

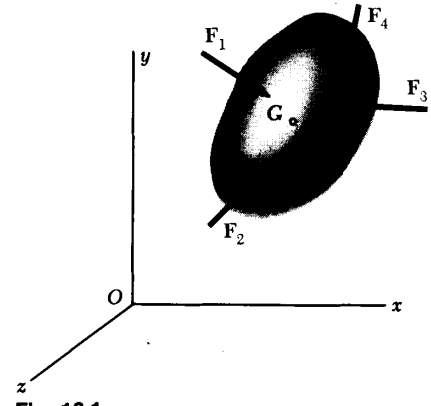


Fig. 16.1

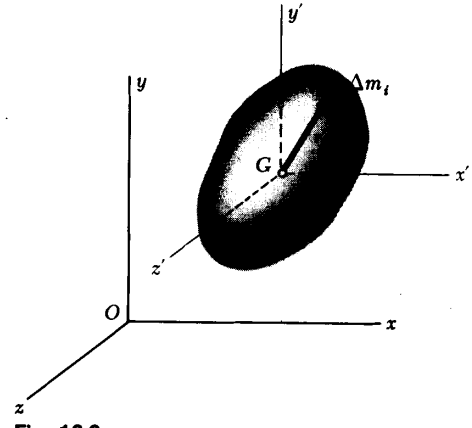


Fig. 16.2

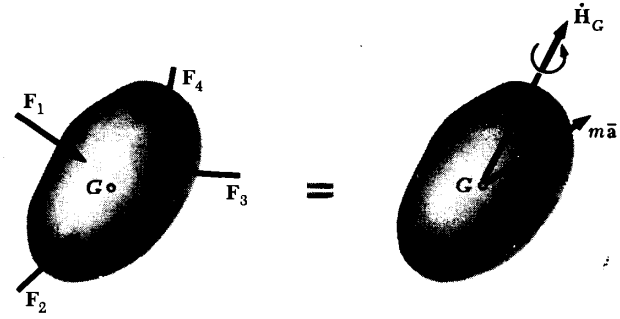


Fig. 16.3

fuerzas exteriores es equivalente al sistema que consiste en el vector $m\bar{\mathbf{a}}$ *fijo a* G *y el par de movimiento* $\mathbf{H}_G$ (Fig. 16.3)†.

Las ecuaciones (16.1) y (16.2) se aplican en el caso más general del movimiento de un sólido rígido. No obstante, en el resto de este capítulo limitaremos nuestro análisis al *movimiento plano* de los sólidos rígidos, es decir, a un movimiento en el que cada partícula permanece a una distancia constante de un plano de referencia fijo, y supondremos que los sólidos rígidos considerados consisten únicamente en placas planas y en sólidos que son simétricos con respecto al plano de referencia. Pospondremos hasta el capítulo 18 el estudio más detallado del movimiento plano de cuerpos tridimensionales asimétricos y el movimiento de los sólidos rígidos en el espacio tridimensional.

16.3. Momento angular de un sólido rígido en movimiento plano. Considérese una placa rígida con movimiento plano. Suponiendo que la placa está formada por gran número de n partículas P_i de masa Δm_i y recordando la ecuación (14.24) de la sección 14.5, observamos que el momento angular $\mathbf{H}_G$ de la placa alrededor de su centro de masa G puede calcularse tomando los momentos, respecto a G, de los momentos lineales de las partículas de la placa en su movimiento con respecto a cualquiera de los sistemas de referencia Oxy o $Gx'y'$. (Fig. 16.4). Eligiendo al último, escribimos

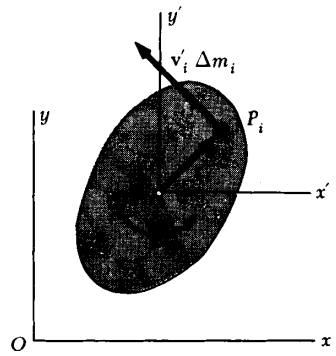


Fig. 16.4

$$\mathbf{H}_G = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}'_i \times \mathbf{v}'_i \Delta m_i) \tag{16.3}$$

en la que $\mathbf{r}'_i$ y $\mathbf{v}'_i \Delta m_i$ representan, respectivamente, el vector de posición y el momento lineal de la partícula P_i relativos al sistema de referencia central $Gx'y'$. Pero como la partícula forma parte de la placa, tenemos que $\mathbf{v}'_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i$, donde $\boldsymbol{\omega}$ es la velocidad angular de la placa en el instante considerado. Escribimos

$$\mathbf{H}_G = \sum_{i=1}^{n} [\mathbf{r}'_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i)\Delta m_i]$$

† Como los sistemas que intervienen actúan sobre un sólido rígido, en este momento podríamos concluir, refiriéndonos a la sección 3.19, que los dos sistemas son *equivalentes*, al igual que equipolentes, y usar signo de igualdad de color en lugar de gris en la figura 16.3. Sin embargo, posponiendo esta conclusión llegaremos a ella de una manera independiente (secciones 16.4 y 18.5), eliminando así la necesidad de incluir al principio de transmisibilidad entre los axiomas de la mecánica (Secc. 16.5).

Refiriéndonos a la figura 16.4, verificamos fácilmente que la expresión obtenida representa un vector con la misma dirección que ω (es decir, perpendicular a la placa y de módulo igual a $\omega\Sigma r_i'^2\,\Delta m_i$. Recordando que la suma $\Sigma r_i^2\,\Delta m_i$ representa el momento de inercia I de la placa alrededor de un eje central perpendicular a la placa, concluimos que el momento angular $\mathbf{H}_G$ de la placa alrededor de su centro de masa es

$$\mathbf{H}_G = \bar{I}\boldsymbol{\omega} \tag{16.4}$$

Al derivar ambos miembros de la ecuación (16.4) obtenemos

$$\dot{\mathbf{H}}_G = \bar{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} = \bar{I}\boldsymbol{\alpha} \tag{16.5}$$

Por tanto, la derivada temporal del momento angular de la placa está representada por un vector de la misma dirección que $\boldsymbol{\alpha}$ (es decir, perpendicular a la placa) y de módulo $I\alpha$.

Debe tenerse en cuenta que los resultados obtenidos en esta sección se dedujeron para una placa rígida con movimiento plano. Como veremos en el capítulo 18, siguen siendo válidos en el caso del movimiento plano de sólidos rígidos que son simétricos con respecto al plano de referencia†. Sin embargo, no se aplican al caso de sólidos asimétricos ni al del movimiento en tres dimensiones.

16.4. Movimiento plano de un sólido rígido. Principio de D'Alembert. Considérese una placa rígida de masa m que se mueve bajo la acción de varias fuerzas exteriores $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, etc., contenidas en el plano de la placa (Fig. 16.5). Al sustituir $\mathbf{H}_G$ de la ecuación (16.5) en la ecuación (16.2) y escribir las ecuaciones fundamentales de movimiento (16.1) y (16.2) en forma escalar, tenemos

$$\Sigma F_x = m\bar{a}_x \qquad \Sigma F_y = m\bar{a}_y \qquad \Sigma M_G = \bar{I}\alpha \tag{16.6}$$

Las ecuaciones (16.6) muestran que la aceleración del centro de masa G de la placa y su aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ pueden obtenerse con facilidad, una vez que se han encontrado la resultante de las fuerzas exteriores que actúan sobre la placa y su momento resultante respecto a G. Dadas las condiciones iniciales correspondientes, las coordenadas $\bar{x}$ e $\bar{y}$ del centro de masa y la coordenada angular θ de la placa se encuentran en todo instante t mediante integración. Por consiguiente, *el movimiento de la placa está totalmente determinado por la resultante y el momento resultante a G de las fuerzas exteriores que actúan sobre ella.*

Esta propiedad, que se extenderá en el capítulo 18 al caso del movimiento de un sólido rígido en tres dimensiones, es característica del movimiento de un sólido rígido. De hecho, como ya vimos en el capítulo 14, el movimiento de un sistema de partículas que no están unidas rígidamente dependerá en general de las fuerzas exteriores

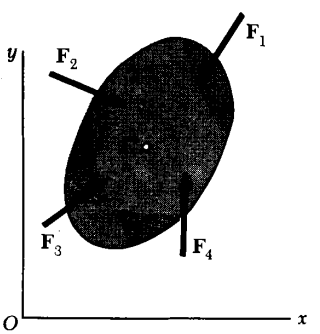


Fig. 16.5

† O bien, con mayor generalidad, sólidos que tienen un eje de inercia central principal perpendicular al plano de referencia.

particulares, así como de las fuerzas internas, que actúan sobre todas las partículas.

Como el movimiento de un sólido rígido depende únicamente de la resultante y el momento resultante de las fuerzas exteriores que actúan sobre él, se deduce que *dos sistemas de fuerzas que sean equivalentes*, es decir, que tengan la misma resultante y el mismo momento resultante, *son también mecánicamente equivalentes;* esto es, tienen exactamente el mismo efecto sobre cualquier sólido rígido†.

Considérese en particular el sistema de las fuerzas exteriores que actúa sobre un sólido rígido (Fig. 16.6*a*) y el sistema de los vectores asociados con las partículas que formen al sólido rígido (Fig. 16.6*b*). En la sección 14.2 se demostró que los sistemas construidos así son equivalentes. Pero como las partículas que consideramos forman ahora un sólido rígido, se deduce del análisis anterior que los dos sistemas son también mecánicamente equivalentes. Por tanto, podemos afirmar que *las fuerzas exteriores que actúan sobre un sólido rígido son equivalentes al sistema de vectores* $(\Delta m_i)\mathbf{a}_i$ *de las diversas partículas que forman al sólido.* Esta afirmación se conoce con el nombre de *principio de d'Alembert*, en honor al matemático francés Jean le Rond d'Alembert (1717-1783), aunque el enunciado original de d'Alembert se escribió de una manera algo diferente.

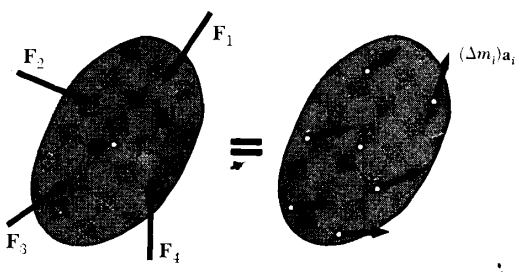


Fig. 16.6

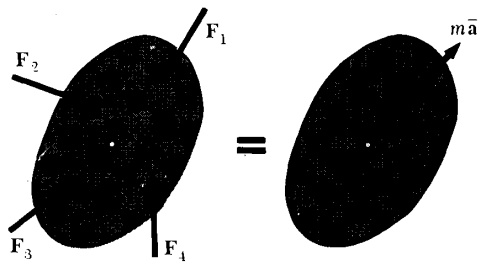


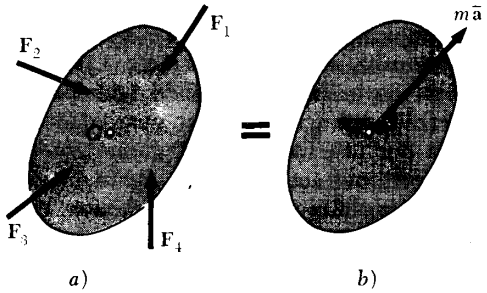
Fig. 16.7

El significado del principio d'Alembert se destacó empleando signos de igualdad en color en la figura 16.6 y también en la 16.7, en la que, utilizando resultados anteriores de esta misma sección, hemos sustituido el sistema de vectores $(\Delta m_i)\mathbf{a}_i$ por un vector $m\bar{\mathbf{a}}$ fijo al centro de masa G de la placa y un par de momento $\bar{I}\alpha$.

En el caso especial de un sólido en traslación, la aceleración angular del sólido es idénticamente nula y sus fuerzas reales se reducen al vector $m\bar{\mathbf{a}}$ fijo a G (Fig. 16.8). En consecuencia, la resultante de las fuerzas exteriores que actúan sobre un sólido rígido en traslación pasa por el centro de masa del cuerpo y es igual a $m\bar{\mathbf{a}}$.

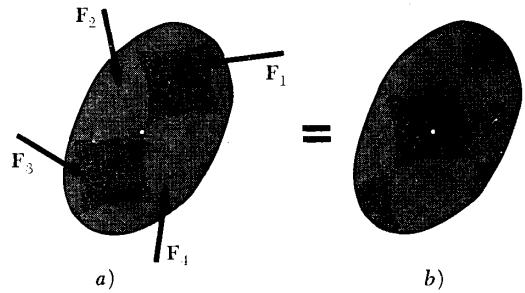
† Este resultado ya se había deducido en la sección 3.19 a partir del principio de transmisibilidad (Secc. 3.3). Sin embargo, esta deducción es independiente de dicho principio y hará posible que éste se elimine de los axiomas de la mecánica (Sec. 16.5).

Rotación central. Cuando una placa o, más generalmente, un cuerpo simétrico con respecto al plano de referencia, gira sobre un eje fijo perpendicular al plano de referencia que pasa por su centro de masa G, decimos que el sólido tiene *rotación central*. Como la aceleración $\bar{\mathbf{a}}$ es idénticamente nula, el sistema de vectores $(\Delta m_i)\mathbf{a}_i$ del sólido se reducen al par $\bar{I}\alpha$ (Fig. 16.9). Por tanto, las fuerzas exteriores que actúan sobre un sólido en rotación central son equivalentes a un par de momento $\bar{I}\alpha$.



a) *b)*

Fig. 16.8 *Traslación*



a) *b)*

Fig. 16.9 *Rotación central*

Movimiento plano general. Comparando la figura 16.7 con las figuras 16.8 y 16.9, observamos que desde el punto de vista de la *cinética*, el movimiento plano más general de un sólido rígido simétrico con respecto al plano de referencia puede sustituirse por la suma de una traslación y una rotación central. Debemos advertir que esta afirmación es más restrictiva que la afirmación similar hecha antes desde el punto de vista de la *cinemática* (Secc. 15.5), porque ahora requerimos que se elija como punto de referencia al centro de masa del sólido.

Con referencia a las ecuaciones (16.6), observamos que las dos primeras ecuaciones son idénticas a las ecuaciones de movimiento de una partícula de masa m sobre la que actúan las fuerzas dadas $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, etc. Por consiguiente, comprobamos que *el centro de masa G de un sólido rígido con movimiento plano se mueve como si toda la masa del sólido estuviera concentrada en ese punto y actuaran sobre él todas las fuerzas exteriores.* Recordemos que ya se había obtenido este resultado en la sección 14.4 para el caso general de un sistema de partículas que no necesariamente están unidas rígidamente. Notemos también, como lo hicimos ya en la sección 14.4 que, en general, el sistemas de las fuerzas exteriores no se reduce a un solo vector $m\bar{\mathbf{a}}$ fijo a G. Por lo tanto, en el caso general del movimiento de un sólido rígido, *la resultante de las fuerzas exteriores que actúan sobre el sólido no pasa por su centro de masa.*

Podemos observar, finalmente, que la última de las ecuaciones (16.6) seguirá siendo válida si, aplicándole las mismas fuerzas, el sólido rígido estuviera restringido a girar sobre un eje fijo que pase por G. Por tanto, *un sólido rígido con movimiento plano gira sobre su centro de masa como si este punto estuviese fijo.*

***16.5. Una observación acerca de los axiomas de la mecánica de sólidos rígidos.** El hecho de que dos sistemas equivalentes de fuerzas exteriores que actúen sobre un sólido rígido sean también mecánicamente equivalentes, es decir, tengan el mismo efecto sobre el sólido rígido, ya se estableció en la sección 3.19, donde se dedujo a partir del *principio de la transmisibilidad*, uno de los axiomas que utilizamos en nuestro estudio de la estática de los sólidos rígidos. Debe advertirse que no hemos utilizado dicho axioma en el presente capítulo porque la segunda y tercera leyes del movimiento de Newton hacen innecesario su empleo en el estudio de la dinámica de los sólidos rígidos.

De hecho, podemos *deducir* ahora el *principio de la transmisibilidad* a partir de los demás axiomas que utilizamos en el estudio de la mecánica. Este principio afirmaba, sin demostrarlo (Secc. 3.3), que la condición de equilibrio o de movimiento de un sólido rígido permanece inalterada si una fuerza **F** que actúa sobre un punto dado del sólido rígido es sustituida por una fuerza **F'** del mismo módulo y con la misma dirección, pero que actúa sobre un punto distinto, siempre que las dos fuerzas tengan la misma línea de acción. Pero como **F** y **F'** tienen el mismo momento con respecto a un punto arbitrario cualquiera, es evidente que forman dos sistemas de fuerzas exteriores equivalentes. Por tanto, ahora podemos *demostrar*, a consecuencia de lo que establecimos en la sección anterior, que **F** y **F'** tienen el mismo efecto sobre el sólido rígido (Fig. 3.3).

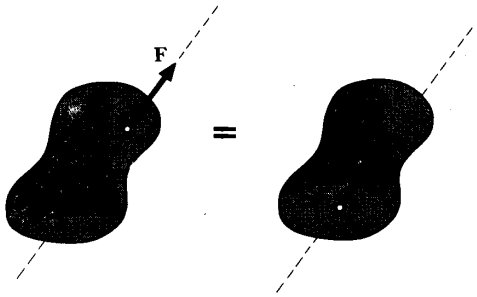


Fig. 3.3 (repetida)

Por consiguiente, puede suprimirse el principio de transmisibilidad de la lista de axiomas necesarios para el estudio de la mecánica del sólido rígido. Estos axiomas se reducen a la ley del paralelogramo de adición de los vectores y a las leyes de Newton del movimiento.

16.6. Solución de problemas relacionados con el movimiento de un sólido rígido. En la sección 16.4 vimos que cuando un sólido rígido tiene movimiento plano, existe una relación fundamental entre las fuerzas $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, que actúan sobre el sólido, la aceleración $\bar{\mathbf{a}}$ de su centro de masa y la aceleración angular α del sólido. Esta relación, que representa en la figura 16.7 en forma de una *ecuación de diagrama de sólido libre*, sirve para encontrar la aceleración $\mathbf{a}$ y la aceleración angular α producidas por un sistema de fuerza arbitrario que actúen sobre un sólido rígido o, inversa-

mente, para obtener las fuerzas que producen un movimiento dado del sólido rígido.

Aunque pueden utilizarse las tres ecuaciones algebraicas (16.6) en la solución de problemas de movimiento plano,† nuestra experiencia con la estática sugiere que puede simplificarse la solución de muchos problemas en los que intervienen sólidos rígidos, mediante una elección adecuada del punto alrededor del cual se calculan los momentos de las fuerzas. Por consiguiente, es preferible recordar la relación que existe entre las fuerzas y las aceleraciones en la forma gráfica indicada en la figura 16.7, y de esta relación fundamental deducir las ecuaciones de las componentes o de los momentos que mejor se ajusten a la solución del problema considerado.

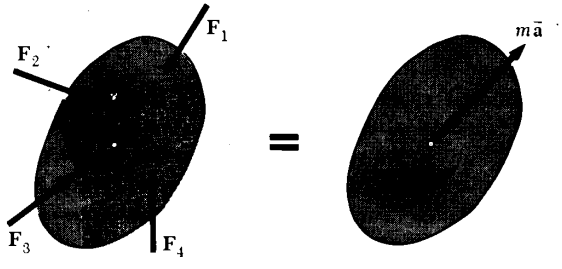


Fig. 16.7 (repetida)

La relación fundamental que muestra la figura 16.7 puede representarse de manera alternativa si agregamos a las fuerzas exteriores un vector de inercia $-m\bar{\mathbf{a}}$ de sentido opuesto al de $\bar{\mathbf{a}}$, fijo en G, y un par de inercia $-\bar{I}\boldsymbol{\alpha}$ de momento igual $\bar{I}\boldsymbol{\alpha}$ y sentido opuesto al de $\boldsymbol{\alpha}$ (Fig. 16.10). El sistema obtenido es equivalente a cero, por lo que se dice que el sólido rígido está en equilibrio dinámico.

Ya sea que se aplique directamente el principio de la equivalencia de fuerzas exteriores y fuerzas de inercia, como en la figura 16.7, o que se introduzca el concepto del equilibrio dinámico, como en la figura 16.10, el empleo de ecuaciones de diagrama de sólido libre que muestren vectorialmente la relación que existe entre las fuerzas aplicadas al sólido rígido y las aceleraciones lineal y angular resultantes produce ventajas considerables sobre la aplicación ciega de las fórmulas (16.6); podemos resumir estas ventajas de la manera siguiente:

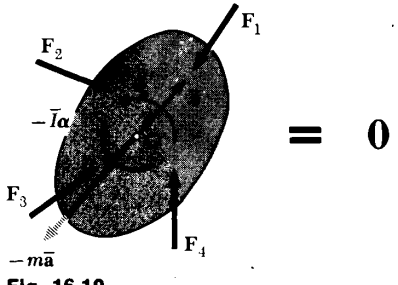


Fig. 16.10

1. Mediante el empleo de la representación gráfica se tendría una comprensión más clara del efecto de las fuerzas en el movimiento del sólido.
2. Esta formulación hace posible dividir la solución de un problema dinámico en dos partes: en la primera, el análisis de las características cinemáticas y cinéticas del problema conduce a los diagramas de sólido libre de la figura 16.7 o 16.10; en la segunda, se utiliza el diagrama obtenido para analizar las

† Recordemos que la última de las ecuaciones (16.6) es válida sólo en el caso del movimiento plano de un sólido rígido simétrico con respecto al plano de referencia. En todos los demás casos se deben emplear los métodos del capítulo 18.

diversas fuerzas y vectores que intervienen mediante los métodos del capítulo 3.

3. Se proporciona una formulación unificada para analizar el movimiento plano de un sólido rígido, sin importar el tipo particular de movimiento que ocurra. Mientras que la cinemática de los diversos movimientos que se consideren puede variar de un caso a otro, la formulación de la cinética del movimiento es básicamente la misma. En todo caso dibujaremos un diagrama que muestre las fuerzas exteriores, el vector $m\bar{\mathbf{a}}$ asociado al movimiento de G y el par $\bar{I}\alpha$ asociado con la rotación del sólido sobre G.
4. La descomposición del movimiento plano de un sólido rígido en una traslación y una rotación central utilizada aquí, es un concepto básico que puede aplicarse realmente a todo el estudio de la mecánica. Lo volveremos a emplear en el capítulo 17 con el método del trabajo y la energía y con el método del impulso y del momento.
5. Como veremos en el capítulo 18, se puede extender esta formulación al estudio del movimiento general en tres dimensiones de un sólido rígido. De nuevo se descompondrá el movimiento del sólido en una traslación y una rotación sobre el centro de masa y utilizaremos ecuaciones de diagrama de sólido libre para indicar la relación que existe entre las fuerzas exteriores y la derivada temporal del momento lineal y angular del sólido.

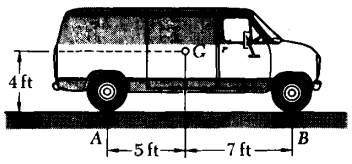
16.7. Sistemas de sólidos rígidos. Se puede utilizar el método descrito en la sección anterior también en problemas relacionados con el movimiento de varios sólidos rígidos conectados en un plano. Para cada parte del sistema se puede dibujar un diagrama similar a la figura 16.7 o a la figura 16.10. Las ecuaciones de movimiento que se obtienen de estos diagramas se resuelven simultáneamente.

En algunos casos, como el problema resuelto 16.3, se puede dibujar un solo diagrama para todo el sistema. Este diagrama deberá incluir todas las fuerzas exteriores, así como los vectores $m\bar{\mathbf{a}}$ y los pares $\bar{I}\alpha$ asociados con las distintas partes del sistema. Sin embargo, las fuerzas internas, como las ejercidas por cables de conexión, se pueden omitir porque se presentan en parejas de fuerzas iguales y opuestas y por consiguiente son equivalentes a cero. Las ecuaciones que se obtienen al expresar que el sistema de las fuerzas exteriores es equivalente al sistema de vectores $m \cdot \mathbf{a}$ se resuelve para las incógnitas restantes†.

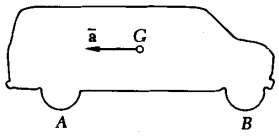
Este segundo método no puede ser utilizado en problemas que contienen más de tres incógnitas, porque cuando se emplea un solo diagrama se dispone únicamente de tres ecuaciones de movimiento. No especulemos acerca de esto ya que el análisis sería completamente similar al dado en la sección 6.11, en el caso del equilibrio de un sistema de sólidos rígidos.

† Nótese que no podemos hablar de sistemas *mecanicamente equivalentes* porque no nos ocupamos de un solo sólido rígido.

PROBLEMA RESUELTO 16.1



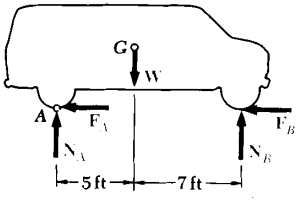
En un instante en que la velocidad hacia adelante del camión que se muestra era 30 ft/s se aplicaron súbitamente los frenos, lo cual causó que las cuatro ruedas dejaran de girar. Se observó que el camión patinó 20 ft hasta llegar a la inmovilidad. Determínese el módulo de la reacción normal y de la fuerza de rozamiento que actúa sobre cada rueda mientras el camión patinó antes de detenerse.



Cinemática del movimiento. Eligiendo el sentido positivo hacia la derecha y aplicando las ecuaciones del movimiento con aceleración uniforme, escribimos

$$\bar{v}_0 = +30 \text{ ft/s} \qquad \bar{v}^2 = \bar{v}_0^2 + 2\bar{a}\bar{x} \qquad 0 = (30)^2 + 2\bar{a}(20)$$
$$\bar{a} = -22.5 \text{ ft/s}^2 \qquad \bar{\mathbf{a}} = 22.5 \text{ ft/s}^2 \leftarrow$$

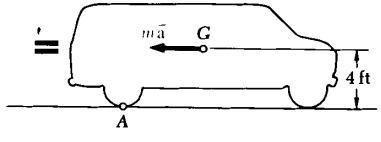
Ecuaciones de movimiento. Las fuerzas exteriores consisten en el peso **W** del camión y las reacciones normales y fuerzas de rozamiento en las ruedas. (Los vectores $\mathbf{N}_A$ y $\mathbf{F}_A$ representan las suma de las reacciones en las ruedas traseras, mientras que $\mathbf{N}_B$ y $\mathbf{F}_B$ representan la suma de las reacciones en las ruedas delanteras.) Como el movimiento del camión es de traslación el sistema de vectores $m\mathbf{a}$ se reduce al vector $m\bar{\mathbf{a}}$ fijo en G. Se obtienen tres ecuaciones de movimiento al expresar que el sistema de las fuerzas exteriores es equivalente al sistema de vectores $m\mathbf{a}$.



$$+\uparrow \Sigma F_y = \Sigma(F_y)_{\text{eff}}: \qquad N_A + N_B - W = 0$$

Como $F_A = \mu_k N_A$ y $F_B = \mu_k N_B$, en las que μ_k es el coeficiente de rozamiento cinético, encontramos que

$$F_A + F_B = \mu_k(N_A + N_B) = \mu_k W$$



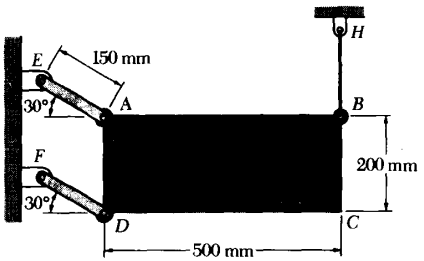
$$\pm\rightarrow \Sigma F_x = \Sigma(F_x)_{\text{eff}}: \qquad -(F_A + F_B) = -m\bar{a}$$
$$-\mu_k W = -\frac{W}{32.2 \text{ ft/s}^2}(22.5 \text{ ft/s}^2)$$
$$\mu_k = 0.699$$

$$+\uparrow \Sigma M_A = \Sigma(M_A)_{\text{eff}}: \quad -W(5 \text{ ft}) + N_B(12 \text{ ft}) = m\bar{a}(4 \text{ ft})$$
$$-W(5 \text{ ft}) + N_B(12 \text{ ft}) = \frac{W}{32.2 \text{ ft/s}^2}(22.5 \text{ ft/s}^2)(4 \text{ ft})$$
$$N_B = 0.650W$$
$$F_B = \mu_k N_B = (0.699)(0.650W) \qquad F_B = 0.454W$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = \Sigma(F_y)_{\text{eff}}: \qquad N_A + N_B - W = 0$$
$$N_A + 0.650W - W = 0$$
$$N_A = 0.350W$$
$$F_A = \mu_k N_A = (0.699)(0.350W) \qquad F_A = 0.245W$$

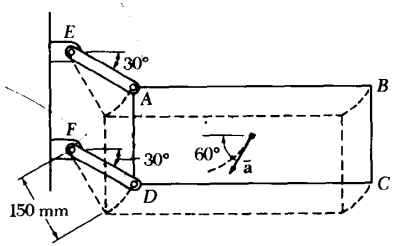
Reacciones en cada rueda. Recordando que los valores arriba calculados representan la suma de las reacciones en las dos ruedas delanteras o en las dos ruedas traseras, obtenemos el módulo de las reacciones en cada rueda al escribir

$$N_{\text{adelante}} = \tfrac{1}{2}N_B = 0.325W \qquad N_{\text{atrás}} = \tfrac{1}{2}N_A = 0.175W \blacktriangleleft$$
$$F_{\text{adelante}} = \tfrac{1}{2}F_B = 0.227W \qquad F_{\text{atrás}} = \tfrac{1}{2}F_A = 0.122W \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESUELTO 16.2

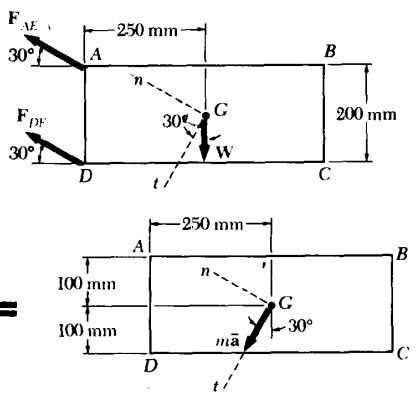
La placa delgada *ABCD* tiene una masa de 8 kg y se mantiene en la posición indicada por medio del alambre *BH* y dos eslabones *AE* y *DF*. Despreciando la masa de los eslabones, determínense, inmediatamente después que se corta el alambre *BH a*) la aceleración de la placa, y *b*) la fuerza sobre cada eslabón.



Cinemática del movimiento. Después de cortar el alambre *BH*, observamos que los vértices *A* y *D* se mueven sobre círculos similares de 150 mm de radio centrados en *E* y *F*, respectivamente. El movimiento de la placa es, en consecuencia, una traslación curvilínea y las partículas que componen la placa se mueven sobre círculos de radio 150 mm.

En el instante en que se corta el alambre *BH* la velocidad de la placa es cero. Por tanto, la aceleración $\bar{\mathbf{a}}$ del centro de masa *G* de la placa es tangente a la trayectoria circular que describirá *G*.

Ecuaciones de movimiento. Las fuerzas exteriores consisten en el peso **W** y las fuerzas $\mathbf{F}_{AE}$ y $\mathbf{F}_{DF}$ que ejercen los eslabones. Como la placa está en traslación, el sistema de vectores $m\mathbf{a}$ se reduce al vector $m\bar{\mathbf{a}}$ fijo a *G* y dirigido a lo largo del eje *t*. Ahora expresaremos que el sistema de las fuerzas exteriores es equivalente al sistema de los vectores $m\mathbf{a}$.



a) Aceleración de la placa.

$$+\swarrow \Sigma F_t = \Sigma(F_t)_{\text{eff}}:$$

$$W\cos 30^\circ = m\bar{a}$$

$$mg\cos 30^\circ = m\bar{a}$$

$$\bar{a} = g\cos 30^\circ = (9.81\ \text{m/s}^2)\cos 30^\circ \tag{1}$$

$$\bar{\mathbf{a}} = 8.50\ \text{m/s}^2 \measuredangle 60^\circ \blacktriangleleft$$

b) Fuerzas sobre los eslabones AE y DF.

$$+\nwarrow \Sigma F_n = \Sigma(F_n)_{\text{eff}}: \qquad F_{AE} + F_{DF} - W\sin 30^\circ = 0 \tag{2}$$

$$+\downarrow \Sigma M_G = \Sigma(M_G)_{\text{eff}}:$$

$$(F_{AE}\,\text{sen}\,30^\circ)(250\ \text{mm}) - (F_{AE}\cos 30^\circ)(100\ \text{mm})$$

$$+(F_{DF}\,\text{sen}\,30^\circ)(250\ \text{mm}) + (F_{DF}\cos 30^\circ)(100\ \text{mm}) = 0$$

$$38.4F_{AE} + 211.6F_{DF} = 0$$

$$F_{DF} = -0.1815F_{AE} \tag{3}$$

Al sustituir F_{DF} de la ecuación (3) en la ecuación (2), escribimos

$$F_{AE} - 0.1815F_{AE} - W\,\text{sen}\,30^\circ = 0$$

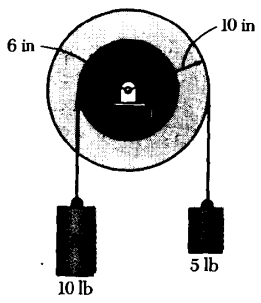
$$F_{AE} = 0.6109W$$

$$F_{DF} = -0.1815(0.6109W) = -0.1109W$$

Notando que $W = mg = (8\ \text{kg})(9.81\ \text{m/s}^2) = 78.48\ \text{N}$, tenemos

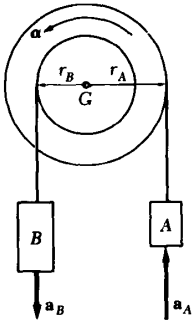
$$F_{AE} = 0.6109(78.48\ \text{N}) \qquad F_{AE} = 47.9\ \text{N}\ T \blacktriangleleft$$

$$F_{DF} = -0.1109(78.48\ \text{N}) \qquad F_{DF} = 8.70\ \text{N}\ C \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESUELTO 16.3

Una polea que pesa 12 lb y que tiene un radio de giro de 8 in está conectada a dos cilindros como se indica. Suponiendo que no hay rozamiento en el eje, encuéntrese la aceleración angular de la polea y la aceleración de cada cilindro.



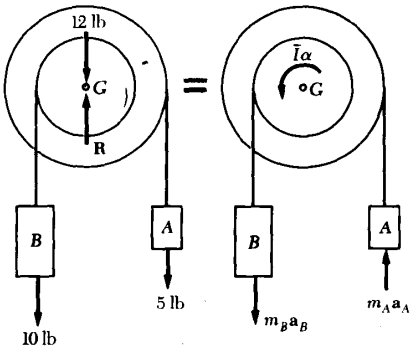
Sentido del movimiento. Aunque se puede suponer un sentido de movimiento arbitrario (porque no intervienen fuerzas de rozamiento) que puede después corregirse según el signo de la respuesta, preferimos determinar primero el sentido verdadero de rotación de la polea. Encontramos primero el peso del cilindro B necesario para conservar el equilibrio de la polea cuando sobre ella actúa el cilindro A de 5 lb. Escribimos

$$+\circlearrowleft \Sigma M_G = 0: \qquad W_B(6 \text{ in}) - (5 \text{ lb})(10 \text{ in}) = 0 \qquad W_B = 8.33 \text{ lb}$$

Como el cilindro B pesa realmente 10 lb, la polea girará en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj.

Cinemática del movimiento. Suponiendo α contraria al sentido de las manecillas del reloj y notando que $\mathbf{a}_A = r_A \alpha$ y que $a_B = r_B\alpha$, obtenemos

$$\mathbf{a}_A = (\tfrac{10}{12} \text{ ft})\alpha \uparrow \qquad \mathbf{a}_B = (\tfrac{6}{12} \text{ ft})\alpha \downarrow$$



Ecuaciones de movimiento. Se considera un solo sistema que consiste en la polea y los dos cilindros. Las fuerzas exteriores a este sistema son los pesos de la polea y los dos cilindros y de la reacción en G. (Las fuerzas que ejercen los cables sobre la polea y sobre los cilindros son internas al sistema y se cancelan.) Como el movimiento de la polea es una rotación central y el movimiento de cada cilindro es una traslación, los vectores $m\mathbf{a}$ se reducen al par $\bar{I}\alpha$ y a los dos vectores $m\mathbf{a}_A$ y $m\mathbf{a}_B$. El momento central de inercia de la polea es

$$\bar{I} = m\bar{k}^2 = \frac{W}{g}\bar{k}^2 = \frac{12 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2}(\tfrac{8}{12} \text{ ft})^2 = 0.1656 \text{ lb·ft·s}^2$$

Como el sistema de las fuerzas exteriores es equivalente al sistema de vectores $m\mathbf{a}$, escribimos

$$+\circlearrowleft \Sigma M_G = \Sigma(M_G)_{\text{eff}}:$$

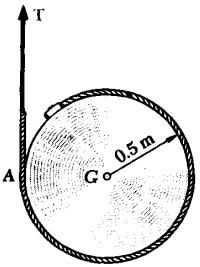
$$(10 \text{ lb})(\tfrac{6}{12} \text{ ft}) - (5 \text{ lb})(\tfrac{10}{12} \text{ ft}) = +\bar{I}\alpha + m_B a_B(\tfrac{6}{12} \text{ ft}) + m_A a_A(\tfrac{10}{12} \text{ ft})$$

$$(10)(\tfrac{6}{12}) - (5)(\tfrac{10}{12}) = 0.1656\alpha + \tfrac{10}{32.2}(\tfrac{6}{12}\alpha)(\tfrac{6}{12}) + \tfrac{5}{32.2}(\tfrac{10}{12}\alpha)(\tfrac{10}{12})$$

$$\alpha = +2.374 \text{ rad/s}^2 \qquad \boldsymbol{\alpha} = 2.37 \text{ rad/s}^2 \circlearrowleft \blacktriangleleft$$

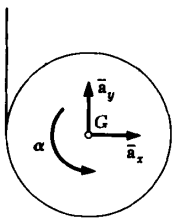
$$a_A = r_A\alpha = (\tfrac{10}{12} \text{ ft})(2.374 \text{ rad/s}^2) \qquad \mathbf{a}_A = 1.978 \text{ ft/s}^2 \uparrow \blacktriangleleft$$

$$a_B = r_B\alpha = (\tfrac{6}{12} \text{ ft})(2.374 \text{ rad/s}^2) \qquad \mathbf{a}_B = 1.187 \text{ ft/s}^2 \downarrow \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESUELTO 16.4

Una cuerda se enreda en el contorno de un disco homogéneo de radio $r = 0.5$ m y masa $m = 15$ kg. Si se tira de la cuerda hacia arriba con una fuerza T de módulo 180 N, determínense *a*) la aceleración del centro del disco, *b*) la aceleración angular del disco, y *c*) la aceleración de la cuerda.

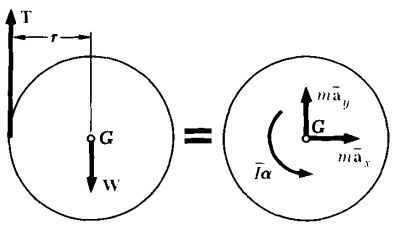


Ecuaciones de movimiento. Suponemos que las componentes $\bar{a}_x$ y $\bar{a}_y$ de la aceleración del centro del disco están dirigidas hacia la derecha y hacia arriba respectivamente, y que la aceleración angular del disco es contraria al sentido de movimiento de las manecillas del reloj. Las fuerzas exteriores que actúan sobre el disco consisten en el peso W y la fuerza T aplicada por la cuerda. Este sistema es mecánicamente equivalente al sistema de los vectores $m\mathbf{a}$, el cual consiste en un vector de componentes $m\bar{a}_x$ y $m\bar{a}_y$ fijo a G y un par $I\alpha$. Escribimos.

$$\stackrel{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = \Sigma(F_x)_{\text{eff}}: \qquad 0 = m\bar{a}_x \qquad \bar{a}_x = 0 \blacktriangleleft$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = \Sigma(F_y)_{\text{eff}}: \qquad T - W = m\bar{a}_y$$

$$\bar{a}_y = \frac{T - W}{m}$$



Puesto que $T = 180$ N, $m = 15$ kg y $W = (15 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 147.1$ N, tenemos

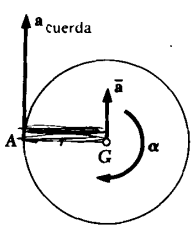
$$\bar{a}_y = \frac{180 \text{ N} - 147.1 \text{ N}}{15 \text{ kg}} = +2.19 \text{ m/s}^2 \qquad \bar{a}_y = 2.19 \text{ m/s}^2 \uparrow \blacktriangleleft$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_G = \Sigma(M_G)_{\text{eff}}: \qquad -Tr = \bar{I}\alpha$$

$$-Tr = (\tfrac{1}{2}mr^2)\alpha$$

$$\alpha = -\frac{2T}{mr} = -\frac{2(180 \text{ N})}{(15 \text{ kg})(0.5 \text{ m})} = -48.0 \text{ rad/s}^2$$

$$\alpha = 48.0 \text{ rad/s}^2 \circlearrowright \blacktriangleleft$$



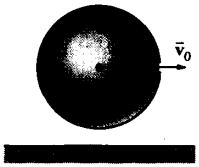
Aceleración de la cuerda. Como la aceleración de la cuerda es igual a la componente tangencial de la aceleración del punto A sobre el disco escribimos

$$a_{\text{cuerda}} = (a_A)_t = \bar{a} + (a_{A/G})_t$$

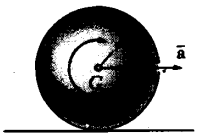
$$= [2.19 \text{ m/s}^2 \uparrow] + [(0.5 \text{ m})(48 \text{ rad/s}^2) \uparrow]$$

$$a_{\text{cuerda}} = 26.2 \text{ m/s}^2 \uparrow \blacktriangleleft$$

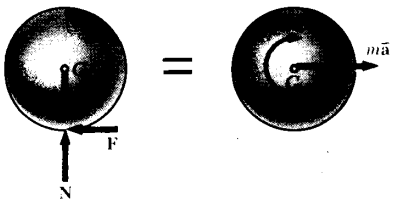
PROBLEMA RESUELTO 16.5



Una esfera uniforme de masa m y radio r es lanzada encima de una superficie rugosa horizontal con una velocidad v_0 y sin velocidad angular. Indicando por μ_k el coeficiente de rozamiento cinético entre la esfera y el piso, encuéntrese *a*) el tiempo t_1 al cual la esfera comenzará a rodar sin deslizar, y *b*) la velocidad lineal y la velocidad angular de la esfera al tiempo t_1.



Ecuaciones de movimiento. Elegimos como sentido positivo para $\mathbf{a}$ hacia la derecha y en el sentido de las manecillas del reloj para $\boldsymbol{\alpha}$. Las fuerzas exteriores que actúan sobre la esfera consisten en el peso **W**, la reacción normal **N** y la fuerza de rozamiento **F**. Como el punto de la esfera que está en contacto con la superficie desliza hacia la derecha, la fuerza **F** de rozamiento está dirigida hacia la izquierda. Mientras la esfera desliza, el módulo de la fuerza de rozamiento es $F = \mu_k N$. Los vectores $m\mathbf{a}$ se reducen al vector $m\bar{\mathbf{a}}$ fijo a G y el par $\bar{I}\boldsymbol{\alpha}$. Expresando que el sistema de las fuerzas exteriores es mecánicamente equivalente al sistema de los vectores $m\mathbf{a}$, escribimos



$$+\uparrow \Sigma F_y = \Sigma(F_y)_{\text{eff}}: \qquad N - W = 0$$

$$N = W = mg \qquad F = \mu_k N = \mu_k mg$$

$$\pm\rightarrow \Sigma F_x = \Sigma(F_x)_{\text{eff}}: \qquad -F = m\bar{a} \qquad -\mu_k mg = m\bar{a} \qquad \bar{a} = -\mu_k g$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_G = \Sigma(M_G)_{\text{eff}}: \qquad Fr = \bar{I}\alpha$$

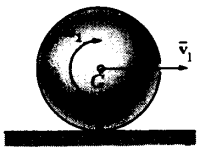
Notando que $\bar{I} = \frac{2}{5}mr^2$ y sustituyendo el valor que se obtuvo para F, escribimos

$$(\mu_k mg)r = \tfrac{2}{5}mr^2\alpha \qquad \alpha = \frac{5}{2}\frac{\mu_k g}{r}$$

Cinemática del movimiento. Mientras la esfera gire y al mismo tiempo deslice sus movimientos lineal y angular son con aceleración uniforme.

$$t = 0,\ \bar{v} = \bar{v}_0 \qquad \bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{a}t = \bar{v}_0 - \mu_k g t \tag{1}$$

$$t = 0,\ \omega_0 = 0 \qquad \omega = \omega_0 + \alpha t = 0 + \left(\frac{5}{2}\frac{\mu_k g}{r}\right)t \tag{2}$$



La esfera comenzará a rodar sin deslizar cuando la velocidad v_C del punto de contacto C sea cero. En ese instante, $t = t_1$, el punto C se convierte en el centro instantáneo de rotación y tenemos

$$\bar{v}_1 = r\omega_1 \tag{3}$$

Al sustituir en (3) los valores obtenidos para $\bar{v}_1$ y ω_1 después de tomar $t = t_1$ en (1) y (2) respectivamente, escribimos

$$\bar{v}_0 - \mu_k g t_1 = r\left(\frac{5}{2}\frac{\mu_k g}{r}t_1\right) \qquad t_1 = \frac{2}{7}\frac{\bar{v}_0}{\mu_k g} \blacktriangleleft$$

Sustituyendo t_1 en (2), tenemos

$$\omega_1 = \frac{5}{2}\frac{\mu_k g}{r}t_1 = \frac{5}{2}\frac{\mu_k g}{r}\left(\frac{2}{7}\frac{\bar{v}_0}{\mu_k g}\right) \qquad \omega_1 = \frac{5}{7}\frac{\bar{v}_0}{r} \qquad \omega_1 = \frac{5}{7}\frac{\bar{v}_0}{r}\circlearrowleft \blacktriangleleft$$

$$\bar{v}_1 = r\omega_1 = r\left(\frac{5}{7}\frac{\bar{v}_0}{r}\right) \qquad \bar{v}_1 = \tfrac{5}{7}\bar{v}_0 \qquad v_1 = \tfrac{5}{7}v_0 \rightarrow \blacktriangleleft$$

Problemas

16.1 Una tabla de 6 ft se coloca en un camión con un extremo descansando contra un bloque asegurado al piso y el otro apoyado contra una mampara vertical. Determínese la máxima aceleración permisible del camión para que la tabla permanezca en la posición que aquí se muestra.

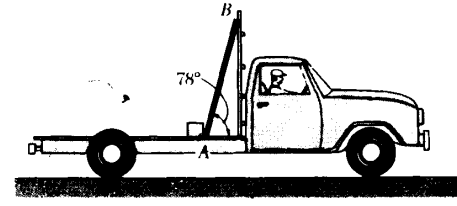


Fig. P16.1 y P16.2

16.2 Se coloca una tabla de 6 ft en un camión con un extremo sobre el piso y el otro descansando contra una mampara vertical. Si el coeficiente de rozamiento estático es 0.30 entre la tabla y el piso y 0 entre la tabla y la mampara, determínese la desaceleración máxima posible del camión para que la tabla permanezca en la posición aquí mostrada.

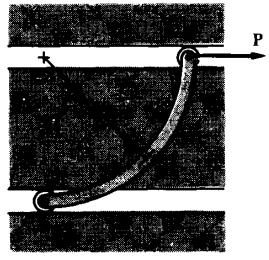


Fig. P16.3

16.3 El movimiento de la barra AB de 2.5 kg es guiado por dos ruedas pequeñas que ruedan libremente en ranuras horizontales. Si en B se aplica una fuerza **P** de módulo 8 N obténganse *a*) la aceleración de la barra y *b*) las reacciones en A y B.

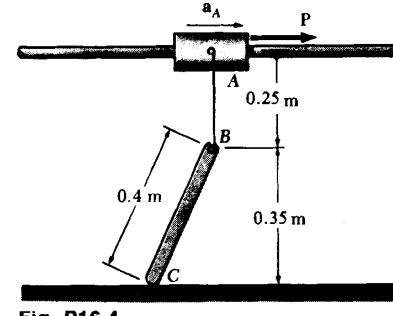


Fig. P16.4

16.4 Una barra BC uniforme de 4 kg de masa está unida a un collarín en A por medio de la cuerda AB de 0.25 m. Despreciando la masa del collarín y de la cuerda, determínense *a*) la aceleración constante $\mathbf{a}_A$ mínima a la cual la cuerda y la barra forman una línea recta y *b*) la tensión correspondiente en la cuerda.

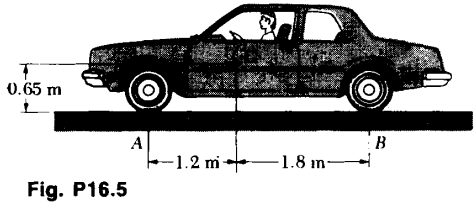


Fig. P16.5

16.5 Si sabemos que el coeficiente de rozamiento estático entre los neumáticos y la carretera para el automóvil que se indica es 0.75, calcúlese la máxima aceleración posible en una carretera nivelada suponiendo *a*) tracción en las cuatro ruedas, *b*) tracción convencional en las ruedas traseras y *c*) tracción delantera.

16.6 Encuéntrese la distancia que deslizará el camión del problema resuelto 16.1 si *a*) los frenos de las ruedas traseras no funcionan y *b*) los frenos de las ruedas delanteras no funcionan.

16.7 Un panel rectangular de 25 kg está suspendido de dos patines *A* y *B* y se mantiene en la posición aquí indicada por medio de un alambre *CD*. Si sabemos que el coeficiente de rozamiento cinético entre cada patín y el riel inclinado es $\mu_k = 0.20$, obténgase la componente normal de la reacción en *B* inmediatamente después que se corta el alambre *CD*.

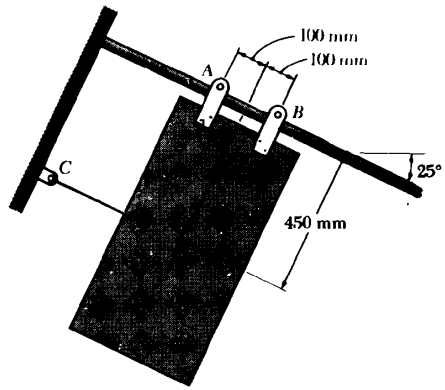


Fig. P16.7

16.8 En el problema 16.7 calcúlese *a*) el valor máximo de μ_k para que el patín *B* permanezca en contacto con el riel después que se corta el alambre *CD* y *b*) la aceleración correspondiente del panel.

16.9 Media sección de tubo de peso *W* se tira como se indica. Representando con μ_s y μ_k, respectivamente, los coeficientes de rozamiento cinético y estático en *A* y *B*, determínense *a*) los valores de θ y *P* para los cuales es inminente tanto el deslizamiento como la volcadura, *b*) la aceleración del tubo si se incrementa levemente *P* y *c*) el valor correspondiente de la componente normal de la reacción en *A*.

16.10 Resuélvase el problema 16.9 suponiendo que $W = 200$ lb, $\mu_s = 0.50$ y $\mu_k = 0.40$.

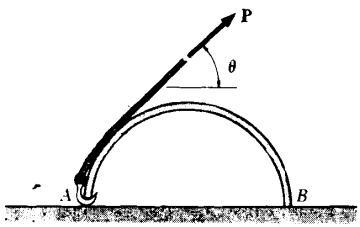


Fig. P16.9

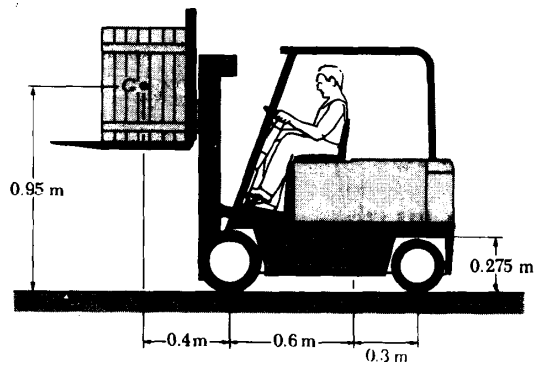


Fig. P16.11

16.11 Un montacargas de 2800 kg lleva una caja de 1500 kg a la altura que aquí se muestra. El montacargas se mueve hacia la izquierda cuando se aplican los frenos, lo cual causa una desaceleración de 3 m/s^2. Si el coeficiente de rozamiento estático entre la caja y el elevador es de 0.50 determínese *a*) si la caja se deslizará y *b*) la componente vertical de la reacción en cada rueda.

16.12 En el problema 16.11 obténgase la desaceleración máxima permisible del montacargas para que la caja no deslice hacia adelante ni el montacargas se vuelque hacia adelante.

16.13 Un gabinete de 80 lb está montado sobre ruedas pequeñas que le permiten moverse libremente ($\mu = 0$) sobre el suelo. Si se aplica una fuerza de 50 lb, como se muestra en la figura, calcúlense *a*) la aceleración del gabinete y *b*) el intervalo de valores de *h* para el cual el gabinete no se volcará.

16.14 Resuélvase el problema 16.13 suponiendo que las ruedas pequeñas están bloqueadas y deslizan sobre un piso rugoso ($\mu_k = 0.25$).

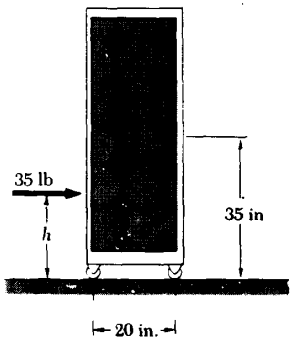
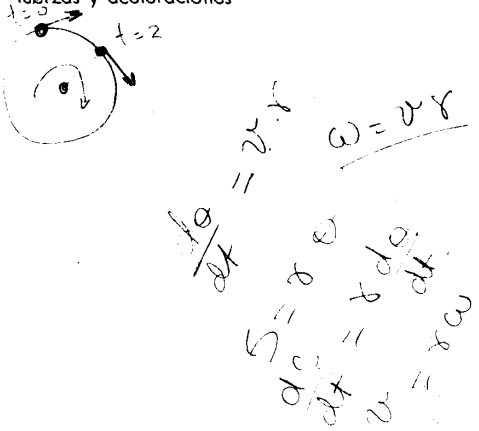


Fig. P16.13



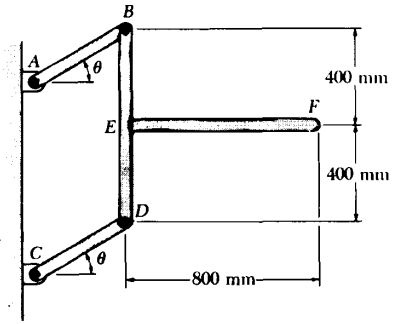


Fig. P16.17

16.15 Un barril completamente lleno y su contenido tienen una masa conjunta de 125 kg. Al barril se conecta un cilindro de 60 kg como se indica. Si los coeficientes de rozamiento entre el barril y el suelo son $\mu_s = 0.35$ y $\mu_k = 0.30$, determínense *a*) la aceleración del barril y *b*) el intervalo de valores de h para el cual el barril no se volcará.

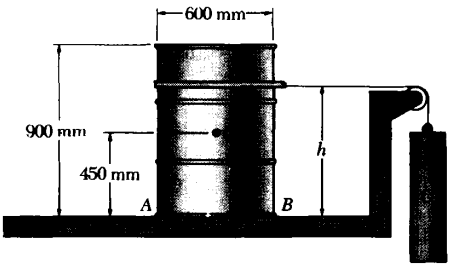


Fig. P16.15 y P16.16

16.16 Un barril completamente lleno y su contenido tienen una masa conjunta de 160 kg. Se conecta un cilindro C de masa m_C al barril a una altura $h = 600$ mm. Sabemos que los coeficientes de rozamiento entre el barril y el suelo son $\mu_s = 0.48$ y $\mu_k = 0.40$, calcúlese el intervalo de valores de la masa del cilindro C para el cual el barril no se volcará.

16.17 Dos barras uniformes *BD* y *EF* cada una de 2 kg de masa están unidas mediante soldaduras y ligadas a dos eslabones *AB* y *CD*. Despreciando la masa de los eslabones determínese la fuerza en cada uno de ellos inmediatamente después de que el sistema se ha soltado desde el reposo con $\theta = 30°$.

16.18 Resuélvase el problema 16.17 suponiendo que el sistema se suelte desde el reposo con $\theta = 60°$.

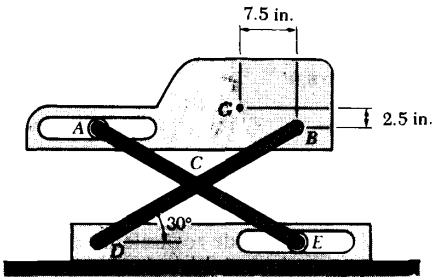


Fig. P16.19

16.19 Las barras *ACE* y *DCB* tienen cada una 30 in de longitud y están unidas en C por un pasador. El centro de masas de la barra *AB*, con masa de 20 lb, se encuentra en G. Obténganse *a*) la aceleración de *AB* inmediatamente después de que el sistema se suelta desde el reposo en la posición que se encuentra y *b*) la fuerza correspondiente que ejerce el rodillo A sobre la barra *AB*. Despréciese el peso de las barras *ACE* y *DCB*.

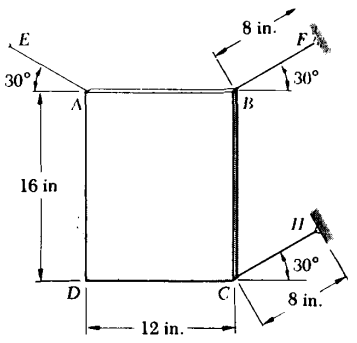


Fig. P16.20

16.20 La placa delgada *ABCD* pesa 16 lb y se mantiene en posición por medio de los tres alambres inextensibles *AE*, *BF* y *CH*, cuando se corta el alambre *AE*. Determínense *a*) la aceleración de la placa y *b*) la tensión en los alambres *BF* y *CH* inmediatamente después de que se corta el alambre *AE*.

16.21 Una placa semicircular uniforme de 8 kg de masa se sostiene mediante dos eslabones *AB* y *DE*, de longitud de 250 mm cada uno, y se mueve bajo su propio peso. Despreciando la masa de los eslabones y sabiendo que en la posición mostrada la velocidad de la placa es de 1.2 m/s, determínese la fuerza en cada eslabón.

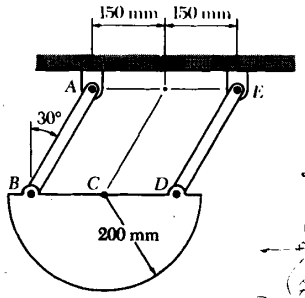


Fig. P16.21

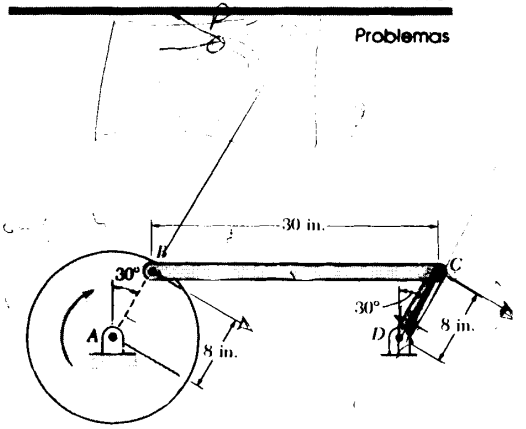


Fig. P16.22

16.22 La barra *BC* de 15 lb conecta a un disco con centro en *A* a la manivela *CD*. Si el disco se diseña para girar con una velocidad constante de 180 rpm, determínense para la posición mostrada las componentes verticales de las fuerzas ejercidas sobre la barra *BC* por los pasadores en *B* y *C*.

16.23 La barra *ABCD* con forma en T es guiada por dos pasadores que resbalan libremente en ranuras curvas con radio de 7.5 in, la barra pesa 6 lb y su centro de masa se localiza en el punto *G*. Si en la posición que se indica la componente vertical de la velocidad de *D* es 4 ft/s hacia arriba y la componente vertical de la aceleración de *D* es de 15 ft/s^2 hacia arriba, determínese el módulo de la fuerza **P**.

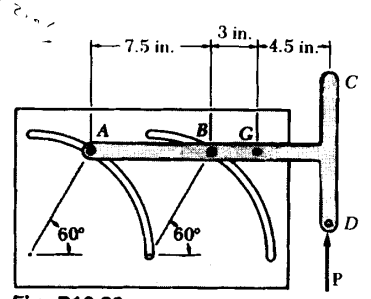


Fig. P16.23

16.24 Resuélvase el problema 16.23 si se sabe que en la posición que se indica la componente *vertical* de la velocidad de *D* es 4 ft/s hacia arriba y la componente *vertical* de la aceleración de *D* es cero.

*16.25 Un bloque de 30 lb está colocado sobre una plataforma de 5 lb *BD* que se mantiene en la posición indicada por medio de tres alambres. Obténganse las aceleraciones del bloque y de la plataforma inmediatamente después de que se corta el alambre *AB*. Supóngase que el bloque *a*) está unido rígidamente a la plataforma y *b*) puede deslizar sin rozamiento sobre la plataforma.

*16.26 Los coeficientes de rozamiento entre el bloque de 30 lb y la plataforma *BD* de 5 lb son $\mu_s = 0.50$ y $\mu_k = 0.40$, calcúlense las aceleraciones del bloque y de la plataforma inmediatamente después de que se corta el alambre *AB*.

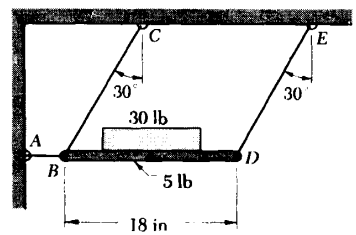


Fig. P16.25 y P16.26

*16.27 Dibújense los diagramas de cortante y momento flector para la barra horizontal *EF* del problema 16.17

*16.28 Dibújense los diagramas de cortante y momento flector para la barra de conexión *BC* del problema 16.22.

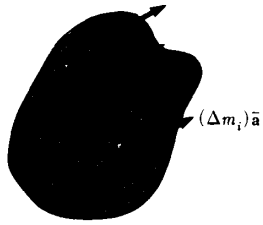


Fig. P16.29

16.29 Demuéstrese, en una placa rígida en traslación, que el sistema de los vectores $m\mathbf{a}$ consiste en vectores $(\Delta m_i)\bar{\mathbf{a}}$ en las distintas partículas de la placa, en donde $\bar{\mathbf{a}}$ es la aceleración del centro de masa G de la placa. Demuéstrese además, mediante el cálculo de su suma y de la suma de los momentos respecto de G, que los vectores $m\mathbf{a}$ se reducen a un solo vector $m\bar{\mathbf{a}}$ en G.

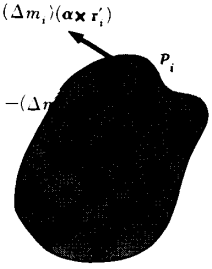


Fig. P16.30

16.30 Demuéstrese, para una placa rígida en movimiento central, que el sistema de las fuerzas reales consiste en vectores $-(\Delta m_i)\omega^2\mathbf{r}'_i$ y $(\Delta m_i)(\alpha \times \mathbf{r}'_i)$ en las distintas partículas P_i de la placa en las que ω y α son la velocidad angular y la aceleración angular de la placa y $\mathbf{r}_i$ representa el vector de posición de la partícula P_i relativo al centro de masa G de la placa. Además, demuéstrese mediante el cálculo de su suma y la suma de sus momentos respecto a G que los vectores $m\mathbf{a}$ se reducen a un par $I\alpha$.

16.31 Un motor eléctrico gira a 1200 rpm cuando se le desconectan la carga y la energía eléctrica. El rotor pesa 180 lb y tiene un radio de giro de 8 in. Si el rozamiento cinético del rotor produce un par de momento de 15 lb · in, ¿cuántas revoluciones dará el motor antes de detenerse?

16.32 Una unidad de turbina y generador se apaga cuando su rotor gira a 3600 rpm, se observa que el rotor continua moviéndose durante 7.10 min hasta que alcanza el reposo. Sabiendo que el rotor de 1850 kg tiene un radio de giro de 234 mm, encuéntrese el módulo promedio del par por causa del rozamiento en los cojinetes.

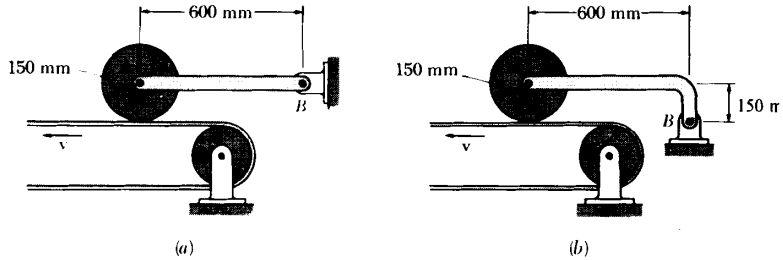


Fig. P16.33

16.33 El disco de 6 kg se encuentra en reposo cuando es puesto en contacto con una banda transportadora que se mueve con una velocidad constante. El eslabón AB que une el centro del disco con el soporte B es de peso despreciable. Si sabemos que el coeficiente de rozamiento cinético entre el disco y la banda es de 0.30, obténgase para cada una de las distribuciones indicadas la aceleración angular del disco mientras éste desliza.

16.34 Resuélvase el problema 16.33 suponiendo que se invierte la dirección de movimiento de la banda transportadora.

16.35 El tambor de freno de 10 in de radio está unido a un volante que no se muestra en la figura. El momento de inercia total del volante y del tambor es de 15 lb · ft · s^2 y el coeficiente de rozamiento cinético entre el tambor y la zapata del freno es 0.40. Sabiendo que la velocidad angular inicial es 240 rpm en el sentido de las manecillas del reloj, determínese qué fuerza deberá aplicar el cilindro hidráulico si el sistema debe detenerse en 60 revoluciones.

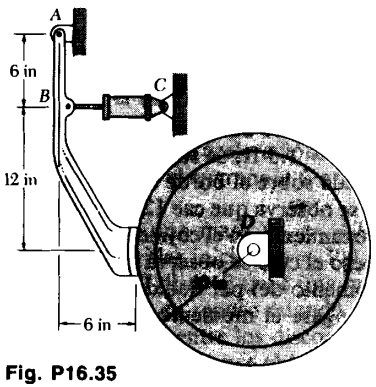


Fig. P16.35

16.36 El tambor de freno de 100 mm de radio está unido a un volante que no se muestra aquí, el tambor y el volante tienen en total una masa de 300 kg y un radio de giro de 600 mm. El coeficiente de rozamiento cinético entre la banda de frenaje y el tambor es 0.30. Si en A se aplica la fuerza **P** de módulo 50 N cuando la velocidad angular es de 180 rpm en el sentido opuesto al de las manecillas del reloj, determínese el tiempo necesario para que el volante se detenga con $a = 200$ mm y $b = 160$ mm.

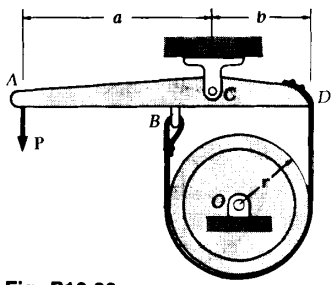


Fig. P16.36

16.37 Resuélvase el problema 16.36 suponiendo que el coeficiente de rozamiento cinético es de 0.40 entre la banda de freno y el tambor.

16.38 Resuélvase el problema 16.35 suponiendo que la velocidad angular inicial del volante es de 240 rpm en sentido opuesto a las manecillas del reloj.

16.39 El volante aquí mostrado consiste en un disco de 30 in de diámetro que pesa 240 lb. El coeficiente de rozamiento entre la banda y el volante es 0.35. Si la velocidad inicial del volante es de 360 rpm en el sentido de las manecillas del reloj, determínese el módulo de la fuerza **P** necesaria para detener el volante en 25 revoluciones.

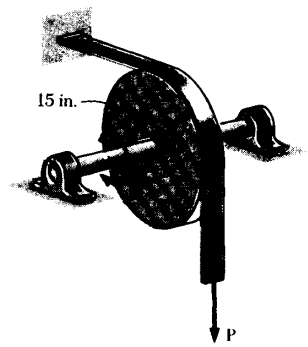


Fig. P16.39

16.40 Resuélvase el problema 16.39 suponiendo que la velocidad angular inicial del volante es 360 rpm en sentido opuesto a las manecillas del reloj.

16.41 Dos discos A y B de masas $m_A = 2$ kg y $m_B = 4$ kg se conectan mediante una banda como se indica. Suponiendo que no deslizan la banda y los discos entre sí, determínese la aceleración angular de cada disco, si se le aplicó al disco A un par **M** de 2.70 N · m.

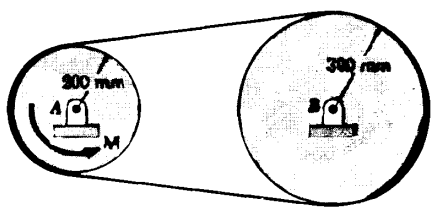


Fig. P16.41

16.42 Resuélvase el problema 16.41 suponiendo que el par **M** de 2.70 N · m se aplica al disco B.

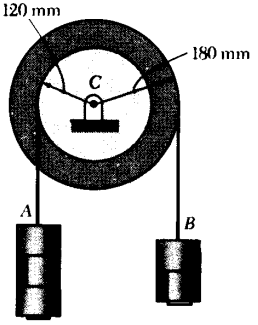


Fig. P16.43

16.43 La polea doble que aquí se muestra tiene una masa total de 6 kg y un radio de giro central de 135 mm. De las cuerdas *A* y *B* se sujetan cinco collarines cada uno de masa 1.2 kg como se indica. Cuando el sistema se encuentra en reposo y en equilibrio se retira un collarín de la cuerda *A*. Despreciando el rozamiento encuéntrense *a*) la aceleración angular de la polea y *b*) la velocidad de la cuerda *A* al tiempo $t = 2.5$ s.

16.44 Resuélvase el problema 16.43 suponiendo que se retira un collarín de la cuerda *B*.

16.45 Con objeto de determinar el momento de inercia de un volante con radio $r = 1.5$ ft, se sujeta un bloque *A* de peso 20 lb a una cuerda enredada sobre el borde del volante. El bloque se suelta desde el reposo y se observa que cae 12 ft en 4.50 s. A fin de suprimir los cálculos del rozamiento en el cojinete, se emplea un segundo bloque de 40 lb de peso el cual se observa que cae 12 ft en 2.80 s. Suponiendo que el momento del par debido al rozamiento en el cojinete es constante, obténgase el momento de inercia del volante.

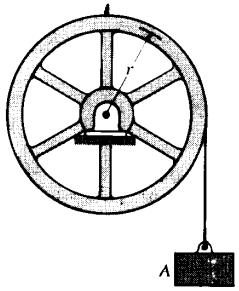


Fig. P16.45

16.46 Cada una de las poleas dobles que aquí se muestran tienen un momento de inercia 20 lb · ft · s^2 e inicialmente se encuentra en reposo. El radio exterior es de 18 in y el interior es de 9 in. Obténganse *a*) la aceleración angular de cada polea, *b*) la velocidad angular de cada polea en $t = 3$ s y *c*) la velocidad angular de cada polea después de que el punto *A* de la cuerda ha recorrido 10 ft.

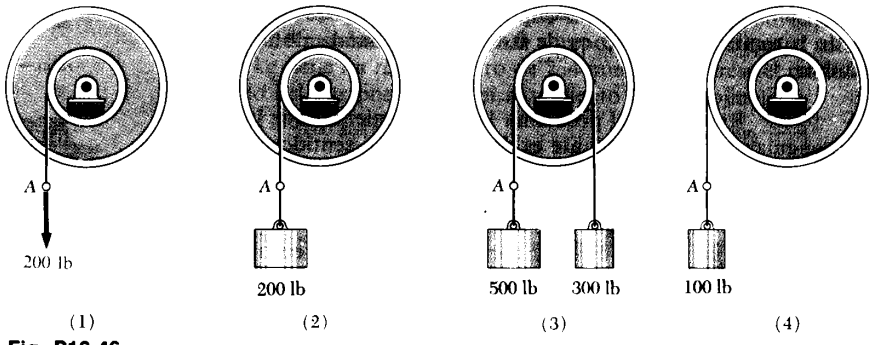


Fig. P16.46

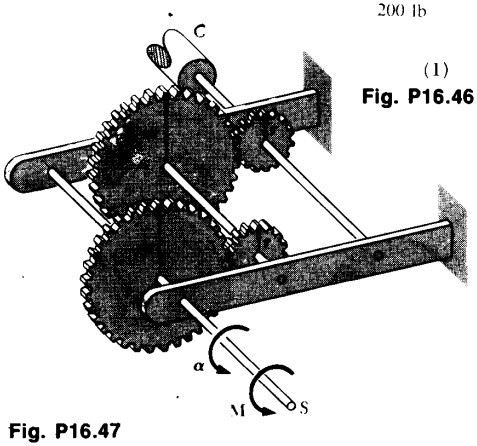


Fig. P16.47

16.47 Un codificador *C*, utilizado para registrar en forma digital la rotación de un eje *S*, está unido a él por medio de un tren de engranajes que se muestra, el cual consiste en cuatro engranajes del mismo espesor y del mismo material. Dos de los engranajes tienen un radio *r* y los otros dos un radio *nr*. Sea I_R la razón M/α del momento *M* del par aplicado al eje dividido entre la aceleración angular resultante α de *S*. (I_R recibe algunas veces el nombre de "momento de inercia reflejado" del codificador y del tren de engranajes). Encuéntrense I_R en función de la relación de engranajes *n*, el momento de inercia I_0 y el momento de inercia I_C del codificador. Despréciense los momentos de inercia de los ejes.

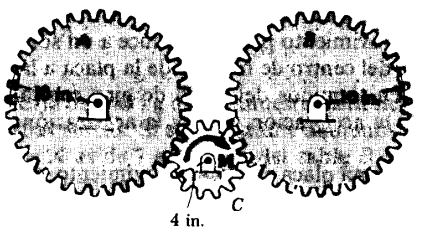


Fig. P16.48

16.48 Cada uno de los engranajes A y B pesa 20 lb y tiene un radio de giro de 7.5 in y el engranaje C pesa 5 lb y tiene un radio de giro de 3 in. Si un par **M** de magnitud constante 50 lb · in se aplica al engranaje C, determínense *a*) la aceleración angular del engranaje A y *b*) la fuerza tangencial que el engranaje C aplica al engranaje A.

16.49 El disco A tiene una masa $m_A = 4$ kg un radio $r_A = 300$ mm y una velocidad angular inicial $\omega_0 = 300$ rpm en el sentido de las manecillas del reloj. El disco B tiene una masa $m_B = 1.6$ kg, un radio $r_B = 180$ mm y está en reposo cuando se pone en contacto con el disco A. Si $\mu_k = 0.35$ entre los discos y se desprecia el rozamiento de los cojinetes, determínense *a*) la aceleración angular de cada disco y *b*) la reacción en el soporte C.

16.50 El disco B está en reposo cuando se pone en contacto con el disco A que tiene una velocidad angular inicial ω_0. *a*) Demuéstrese que las velocidades angulares finales de los discos son independientes del coeficiente de rozamiento μ_k entre los discos, siempre y cuando $\mu_k \neq 0$. *b*) Exprésese la velocidad angular final del disco A en términos de ω_0 y de la razón m_A/m_B de las masas de los dos discos.

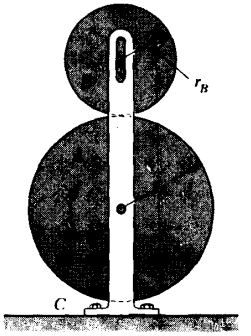


Fig. P16.49 y P16.50

16.51 Una banda de masa despreciable pasa entre los cilindros A y B y se tira de ella hacia la derecha con una fuerza **P**. Los cilindros A y B pesan respectivamente 5 y 20 lb. El eje del cilindro A se puede deslizar libremente en una ranura vertical y los coeficientes de rozamiento entre la banda y cada uno de los cilindros son $\mu_s = 0.50$ y $\mu_k = 0.40$. Para $P = 3.6$ lb, determínense *a*) si se producirá deslizamiento entre la banda y cualquiera de los cilindros y *b*) la aceleración angular de cada cilindro.

16.52 Resuélvase el problema 16.51 para $P = 2.00$ lb.

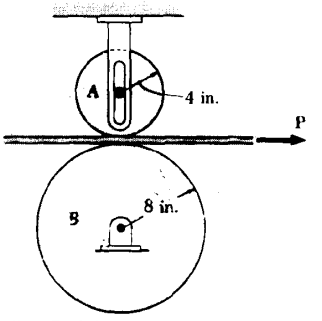


Fig. P16.51

16.53 Un cilindro de radio r y masa m descansa sobre dos ruedas pequeñas A y B como se indica en la figura. Inicialmente el cilindro está en reposo y se lo pone en movimiento girando la rueda B en el sentido de giro de las manecillas del reloj, a alta velocidad, de manera que el cilindro desliza sobre la rueda B. Representando por μ_k el coeficiente de rozamiento cinético y despreciando el momento de inercia de la rueda libre A, deduzca una expresión para la aceleración angular del cilindro.

16.54 En el problema 16.53 supóngase que el cilindro no desliza sobre la rueda B (lo cual ocurriría si el cilindro y la rueda tuviesen dientes de engranajes en su borde). Encuéntrese la expresión para la aceleración máxima permitida al cilindro, opuesta al sentido del movimiento de las manecillas del reloj, para que no pierda contacto con la rueda en A.

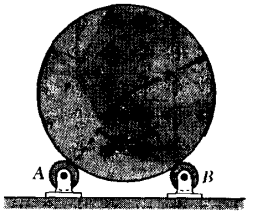


Fig. P16.53

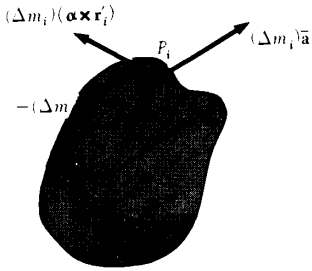


Fig. P16.56

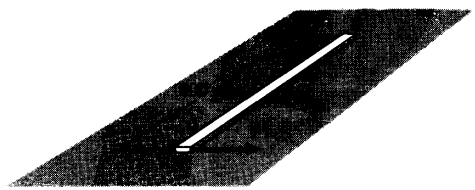


Fig. P16.57

16.55 Demuéstrese que el sistema de vectores $m\mathbf{a}$ para una placa rígida en movimiento plano se reduce a un solo vector y exprésese la distancia del centro de masa G de la placa a la línea de acción de este vector, en términos del radio de giro central $\bar{k}$ de la placa, el módulo $\bar{a}$ de la aceleración de G y la aceleración angular α.

16.56 Para una placa rígida en movimiento plano demuéstrese que el sistema de vectores $m\mathbf{a}$ consiste en los vectores $(\Delta m_i)\bar{\mathbf{a}}$, $-(\Delta m_i)\,\omega^2\mathbf{r}_i$, y $(\Delta m_i)(\alpha \times \mathbf{r}'_i)$ unidos a las distintas partículas P_i de la placa, donde $\bar{\mathbf{a}}$ es la aceleración del centro de masa G de la placa, ω es su velocidad angular, α su aceleración angular y $\mathbf{r}'_i$ representa el vector de posición de la partícula P_i relativa a G. Demuéstrese también, calculando su suma y la suma de sus momentos con respecto a G, que los vectores $m\mathbf{a}$ se reducen al vector $m\bar{\mathbf{a}}$ unido a G y a un par $\bar{I}\alpha$.

16.57 La barra uniforme delgada AB de masa 1.50 kg está en reposo sobre una superficie horizontal sin rozamiento. Se aplica en A una fuerza $\mathbf{P}$ de 2.70 N en dirección perpendicular a la barra. Determínense *a*) la aceleración angular de la barra, *b*) la aceleración del centro de la barra y *c*) el punto de la barra que no tiene aceleración.

16.58 *a*) En el problema 16.57 determínese el punto de la barra AB en el que debe aplicarse la fuerza $\mathbf{P}$ para que la aceleración del punto B sea nula. *b*) Sabiendo que el módulo de $\mathbf{P}$ es 2.70 N, determínese la correspondiente aceleración angular de la barra y la aceleración del centro de la barra.

16.59 Un disco de 10 in de diámetro que pesa 15 lb descansa sobre una superficie horizontal sin rozamiento. Se aplica una fuerza $\mathbf{P}$ de 3 lb de módulo a una cinta enrollada alrededor del disco. Determínese la aceleración de *a*) el punto A y *b*) del punto B.

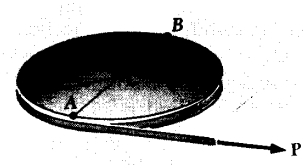


Fig. P16.59 y P16.60

16.60 Un disco de 10 in de diámetro que pesa 15 lb descansa sobre una superficie horizontal sin rozamiento. Se aplica una fuerza $\mathbf{P}$ de módulo 12 oz a una cinta enrollada alrededor del disco. Determínense *a*) la aceleración angular del disco, *b*) la aceleración del centro C del disco y *c*) la longitud de cinta desenrollada después de 2 s.

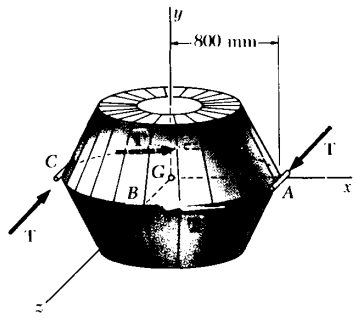


Fig. P16.61

16.61 Un satélite de 120 kg tiene un radio de giro de 600 mm respecto del eje y y es simétrico respecto del plano zx. Su orientación se cambia al encender cuatro pequeños cohetes A, B, C y D, cada uno de los cuales produce un empuje $\mathbf{T}$ de 16.20 N dirigido como aquí se indica. Determínense la aceleración angular del satélite y la aceleración de su centro de masa G *a*) cuando se encienden los cuatro cohetes y *b*) cuando se encienden todos los cohetes excepto el cohete D.

16.62 Resuélvase el problema 16.61 suponiendo que sólo se enciende el cohete A.

16.63 La caja de 240 kg que se muestra está siendo bajada por medio de dos grúas aéreas. Si en el instante aquí mostrado la desaceleración del cable A es de 7 m/s^2 y la del cable B es de 1 m/s^2, determínese la tensión en cada cable.

16.64 La caja de 240 kg mostrada en la figura está siendo bajada por medio de dos grúas aéreas. Conforme la caja se aproxima al suelo los operadores de las grúas aplican los frenos para reducir el movimiento. Determínese la aceleración de cada cable en ese instante sabiendo que T_A = 1900 N y T_B = 1600 N.

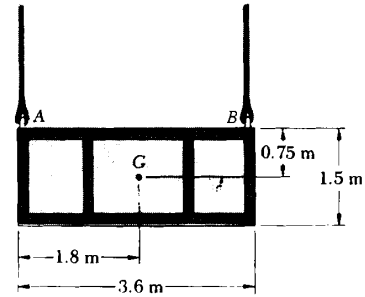


Fig. P16.63 y P16.64

16.65 Para el disco y la cuerda del problema resuelto 16.4, determínense el módulo de la fuerza T y la aceleración angular correspondiente del disco, si se sabe que la aceleración del centro del disco es de 0.8 m/s^2, *a*) hacia abajo y *b*) hacia arriba.

16.66 Tirando de la cuerda de un yoyo con la suficiente velocidad, una persona puede lograr que el yoyo gire en sentido contrario a las manecillas del reloj, manteniéndose a una altura constante sobre el piso. Representando el peso del yoyo con W, el radio interior del tambor donde se enrolla la cuerda con r y el radio de giro del yoyo con $\bar{k}$, determínense *a*) la tensión en la cuerda y *b*) la aceleración angular del yoyo.

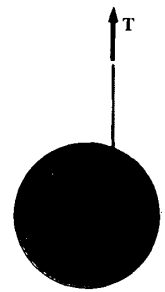


Fig. P16.66

16.67 El rodillo aquí mostrado pesa 2800 lb, tiene un radio de giro central de 6 in y es levantado por dos cables sostenidos alrededor de su eje. Sabiendo que para cada cable T_A = 690 lb y T_B = 730 lb, determínense *a*) la aceleración angular del rodillo y *b*) la aceleración de su centro de masa.

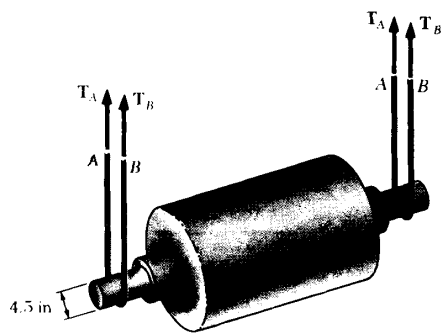


Fig. P16.67 y P16.68

16.68 El rodillo de acero mostrado pesa 2800 lb, tiene un radio de giro central de 6 in y está siendo bajado mediante dos cables colocados alrededor de su eje. Si en el instante aquí mostrado la aceleración del rodillo es de 6 in/s^2 hacia abajo y que para cada cable T_A = 680 lb, determínense *a*) los valores correspondientes de la tensión T_B y *b*) la aceleración angular del rodillo.

16.69 al 16.72 Una barra uniforme delgada AB de masa m está suspendida por dos resortes como se indica en la figura. Si el resorte 2 se rompe, determínense en ese instante *a*) la aceleración angular de la barra, *b*) la aceleración del punto A y *c*) la aceleración del punto B.

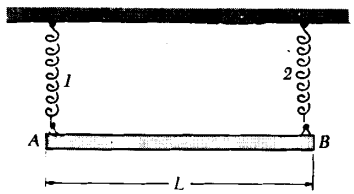


Fig. P16.69

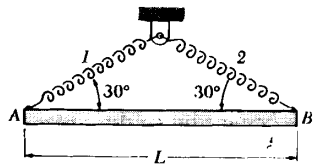


Fig. P16.70

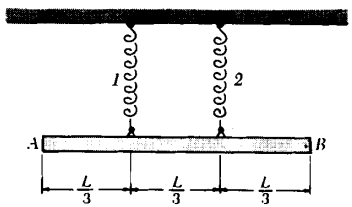


Fig. P16.71

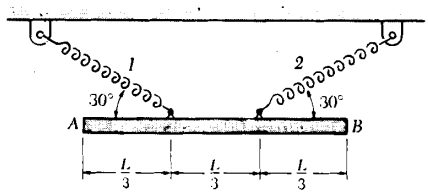


Fig. P16.72

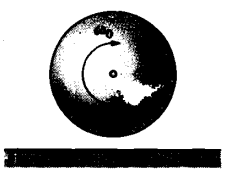


Fig. P16.73

16.73 Una esfera de radio r y de masa m está colocada sobre una superficie horizontal sin velocidad lineal, pero con una velocidad angular ω_0 en el sentido de las manecillas del reloj. Representando con μ_k el coeficiente de rozamiento cinético entre la esfera y el piso, determínense *a*) el tiempo t_1 en el que la esfera empezará a rodar sin deslizar y *b*) las velocidades lineal y angular de la esfera en t_1.

16.74 Resuélvase el problema 16.73 suponiendo que la esfera se sustituye por un disco uniforme de radio r y masa m.

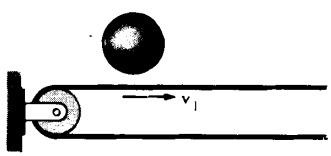


Fig. P16.75

16.75 Una esfera uniforme de radio r y masa m se coloca sin velocidad inercial sobre una banda que se mueve a la derecha con velocidad constante $\mathbf{v}_1$. Representando con μ_k al coeficiente de rozamiento cinético entre la esfera y la banda, determínense *a*) el tiempo t_1 en el que la esfera empezará a rodar sin deslizar y *b*) la velocidad lineal y la velocidad angular de la esfera en el tiempo t_1.

16.76 Resuélvase el problema 16.75 suponiendo que la esfera se sustituye por una rueda de radio r masa m y radio de giro central $\bar{k}$.

16.8. Movimiento plano vinculado. La mayor parte de las aplicaciones en ingeniería se ocupan de sólidos rígidos que se mueven bajo ciertas restricciones. Por ejemplo, las manivelas deben girar sobre un eje fijo, las ruedas deben rodar sin deslizar y las barras de unión deben describir movimientos prescritos. En todos esos casos existen relaciones definidas entre las componentes de la aceleración $\bar{\mathbf{a}}$ del centro de masa G del cuerpo que se considera y su aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$; se dice que este es un movimiento vinculado.

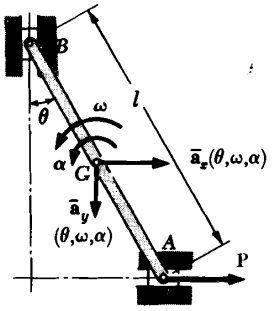


Fig. 16.11

La solución de un problema en el que intervenga un movimiento plano vinculado requiere primero un *análisis cinemático* del problema. Considérese, por ejemplo, una barra delgada AB de longitud l y masa m cuyos extremos están unidos a bloques de masa despreciable que deslizan sobre carriles sin rozamiento horizontal y vertical. Una fuerza **P** aplicada a la barra en A tira de ella (Fig. 16.11). Sabemos de la sección 15.8 que la aceleración $\bar{\mathbf{a}}$ del centro de masa G de la barra puede obtenerse en cualquier instante arbitrario a partir de la posición de la barra, su velocidad angular y su aceleración angular en ese instante. Supóngase, por ejemplo, que se conocen los valores de θ, ω y α en cierto instante y que deseamos determinar el correspondiente valor de la fuerza **P**, así como las reacciones en A y B. Primero deberemos *encontrar las componentes* $\bar{a}_x$ *y* $\bar{a}_y$ *de la aceleración del centro de masa* G mediante el método de la sección 15.8. En seguida aplicamos el principio de d'Alembert (Fig. 16.12), utilizando las expresiones obtenidas para $\bar{a}_x$ y $\bar{a}_y$. Entonces se pueden obtener las fuerzas desconocidas **P**, $\mathbf{N}_A$ y $\mathbf{N}_B$ escribiendo y resolviendo las ecuaciones apropiadas.

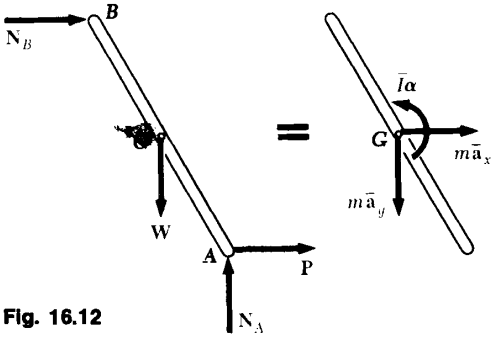


Fig. 16.12

Supóngase ahora que se conocen la fuerza aplicada **P**, el ángulo θ y la velocidad angular ω de la barra en cierto instante y que deseamos encontrar la aceleración angular α de la barra y las componentes $\bar{a}_x$ y $\bar{a}_y$ de la aceleración de su centro de masa en ese instante, así como las reacciones en A y en B. El estudio cinemático preliminar del problema tendrá como objeto *expresar las componentes* $\bar{a}_x$ *y* $\bar{a}_y$ *de la aceleración de* G *en función de la aceleración angular* α *de la barra.* Esto se conseguirá expresando primero la aceleración de algún punto de referencia apropiado, como A, en términos de la aceleración angular α. Entonces se podrán determinar las componentes $\bar{a}_x$ y $\bar{a}_y$ de la aceleración de G en función de α e introducirse las expresiones obtenidas a la figura 16.12. Ahora se pueden obtener tres ecuaciones en función de α, N_A y N_B, que se resuelven para encontrar el valor de las tres incógnitas (véase el problema resuelto 16.10). Nótese que también se puede utilizar el método del equilibrio dinámico con objeto de solucionar los tipos de problemas que hemos considerado (Fig. 16.13).

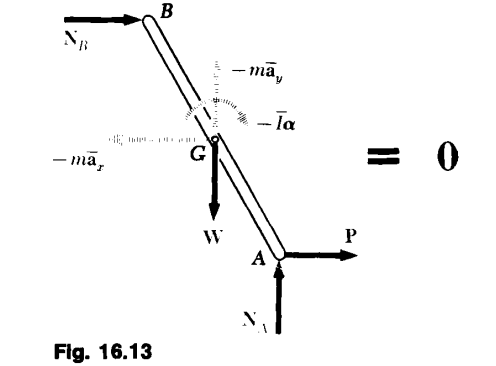


Fig. 16.13

Cuando un mecanismo consiste en *varias partes móviles,* el método que acabamos de describir puede ser utilizado con cada parte del mecanismo. El procedimiento necesario para encontrar las distintas incógnitas es entonces similar al que se sigue en el caso del equilibrio de un sistema de sólidos rígidos unidos (véase la Secc. 6.11).

Ya analizamos antes dos casos particulares de movimiento plano vinculado: la traslación de un sólido rígido en la que se restringe la aceleración angular del cuerpo a que sea nula, y la rotación central, en la que la aceleración $\bar{\mathbf{a}}$ del centro de masa del cuerpo está restringida a ser nula. Son de interés especial otros dos casos particulares de movimiento plano vinculado: la *rotación no baricéntrica* de un sólido rígido y el *movimiento de rodadura* de un disco o una rueda. Estos dos casos deberían ser analizados mediante alguno de los métodos generales descritos antes. Sin embargo, en vista de la variedad de sus aplicaciones, merecen algunos comentarios especiales.

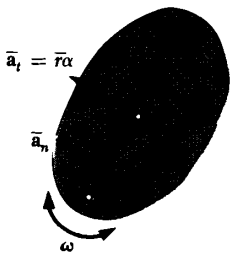
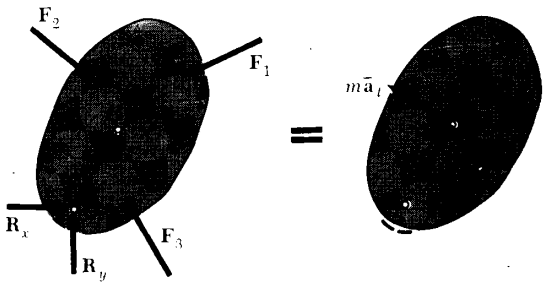


Fig. 16.14

Rotación no baricéntrica. Este es el movimiento de un sólido rígido restringido a girar sobre un eje fijo que no pasa por su centro de masa. Tal movimiento se denomina *rotación no baricéntrica.* El centro de masa G del sólido se mueve sobre un círculo de radio $\bar{r}$ centrado en el punto O, que es en donde el eje de rotación corta al plano de referencia (Fig. 16.14). Representando a la velocidad angular y la aceleración angular de la línea OG por ω y α, respectivamente, obtenemos las expresiones siguientes para las componentes tangencial y normal de la aceleración de G:

$$\bar{a}_t = \bar{r}\alpha \qquad \bar{a}_n = \bar{r}\omega^2 \tag{16.7}$$

Como la línea OG pertenece al sólido, su velocidad angular ω y su aceleración angular α representan también la velocidad angular y la aceleración angular del sólido en su movimiento relativo a G. Por consiguiente, las ecuaciones (16.7) definen la relación cinemática que existe entre el movimiento del centro de masa G y el movjmiento del sólido sobre G, y deben emplearse para eliminar $\bar{a}_t$ y $\bar{a}_n$ de las ecuaciones obtenidas al aplicar el principio de d'Alembert (Fig. 16.15) o el método del equilibrio dinámico (Fig. 16.16).



a) *b)*

Fig. 16.15

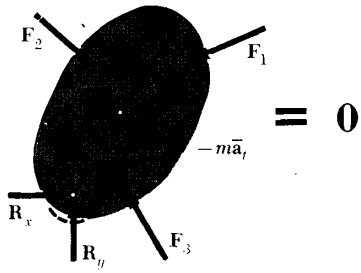


Fig. 16.16

Se puede obtener una relación interesante al igualar los momentos respecto al punto fijo O de las fuerzas y los vectores que se indican en las partes *a* y *b* de la figura 16.15, respectivamente. Escribimos

$$+\circlearrowleft \Sigma M_O = \bar{I}\alpha + (m\bar{r}\alpha)\bar{r} = (\bar{I} + m\bar{r}^2)\alpha$$

Pero de acuerdo con el teorema de Steiner, tenemos $\bar{I} + m\bar{r}^2 = I_O$, en la que I_O representa el momento de inercia del sólido rígido alrededor del eje fijo. En consecuencia, escribimos

$$\Sigma M_O = I_O\alpha \tag{16.8}$$

Aunque la fórmula (16.8) expresa una relación importante entre la suma de los momentos de las fuerzas exteriores alrededor del punto fijo O y el producto $I_O\alpha$, debe comprenderse claramente que esta fórmula *no significa* que el sistema de las fuerzas exteriores es equivalente a un par de momento $I_O\alpha$. El sistema de vectores $m\mathbf{a}$, y por consiguiente, el sistema de las fuerzas exteriores, se reduce a un par solamente cuando O coincide con G, es decir, *sólo cuando la rotación es central* (Secc. 16.4). En el caso más general de la rotación no baricéntrica, el sistema de las fuerzas exteriores no se reduce a un par.

Es de interés especial un caso particular de rotación no baricéntrica, el caso de la *rotación uniforme*, en la que la velocidad angular ω es constante. Como $\boldsymbol{\alpha}$ es cero, el par de inercia de la figura 16.16 se anula y el vector de inercia se reduce a su componente normal. Esta componente (llamada también *fuerza centrífuga*) representa la tendencia del sólido rígido a alejarse del eje de rotación.

Movimiento de rodadura. Otro caso importante de movimiento plano es el movimiento de un disco o una rueda rodando sobre una superficie plana. Si se restringe el disco a que ruede sin deslizar, la aceleración $\bar{\mathbf{a}}$ de su centro de masa G y su aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ no son independientes. Suponiendo que el disco esté equilibrado, de manera que coincidan su centro de masa y su centro geométrico, escribimos primero que la distancia $\bar{x}$ recorrida por G durante una rotación θ del disco es $\bar{x} = r\theta$, en la que r es el radio del disco. Derivando dos veces esta relación, escribimos

$$\bar{a} = r\alpha \tag{16.9}$$

Recordando que el sistema de vectores $m\mathbf{a}$ en el movimiento en un plano se reduce a un vector $m\bar{\mathbf{a}}$ y un par $\bar{I}\boldsymbol{\alpha}$ encontramos que, en el caso particular del movimiento de un disco equilibrado, los vectores $m\mathbf{a}$ se reducen a un vector de módulo $mr\alpha$ fijo a G y a un par de *módulo* $\bar{I}\alpha$. Podemos expresar así que las fuerzas exteriores son equivalentes al vector y al par que se muestran en la figura 16.17.

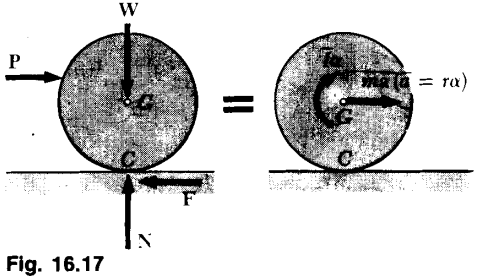


Fig. 16.17

Cuando un disco *rueda sin deslizar* no hay movimiento relativo entre el punto del disco en contacto con el suelo y el suelo mismo. En lo que se refiere al cálculo de la fuerza **F** de rozamiento, se puede comparar un disco que rueda con un bloque en reposo sobre una superficie. El módulo F de la fuerza de rozamiento puede tener cualquier valor, siempre que este valor no exceda el valor máximo $F_m = \mu_s N$, en el que μ_s es el coeficiente de rozamiento estático y N es el módulo de la fuerza normal. En el caso de un disco que rueda, el módulo F de la fuerza de rozamiento debe, por consiguiente, calcularse con independencia de N al resolver la ecuación que se obtiene de la figura 16.17.

Cuando el *deslizamiento es inminente*, la fuerza de rozamiento alcanza su valor máximo $F_m = \mu_s N$ y se le puede obtener de N.

Cuando el disco *gira y desliza* al mismo tiempo, existe un movimiento relativo entre el punto del disco que está en contacto con el suelo y el suelo mismo, y la fuerza de rozamiento tiene el módulo $F_k = \mu_k N$ en la que μ_k es el coeficiente de rozamiento cinético. Sin embargo, en este caso el movimiento del centro de masa G del disco y la rotación del disco sobre G son independientes y $\bar{a}$ no es igual a $r\alpha$.

Se pueden resumir estos tres casos distintos de la manera siguiente:

Rodamiento sin deslizar: $F \leq \mu_s N \qquad \bar{a} = r\alpha$

Rodamiento con deslizamiento inminente: $F = \mu_s N \qquad \bar{a} = r\alpha$

Rotación y deslizamiento: $F = \mu_s N \qquad \bar{a}$ y α *independientes*

Cuando no se sabe si un disco desliza o no, se debe suponer primero que el disco rueda sin deslizar. Si se encuentra que F es menor o igual a $\mu_s N'$, se demuestra que la suposición es correcta; si se encuentra que F es mayor que $\mu_s N$, la suposición es incorrecta y se debe reiniciar la solución del problema, suponiendo que gira y desliza.

Cuando un disco está *desequilibrado*, es decir, cuando su centro de masa G no coincide con su centro geométrico O, no se cumple la relación (16.9) entre $\bar{a}$ y α. Sin embargo, se cumple una relación similar entre el módulo a_O de la aceleración del centro geométrico y la aceleración angular α de un disco desequilibrado que rueda sin deslizar. Tenemos

$$a_O = r\alpha \tag{16.10}$$

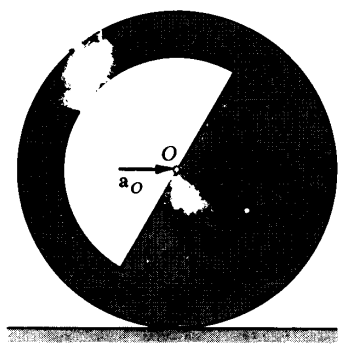


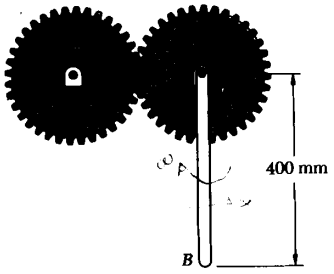
Fig. 16.18

A fin de determinar $\bar{a}$ en términos de la aceleración angular α y de la velocidad angular ω del disco, podemos utilizar la fórmula de la aceleración relativa

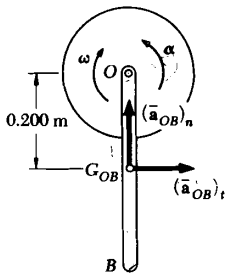
$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{a}} = \mathbf{a}_G &= \mathbf{a}_O + \mathbf{a}_{G/O} \\ &= \mathbf{a}_O + (\mathbf{a}_{G/O})_t + (\mathbf{a}_{G/O})_n \end{aligned} \tag{16.11}$$

en la cual las tres aceleraciones componentes obtenidas tienen las direcciones indicadas en la figura 16.18 y los módulos $a_O = r\alpha$, $(a_{G/O})_t = (OG)\alpha$ y $(a_{G/O})_n = (OG)\omega^2$.

PROBLEMA RESUELTO 16.6



La porción *AOB* de un mecanismo consiste en una barra de acero *OB* de 400 mm soldada a un engranaje *E* de radio 120 mm que puede girar alrededor de un eje horizontal *O*. Está impulsada por un engranaje *D* y en el instante mostrado tiene una velocidad angular en el sentido de giro de las manecillas del reloj de 8 rad/s y una aceleración angular contraria a las manecillas del reloj de 40 rad/s^2. Sabiendo que la barra *OB* tiene una masa de 3 kg y el engranaje *E* una masa de 4 kg y un radio de giro de 85 mm, determínense *a*) la fuerza tangencial ejercida por el engranaje *D* sobre el engranaje *E*, y *b*) las componentes de la reacción en el eje *O*.

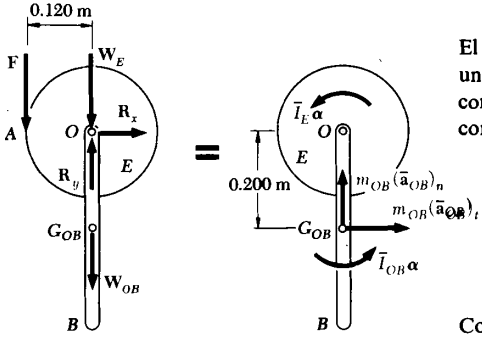


Solución. Para determinar los vectores *ma* del sólido rígido *AOB* consideraremos separadamente al engranaje *E* y a la barra *OB*. Por consiguiente, determinaremos primero las componentes de la aceleración del centro de masa G_{OB} de la barra:

$$(\bar{a}_{OB})_t = \bar{r}\alpha = (0.200\text{ m})(40\text{ rad/s}^2) = 8\text{ m/s}^2$$
$$(\bar{a}_{OB})_n = \bar{r}\omega^2 = (0.200\text{ m})(8\text{ rad/s})^2 = 12.8\text{ m/s}^2$$

Ecuaciones de movimiento. Se han trazado dos diagramas del sólido rígido *AOB*. El primero muestra las fuerzas exteriores que consisten en el peso $\mathbf{W}_E$ del engranaje *E*, el peso $\mathbf{W}_{OB}$ de la barra *OB*, la fuerza **F** ejercida por el engranaje *D* y las componentes $\mathbf{R}_x$ y $\mathbf{R}_y$ de la reacción en *O*. Los módulos de los pesos son, respectivamente,

$$W_E = m_E g = (4\text{ kg})(9.81\text{ m/s}^2) = 39.2\text{ N}$$
$$W_{OB} = m_{OB} g = (3\text{ kg})(9.81\text{ m/s}^2) = 29.4\text{ N}$$



El segundo diagrama muestra el estado de los vectores *ma* que consisten en un par $\bar{I}_E\alpha$ (como en el engranaje *E* es un eje centroidal) y en un par y dos componentes vectoriales en el centro de masa *OB*. Como las aceleraciones se conocen, calculamos los módulos de estas componentes y pares:

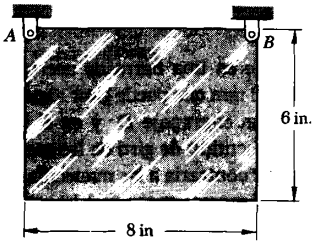
$$\bar{I}_E\alpha = m_E\bar{k}_E^2\alpha = (4\text{ kg})(0.085\text{ m})^2(40\text{ rad/s}^2) = 1.156\text{ N}\cdot\text{m}$$
$$m_{OB}(\bar{a}_{OB})_t = (3\text{ kg})(8\text{ m/s}^2) = 24.0\text{ N}$$
$$m_{OB}(\bar{a}_{OB})_n = (3\text{ kg})(12.8\text{ m/s}^2) = 38.4\text{ N}$$
$$\bar{I}_{OB}\alpha = (\tfrac{1}{12}m_{OB}L^2)\alpha = \tfrac{1}{12}(3\text{ kg})(0.400\text{ m})^2(40\text{ rad/s}^2) = 1.600\text{ N}\cdot\text{m}$$

Como el sistema de las fuerzas externas es el mecánicamente equivalente al sistema de los vectores *ma* escribimos las ecuaciones siguientes:

$$+\circlearrowleft\Sigma M_O = \Sigma(M_O)_{\text{eff}}:$$
$$F(0.120\text{ m}) = \bar{I}_E\alpha + m_{OB}(\bar{a}_{OB})_t(0.200\text{ m}) + \bar{I}_{OB}\alpha$$
$$F(0.120\text{ m}) = 1.156\text{ N}\cdot\text{m} + (24.0\text{ N})(0.200\text{ m}) + 1.600\text{ N}\cdot\text{m}$$
$$F = 63.0\text{ N} \qquad \mathbf{F} = 63.0\text{ N}\downarrow \blacktriangleleft$$

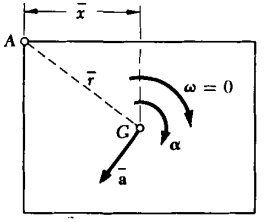
$$\pm\rightarrow \Sigma F_x = \Sigma(F_x)_{\text{eff}}: \qquad R_x = m_{OB}(\bar{a}_{OB})_t$$
$$R_x = 24.0\text{ N} \qquad \mathbf{R}_x = 24.0\text{ N}\rightarrow \blacktriangleleft$$

$$+\uparrow\Sigma F_y = \Sigma(F_y)_{\text{eff}}: \qquad R_y - F - W_E - W_{OB} = m_{OB}(\bar{a}_{OB})_n$$
$$R_y - 63.0\text{ N} - 39.2\text{ N} - 29.4\text{ N} = 38.4\text{ N}$$
$$R_y = 170.0\text{ N} \qquad \mathbf{R}_y = 170.0\text{ N}\uparrow \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESUELTO 16.7

Una placa rectangular de 6 × 8 in pesa 60 lb y está suspendida por dos pasadores *A* y *B*. Si el pasador *B* se quita repentinamente, determínense *a*) la aceleración angular de la placa, y *b*) las componentes de la reacción en el pasador A inmediatamente después de que el pasador *B* ha sido quitado.

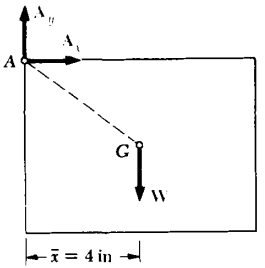


a) **La aceleración angular.** Observamos que conforme la placa gira alrededor del punto *A* su centro de masa *G* describe un círculo de radio $\bar{r}$ con centro en *A*.

Como la placa se suelta desde el reposo ($\omega = 0$) la componente normal de la aceleración de *G* es cero. La magnitud de la aceleración $\bar{a}$ del centro de masa *G* es por tanto $\bar{a} = \bar{r}\alpha$. Trazamos el diagrama mostrado para expresar que las fuerzas exteriores son equivalentes a los vectores *ma*:

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = \Sigma(M_A)_{\text{eff}}: \qquad W\bar{x} = (m\bar{a})\bar{r} + \bar{I}\alpha$$

Como $\bar{a} = \bar{r}\alpha$ tenemos



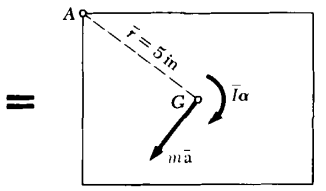
$$W\bar{x} = m(\bar{r}\alpha)\bar{r} + \bar{I}\alpha \qquad \alpha = \frac{W\bar{x}}{\frac{W}{g}\bar{r}^2 + \bar{I}} \tag{1}$$

El momento de inercia central de la placa es

$$\bar{I} = \frac{m}{12}(a^2 + b^2) = \frac{60 \text{ lb}}{12(32.2 \text{ ft/s}^2)}[(\tfrac{8}{12} \text{ ft})^2 + (\tfrac{6}{12} \text{ ft})^2]$$
$$= 0.1078 \text{ lb·ft·s}^2$$

Sustituyendo este valor de $\bar{I}$ junto con $W = 60$ lb, $\bar{r} = \frac{5}{12}$ ft y $\bar{x} = \frac{4}{12}$ ft en la ecuación (1), obtenemos

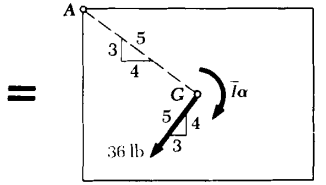
$$\alpha = +46.4 \text{ rad/s}^2 \qquad \alpha = 46.4 \text{ rad/s}^2 \circlearrowleft \blacktriangleleft$$



b) **La reacción en *A*.** Utilizando el valor calculado de α determinamos la magnitud del vector *ma* unido a *G*,

$$m\bar{a} = m\bar{r}\alpha = \frac{60 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2}(\tfrac{5}{12} \text{ ft})(46.4 \text{ rad/s}^2) = 36.0 \text{ lb}$$

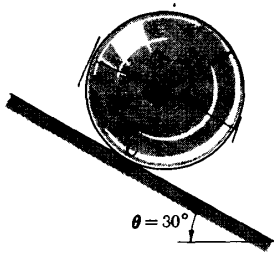
Mostrando este resultado en el diagrama, escribimos las ecuaciones de movimiento



$$\rightarrow \Sigma F_x = \Sigma(F_x)_{\text{eff}}: \qquad A_x = -\tfrac{3}{5}(36 \text{ lb})$$
$$= -21.6 \text{ lb} \qquad A_x = 21.6 \text{ lb} \leftarrow \blacktriangleleft$$

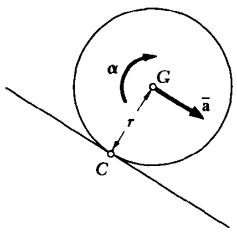
$$+\uparrow \Sigma F_y = \Sigma(F_y)_{\text{eff}}: \qquad A_y - 60 \text{ lb} = -\tfrac{4}{5}(36 \text{ lb})$$
$$A_y = +31.2 \text{ lb} \qquad A_y = 31.2 \text{ lb} \uparrow \blacktriangleleft$$

No obstante que el par $\bar{I}\alpha$, no aparece en las dos últimas ecuaciones, debe indicarse en el diagrama.



PROBLEMA RESUELTO 16.8

Una esfera de radio r y peso W se suelta sin velocidad inicial sobre el plano inclinado y rueda sin resbalar. Determínense *a*) el valor mínimo del coeficiente de rozamiento estático o compatible con el movimiento de rodamiento, *b*) la velocidad del centro G de la esfera después de que ésta ha rodado 10 ft, y *c*) la velocidad de G si la esfera se moviera 10 ft hacia abajo sobre un plano inclinado 30° sin rozamiento;



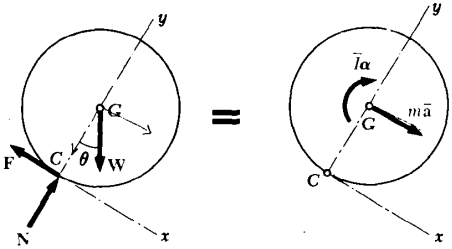
***a*) μ_s mínimo para el movimiento de rodamiento.** Las fuerzas exteriores **W**, **N** y **F** forman un sistema mecánicamente equivalente al sistema de vectores $m\bar{a}$ representadas por los vectores $m\bar{a}$ y $\bar{I}\alpha$. Como la esfera rueda sin deslizar tenemos $\bar{a} = r\alpha$.

$$+\circlearrowleft \Sigma M_C = \Sigma(M_C)_{\text{eff}}: \qquad (W \operatorname{sen}\theta)r = (m\bar{a})r + \bar{I}\alpha$$
$$(W \operatorname{sen}\theta)r = (mr\alpha)r + \bar{I}\alpha$$

Notando que $m = W/g$ e $\bar{I} = \frac{2}{5}mr^2$, escribimos

$$(W \operatorname{sen}\theta)r = \left(\frac{W}{g}r\alpha\right)r + \frac{2}{5}\frac{W}{g}r^2\alpha \qquad \alpha = +\frac{5g \operatorname{sen}\theta}{7r}$$

$$\bar{a} = r\alpha = \frac{5g \operatorname{sen}\theta}{7} = \frac{5(32.2 \text{ ft/s}^2) \operatorname{sen}30°}{7} = 11.50 \text{ ft/s}^2$$



$$+\searrow \Sigma F_x = \Sigma(F_x)_{\text{eff}}: \qquad W \operatorname{sen}\theta - F = m\bar{a}$$
$$W \operatorname{sen}\theta - F = \frac{W}{g}\frac{5g \operatorname{sen}\theta}{7}$$
$$F = +\tfrac{2}{7}W \operatorname{sen}\theta = \tfrac{2}{7}W \operatorname{sen}30° \qquad \mathbf{F} = 0.143W \measuredangle 30°$$

$$+\nearrow \Sigma F_y = \Sigma(F_y)_{\text{eff}}: \qquad N - W\cos\theta = 0$$
$$N = W\cos\theta = 0.866W \qquad \mathbf{N} = 0.866W \measuredangle 60°$$

$$\mu_s = \frac{F}{N} = \frac{0.143W}{0.866W} \qquad \mu_s = 0.165 \blacktriangleleft$$

***b*) Velocidad en la esfera que rueda.** Tenemos un movimiento uniformemente acelerado:

$$\bar{v}_0 = 0 \qquad \bar{a} = 11.50 \text{ ft/s}^2 \qquad \bar{x} = 10 \text{ ft} \qquad \bar{x}_0 = 0$$
$$\bar{v}^2 = \bar{v}_0^2 + 2\bar{a}(\bar{x} - \bar{x}_0) \qquad \bar{v}^2 = 0 + 2(11.50 \text{ ft/s}^2)(10 \text{ ft})$$
$$\bar{v} = 15.17 \text{ ft/s} \qquad \bar{\mathbf{v}} = 15.17 \text{ ft/s} \measuredangle 30° \blacktriangleleft$$

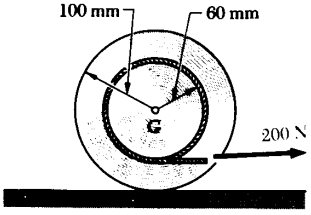
***c*) Velocidad de la esfera deslizante.** Suponiendo ahora que no existe rozamiento, tenemos $F = 0$ y obtenemos

$$+\circlearrowleft \Sigma M_G = \Sigma(M_G)_{\text{eff}}: \qquad 0 = \bar{I}\alpha \qquad \alpha = 0$$

$$+\searrow \Sigma F_x = \Sigma(F_x)_{\text{eff}}: \qquad W \operatorname{sen}30° = m\bar{a} \qquad 0.50W = \frac{W}{g}\bar{a}$$
$$\bar{a} = +16.1 \text{ ft/s}^2 \qquad \bar{\mathbf{a}} = 16.1 \text{ ft/s}^2 \measuredangle 30°$$

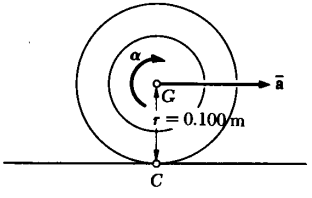
Sustituyendo $a = 16.1$ ft/s² en las ecuaciones para el movimiento uniformemente acelerado, obtenemos

$$\bar{v}^2 = \bar{v}_0^2 + 2\bar{a}(\bar{x} - \bar{x}_0) \qquad \bar{v}^2 = 0 + 2(16.1 \text{ ft/s}^2)(10 \text{ ft})$$
$$\bar{v} = 17.94 \text{ ft/s} \qquad \bar{\mathbf{v}} = 17.94 \text{ ft/s} \measuredangle 30° \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESUELTO 16.9

Una cuerda está enrollada en el tambor interior de una rueda y se tira de ella con una fuerza horizontal de 200 N. La rueda tiene una masa de 50 kg y un radio de giro de 70 mm. Si $\mu_s = 0.20$ y $\mu_k = 0.15$, determínese la aceleración de G y la aceleración angular de la rueda.



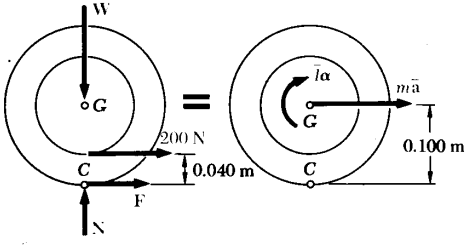
a) Supóngase rodamiento sin deslizar. En este caso, tenemos

$$\bar{a} = r\alpha = (0.100\text{ m})\alpha$$

Comparando la fuerza de rozamiento obtenida con la fuerza de rozamiento máxima con que se puede contar, determinaremos si se justifica esta suposición. El momento de inercia de la rueda es

$$\bar{I} = m\bar{k}^2 = (50\text{ kg})(0.070\text{ m})^2 = 0.245\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

Ecuaciones de movimiento



$$+\circlearrowleft \Sigma M_C = \Sigma(M_C)_{\text{eff}}: \qquad (200\text{ N})(0.040\text{ m}) = m\bar{a}(0.100\text{ m}) + \bar{I}\alpha$$

$$8.00\text{ N}\cdot\text{m} = (50\text{ kg})(0.100\text{ m})\alpha(0.100\text{ m}) + (0.245\text{ kg}\cdot\text{m}^2)\alpha$$

$$\alpha = +10.74\text{ rad/s}^2$$

$$\bar{a} = r\alpha = (0.100\text{ m})(10.74\text{ rad/s}^2) = 1.074\text{ m/s}^2$$

$$\pm\rightarrow \Sigma F_x = \Sigma(F_x)_{\text{eff}}: \qquad F + 200\text{ N} = m\bar{a}$$

$$F + 200\text{ N} = (50\text{ kg})(1.074\text{ m/s}^2)$$

$$F = -146.3\text{ N} \qquad \mathbf{F = 146.3\text{ N} \leftarrow}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = \Sigma(F_y)_{\text{eff}}:$$

$$N - W = 0 \qquad N - W = mg = (50\text{ kg})(9.81\text{ m/s}^2) = 490.5\text{ N}$$

$$\mathbf{N = 490.5\text{ N} \uparrow}$$

Fuerza de rozamiento máxima disponible

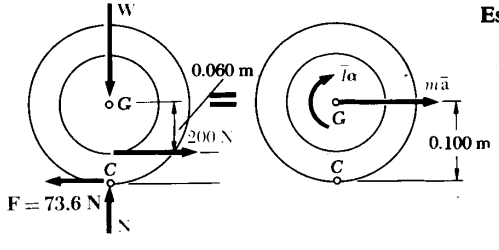
$$F_{\text{máx}} = \mu_s N = 0.20(490.5\text{ N}) = 98.1\text{ N}$$

Como $F > F_{\text{máx}}$, el movimiento supuesto es imposible.

b) Rotación y deslizamiento. Como la rueda debe girar y deslizar al mismo tiempo, dibujamos un nuevo diagrama, en el cual $\bar{a}$ y α son independientes y en el que

$$F = F_k = \mu_k N = 0.15(490.5\text{ N}) = 73.6\text{ N}$$

Del cálculo de la parte *a*) se encuentra que F debe dirigirse hacia la izquierda. Escribimos las siguientes ecuaciones de movimiento:



$$\pm\rightarrow \Sigma F_x = \Sigma(F_x)_{\text{eff}}: \qquad 200\text{ N} - 73.6\text{ N} = (50\text{ kg})\bar{a}$$

$$\bar{a} = +2.53\text{ m/s}^2 \qquad \bar{a} = 2.53\text{ m/s}^2 \rightarrow$$

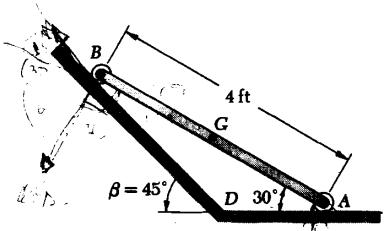
$$+\circlearrowleft \Sigma M_G = \Sigma(M_G)_{\text{eff}}:$$

$$(73.6\text{ N})(0.100\text{ m}) - (200\text{ N})(0.060\text{ m}) = (0.245\text{ kg}\cdot\text{m}^2)\alpha$$

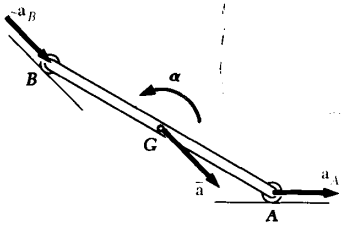
$$\alpha = -18.94\text{ rad/s}^2 \qquad \alpha = 18.94\text{ rad/s}^2 \circlearrowright$$

PROBLEMA RESUELTO 16.10

Los extremos de una barra de 4 ft que pesa 50 lb pueden moverse libremente y sin rozamiento sobre dos vías rectas en la forma indicada. Si se suelta la barra sin velocidad desde la posición mostrada determínense *a*) la aceleración angular de la barra, y *b*) las reacciones en *A* y *B*.



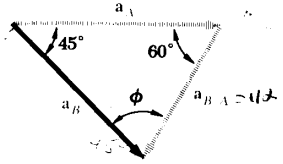
Cinemática del movimiento. Como es un movimiento vinculado, la aceleración de G debe estar relacionada con la aceleración angular α. Para obtener esta relación determinaremos primero el módulo de la aceleración $\mathbf{a}_A$ del punto A en términos de α; suponiendo a α dirigida en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj y notando que $a_{B/A} = 4\alpha$, escribimos



$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$

$$[a_B \measuredangle 45°] = [a_A \rightarrow] + [4\alpha \measuredangle 60°]$$

Tomando en cuenta que $\phi = 75°$ y aplicando la ley de los senos obtenemos



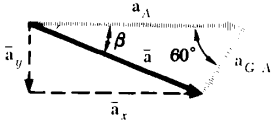
$$a_A = 5.46\alpha \qquad a_B = 4.90\alpha$$

La aceleración de G se obtiene ahora escribiendo

$$\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{a}_G = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{G/A}$$

$$\bar{\mathbf{a}} = [5.46\alpha \rightarrow] + [2\alpha \measuredangle 60°]$$

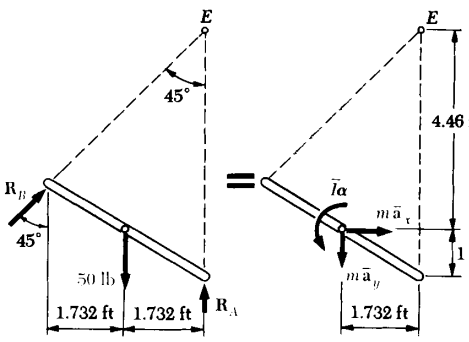
Descomponiendo $\bar{\mathbf{a}}$ en sus componentes x e y obtenemos



$$\bar{a}_x = 5.46\alpha - 2\alpha \cos 60° = 4.46\alpha \qquad \bar{\mathbf{a}}_x = 4.46\alpha \rightarrow$$

$$\bar{a}_y = -2\alpha \operatorname{sen} 60° = -1.732\alpha \qquad \bar{\mathbf{a}}_y = 1.732\alpha \uparrow$$

Cinética del movimiento. **Trazamos los dos diagramas mostrados** para expresar que el sistema de fuerzas exteriores es equivalente al sistema de vectores $m\mathbf{a}$ representado por el vector de componentes $m\bar{\mathbf{a}}_x$ y $m\bar{\mathbf{a}}_y$ unido a G y el par $\bar{I}\alpha$. Calculamos las siguientes magnitudes



$$\bar{I} = \tfrac{1}{12}ml^2 = \frac{1}{12}\frac{50 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2}(4 \text{ ft})^2 = 2.07 \text{ lb·ft·s}^2 \qquad \bar{I}\alpha = 2.07\alpha$$

$$m\bar{a}_x = \frac{50}{32.2}(4.46\alpha) = 6.93\alpha \qquad m\bar{a}_y = -\frac{50}{32.2}(1.732\alpha) = -2.69\alpha$$

Ecuaciones de movimiento

$$+\circlearrowleft \Sigma M_E = \Sigma(M_E)_{\text{eff}}:$$

$$(50)(1.732) = (6.93\alpha)(4.46) + (2.69\alpha)(1.732) + 2.07\alpha$$

$$\alpha = +2.30 \text{ rad/s}^2 \qquad \alpha = 2.30 \text{ rad/s}^2 \circlearrowleft$$

$$\pm \rightarrow \Sigma F_x = \Sigma(F_x)_{\text{eff}}: \quad R_B \operatorname{sen} 45° = (6.93)(2.30) = 15.94$$

$$R_B = 22.5 \text{ lb} \qquad \mathbf{R}_B = 22.5 \text{ lb} \measuredangle 45°$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = \Sigma(F_y)_{\text{eff}}: \quad R_A + R_B \cos 45° - 50 = -(2.69)(2.30)$$

$$R_A = -6.19 - 15.94 + 50 = 27.9 \text{ lb} \qquad \mathbf{R}_A = 27.9 \text{ lb} \uparrow$$

Problemas



Fig. P16.77

16.77 Demuéstrese que el par $\bar{I}\alpha$ de la figura 16.15 puede eliminarse uniendo los vectores $m\bar{a}_t$ y $m\bar{a}_n$ al punto P, llamado *centro de percusión*, que se localiza sobre la línea OG a la distancia $GP = \bar{k}^2/\bar{r}$ desde el centro de masa del cuerpo.

16.78 Una barra uniforme delgada, de longitud $L = 750$ mm y masa $m = 2$ kg, cuelga libremente de una bisagra en A. Si una fuerza **P** de módulo 12 N se aplica en B horizontalmente hacia la izquierda ($h = L$), determínense *a*) la aceleración angular de la barra y *b*) las componentes de la reacción en A.

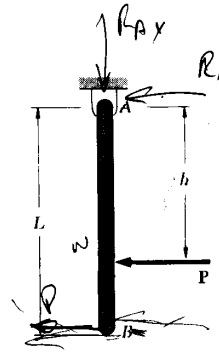


Fig. P16.78

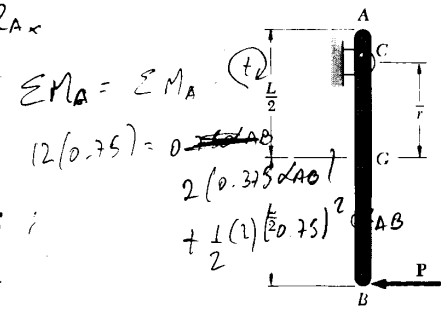


Fig. P16.79

16.79 Una barra uniforme delgada de longitud $L = 30$ in y peso $W = 6$ lb está sostenida en la forma aquí mostrada. Se aplica una fuerza horizontal **P** de módulo 2.5 lb al extremo B. Para $\bar{r} = \frac{1}{4}L = 7.5$ in, determínense *a*) la aceleración angular de la barra y *b*) las componentes de la reacción en C.

16.80 En el problema 16.79 determínense *a*) la distancia $\bar{r}$ para la cual la componente horizontal de la reacción en C es cero y *b*) la aceleración angular correspondiente de la barra.

16.81 Un disco uniforme de radio $c = 160$ mm y masa $m = 6$ kg cuelga libremente de un soporte de pasador en A. Una fuerza **P** de módulo 20 N se aplica en la forma aquí indicada a una cuerda enrollada alrededor del disco. Si $\bar{r} = \frac{3}{4}c = 120$ mm, determínense *a*) la aceleración angular del disco y *b*) las componentes de la reacción en A.

16.82 En el problema 16.81 determínense *a*) la distancia $\bar{r}$ para la cual la componente horizontal de la reacción en A es cero y *b*) la correspondiente aceleración angular del disco.

16.83 En el problema 16.78 determínense *a*) la distancia h para la cual la componente horizontal de la reacción en A es cero y *b*) la correspondiente aceleración angular de la barra.

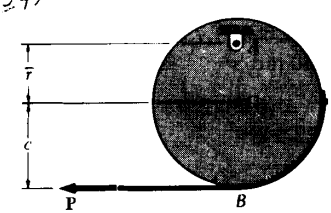


Fig. P16.81

16.84 Una barra uniforme delgada de longitud l y masa m gira alrededor de un eje vertical AA' con una velocidad angular constante ω. Determínese la tensión de la barra a una distancia x del eje de rotación.

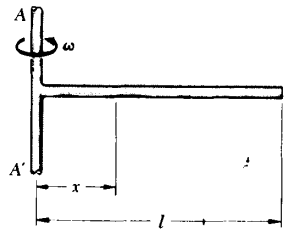


Fig. P16.84

16.85 Se monta un gran volante sobre un eje horizontal y se hace girar con una velocidad constante de 1200 rpm. Datos experimentales demuestran que la fuerza total ejercida por el volante sobre el eje varía desde 6000 lb hacia arriba hasta 9200 lb hacia abajo. Determínense *a*) el peso del volante y *b*) la distancia del centro del eje al centro de masa del volante.

16.86 Se corta un agujero de 120 mm de diámetro como aquí se indica en un disco delgado de 600 mm de diámetro. El disco rota en un plano horizontal respecto de su eje centro geométrico A con una velocidad constante de 480 rpm. Si el disco tiene una masa de 30 kg después de que se ha cortado el agujero, determínese la componente horizontal de la fuerza ejercida por el eje sobre el disco en A.

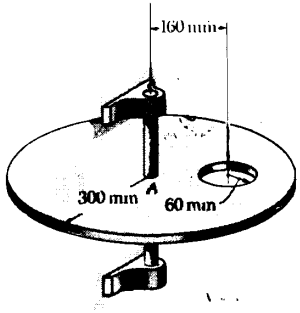


Fig. P16.86

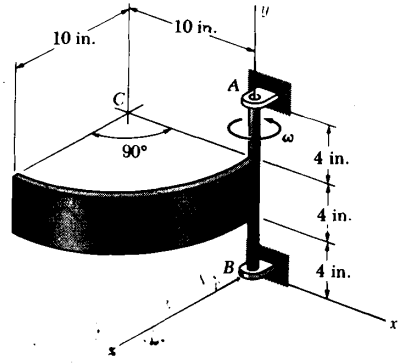


Fig. P16.87

16.87 Una porción de un cascarón cilíndrico circular forma un aspa pequeña que está soldada al eje vertical AB. El aspa y el eje giran con respecto al eje y con una velocidad angular constante de 180 rpm contraria a las manecillas del reloj. Sabiendo que el aspa pesa 5 lb, determínense las componentes horizontales de la reacción en A.

16.88 Se emplean embragues centrífugos del tipo mostrado en la figura para controlar la velocidad de operación de equipos como las cámaras de cine y teléfonos de disco. Las barras curvas delgadas AB y CD están unidas por pasadores en A y C al brazo AC que puede girar alrededor de un punto fijo O. Cada una de las barras AB y CD tienen una masa de 4.5 kg y un radio de 10 mm. Conforme el embrague gira en sentido opuesto a las manecillas del reloj, las perillas H y K deslizan en el interior de una superficie cilíndrica fija de radio 11 mm. Si se sabe que el coeficiente de rozamiento cinético en H y K es 0.35 y que el embrague va a tener una velocidad constante de 3000 rpm, determínese el par **M** que se debe aplicar al brazo AC.

16.89 Para el embrague centrífugo del problema 16.88 determínese la velocidad angular constante que resultará de la aplicación de un par **M** de módulo constante 30 N · mm.

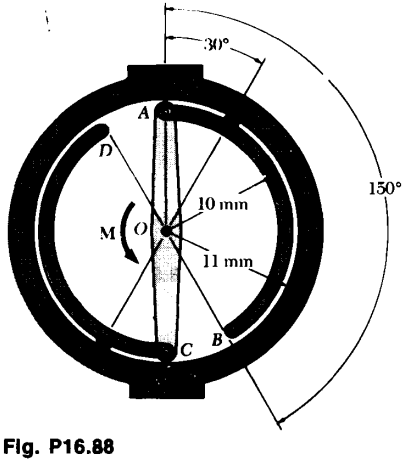


Fig. P16.88

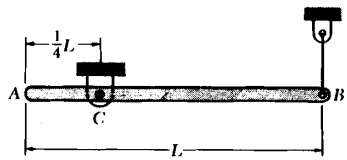


Fig. P16.90

16.90 y 16.91 **Una viga uniforme de longitud *L* y peso *W* está sostenida en la forma indicada en la figura. Si el cable se rompe repentinamente, determínense *a*) la aceleración del extremo *B* y *b*) la reacción en el soporte del pasador.**

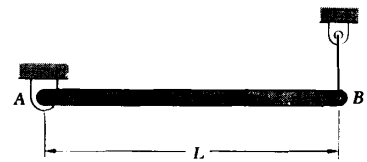


Fig. P16.91

16.92 **Una placa cuadrada uniforme de peso *W* está sostenida en la forma aquí indicada. Si el cable se rompe repentinamente, determínense *a*) la aceleración angular de la placa, *b*) la aceleración del vértice *C* y *c*) la reacción en *A*.**

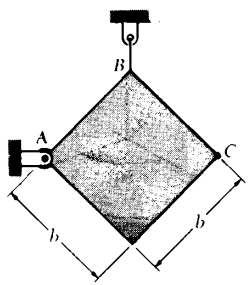


Fig. P16.92

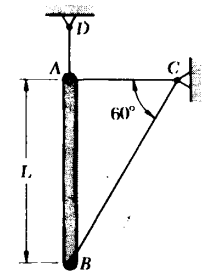


Fig. P16.93

16.93 **Una barra uniforme delgada *AB* de longitud *L* y peso *W* se sostiene como se indica. Si el cable *AD* se rompe repentinamente, determínense *a*) la aceleración angular de la barra y *b*) la tensión en los cables *AC* y *BC*.**

16.94 **Dos barras uniformes delgadas, *AB* de peso 6 lb y *CD* de peso 8 lb, se unen mediante soldadura para formar un ensamble en forma de T que se balancea libremente respecto de *A* en un plano vertical. Si en el instante mostrado el ensamble tiene una velocidad angular en sentido contrario a las manecillas del reloj de 8 rads, determínense *a*) la aceleración angular del ensamble y *b*) los componentes de la reacción en *A*.**

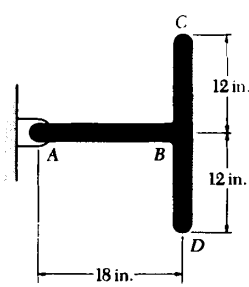


Fig. P16.94

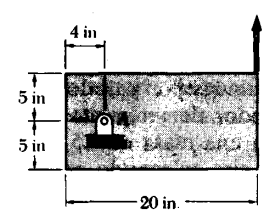


Fig. P16.95

16.95 **Una placa uniforme de 12 lb gira alrededor de *A* en un plano vertical bajo el efecto combinado de la gravedad y de la fuerza vertical P. Si en el instante mostrado la placa tiene una velocidad angular de 20 rad/s y una aceleración angular de 30 rad/s^2 ambas en sentido opuesto al de las manecillas del reloj, determínense *a*) la fuerza P y *b*) las componentes de la reacción en *A*.**

16.96 Una barra delgada de 4 kg está soldada al borde de un disco uniforme de 3 kg como se muestra en la figura. El conjunto gira alrededor de A en un plano vertical bajo el efecto combinado de la gravedad y de la fuerza vertical **P**. Si en el instante mostrado el conjunto tiene una velocidad de 12 rad/s y una aceleración angular de 36 rad/s^2, ambos opuestos al sentido de las manecillas del reloj, determínense *a*) la fuerza **P** y *b*) las componentes de la reacción en A.

16.97 Una barra delgada de 4 kg se suelda al borde de un disco uniforme de 3 kg en la forma indicada. El arreglo oscila libremente alrededor de A en un plano vertical. Si **P** = 0 y en la posición mostrada el conjunto tiene una velocidad angular de 15 rad/s y en sentido opuesto a las manecillas del reloj, determínense *a*) la aceleración angular del conjunto y *b*) las componentes de la reacción en A.

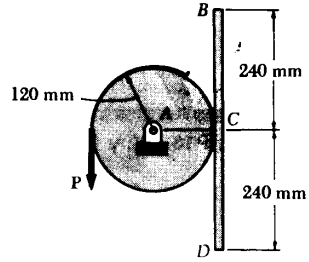


Fig. P16.96 y P16.97

16.98 Dos barras uniformes, ABC de masa 3 kg y DCE de masa 4 kg, están unidas mediante un pasador en C y con dos cuerdas BD y BE. El conjunto en forma de T gira en un plano vertical bajo el efecto combinado de la gravedad y de un par **M** que está aplicado a la barra ABC. Si se sabe que en el instante mostrado la tensión es de 8 N en la cuerda BE y 2 N en la cuerda BD, determínense *a*) la aceleración angular del ensamble y *b*) el par **M**.

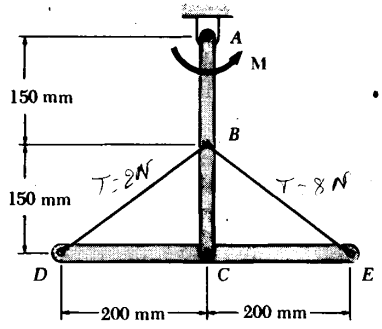


Fig. P16.98

16.99 Un disco uniforme de 20 lb está unido a una barra delgada AB de 12 lb por medio de pasadores sin rozamiento en B y en C. El conjunto gira en un plano vertical bajo el efecto combinado de la gravedad y de un par **M** que está aplicado a la barra AB. Si en el instante mostrado el conjunto tiene una velocidad angular de 6 rad/s y una aceleración angular de 25 rad/s^2 ambas opuestas al sentido de las manecillas del reloj, determínense *a*) el par **M** y *b*) la fuerza ejercida por el pasador C sobre la barra AB.

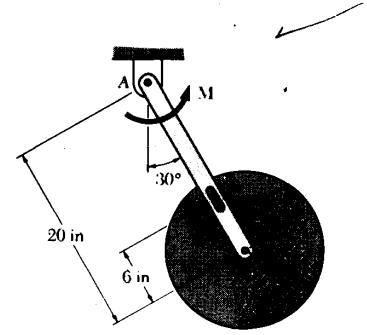


Fig. P16.99

16.100 Dos barras delgadas cada una de longitud l y masa m se sueltan desde el reposo en la posición mostrada. Si se sabe que un pequeño botón sin rozamiento en el extremo B de la barra AB descansa sobre la barra CD, determínense inmediatamente después de soltarse *a*) la aceleración del extremo de C de la barra CD y *b*) la fuerza ejercida sobre el botón B.

16.101 Si se sabe que para el ensamble del problema 16.98 el par **M** es 7.55 N · m en sentido opuesto al de las manecillas del reloj y la tensión en la cuerda BD es cero, determínense *a*) la aceleración angular del ensamble y *b*) la tensión en la cuerda BE.

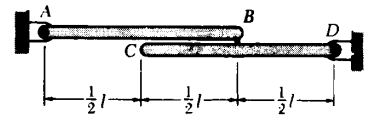


Fig. P16.100

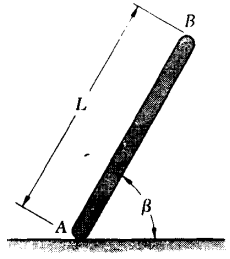


Fig. P16.102 y P16.103

16.102 La barra uniforme AB de masa m se suelta desde el reposo cuando $\beta = 65°$. Suponiendo que la fuerza de rozamiento entre A y la superficie es suficientemente grande para impedir que deslice, determínense *a*) la aceleración angular de la barra en el momento de soltarla, *b*) la reacción normal de la fuerza de rozamiento en A y *c*) el valor mínimo de μ_s compatible con el movimiento descrito.

•16.103 Si se sabe que el coeficiente de rozamiento estático entre la barra y el piso es de 0.35, determínese el intervalo de valores de β para el cual la barra deslizará inmediatamente después de haber sido soltada desde el reposo.

16.104 Dedúzcase la ecuación $\Sigma M_C = I_C\alpha$ para el disco que rueda de la figura 16.17, donde ΣM_C representa la suma de los momentos de las fuerzas exteriores con respecto al eje instantáneo C e I_C es el momento de inercia del disco alrededor de C.

16.105 Demuéstrese que en el caso de un disco no equilibrado la ecuación encontrada en el problema 16.104 es válida sólo cuando el centro de masa G, el centro geométrico O y el centro instantáneo C quedan en línea recta.

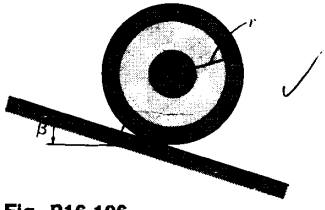


Fig. P16.106

16.106 Una rueda de radio r y radio de giro central $\bar{k}$ se suelta desde el reposo sobre un plano inclinado y rueda sin deslizar. Obténgase una expresión para la aceleración del centro de la rueda en términos de r, $\bar{k}$, β y g.

16.107 Un volante está unido rígidamente a un eje de 60 mm de radio que puede rodar sobre rieles paralelos en la forma aquí mostrada. Cuando se suelta desde el reposo el sistema rueda una distancia de 2.25 m en 15 s. Determínese el radio de giro central del sistema.

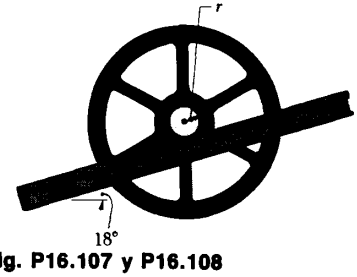


Fig. P16.107 y P16.108

16.108 Un volante de radio de giro central $\bar{k} = 500$ mm está unido rígidamente a un eje de radio $r = 40$ mm que puede rodar sobre rieles paralelos. Si se sabe que el sistema se suelta desde el reposo determínese la distancia que rodará en 20 s.

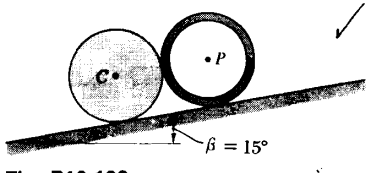


Fig. P16.109

16.109 Un cilindro homogéneo C y una sección del tubo P están en contacto cuando se suelta del reposo. Si se sabe que tanto el cilindro como el tubo ruedan sin deslizar, determínese la distancia de separación entre ellos después de 2.5 s.

16.110 a 16.113 Un tambor de 5 in de radio está unido a un disco de 10 in de radio. El disco y el tambor tienen un peso total de 16 lb y un radio de giro de 7.5 in. Se une una cuerda en la forma indicada, de la cual se tira con una fuerza **P** de módulo 6 lb. Si se sabe que el disco rueda sin deslizar, determínense *a*) la aceleración angular del disco y la aceleración de *G* y *b*) el valor mínimo del coeficiente de rozamiento estático compatible con este movimiento.

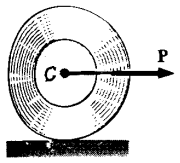


Fig. P16.110 y P16.114

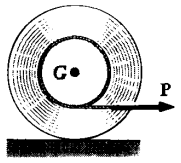


Fig. P16.111 y P16.115

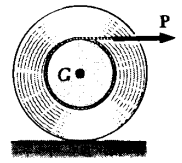


Fig. P16.112 y P16.116

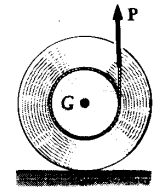


Fig. P16.113 y P16.117

16.114 a 16.117 Un tambor de 80 mm de radio está unido a un disco de 150 mm de radio. El disco y el tambor tienen una masa total de 5 kg y un radio de giro de 120 mm. Una cuerda se une en la forma indicada en las figuras y se tira de ella con fuerza **P** de 18 N de módulo. Si los coeficientes de rozamiento estático y cinético son $\mu_s = 0.20$ y $\mu_k = 0.15$, determínese *a*) si el disco deslizará y *b*) la aceleración angular del disco y la aceleración de *G*.

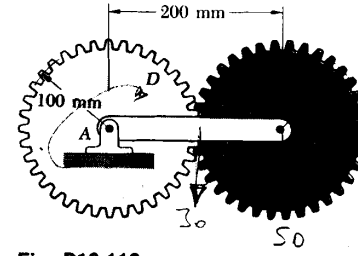


Fig. P16.118

16.118 y 16.119 El engrane *C* tiene una masa de 5 kg y un radio de giro central de 75 mm. La barra uniforme *AB* tiene una masa de 3 kg y el engrane *B* es estacionario. Si el sistema se suelta desde el reposo en la posición mostrada determínense *a*) la aceleración angular del engrane *C* y *b*) la aceleración del punto *B*.

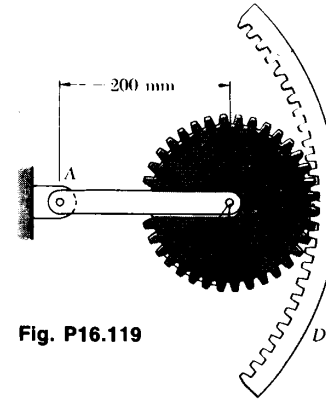


Fig. P16.119

16.120 a 16.122 Una barra de masa *m* se sostiene como se indica en las figuras, entre cuatro discos cada uno de masa *m'* y radio *r* = 75 mm. Determínese la aceleración de la barra inmediatamente después de que se ha soltado desde el reposo, sabiendo que las fuerzas normales ejercidas sobre los discos son suficientes para evitar cualquier deslizamiento y suponiendo que *a*) $m = 5$ kg y $m' = 2$ kg, *b*) la masa *m'* de los discos es despreciable y *c*) la masa *m* de la barra es despreciable.

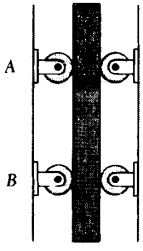


Fig. P16.120

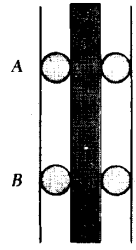


Fig. P16.121

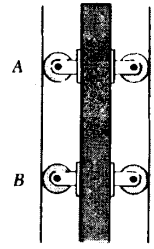
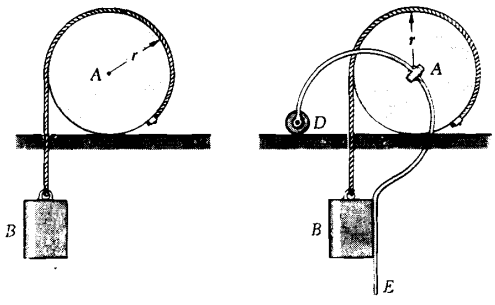


Fig. P16.122



(*a*) (*b*)

Fig. P16.123

16.123 Un bloque *B* de masa *m* está unido a una cuerda enrollada alrededor de un cilindro, de la misma masa *m* y de radio *r*. El cilindro rueda sin deslizar sobre una superficie horizontal. Determínense las componentes de las aceleraciones del centro *A* del cilindro y del bloque *B* inmediatamente después de que el sistema se ha soltado desde el reposo si *a*) el bloque cuelga libremente y *b*) el movimiento del bloque está guiado por un elemento rígido *DAE* sin rozamiento y de masa despreciable, que está fijo mediante bisagras al cilindro en *A*.

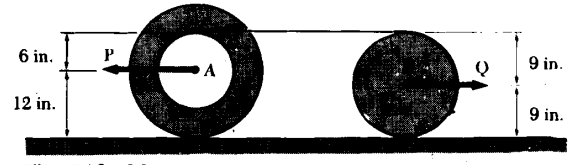


Fig. P16.124

16.124 El conjunto de disco y tambor *A* tiene un peso total de 24 lb y un radio de giro central de 8 in. Una cuerda se une al conjunto *A* en la forma indicada y al disco uniforme *B* de 16 lb. Si se sabe que los discos ruedan sin deslizar, determínese la aceleración del centro de cada disco para $P = 0$ y $Q = 6$ lb.

16.125 Resuélvase el problema 16.124 para $P = 6$ lb y $Q = 0$.

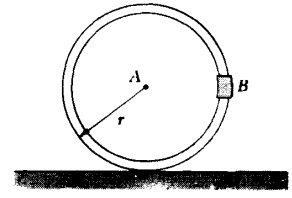


Fig. P16.126

16.126 Un bloque pequeño de masa *m* está unido en *B* a un aro de masa *m* y radio *r*. Se suelta al sistema desde el reposo cuando *B* está directamente arriba de *A* y rueda sin deslizar. Si en el instante aquí mostrado el sistema tiene una velocidad angular en el sentido de las manecillas del reloj de módulo $\omega = \sqrt{g/2r}$, determínense *a*) la aceleración angular del aro y *b*) la aceleración de *B*.

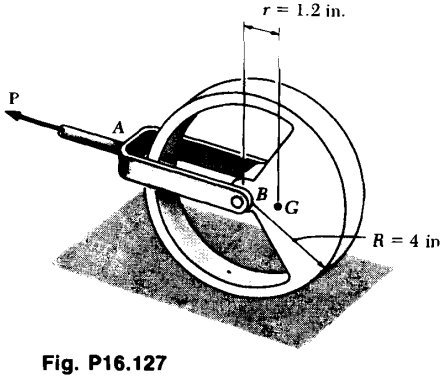


Fig. P16.127

16.127 El centro de gravedad *G* de una rueda no equilibrada de 4 lb se encuentra a una distancia $r = 1.2$ in de su centro geométrico *B*. El radio de la rueda es $R = 4$ in y su radio de giro central es $\bar{k} = 3$ in. En el instante mostrado, el centro *B* de la rueda tiene una velocidad de 2 ft/s y una aceleración de 5 ft/s^2 ambas dirigidas a la izquierda. Si se sabe que la rueda gira sin deslizar y despreciando el peso del eje direccional *AB*, determínese la fuerza horizontal **P** aplicada sobre éste.

16.128 Una semiesfera de peso W y radio r se suelta desde el reposo en la posición que se indica. Determínense *a*) el mínimo valor de μ_s para el cual la semiesfera empieza a rodar sin deslizar y *b*) la aceleración correspondiente del punto B. (*Sugerencia.* Nótese que $OG = \frac{3}{8}r$ y que, por el teorema de Steiner $\bar{I} = \frac{2}{5}mr^2 - m(OG)^2$.)

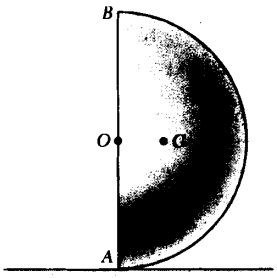


Fig. P16.128

16.129 Resuélvase el problema 16.128 considerando un medio cilindro en lugar de una semiesfera. [*Sugerencia.* Nótese que $OG = 4r/3\pi$ y que por el teorema de Steiner $\bar{I} = \frac{1}{2}mr^2 - m(OG)^2$.]

16.130 Los extremos de la barra delgada AB de 8 lb están unidos a collarines de peso despreciable que deslizan sin rozamiento a lo largo de barras fijas. Si la barra AB se suelta desde el reposo en la posición mostrada, determínense inmediatamente después de soltarla *a*) la aceleración angular de la barra *b*) la reacción en A y *c*) la reacción en B.

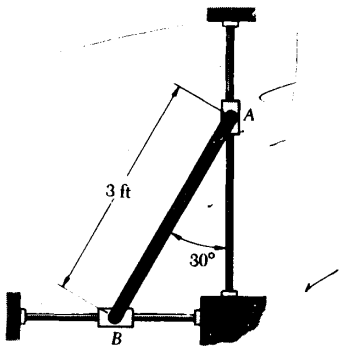


Fig. P16.130

16.131 El movimiento de la barra uniforme ACB de 4 kg está guiado por dos bloques de masa despreciable, que deslizan sin rozamiento en las ranuras mostradas. Si la barra se suelta desde el reposo, determínense inmediatamente después de soltarla *a*) la aceleración angular de la barra y *b*) la reacción en A.

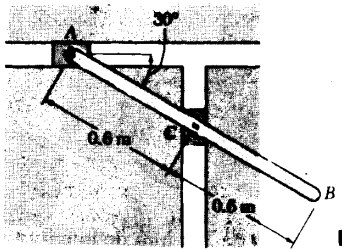


Fig. P16.131 y P16.132

16.132 El movimiento de la barra uniforme ACB de 4 kg está guiado por dos bloques de masa despreciable, que deslizan sin rozamiento en las ranuras mostradas. Una fuerza **P** se aplica al bloque A haciendo que la barra parta del reposo con una aceleración angular, opuesta al sentido del giro de las manecillas del reloj, de 12 rad/s^2. Determínense *a*) la fuerza necesaria **P** y *b*) la reacción correspondiente en A.

16.133 El extremo B de la barra uniforme AB de 15 lb descansa sobre un piso sin rozamiento mientras que el extremo A está unido a un cable horizontal AC. Si se sabe que en el instante mostrado la fuerza **P** hace que el extremo B de la barra parta del reposo con una aceleración de 9 ft/s^2 hacia la izquierda, determínense *a*) la fuerza **P** y *b*) la correspondiente tensión en el cable AC.

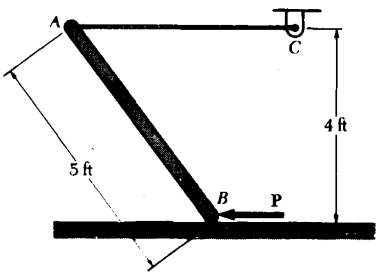


Fig. P16.133

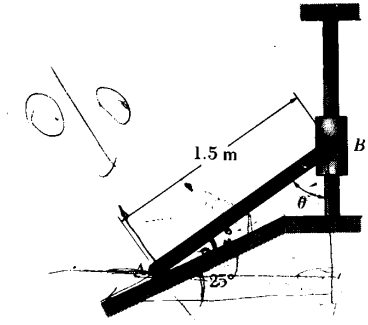


Fig. P16.134 y P16.135

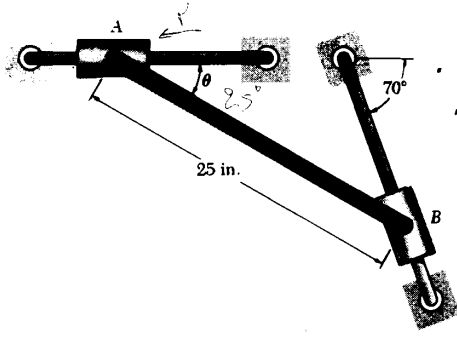


Fig. P16.136 y P16.137

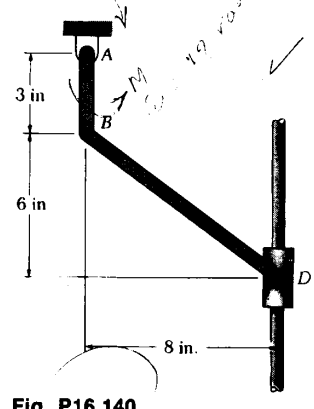


Fig. P16.140

16.134 El extremo de A de la barra uniforme AB de 6 kg descansa sobre una superficie inclinada, mientras que el extremo B está unido a un collarín de masa despreciable, que puede deslizar sobre la barra vertical aquí mostrada. Si se sabe que la barra se suelta del reposo cuando $\theta = 35°$ y despreciando el efecto del rozamiento, determínense inmediatamente después de soltarla *a*) la aceleración angular de la barra y *b*) la reacción en B.

16.135 El extremo A de la barra uniforme AB de 6 kg descansa sobre la superficie inclinada mientras que el extremo B está unido a un collarín de masa despreciable que puede deslizar a lo largo de la barra vertical como se muestra en la figura. Cuando la barra está en reposo, una fuerza vertical **P** se aplica en B haciendo que el extremo B empiece a moverse hacia arriba con una aceleración de 4 m/s^2. Si se sabe que $\theta = 35°$, determínese la fuerza **P**.

16.136 Una barra uniforme AB de 4 lb está unida a collarines de masa despreciable que se pueden deslizar sin rozamiento a lo largo de las barras fijas que se indican. La barra AB está en reposo en la posición $\theta = 25°$ cuando se aplica una fuerza horizontal **P** al collarín A, provocando que empiece a moverse hacia la izquierda con una aceleración de 12 ft/s^2. Determínense *a*) la fuerza **P**, *b*) la reacción en B.

16.137 La barra uniforme AB de 4 lb está unida a collarines de masa despreciable que pueden deslizar sin rozamiento a lo largo de las barras fijas que se muestran. Si la barra AB se suelta del reposo en la posición $\theta = 25°$, determínense inmediatamente después de soltarse *a*) la aceleración angular de la barra y *b*) la reacción en B.

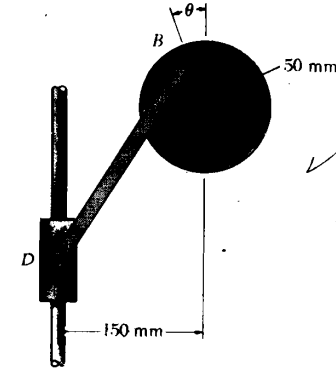


Fig. P16.138

16.138 La barra uniforme BD de 250 mm de longitud y masa de 5 kg se conecta como se indica al disco A y a un collarín de masa despreciable, que se puede deslizar libremente a lo largo de la barra vertical. Si el disco A gira en sentido opuesto al de las manecillas del reloj, con una velocidad constante de 500 rpm, determínese la reacción en D cuando $\theta = 0$.

16.139 Resuélvase el problema 16.138 cuando $\theta = 90°$.

16.140 La barra uniforme BD de 3 lb está unida a la manivela AB y a un collarín de peso despreciable. Se aplica un par (que no se muestra) a la manivela AB provocando que gire con una velocidad angular de 12 rad/s, en sentido opuesto al de las manecillas del reloj y una aceleración angular de 80 rad/s^2 en el sentido de las manecillas del reloj, en el instante que se muestra en la figura. Despreciando el efecto del rozamiento, determínese la reacción en D.

16.141 En el problema 16.140, determínese la reacción en D si se sabe que en la posición aquí mostrada la manivela AB tiene una velocidad angular de 12 rad/s, y una aceleración angular de 80 rad/s^2, ambas en sentido opuesto al de las manecillas del reloj.

16.142 Un conductor enciende su automóvil con la puerta del lado de los pasajeros totalmente abierta ($\theta = 0$). La puerta tiene una masa de 36 kg, un radio de giro central $\bar{k} = 300$ mm y su centro de masa se sitúa a una distancia $\bar{r} = 525$ mm a partir de su eje vertical de rotación. Si se sabe que el conductor mantiene una aceleración constante de 1.95 m/s^2, determínese la velocidad angular de la puerta al cerrarse ($\theta = 90°$).

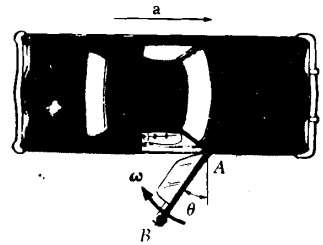


Fig. P16.142

16.143 Para el automóvil del problema 16.142, determínese la aceleración constante mínima que el conductor deberá mantener para que la puerta se cierre y se asegure si se sabe que deberá golpear el marco con una velocidad angular mínima de 1.8 rad/s para que opere el mecanismo del seguro.

16.144 En el sistema motriz que se indica $l = 8$ in, $b = 3$ in, el pistón P pesa 4 lb y la barra de unión BD se supone que es una barra delgada uniforme de 5 lb. Durante una prueba del sistema, la manivela AB se hace rotar con una velocidad angular constante de 2000 rpm en el sentido de las manecillas del reloj y no se le aplica ninguna fuerza a la cara del pistón. Determínense las fuerzas ejercidas sobre la barra de unión en B y en D cuando $\theta = 0$ (despréciese el efecto del peso de la barra).

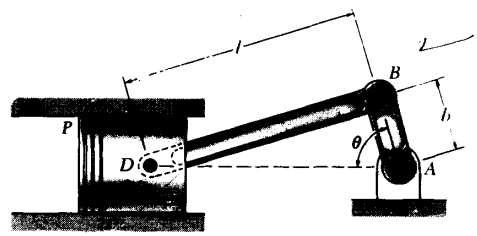


Fig. P16.144

16.145 Resuélvase el problema 16.144 cuando $\theta = 180°$.

16.146 y 16.147 Dos barras AB y BC de masa m' por unidad de longitud están unidas en la forma indicada en las figuras, a un disco que se pone a girar en un plano vertical a una velocidad angular constante ω_0. Para la posición mostrada, determínense las componentes de las fuerzas ejercidas en A y en B sobre la barra AB.

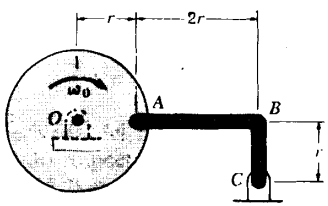


Fig. P16.146

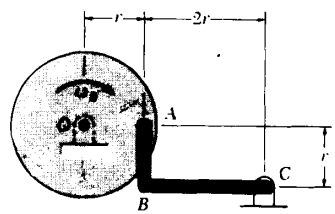


Fig. P16.147

*16.148 y *16.149 El cilindro B de 3 kg y la cuña A de 2 kg se mantienen en reposo, en la posición mostrada en las figuras, por la cuerda C. Si se supone que el cilindro rueda sin deslizar sobre la cuña y despreciando el rozamiento entre la cuña y el piso, determínense *a*) la aceleración de la cuña y *b*) la aceleración angular del cilindro inmediatamente después de que la cuerda C ha sido cortada.

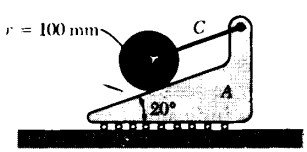


Fig. P16.148

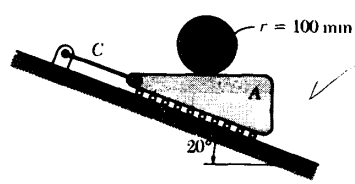


Fig. P16.149

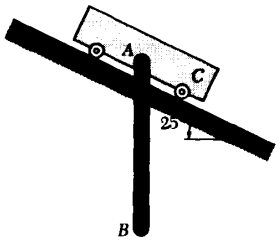


Fig. P16.150

*16.150 y *16.151 La barra uniforme AB de 30 lb de peso y 3 ft de longitud está unida al vehículo C de 40 lb. Despreciando el rozamiento, determínense inmediatamente después de que se ha soltado el sistema desde el reposo *a*) la aceleración del vehículo y *b*) la aceleración angular de la barra.

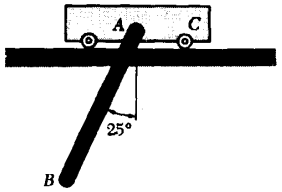


Fig. P16.151

*16.152 Una barra uniforme AB de 4 kg de masa y longitud $L = 1.5$ m se suelta desde el reposo en la posición aquí indicada. Si se sabe que $\beta = 20°$ determínense los valores, inmediatamente después de soltarla, de *a*) la aceleración angular de la barra, *b*) la aceleración del extremo A y *c*) la reacción en A. Despréciense la masa y el rozamiento del rodillo en A.

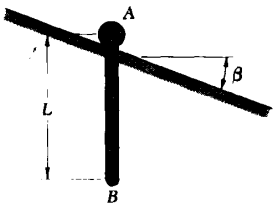


Fig. P16.152

*16.153 y *16.154 Cada una de las barras AB y BC tienen una longitud $L = 15$ in y pesan 4 lb. Si se aplica una fuerza horizontal **P** de módulo 3.5 lb, como se muestra en las figuras, determínese la aceleración angular de cada barra.

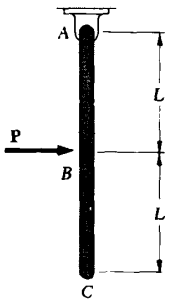


Fig. P16.153

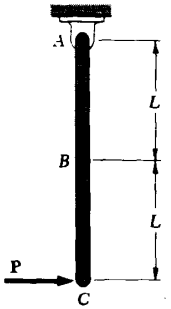


Fig. P16.154

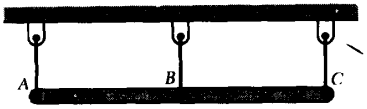


Fig. P16.155

*16.155 Dos barras uniformes idénticas se conectan por medio de un pasador en B y se sostienen en la posición horizontal con tres alambres en la forma indicada. Si los cables en A y B se cortan simultáneamente, determínense en ese instante la aceleración de *a*) el punto A y *b*) el punto B.

*16.156 *a*) Determínense el módulo y la localización del máximo momento de flexión en la barra del problema 16.78. *b*) Demuéstrese que la respuesta del apartado *a* es independiente de la masa de la barra.

*16.157 Trácense los diagramas de cortante y del momento de flexión para la viga del problema 16.91, inmediatamente después de que el cable en *B* se rompa.

Repaso y Resumen

En este capítulo se estudiaron la *cinética del sólido rígido*, es decir, las relaciones que existen entre las fuerzas que actúan sobre un sólido rígido, la forma y masa del cuerpo y el movimiento que se produce, excepto para las dos primeras secciones, que se aplican al más general de los casos del movimiento de un sólido rígido, el análisis se restringió al *movimiento plano de placas rígidas* y de sólidos rígidos simétricos con respecto a un plano de referencia. El movimiento plano de sólidos rígidos asimétricos y el movimiento de sólidos rígidos en el espacio tridimensional se estudiarán en el capítulo 18.

Ecuaciones fundamentales de movimiento para un sólido rígido

Primero se recordó (sección 16.2) que las dos ecuaciones fundamentales obtenidas en el capítulo 14 para el movimiento de un sistema de partículas y se observó que se aplicaban en el caso más general del movimiento de un sólido rígido. La primera ecuación define el movimiento del centro de masa G del sólido; se tiene

$$\Sigma \mathbf{F} = m\bar{\mathbf{a}} \tag{16.1}$$

donde m es la masa del cuerpo y $\bar{\mathbf{a}}$ la aceleración de G. La segunda se relaciona con el movimiento del sólido relativo a un marco central de referencia; se escribió

$$\Sigma \mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G \tag{16.2}$$

donde $\mathbf{H}_G$ es la derivada del momento la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_G$ del sólido respecto de su centro de masa G. Juntas, las ecuaciones (16.1) y (16.2) expresan que *el sistema de fuerzas exteriores es mecánicamente equivalente al sistema que consta del vector* $m\bar{\mathbf{a}}$ *unido en G y a un par de momento* $\dot{\mathbf{H}}_G$ (Fig. 16.19).

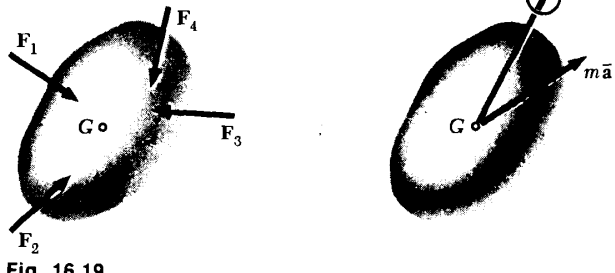


Fig. 16.19

Momento angular en movimiento plano

Restringiendo el análisis en este punto y en el resto del capítulo, al movimiento plano de placas rígidas y sólidos rígidos simétricos con respecto a un plano de referencia, se demostró (sección 16.3) que el momento angular del cuerpo se podría expresar así:

$$\mathbf{H}_G = \bar{I}\boldsymbol{\omega} \tag{16.4}$$

donde $\bar{I}$ es el momento de inercia del sólido con respecto a un eje central perpendicular al plano de referencia y ω la velocidad angular del sólido. Derivando ambos miembros de la ecuación (16.4) se obtuvo

$$\dot{\mathbf{H}}_G = \bar{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} = \bar{I}\boldsymbol{\alpha} \tag{16.5}$$

que muestra que en el caso restringido considerado aquí, la derivada de la cantidad de movimiento angular de un sólido rígido se puede representar mediante un vector de la misma dirección de α (es decir, perpendicular al plano de referencia) y de módulo $\bar{I}\alpha$.

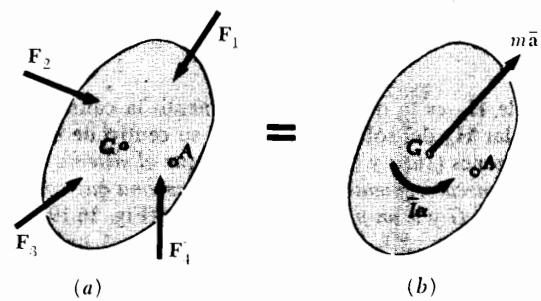
Ecuaciones para el movimiento plano de un sólido rígido

De lo anterior se desprende (sección 16.4) que el movimiento plano de una placa rígida o de un sólido rígido simétrico con respecto al plano de referencia se define por tres ecuaciones escalares.

$$\Sigma F_x = m\bar{a}_x \qquad \Sigma F_y = m\bar{a}_y \qquad \Sigma M_G = \bar{I}\alpha \tag{16.6}$$

Principio de D'Alembert

Se desprende además que *las fuerzas exteriores que actúan sobre un sólido rígido son de hecho mecánicamente* **equivalentes** *al sistema de vectores* $\Delta m_i a_i$ *de las partículas que forman el sólido.* Este enunciado, conocido como principio de D'Alembert, se puede expresar en la forma del diagrama vectorial mostrado en la figura 16.20, donde el sistema $\Delta m_i a_i$ se ha representado por un vector $m\bar{\mathbf{a}}$ unido en G y un par $\bar{I}\boldsymbol{\alpha}$. En el caso particular de una placa en *traslación*, el sistema $\Delta m_i a_i$ mostrado en la parte b de la figura se reduce a un solo vector $m\bar{\mathbf{a}}$, mientras que en el caso particular de una placa en *rotación central*, se reduce a un par único $\bar{I}\boldsymbol{\alpha}$; en cualquier otro caso de movimiento plano se deberán incluir ambos, el vector $m\bar{\mathbf{a}}$ y el par $\bar{I}\boldsymbol{\alpha}$.



(a) (b)

Fig. 16.20

Ecuación del diagrama de sólido libre

Cualquier problema relacionado con el movimiento plano de una placa rígida se puede resolver al dibujar una *ecuación de diagrama de sólido libre* similar a las de la figura 16.20 (sección 16.6). Se pueden obtener tres ecuaciones de movimiento al igualar los componentes x, y o los momentos con respecto a un punto arbitrario A, de las fuerzas y de los vectores involucrados (problemas resueltos 16.1, 16.2, 16.4 y 16.5). Una solución alternativa puede ser obtenida por medio de la adición de las fuerzas exteriores y el *vector de inercia* $-m\bar{\mathbf{a}}$ del sentido opuesto al de $\bar{\mathbf{a}}$, atado a G, y un *par de inercia* $-\bar{I}\boldsymbol{\alpha}$ del

sentido opuesto de α. El sistema así obtenido es equivalente a cero, y se dice que la placa está en *equilibrio dinámico*.

El método descrito anteriormente también se puede usar para resolver problemas relacionados con el movimiento plano de varios sólidos rígidos conectados (sección 16.7). Se dibuja una ecuación de diagrama de sólido libre para cada parte del sistema y las ecuaciones de movimiento que se obtienen se resuelven simultáneamente. Sin embargo, en algunos casos, se puede dibujar un solo diagrama para el sistema, que incluya todas las fuerzas exteriores, así como los vectores $m\bar{a}$ y los pares $\bar{I}\alpha$ asociados con las partes del sistema (problema resuelto 16.3).

Sólidos rígidos conectados

En la segunda parte del capítulo se trató de los sólidos rígidos que se *movían bajo ciertas restricciones* (sección 16.8). Mientras que el análisis cinético del movimiento plano vinculado de una placa rígida es el mismo que el anterior, se debe complementar con un *análisis cinemático* cuyo objeto es expresar las componentes $\bar{a}_x$ y $\bar{a}_y$ de la aceleración del centro de masa G de la placa en términos de su aceleración angular α. Los problemas resueltos en esta forma incluyeron la *rotación no central* de barras y placas (problemas resueltos 16.6 y 16.7), el *movimiento de rotación* de esferas y ruedas (problemas resueltos 16.8 y 16.9) y el movimiento plano de *varios tipos de barras con rodillos* (problemas resueltos 16.10).

Movimiento plano vinculado

Problemas de Repaso

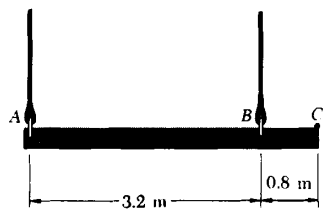


Fig. P16.158

16.158 Una viga de 4 m y de masa 200 kg es bajada de una altura considerable por medio de dos cables, que se desenrollan desde grúas aéreas. Conforme la viga se aproxima al suelo los operadores de las grúas aplican frenos para reducir el desenrollamiento. Determínese la aceleración de cada cable en ese instante, sabiendo que T_A = 1000 N y T_B = 1800 N.

16.159 Una barra uniforme ABC pesa 16 lb y se conecta a dos collarines de peso despreciable que se deslizan sobre barras horizontales sin rozamiento situadas en el mismo plano vertical. Si se aplica una fuerza **P** de magnitud 5 lb en C, determínense *a*) la aceleración de la barra y *b*) las reacciones en B y C.

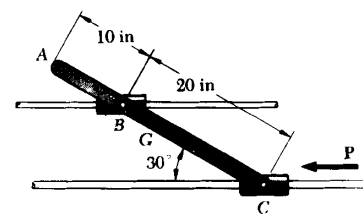


Fig. P16.159

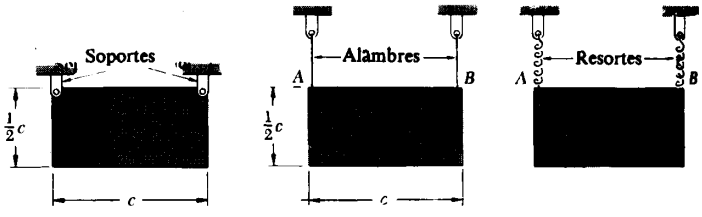


Fig. P16.160

16.160 Una placa uniforme de masa m está suspendida en cada una de las formas mostradas. Para cada caso, determínense inmediatamente después de que la conexión en B se ha soltado *a*) la aceleración angular de la placa y *b*) la aceleración de su centro de masa.

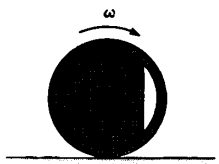


Fig. P16.161

16.161 El centro de masa G de una rueda de 5 kg y de radio $R = 300$ mm, se sitùa a una distancia $r = 100$ mm de su centro geométrico C. El radio de giro central es $k = 150$ mm. Conforme la rueda gira sin deslizar, su velocidad angular varía y se observa que $\omega = 8$ rad/s en la posición que aquí se muestra. Determínese la aceleración angular correspondiente de la rueda.

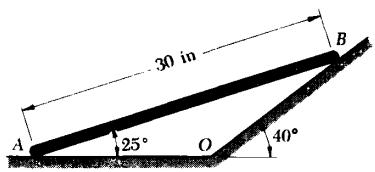


Fig. P16.162

16.162 Los extremos A y B de la barra uniforme de 3 lb se deslizan sin rozamiento a lo lárgo de las superficies mostradas en la figura. Cuando la barra está en reposo, una fuerza horizontal **P** se aplica en A haciendo que el extremo A de la barra empiece a moverse a la derecha con una aceleración de 8 ft/s^2. Determínense *a*) la fuerza **P** y *b*) la reacción correspondiente en B.

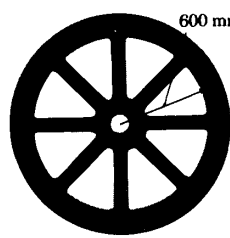


Fig. P16.163

16.163 El contorno de un volante tiene una masa de 1600 kg y un radio medio de 600 mm. Conforme el volante gira con una velocidad angular constante de 360 rpm se ejercen fuerzas radiales sobre el contorno por los radios y se producen fuerzas internas dentro del mismo. Despreciando el peso de los radios, determínense *a*) las fuerzas internas en el borde, suponiendo que las fuerzas radiales ejercidas por los radios sean cero y *b*) la fuerza radial ejercida por cada radio, suponiendo que las fuerzas tangenciales en el borde sean cero.

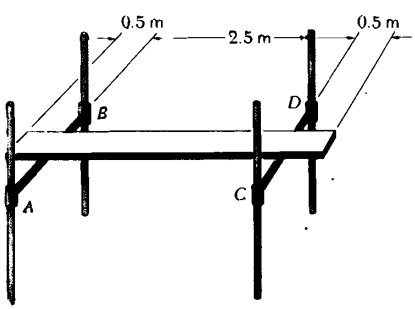


Fig. P16.164

16.164 Un tablón de 3.5 m de longitud y 30 kg de masa descansa sobre dos tubos horizontales AB y CD de un andamio. Los tubos están separados 2.5 m y el tablón sobresale 0.5 m en cada extremo. Un trabajador de 75 kg está de pie sobre el tablón cuando el tubo CD se rompe repentinamente. Determínese la aceleración inicial del trabajador si se sabe que estaba de pie *a*) a la mitad del tablón y *b*) justamente arriba del tubo CD.

16.165 Se transportan latas cilíndricas de una altura a otra mediante los brazos horizontales móviles que se muestran en la figura. Suponiendo que $\mu_s = 0.25$ entre las latas y los brazos, determínense *a*) el módulo de la aceleración hacia abajo para la cual las latas deslizarán sobre los brazos horizontales y *b*) la mínima relación h/d para la cual las latas volcarán antes de deslizar.

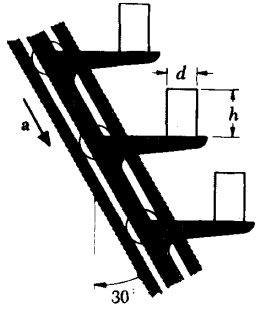


Fig. P16.165

16.166 Poco tiempo después de haber sido disparado, el cohete experimental mostrado en la figura que pesa 25 000 lb sube con una aceleración de 45 ft/s^2. Si en ese momento el motor *A* del cohete falla, y mantiene su funcionamiento el motor *B*, determínense *a*) la aceleración del centro de masa del mismo y *b*) la aceleración angular del cohete. Supóngase que el cohete es una barra delgada uniforme de 48 ft de longitud.

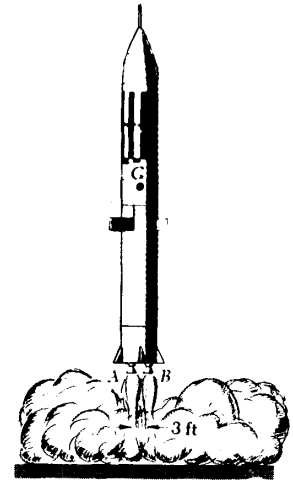


Fig. P16.166

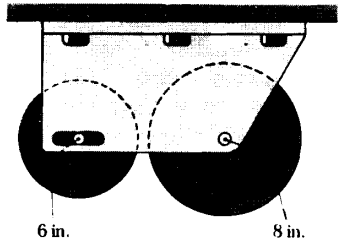


Fig. P16.167

16.167 El disco *A* pesa 5 lb y está inicialmente en reposo; el disco *B* pesa 10 lb y tiene una velocidad angular inicial de 900 rpm en el sentido de las manecillas del reloj. Los discos se ponen en contacto al aplicar una fuerza horizontal **P** de magnitud $P = 3$ lb, al eje del disco *A*. Si $\mu_k = 0.25$ y se desprecia el rozamiento en los cojinetes, determínense *a*) la aceleración angular de cada disco y *b*) la velocidad angular final de cada disco.

16.168 El movimiento de una barra semicircular de 1.5 kg está guiado por dos bloques de masa despreciable que deslizan sin rozamiento en las ranuras mostradas. Se aplica una fuerza horizontal variable **P**, en *B*, provocando que *B* se mueva hacia la derecha con una constante de 5 m/s. Para la posición indicada, determínense *a*) la fuerza **P** y *b*) la reacción en *B*.

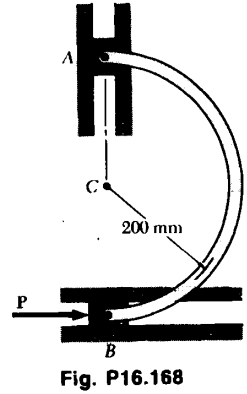


Fig. P16.168

16.169 Una sección de tubo descansa sobre una placa a la cual se le proporciona una aceleración constante **a** dirigida hacia la derecha. Suponiendo que el tubo ruede sobre la placa, determínense *a*) la aceleración del tubo y *b*) la distancia que recorrerá la placa antes de que el tubo alcance el extremo *A*.

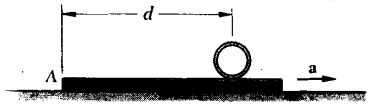


Fig. P16.169

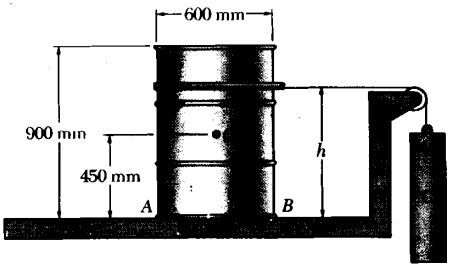


Fig. P16.C1

Los siguientes problemas están diseñados para ser resueltos con ayuda de una computadora.

16.C1 Un barril completamente lleno y su contenido tienen una masa combinada de 125 kg. Se conecta un cilindro al barril como se muestra en la figura y se sabe que los coeficientes de rozamiento entre el barril y el piso son $\mu_s = 0.35$ y $\mu_k = 0.30$. Elabórese un programa de ordenador y úsese para calcular la aceleración del barril y el rango de valores de h para el cual el barril no se volcará, para valores de la masa del cilindro de 25 a 75 kg, en intervalos de 5 kg, y de 75 a 400 kg en intervalos de 25 kg.

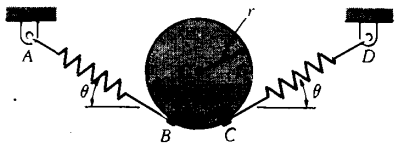


Fig. P16.C2

16.C2 Un disco uniforme se sostiene como aquí se indica, mediante los resortes *AB* y *CD*. Elabórese un programa de ordenador y con él calcúlese, para valores de θ de 30 a 90° en intervalos de 5°, las aceleraciones del centro *G* del disco y del punto *C*, inmediatamente después de que se rompa el resorte *AB*.

16.C3 El extremo *A* de la barra uniforme *AB* de 6 kg descansa sobre la superficie horizontal mientras que el extremo *B* se une a un collarín que se mueve hacia arriba con una velocidad constante $v_B = 0.5$ m/s. Despreciando el efecto del rozamiento, escríbase un programa de ordenador y utilícese para calcular la reacción en *A*, para valores de θ de 0 a 75°, en intervalos de 5°.

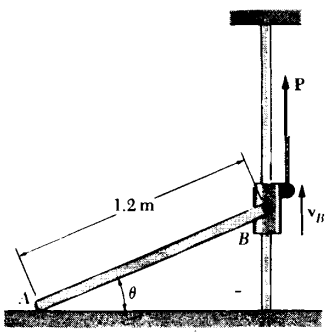


Fig. P16.C3

16.C4 En el sistema motriz del problema 15.C2 el pistón *P* pesa 4 lb y la barra de conexión *BD* se supone que es una barra delgada uniforme de 5 lb. Si se sabe que durante la prueba del sistema no se aplica ninguna fuerza a la cara del pistón, elabórese un programa de ordenador y úsese para calcular las componentes horizontal y vertical de las fuerzas ejercidas sobre la barra de conexión en *B* y *D*, para valores de θ de 0 a 180° en intervalos de 10°. (Despréciese el efecto del peso de la barra.)

CAPÍTULO DIECISIETE

Movimiento plano del sólido rígido: métodos de la energía y del momento

17.1. Introducción. En este capítulo se utilizarán el método del trabajo y la energía y el método del impulso y el del momento lineal en el análisis del movimiento en un plano de los sólidos rígidos y de sistemas de sólidos rígidos.

Se considerará primero el método del trabajo y la energía. En las secciones 17.2 a la 17.5 definiremos el trabajo de una fuerza y de un par y obtendremos después una expresión para la energía cinética de un sólido rígido con movimiento plano. Se aplicará entonces el teorema de las fuerzas vivas en la solución de problemas en los que intervienen desplazamientos y velocidades. En la sección 17.6 se aplicará el principio de conservación de la energía a la solución de una variedad de problemas de ingeniería.

En la segunda parte del capítulo, en las secciones 17.8 y 17.9, estudiaremos el principio del impulso y el del momento lineal a la solución de problemas en los que intervienen velocidades y el tiempo. En la sección 17.10 se introducirá y analizará el concepto de la conservación del momento angular.

En la última parte del capítulo (Secc. 17.11 y 17.12) Consideraremos problemas relacionados con el choque excéntrico de los sólidos rígidos. Como se hizo en el capítulo 13, en él consideramos el impacto de las partículas, se utilizará el coeficiente de restitución entre los sólidos que chocan y el principio del impulso y el del momento en la solución de problemas de choques. También se desmostrará que el método utilizado es aplicable no sólo cuando los sólidos que chocan se mueven libremente después del impacto, sino también cuando los sólidos tienen alguna restricción parcial en su movimiento.

17.2. Teorema de las fuerzas vivas para el sólido rígido. Ahora se utilizará el teorema de las fuerzas vivas en el análisis del movimiento plano de los sólidos rígidos. Como se indicó en el capítulo 13, el teorema de las fuerzas vivas se adapta especialmente bien a la solución de problemas en los que intervengan velocidades y desplazamientos. Su ventaja principal se basa en el hecho que el trabajo que realizan las fuerzas y la energía cinética de las partículas son cantidades escalares.

Con objeto de aplicar el teorema mencionado al análisis del movimiento de un sólido rígido, nuevamente supondremos que el sólido rígido está formado por un gran número n de partículas de masa Δm_i. Recordando la ecuación (14.30) de la sección 14.8, escribimos

$$T_1 + U_{1\to 2} = T_2 \tag{17.1}$$

en donde T_1, T_2 = valores inicial y final de la energía cinética de las partículas que forman al sólido rígido

$U_{1\to 2}$ = trabajo realizado por todas las fuerzas que actúan sobre las distintas partículas del sólido

La energía cinética total

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i\, v_i^2 \tag{17.2}$$

se obtiene al sumar cantidades escalares positivas y es también una cantidad escalar positiva. Más adelante veremos cómo puede encontrarse T para diversos tipos de movimiento de un sólido rígido.

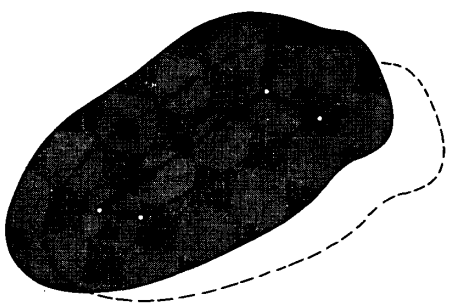


Fig. 17.1

La expresión $U_{1\to 2}$ de (17.1) representa el trabajo realizado por todas las fuerzas que actúan sobre las distintas partículas del sólido, ya sean fuerzas internas o externas. Sin embargo, como veremos ahora, el trabajo total de las fuerzas internas, que mantienen unidas a las partículas del sólido rígido, es cero. Considérense dos partículas A y B de un sólido rígido y las dos fuerzas iguales y opuestas $\mathbf{F}$ y $-\mathbf{F}$ que ejerce una sobre la otra (Fig. 17.1). Aunque, en general, los pequeños desplazamientos $d\mathbf{r}$ y $d\mathbf{r}'$ de las dos partículas son diferentes, las componentes de éstos a lo largo de AB deben ser iguales; si no fuese así, las partículas no se mantendrían a la misma distancia y el sólido no sería rígido. Por consiguiente, el trabajo de $\mathbf{F}$ es igual en magnitud y de signo contrario al trabajo de $-\mathbf{F}$ y su suma es cero. Por lo tanto, el trabajo total de las fuerzas internas que actúan sobre las partículas de un sólido rígido es cero y *la expresión $U_{1\to 2}$ de la ecuación (17.1) se reduce al trabajo de las fuerzas externas* que actúan sobre el sólido durante el desplazamiento que se considera.

17.3. Trabajo realizado por las fuerzas que actúan sobre un sólido rígido. En la sección 13.2 vimos que el trabajo realizado por una fuerza **F** durante un desplazamiento de su punto de aplicación de A_1 a A_2 es

$$U_{1\to 2} = \int_{A_1}^{A_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \tag{17.3}$$

o bien,

$$U_{1\to 2} = \int_{s_1}^{s_2} (F\cos\alpha)\, ds \tag{17.3'}$$

en la cual F es el módulo de la fuerza, α el ángulo que forma con la dirección de movimiento de su punto de aplicación A y s la variable de integración que mide la distancia recorrida por A a lo largo de su trayectoria.

En el cálculo del trabajo realizado por las fuerzas externas que actúan sobre un sólido rígido, a menudo es conveniente encontrar el trabajo de un par sin considerar por separado al trabajo de cada una de las dos fuerzas que integran el par. Considerénse las dos fuerzas **F** y $-\mathbf{F}$ que forman un par de momento **M** y que actúan sobre un sólido rígido (Fig. 17.2). Cualquier pequeño desplazamiento del sólido rígido que lleve a A y B a A' y B'' respectivamente, puede dividirse en dos partes: una en la que los puntos A y B experimentan desplazamientos iguales $d\mathbf{r}_1$ y la otra en la cual A′ permanece fijo mientras B' se mueve a B'' mediante un desplazamiento $d\mathbf{r}_2$ de magnitud $ds_2 = r\,d\theta$. En la primera parte del movimiento, el trabajo de **F** es igual en magnitud y de signo opuesto al trabajo de —**F** y su suma es cero. En la segunda parte del movimiento, sólo efectúa trabajo la fuerza **F** y su magnitud es $dU = F\,ds_2 = Fr\,d\theta$. Pero el producto Fr es igual a la magnitud M del momento del par. Por consiguiente, el trabajo de un par con momento M que actúa sobre un sólido rígido es

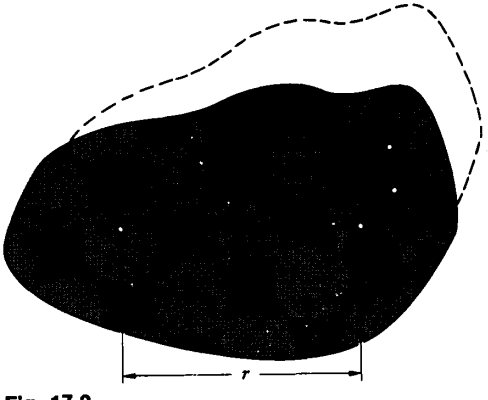


Fig. 17.2

$$dU = M\,d\theta \tag{17.4}$$

en el cual $d\theta$ es el ángulo pequeño, expresado en radianes, que gira el sólido. Observamos de nuevo que el trabajo debe expresarse en unidades obtenidas al multiplicar unidades de fuerza por unidades de longitud. El trabajo del par, durante una rotación finita del sólido rígido, se obtiene al integrar ambos miembros de (17.4) desde el valor inicial θ_1 del ángulo θ hasta su valor final θ_2. Escribimos

$$U_{1\to 2} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M\,d\theta \tag{17.5}$$

Cuando el momento M del par es constante, la fórmula (17.5) se reduce a

$$U_{1\to 2} = M(\theta_2 - \theta_1) \tag{17.6}$$

En la sección 13.2. se indicó que muchas fuerzas que uno encuentra en problemas de cinética *no realizan trabajo*. Son fuerzas que se aplican a puntos fijos o que actúan en una dirección perpendicular a la del desplazamiento del punto de aplicación. Entre las fuerzas que no realizan trabajo se pueden enumerar las siguientes: la reacción en un pasador sin rozamiento cuando el sólido soportado gira sobre el pasador, la reacción en una superficie sin rozamiento cuando el sólido en contacto con ella se mueve sobre la superficie, el peso de un cuerpo cuando su centro de gravedad se mueve horizontalmente. Ahora debemos indicar que *cuando un sólido rígido rueda sin deslizar sobre una superficie fija, la fuerza de rozamiento* **F** *en el punto de contacto C* tampoco realiza trabajo. La velocidad $\mathbf{c}_C$ del punto de contacto C es cero y el trabajo de la fuerza de rozamiento **F** durante un desplazamiento pequeño del sólido rígido es

$$dU = F\,ds_C = F(v_C\,dt) = 0$$

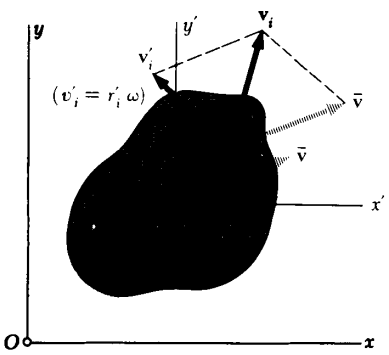


Fig. 17.3

17.4. Energía cinética de un sólido rígido en movimiento plano. Considérese un sólido rígido de masa m en movimiento plano. Recordamos de la sección 14.7 que, si se expresa la velocidad absoluta $\mathbf{v}_i$ de cada partícula P_i del sólido como la suma de la velocidad $\bar{\mathbf{v}}$ del centro de masas G del sólido y de la velocidad $\mathbf{v}'_i$ de la partícula respecto a un sistema de refereneia $Gx'y'$ fijo a G y de orientación fija (Fig. 17.3), puede escribirse la energía cinética del sistema de partículas que forman al sólido rígido en la forma

$$T = \tfrac{1}{2}m\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i\,v_i'^2 \tag{17.7}$$

Pero el módulo v'_i de la velocidad relativa de P_i es igual al producto $r'_i\omega$ de la distancia $\mathbf{r}'_i$ de P_i desde el eje perpendicular al plano de movimiento que pasa por G y de la magnitud ω de la velocidad angular del sólido en el instante considerado. Al sustituir en la ecuación (17.7) tenemos

$$T = \tfrac{1}{2}m\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} r_i'^2\,\Delta m_i\right)\omega^2 \tag{17.8}$$

o bien, puesto que la suma representa el momento de inercia $\bar{I}$ del sólido alrededor del eje que pasa por G.

$$T = \tfrac{1}{2}m\bar{v}^2 + \tfrac{1}{2}\bar{I}\omega^2 \tag{17.9}$$

Notamos que en el caso particular de un sólido en traslación ($\omega = 0$), la expresión que obtuvimos se reduce a $\frac{1}{2}m\bar{v}^2$, mientras que en el caso de una rotación central tipo ($\bar{v} = 0$), se reduce a $\frac{1}{2}\bar{I}\omega^2$. Concluimos que la energía cinética de un sólido rígido con movimiento plano puede separarse en dos partes: 1) la energía cinética $\frac{1}{2}m\bar{v}^2$ asociada con el movimiento del centro de masas G del sólido, y 2) la energía cinética $\frac{1}{2}\bar{I}\omega^2$ asociada con la rotación del sólido alrededor de G.

Rotación no baricéntrica. La relación (17.9) es válida con cualquier tipo de movimiento plano y, por lo tanto, puede utilizarse para expresar la energía cinética de un sólido rígido en rotación con una velocidad angular ω sobre un eje fijo que pasa por O (Fig. 17.4). No obstante, en este caso la energía cinética del sólido puede expresarse más directamente observando que la velocidad v_i de la partícula P_i es igual al producto $r_i\omega$ de la distancia r_i de P_i al eje fijo y de la magnitud ω de la velocidad angular del sólido en el instante considerado. Al sustituir en (17.2), escribimos

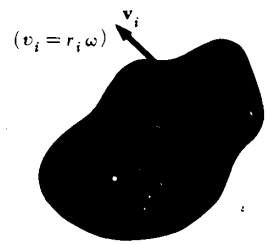


Fig. 17.4

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i\,(r_i\omega)^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} r_i^2\,\Delta m_i\right)\omega^2$$

o bien, puesto que la última suma representa el momento de inercia I_O del sólido rígido alrededor del eje fijo que pasa por O,

$$T = \tfrac{1}{2} I_O \omega^2 \tag{17.10}$$

Debemos observar que los resultados obtenidos no se limitan al movimiento de placas planas ni al movimiento de sólidos que sean simétricos con respecto al plano de referencia. Pueden aplicarse al estudio del movimiento plano de cualquier sólido rígido, sin importar su forma. Sin embargo, puesto que la ecuación (17.9) se aplica a cualquier movimiento plano, la utilizaremos en la solución de algunos problemas en vez de la ecuación (17.10), que sólo puede utilizarse para una rotación no baricéntrica.

17.5. Sistemas de sólidos rígidos. Cuando en un problema participan varios sólidos rígidos, cada sólido rígido puede considerarse por separado y el teorema de las fuerzas vivas se aplica a cada sólido. Al sumar las energías cinéticas de todas las partículas y considerando el trabajo de todas las fuerzas presentes, podemos escribir también el teorema de las fuerzas vivas del sistema completo. Tenemos

$$T_1 + U_{1\to 2} = T_2 \tag{17.11}$$

en la que T representa la suma aritmética de las energías cinéticas de los sólidos rígidos que forman el sistema (todos los términos son positivos) y $U_{1\to 2}$ el trabajo de todas las fuerzas que actúan sobre los distintos sólidos, ya sean fuerzas *internas* o *externas*, según el punto de vista, es decir considerando al sistema como un todo.

El teorema de las fuerzas vivas es de particular utilidad en la solución de problemas que contienen elementos conectados por pasadores, o bloques y poleas conectados por cuerpos inextensibles, o engranajes dentados. En todos estos casos, las fuerzas internas aparecen en parejas de fuerzas iguales y opuestas y los puntos de aplicación de las fuerzas de cada pareja *se mueven distancias iguales* durante un desplazamiento pequeño del sistema. Esto tiene por resultado que el trabajo de las fuerzas internas sea cero y $U_{1\to 2}$ se reduce al trabajo de las *fuerzas externas al sistema.*

17.6. Conservación de la energía. En la sección 13.6 vimos que el trabajo de las fuerzas conservativas, como el peso de un sólido o la fuerza que ejerce un resorte, puede ser expresado como un cambio en la energía potencial. Cuando un sólido rígido o un sistema de sólidos rígidos se mueve bajo la acción de fuerzas conservativas, el teorema de las fuerzas vivas enunciado en la sección 17.2 puede expresarse de una manera modificada. Al sustituir $U_{1\to 2}$ de la ecuación (13.19') en (17.1), escribimos

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \tag{17.12}$$

La relación (17.12) indica que cuando un sólido rígido o un sistema de sólidos rígidos se mueve bajo la acción de fuerzas conservativas, *la suma de la energía cinética y la energía potencial del sistema permanece constante*. Debe notarse que en el caso del movimiento de un sólido rígido en un plano, la energía cinética del sólido debe incluir tanto el término debido a la traslación $\frac{1}{2}m\bar{v}^2$ como el término debido a la rotación $\frac{1}{2}\bar{I}\omega^2$.

Como una ilustración de la aplicación del principio de la conservación de la energía, consideraremos una varilla AB de longitud l y masa m, cuyos extremos están unidos a bloques de masa despreciable que se deslizan a lo largo de guías vertical y horizontal. Suponemos que la barra se suelta sin velocidad inicial desde una posición horizontal (Fig. 17.5*a*) y deseamos determinar su velocidad angular después de que ha girado un ángulo θ (Fig. 17.5*b*).

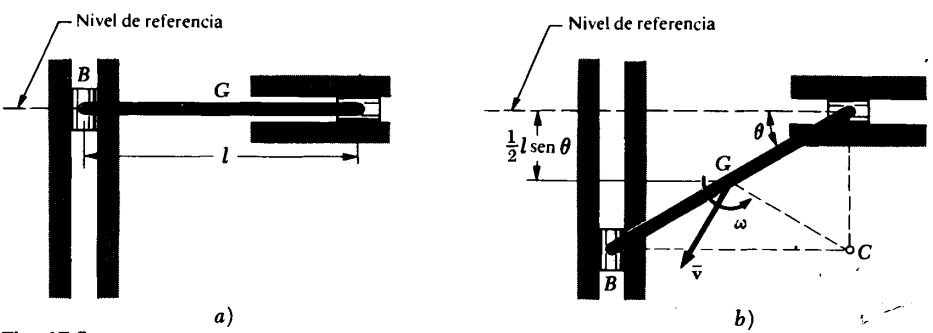


Fig. 17.5

Como la velocidad inicial es cero, tenemos $T_1 = 0$. Midiendo la energía potencial desde el nivel de la guía horizontal, escribimos $V_1 = 0$. Después de que la barra ha girado un ángulo θ, el centro de gravedad G de la barra está a una distancia $\frac{1}{2}l \operatorname{sen}\theta$ bajo el nivel de referencia y tenemos

$$V_2 = -\tfrac{1}{2}Wl \operatorname{sen}\theta = -\tfrac{1}{2}mgl \operatorname{sen}\theta$$

Adviértase que en esta posición el centro instantáneo de rotación de la barra se encuentra en C y que $CG = \frac{1}{2}l$, escribimos $\bar{v}_2 = \frac{1}{2}l\omega$ y obtenemos

$$T_2 = \tfrac{1}{2}m\bar{v}_2^2 + \tfrac{1}{2}\bar{I}\omega_2^2 = \tfrac{1}{2}m(\tfrac{1}{2}l\omega)^2 + \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{12}ml^2)\omega^2$$

$$= \frac{1}{2}\frac{ml^2}{3}\omega^2$$

Al aplicar el principio de conservación de la energía, escribimos

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

$$0 = \frac{1}{2}\frac{ml^2}{3}\omega^2 - \tfrac{1}{2}mgl \operatorname{sen}\theta$$

$$\omega = \left(\frac{3g}{l}\operatorname{sen}\theta\right)^{1/2}$$

Recordamos que en la sección 13.4 se expusieron tanto las ventajas del teorema de las fuerzas vivas, como sus desventajas. En relación con esto, deseamos mencionar que el teorema de las fuerzas vivas debe ser completado con la aplicación del principio de d'Alembert cuando se necesita encontrar las reacciones en ejes fijos, en rodillos o en bloques que deslizan. Por ejemplo, para calcular las reacciones en los extremos A y B de la barra de la figura 17·5*b*, se dibujará un diagrama que expresa que el sistema de las fuerzas externas aplicadas a la barra es equivalente al vector $m\bar{a}$ y el par $\bar{I}\alpha$ Sin embargo, la velocidad angular ω de la barra se determina mediante el teorema de las fuerzas vivas antes de que se resuelvan las ecuaciones de movimiento para despejar las reacciones. El análisis completo del movimiento de la varilla y de las fuerzas aplicadas sobre ella requiere, entonces, el uso combinado del teorema de las fuerzas vivas y del principio de equivalencia de las fuerzas externas y las reales.

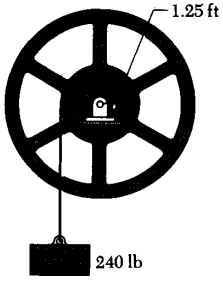
17.7. Potencia. *La potencia* se definió en la sección 13.5 como la derivada temporal del trabajo (trabajo realizado por unidad de tiempo). En el caso de un sólido sobre el cual actúa una fuerza **F** y que se mueve con una velocidad **v**, la potencia se expresó como:

$$\text{Potencia} = \frac{dU}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \tag{13.13}$$

En el caso de un sólido rígido que gira con una velocidad angular ω y sobre el cual actúa un par de momento **M** paralelo al eje de rotación, tenemos, de la ecuación (17.4),

$$\text{Potencia} = \frac{dU}{dt} = \frac{M\,d\theta}{dt} = M\omega \tag{17.13}$$

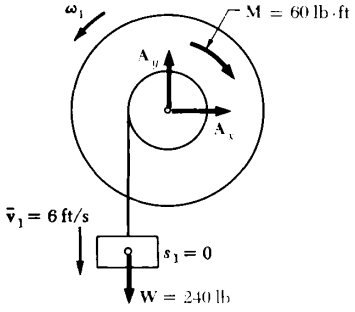
Las distintas unidades que se utilizan para medir la potencia, como el watio y el caballo de potencia, se definieron en la sección 13.5.



PROBLEMA RESUELTO 17.1

Un bloque de 240 lb se encuentra suspendido de un cable inextensible que está enrollado sobre un cilindro de 1.25 ft de radio unido rígidamente a un volante. En el cilindro y el volante tiene un momento central de inercia combinado $\bar{I} = 10.5\ \text{lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$. En el instante que se indica, la velocidad del bloque es de 6 ft/s dirigida hacia abajo. Si el engrase del cojinete A es deficiente o nulo y el rozamiento en el cojinete es equivalente a un par **M** de módulo 60 lb ft, hállese la velocidad del bloque después de haber recorrido una distancia de 4 ft hacia abajo.

Solución. Consideremos al sistema formado por el volante y el bloque. Como el cable es inextensible, el trabajo realizado por las fuerzas internas aplicadas por el cable se anulan. Las posiciones inicial y final del sistema y las fuerzas externas que actúan sobre él son las que se muestran.

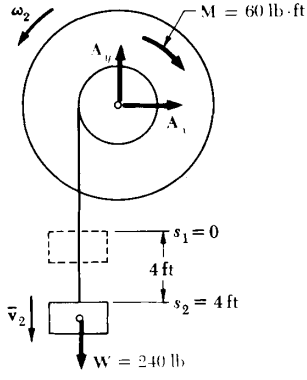


Energía cinética. *Posición 1.*

Bloque: $\bar{v}_1 = 6\ \text{ft/s}$

Volante: $\omega_1 = \dfrac{\bar{v}_1}{r} = \dfrac{6\ \text{ft/s}}{1.25\ \text{ft}} = 4.80\ \text{rad/s}$

$$T_1 = \tfrac{1}{2}m\bar{v}_1^2 + \tfrac{1}{2}\bar{I}\omega_1^2$$
$$= \frac{1}{2}\frac{240\ \text{lb}}{32.2\ \text{ft/s}^2}(6\ \text{ft/s})^2 + \tfrac{1}{2}(10.5\ \text{lb}\cdot\text{ft}\cdot\text{s}^2)(4.80\ \text{rad/s})^2$$
$$= 255\ \text{ft}\cdot\text{lb}$$



Posición 2. Al observar que $\omega_2 = \bar{v}_2/1.25$, escribimos

$$T_2 = \tfrac{1}{2}m\bar{v}_2^2 + \tfrac{1}{2}\bar{I}\omega_2^2$$
$$= \frac{1}{2}\frac{240}{32.2}(\bar{v}_2)^2 + (\tfrac{1}{2})(10.5)\left(\frac{\bar{v}_2}{1.25}\right)^2 = 7.09\bar{v}_2^2$$

Trabajo. Durante el movimiento, sólo el peso **W** del bloque y el par **M** por causa del rozamiento realizan trabajo. Observando que **W** realiza trabajo positivo y que el par del rozamiento **M** efectúa trabajo negativo, escribimos

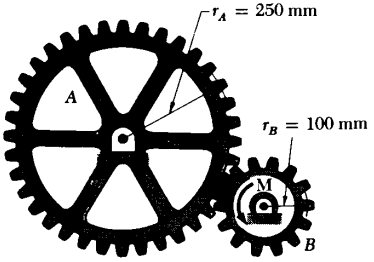
$$s_1 = 0 \qquad s_2 = 4\ \text{ft}$$

$$\theta_1 = 0 \qquad \theta_2 = \frac{s_2}{r} = \frac{4\ \text{ft}}{1.25\ \text{ft}} = 3.20\ \text{rad}$$

$$U_{1\to 2} = W(s_2 - s_1) - M(\theta_2 - \theta_1)$$
$$= (240\ \text{lb})(4\ \text{ft}) - (60\ \text{lb}\cdot\text{ft})(3.20\ \text{rad})$$
$$= 768\ \text{ft}\cdot\text{lb}$$

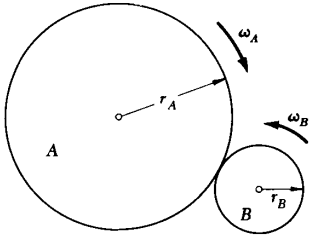
Teorema de las fuerzas vivas.

$$T_1 + U_{1\to 2} = T_2$$
$$255\ \text{ft}\cdot\text{lb} + 768\ \text{ft}\cdot\text{lb} = 7.09\bar{v}_2^2$$
$$\bar{v}_2 = 12.01\ \text{ft/s} \qquad \bar{v}_2 = 12.01\ \text{ft/s} \downarrow$$



PROBLEMA RESUELTO 17.2

El engranaje *A* tiene una masa de 10 kg y un radio de giro de 200 mm, mientras que el engranaje *B* tiene una masa de 3 kg y un radio de giro de 80 mm. El sistema está en reposo cuando al engranaje *B* se aplica un par **M** de módulo 6 N · m. Suponiendo que no haya rozamiento en los ejes, encuéntrense *a*) el número de revoluciones que efectúa el engranaje *B* antes de que su velocidad angular llegue a ser de 600 rpm, y *b*) la fuerza tangencial que el engranaje *B* aplica sobre el engranaje *A*.



Movimiento del sistema completo. Ya que las velocidades lineales de los engranajes en sus periferias son iguales, escribimos

$$r_A\omega_A = r_B\omega_B \qquad \omega_A = \omega_B\frac{r_B}{r_A} = \omega_B\frac{100\text{ mm}}{250\text{ mm}} = 0.40\omega_B$$

Con $\omega_B = 600$ rpm, tenemos

$$\omega_B = 62.8\text{ rad/s} \qquad \omega_A = 0.40\omega_B = 25.1\text{ rad/s}$$
$$\bar{I}_A = m_A\bar{k}_A^2 = (10\text{ kg})(0.200\text{ m})^2 = 0.400\text{ kg·m}^2$$
$$\bar{I}_B = m_B\bar{k}_B^2 = (3\text{ kg})(0.080\text{ m})^2 = 0.0192\text{ kg·m}^2$$

Energía cinética. Como el sistema se encuentra inicialmente en reposo, $T_1 = 0$. Al sumar las energías cinéticas de los dos engranajes cuando $\omega_B = 600$ rpm, obtenemos

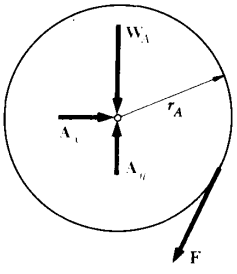
$$T_2 = \tfrac{1}{2}\bar{I}_A\omega_A^2 + \tfrac{1}{2}\bar{I}_B\omega_B^2$$
$$= \tfrac{1}{2}(0.400\text{ kg·m}^2)(25.1\text{ rad/s})^2 + \tfrac{1}{2}(0.0192\text{ kg·m}^2)(62.8\text{ rad/s})^2$$
$$= 163.9\text{ J}$$

Trabajo. Sea θ_B el ángulo que ha girado el engranaje *B*, entonces

$$U_{1\to2} = M\theta_B = (6\text{ N·m})(\theta_B\text{ rad}) = (6\,\theta_B)\text{ J}$$

Teorema de las fuerzas vivas.

$$T_1 + U_{1\to2} = T_2$$
$$0 + (6\,\theta_B)\text{ J} = 163.9\text{ J}$$
$$\theta_B = 27.32\text{ rad} \qquad \theta_B = 4.35\text{ rev} \blacktriangleleft$$



Movimiento del engranaje A. Energía cinética. Inicialmente, el engranaje *A* está en reposo, $T_1 = 0$. Cuando $\omega_B = 600$ rpm, la energía cinética del engranaje *A* es

$$T_2 = \tfrac{1}{2}\bar{I}_A\omega_A^2 = \tfrac{1}{2}(0.400\text{ kg·m}^2)(25.1\text{ rad/s})^2 = 126.0\text{ J}$$

Trabajo. Las fuerzas que actúan sobre el engranaje *A* son las que se indican. La fuerza tangencial **F** realiza un trabajo igual al producto de su módulo por la longitud $\theta_A r_A$ del arco descrito por el punto de contacto. Puesto que $\theta_A r_A = \theta_B r_B$, tenemos

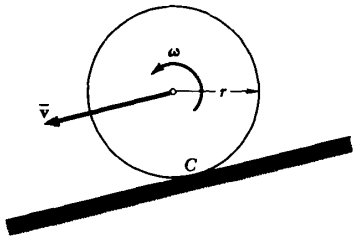
$$U_{1\to2} = F(\theta_B r_B) = F(27.3\text{ rad})(0.100\text{ m}) = F(2.73\text{ m})$$

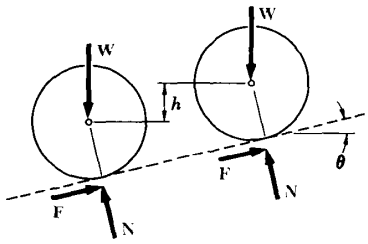
Teorema de las fuerzas vivas

$$T_1 + U_{1\to2} = T_2$$
$$0 + F(2.73\text{ m}) = 126.0\text{ J}$$
$$F = +46.2\text{ N} \qquad \mathbf{F} = 46.2\text{ N} \swarrow \blacktriangleleft$$

PROBLEMA RESUELTO 17.3

Una esfera, un cilindro y un aro, todos de la misma masa y el mismo radio, se sueltan desde el reposo sobre un plano inclinado. Encuéntrese la velocidad de cada sólido después de que ha rodado una distancia correspondiente a un cambio h en la altura.





Solución. Resolveremos primero el problema en términos generales después encontraremos los resultados particulares a cada sólido. Indicamos la masa por m, el momento central de inercia por $\bar{I}$, el peso por W y el radio por r.

Puesto que cada uno de los sólidos rueda, el centro instantáneo de rotación se encuentra en C y escribimos

$$\omega = \frac{\bar{v}}{r}$$

Energía cinética

$$T_1 = 0$$

$$T_2 = \tfrac{1}{2}m\bar{v}^2 + \tfrac{1}{2}\bar{I}\omega^2$$

$$= \tfrac{1}{2}m\bar{v}^2 + \tfrac{1}{2}\bar{I}\left(\frac{\bar{v}}{r}\right)^2 = \tfrac{1}{2}\left(m + \frac{\bar{I}}{r^2}\right)\bar{v}^2$$

Trabajo. Como la fuerza de rozamiento **F** en el movimiento de rodadura no efectúa trabajo,

$$U_{1\to 2} = Wh$$

Teorema de las fuerzas vivas

$$T_1 + U_{1\to 2} = T_2$$

$$0 + Wh = \tfrac{1}{2}\left(m + \frac{\bar{I}}{r^2}\right)\bar{v}^2 \qquad \bar{v}^2 = \frac{2Wh}{m + \bar{I}/r^2}$$

Velocidades de la esfera, el cilindro y el aro. Sustituyendo sucesivamente la expresión particular de $\bar{I}$, obtenemos

$$\bar{v}^2 = \frac{2gh}{1 + \bar{I}/mr^2}$$

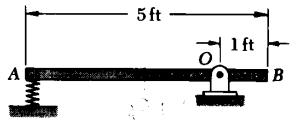
Puesto que $W = mg$, reordenamos el resultado y escribimos

Esfera:	$\bar{I} = \frac{2}{5}mr^2$	$\bar{v} = 0.845\sqrt{2gh}$ ◀
Cilindro:	$\bar{I} = \frac{1}{2}mr^2$	$\bar{v} = 0.816\sqrt{2gh}$ ◀
Aro:	$\bar{I} = mr^2$	$\bar{v} = 0.707\sqrt{2gh}$ ◀

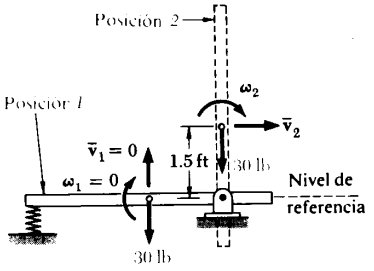
Observación. Podemos comparar los resultados con la velocidad que alcanza un bloque que desliza sin rozamiento una distancia igual. La solución es idéntica a la solución anterior, excepto que $\omega = 0$; encontramos que $\bar{v} = \sqrt{2gh}$.

Al comparar los resultados, notamos que la velocidad del sólido es independiente tanto de su suma como de su radio. Sin embargo, la velocidad sí depende del cociente $\bar{I}/mr^2 = \bar{k}^2/r^2$, que es la razón de la energía cinética de rotación respecto de la energía cinética de traslación. Por lo tanto, el aro, que tiene el mayor valor de $\bar{k}$ para un radio r, dado, alcanza la velocidad menor, mientras que el bloque que se desliza y que no gira, alcanza la velocidad mayor.

PROBLEMA RESUELTO 17.4



Una varilla de 30 lb AB tiene 5 ft de longitud gira sobre un pivote en un punto O que se encuentra a 1 ft del extremo B. El otro extremo oprime un resorte de constante $k = 1\,800$ lb/in hasta que el resorte se comprime 1 in, estando entonces la varilla en una posición horizontal. Si la varilla se suelta desde esta posición, encuéntrense su velocidad angular y la reacción en el pasador O cuando la barra pasa por la posición vertical.



Posición 1. ***Energía potencial.*** Como el resorte se comprime 1 in, tenemos $x_1 = 1$ in.

$$V_e = \tfrac{1}{2}kx_1^2 = \tfrac{1}{2}(1800 \text{ lb/in})(1 \text{ in})^2 = 900 \text{ in}\cdot\text{lb}$$

Al elegir el nivel de referencia como se indica, tenemos $V_g = 0$; por lo tanto,

$$V_1 = V_e + V_g = 900 \text{ in}\cdot\text{lb} = 75 \text{ ft}\cdot\text{lb}$$

Energía cinética. Puesto que la velocidad en la posición *1* es cero, tenemos $T_1 = 0$.

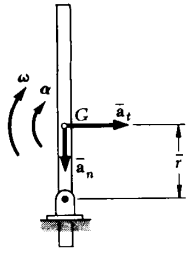
Posición 2. Energía potencial. La elongación del resorte es cero, así que $V_e = 0$. Como el centro de gravedad de la barra se encuentra ahora 1.5 ft por encima del nivel de referencia,

$$V_g = (30 \text{ lb})(+1.5 \text{ ft}) = 45 \text{ ft}\cdot\text{lb}$$
$$V_2 = V_e + V_g = 45 \text{ ft}\cdot\text{lb}$$

Energía cinética. Representando por ω_2 la velocidad angular de la varilla en la posición 2, observamos que la varilla gira sobre O y escribimos $\bar{v}_2 = \bar{r}\omega_2 = 1.5\omega_2$.

$$\bar{I} = \tfrac{1}{12}ml^2 = \frac{1}{12}\frac{30 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2}(5 \text{ ft})^2 = 1.941 \text{ lb}\cdot\text{ft}\cdot\text{s}^2$$

$$T_2 = \tfrac{1}{2}m\bar{v}_2^2 + \tfrac{1}{2}\bar{I}\omega_2^2 = \frac{1}{2}\frac{30}{32.2}(1.5\omega_2)^2 + \tfrac{1}{2}(1.941)\omega_2^2 = 2.019\omega_2^2$$

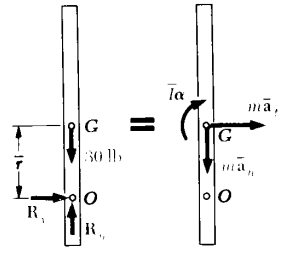


Conservación de la energía

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$
$$0 + 75 \text{ ft}\cdot\text{lb} = 2.019\omega_2^2 + 45 \text{ ft}\cdot\text{lb}$$
$$\omega_2 = 3.86 \text{ rad/s} \text{ J} \quad \blacktriangleleft$$

Reacción en la posición 2. Como $\omega_2 = 3.86$ rad/s, las componentes de la aceleración de G al pasar la barra por la posición *2* son

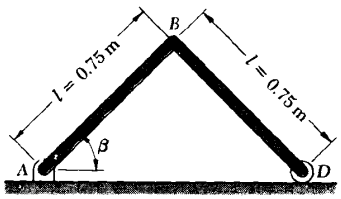
$$\bar{a}_n = \bar{r}\omega_2^2 = (1.5 \text{ ft})(3.86 \text{ rad/s})^2 = 22.3 \text{ ft/s}^2 \qquad \bar{a}_n = 22.3 \text{ ft/s}^2 \downarrow$$
$$\bar{a}_t = \bar{r}\alpha \qquad \bar{a}_t = \bar{r}\alpha \rightarrow$$



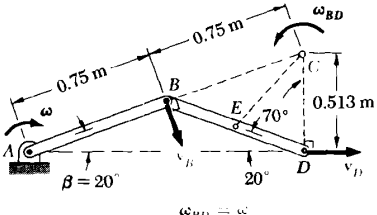
Expresamos que el sistema de las fuerzas externas es equivalente al sistema formado por el vector de componentes $m\bar{a}_t$ *y* $m\bar{a}_n$ *fijo en* G y el par $\bar{I}\alpha$.

$$+\circlearrowleft \Sigma M_O = \Sigma(M_O)_{\text{eff}}: \qquad 0 = \bar{I}\alpha + m(\bar{r}\alpha)\bar{r} \qquad \alpha = 0$$
$$\stackrel{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = \Sigma(F_x)_{\text{eff}}: \qquad R_x = m(\bar{r}\alpha) \qquad R_x = 0$$
$$+\uparrow \Sigma F_y = \Sigma(F_y)_{\text{eff}}: \qquad R_y - 30 \text{ lb} = -m\bar{a}_n$$
$$R_y - 30 \text{ lb} = -\frac{30 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2}(22.3 \text{ ft/s}^2)$$
$$R_y = +9.22 \text{ lb} \qquad \mathbf{R} = 9.22 \text{ lb} \uparrow \quad \blacktriangleleft$$

PROBLEMA RESUELTO 17.5



Cada una de las dos varillas que se muestran es de 0.75 m de largo y tiene una masa de 6 kg. si el sistema se suelta desde el reposo cuando $\beta = 60°$; obténganse *a*) la velocidad angular de la varilla AB cuando $\beta = 20°$ y, *b*) la velocidad del punto D en ese mismo instante.

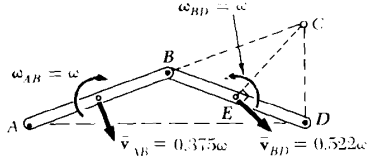


Cinemática del movimiento cuando $\beta = 20°$. Puesto que $\mathbf{v}_B$ es perpendicular a la varilla AB y $\mathbf{v}_D$ es horizontal, el centro instantáneo de rotación de la barra BD se encuentra en C. Considerando la geometría de la figura, obtenemos

$$BC = 0.75 \text{ m} \qquad CD = 2(0.75 \text{ m}) \operatorname{sen} 20° = 0.513 \text{ m}$$

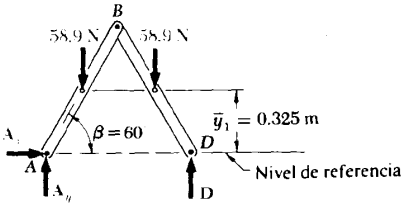
Al aplicar la ley de los cosenos al triángulo CDE, en donde E se encuentra en el centro de gravedad de la barra BD, encontramos $EC = 0.522$ m. Sea ω la velocidad angular de la barra AB, tenemos

$$\bar{v}_{AB} = (0.375 \text{ m})\omega \qquad \bar{\mathbf{v}}_{AB} = 0.375\omega \searrow$$
$$v_B = (0.75 \text{ m})\omega \qquad \mathbf{v}_B = 0.75\omega \searrow$$



Como la varilla BD parece girar alrededor del punto C, podemos escribir

$$v_B = (BC)\omega_{BD} \qquad (0.75 \text{ m})\omega = (0.75 \text{ m})\omega_{BD} \qquad \omega_{BD} = \omega \circlearrowleft$$
$$\bar{v}_{BD} = (EC)\omega_{BD} = (0.522 \text{ m})\omega \qquad \bar{\mathbf{v}}_{BD} = 0.522\omega \searrow$$



Posición 1

Posición 1. ***Energía potencial.*** Al elegir el nivel de referencia como se indica y observar que $W = (6 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 58.9$ N, tenemos

$$V_1 = 2W\bar{y}_1 = 2(58.9 \text{ N})(0.325 \text{ m}) = 38.3 \text{ J}$$

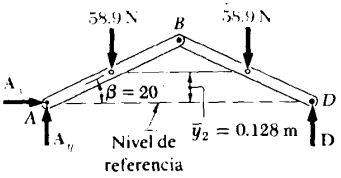
Energía cinética. Puesto que el sistema está en reposo, $T_1 = 0$.

Posición 2. ***Energía potencial***

$$V_2 = 2W\bar{y}_2 = 2(58.9 \text{ N})(0.128 \text{ m}) = 15.1 \text{ J}$$

Energía cinética

$$\bar{I}_{AB} = \bar{I}_{BD} = \tfrac{1}{12}ml^2 = \tfrac{1}{12}(6 \text{ kg})(0.75 \text{ m})^2 = 0.281 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$
$$T_2 = \tfrac{1}{2}m\bar{v}_{AB}^2 + \tfrac{1}{2}\bar{I}_{AB}\omega_{AB}^2 + \tfrac{1}{2}m\bar{v}_{BD}^2 + \tfrac{1}{2}\bar{I}_{BD}\omega_{BD}^2$$
$$= \tfrac{1}{2}(6)(0.375\omega)^2 + \tfrac{1}{2}(0.281)\omega^2 + \tfrac{1}{2}(6)(0.522\omega)^2 + \tfrac{1}{2}(0.281)\omega^2$$
$$= 1.520\omega^2$$



Posición 2

Conservación de la energía

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$
$$0 + 38.3 \text{ J} = 1.520\omega^2 + 15.1 \text{ J}$$
$$\omega = 3.91 \text{ rad/s} \qquad \omega_{AB} = 3.90 \text{ rad/s} \circlearrowleft$$

Velocidad del punto D

$$v_D = (CD)\omega = (0.513 \text{ m})(3.91 \text{ rad/s}) = 2.01 \text{ m/s}$$
$$\mathbf{v}_D = 2.00 \text{ m/s} \rightarrow$$

Problemas

17.1 El rotor de un motor eléctrico tiene una velocidad angular de 3600 rpm cuando se suprimen la carga y la energía eléctrica. El rotor que pesa 300 lb y tiene un radio central de giro de 9 in alcanza finalmente el reposo. Si el rozamiento dinámico del rotor produce un par de módulo 10 lb · in, determínese el número de revoluciones que describe el rotor antes de llegar al reposo.

17.2 Dos discos del mismo material se unen a un eje como se indica. El disco *A* tiene un radio *r* y un espesor *b*, mientras que el disco *B* tiene un radio *nr* y un espesor *3b*. Se aplica un par de magnitud constante **M** cuando el sistema está en reposo y se elimina después de que el sistema ha dado dos revoluciones. Determínese el valor de *n* que provocará la mayor velocidad final de un punto en el borde del disco *B*.

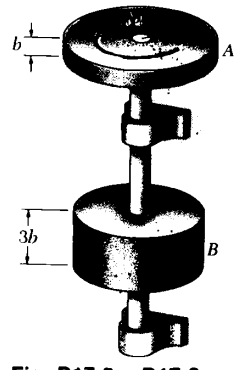


Fig. P17.2 y P17.3

17.3 Dos discos del mismo material se unen a un eje como se muestra en la figura. El disco *A* tiene una masa de 15 kg y un radio $r = 125$ mm. El disco *B* tiene un espesor triple al del disco *A*. Si el par **M** de módulo 20 N · m es aplicado al disco *A* cuando el sistema está en reposo, determínese el radio *nr* del disco *B* si la velocidad angular del sistema alcanza las 600 rpm después de 4 revoluciones.

17.4 El volante de una máquina perforadora pesa 900 lb y tiene un radio de giro de 30 in. Cada operación de perforación requiere 2000 ft · lb de trabajo. *a*) Si se sabe que la velocidad del volante es 200 rpm justo antes de una perforación determínese su valor inmediatamente después de la perforación. *b*) Si se aplica un par constante de 25 lb · ft al eje del volante, determínese el número de revoluciones descritas antes de que la velocidad angular sea nuevamente de 200 rpm.

17.5 El volante de una perforadora pequeña gira 300 rpm. Se sabe que debe efectuar un trabajo de 500 julios cada vez que se perfora un agujero. Se desea que la velocidad del volante después de una perforación no sea menor del 90% de la velocidad angular inicial de 300 rpm. *a*) Obténgase el momento de inercia del volante necesario. *b*) Si se aplica un par constante de 25 N · m al eje del volante, encuéntrese el número de revoluciones que debe efectuar entre cada perforación, si la velocidad inicial al principio de cada perforación es de 300 rpm.

17.6 El disco *A* tiene una masa de 4 kg y un radio $r = 75$ mm y está en reposo cuando se coloca en contacto con la banda, la cual se mueve con una velocidad lineal constante $v = 18$ m/s. Si $\mu_k = 0.25$ entre el disco y la banda, determínese el número de revoluciones que efectúa el disco antes de alcanzar una velocidad angular constante.

17.7 Un disco de espesor uniforme e inicialmente en reposo se coloca en contacto con la banda, la cual se mueve con una velocidad constante v. Simbolizando con μ_k el coeficiente de rozamiento dinámico entre el disco y la banda, dedúzcase una expresión para el número de revoluciones que efectúa el disco antes de alcanzar una velocidad angular constante.

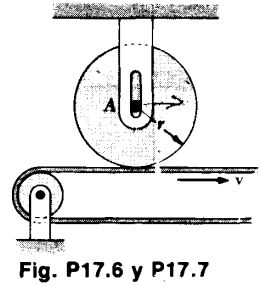


Fig. P17.6 y P17.7

17.8 El tambor de freno de 10 in de radio está unido a un volante mayor que no se muestra. El momento de inercia de la masa total del volante y el tambor es de 16 lb · ft · s^2 y el coeficiente de rozamiento dinámico entre el tambor y la zapata del freno es de 0.40. Si la velocidad angular inicial es de 240 rpm en el sentido de las manecillas del reloj, determínese la fuerza que se deberá ejercer sobre el cilindro hidráulico para que el sistema se detenga en 75 revoluciones.

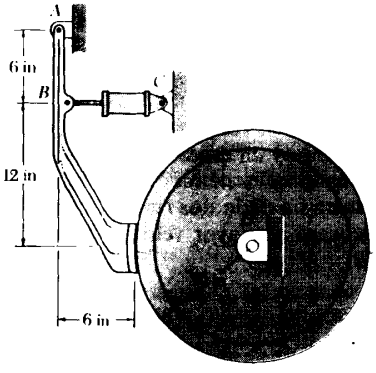


Fig. P17.8

17.9 Resuélvase el problema 17.8, suponiendo que la velocidad angular inicial del volante es de 240 rpm en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

17.10 Cada uno de los engranajes *A* y *B* pesa 20 lb y tiene un radio de giro de 7.5 in, y el engranaje *C* pesa 5 lb y tiene un radio de giro de 3 in. Si se aplica un par **M** de módulo constante 50 lb · in al engranaje *C*, determínense *a*) el número de revoluciones requeridas por el engranaje *C* para que su velocidad angular se incremente de 450 rpm a 1800 rpm y *b*) la fuerza tangencial correspondiente que actúa sobre el engranaje *A*.

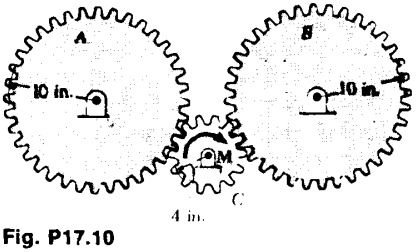


Fig. P17.10

17.11 Resuélvase el problema 17.10 suponiendo que el par de 50 lb · in se aplica al engranaje *B*.

17.12 El tren de engranajes mostrado en la figura se compone de cuatro engranajes del mismo espesor y del mismo material; dos de los engranajes son de radio *r* y los otros dos son de radio *nr*. El sistema está en reposo cuando un par $\mathbf{M}_0$ se aplica al eje *C*. Representando con I_0 el momento de inercia de un engranaje de radio *r*, determínese la velocidad angular del eje *A* si el par $\mathbf{M}_0$ se aplica durante una revolución al eje *C*.

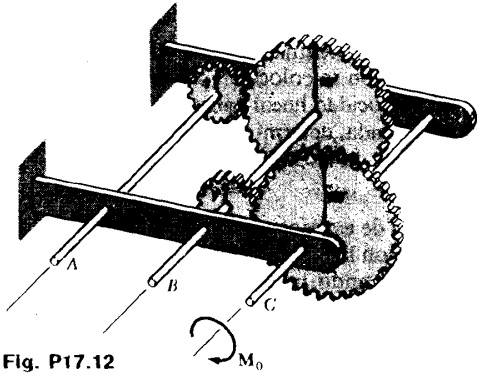


Fig. P17.12

17.13 La polea doble que aquí se muestra tiene una masa total de 6 kg y un radio central de giro de 140 mm. A las cuerdas *A* y *B* se sujetan cinco collarines, cada uno de masa 1.5 kg como se indica. Cuando el sistema está en reposo y en equilibrio se retira un collarín de la cuerda *A*. Si el rozamiento en los cojinetes equivale a un par de módulo 0.5 N · m, determínese la velocidad de la cuerda *A* después de haber recorrido 900 mm.

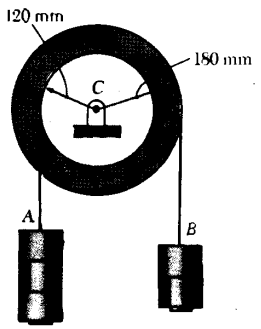


Fig. P17.13

17.14 Resuélvase el problema 17.13 suponiendo que se retira un collarín de la cuerda *B*.

17.15 La polea que se muestra en la figura tiene una masa de 5 kg y un radio de giro de 150 mm. El cilindro *C* de 3 kg está sujeto a una cuerda que está enrollada en la polea como se indica. Entonces se coloca un collarín *B* de 1.8 kg sobre el cilindro y se suelta el sistema desde el reposo. Después de que el sistema se ha desplazado 300 mm se retira al collarín y el cilindro continúa moviéndose hacia el fondo de un pozo. Obténgase la velocidad del cilindro *C* antes de golpear el fondo *D* del pozo.

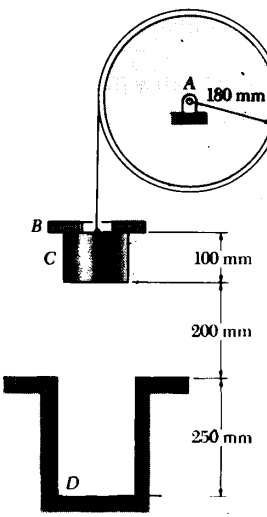


Fig. P17.15

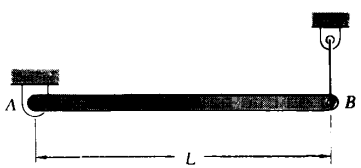


Fig. P17.16

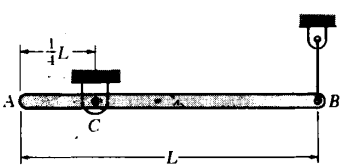


Fig. P17.17

17.16 y 17.17 Una varilla delgada de longitud *L* y peso *W* se sostiene como aquí se indica. Después de que se corta el cable, la varilla oscila libremente. *a*) Encuéntrese la velocidad angular de la varilla la primera vez que pasa por la posición vertical y la reacción correspondiente del soporte. *b*) Resuélvase la parte *a* con $W = 6$ lb y $L = 2.5$ ft.

17.18 Una varilla de 3 kg gira en un plano vertical sobre un pasador en *B*. Se sujeta a la varilla un resorte de constante $k = 300$ N/m y de longitud sin deformar de 120 mm, como se indica en la figura. Si en la posición que se muestra la varilla tiene una velocidad angular de 4 rad/s en el sentido de las manecillas del reloj, determínese la velocidad angular de la varilla después de que haya girado *a*) 90° y *b*) 180°.

17.19 Resuélvase el problema 17.18 suponiendo que la varilla gira en un plano horizontal.

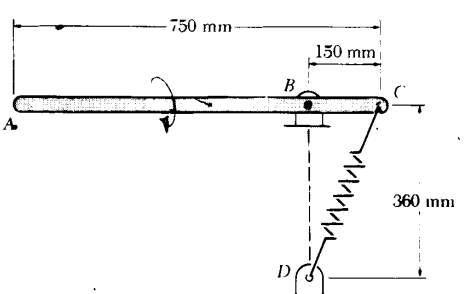


Fig. P17.18

17.20 Una esfera uniforme de radio r se coloca en la esquina A y recibe un ligero movimiento en el sentido de las manecillas del reloj. Suponiendo que la esquina tiene un filo y que penetra ligeramente en la esfera de manera que el coeficiente de rozamiento estático en A es muy grande, calcúlense *a*) el ángulo β que habrá girado la esfera cuando pierde contacto con la esquina y *b*) la correspondiente velocidad del centro de la esfera.

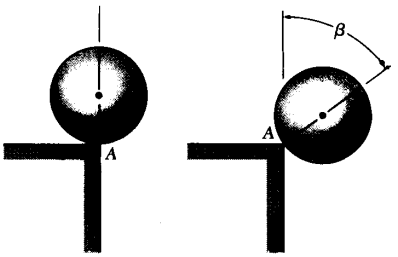


Fig. P17.20

17.21 Resuélvase el problema 17.20 suponiendo que la esfera se reemplaza por un cilindro uniforme de radio r.

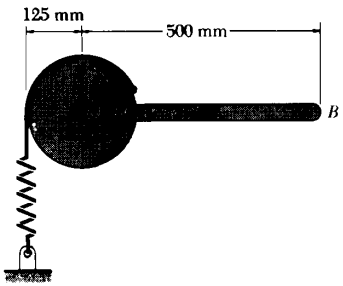


Fig. P17.22 y P17.23

17.22 La varilla AB de 5 kg está soldada al disco uniforme de 3 kg que gira sobre un pasador en A. Un resorte de constante 80 N/m está unido al disco y no está deformado cuando la varilla AB está horizontal. Si se suelta el conjunto desde el reposo como se indica, obténgase su velocidad angular después de que haya girado un ángulo de 90°.

17.23 La varilla AB de 5 kg está soldada al disco uniforme de 3 kg que gira sobre un pasador en A. El disco está unido a un resorte de constante 80 N/m, que no está deformado cuando la varilla AB está horizontal. Encuéntrese la velocidad angular necesaria del conjunto cuando se encuentra en la posición que se indica, si su velocidad angular debe ser 9 rad/s después de que haya girado 90° en el sentido de las manecillas del reloj.

17.24 Un collarín de 2 lb de peso está unido rígidamente a una distancia $d = 12$ in del extremo de una varilla uniforme AB. La varilla pesa 6 lb y tiene una longitud $L = 24$ in. Si la varilla se suelta del reposo en la posición indicada, determínese la velocidad angular de la varilla después de girar 90°.

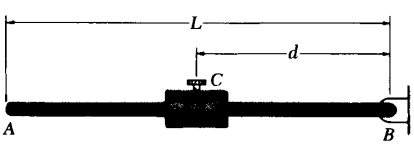


Fig. P17.24 y P17.25

17.25 Un collarín de 2 lb de peso está unido rígidamente a una varilla AB de 6 lb de peso y longitud $L = 24$ in. La varilla se suelta del reposo en la posición aquí mostrada. Determínese la distancia d para la cual la velocidad angular de la varilla es máxima después de girar 90°.

17.26 Un volante de radio central de giro $\bar{k} = 24$ in está unido rígidamente a un eje de radio $r = 1.25$ in, el cual puede rodar sobre raíles paralelos. Si se suelta el sistema desde el reposo, calcúlese la velocidad del centro del eje después de que se ha desplazado 8 ft.

17.27 Un volante está unido rígidamente a un eje de 40 mm de radio que rueda sin deslizar sobre raíles paralelos. El sistema se suelta desde el reposo y alcanza una velocidad de 160 mm/s después de haberse movido 1.5 m sobre los raíles. Encuéntrese el radio central de giro del sistema.

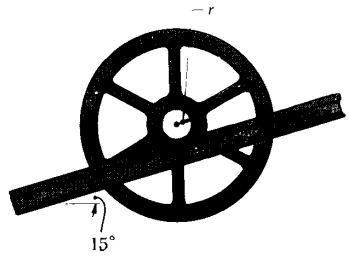


Fig. P17.26 y P17.27

17.28 El centro de masas G de una rueda de 3 kg y radio $R = 180$ mm se encuentra a una distancia $r = 60$ mm de su centro geométrico C. El radio de giro central de la rueda es $\bar{k} = 90$ mm. Al rodar la rueda sin deslizar, se observa que su velocidad angular varía. Si $\omega = 8$ rad/s en la posición aquí mostrada, determínense *a*) la velocidad angular de la rueda cuando su centro de masas G está directamente sobre su centro geométrico C y *b*) la reacción en la superficie horizontal en el mismo instante.

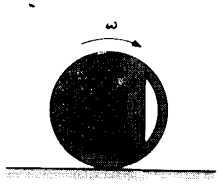


Fig. P17.28

17.29 Una semiesfera de masa m y radio r se suelta del reposo en la posición indicada en la figura. Suponiendo que la semiesfera ruede sin deslizar, determínense *a*) su velocidad angular después de girar 90° y *b*) la reacción normal de la superficie en el mismo instante. [*Sugerencia.* Obsérvese que $GO = 3r/8$ y que por el teorema de Steiner, $\bar{I} \frac{2}{5} mr^2 - m(GO)^2$.]

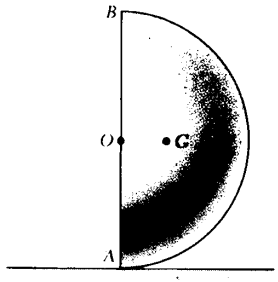


Fig. P17.29

17.30 Una pequeña esfera de masa m y radio r se suelta del reposo en A y rueda sin deslizar sobre la superficie curva al punto B, donde deja la superficie con una velocidad horizontal. Si $a = 1.5$ m y $b = 1.2$ m, determínense *a*) la velocidad de la esfera al caer al suelo en C y *b*) la distancia c correspondiente.

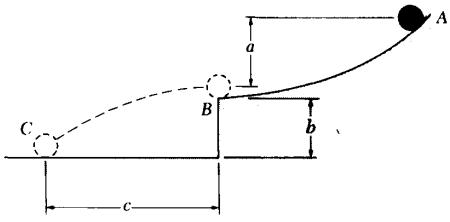


Fig. P17.30

17.31 Resuelvase el problema 17.30 suponiendo que la esfera se reemplaza por un tubo de pared delgada de masa m y radio r.

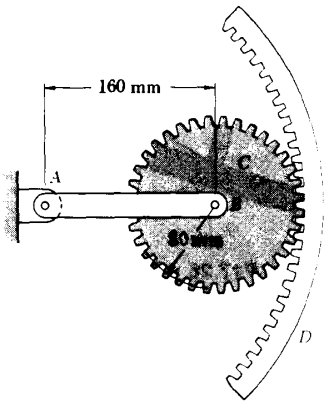


Fig. P17.32

17.32 y 17.33 El engranaje C tiene una masa de 3.2 kg y un radio de giro central de 60 mm. La barra uniforme AB tiene una masa de 2.4 kg y el engranaje D esta inmóvil. Si el sistema se suelta del reposo en la posición mostrada, determínese la velocidad del punto B después de que la barra AB haya girado 90°.

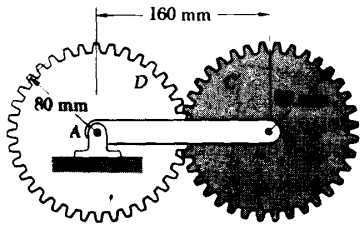


Fig. P17.33

17.34 Una barra AB de 9 kg está unida por pasadores a dos discos uniformes de 6 kg como se indica. El conjunto rueda sin deslizar sobre una superficie horizontal. Si el conjunto se suelta del reposo cuando $\theta = 60°$ determínense *a*) la velocidad angular de los discos cuando $\theta = 180°$ y *b*) la fuerza ejercida por la superficie sobre cada disco en ese instante.

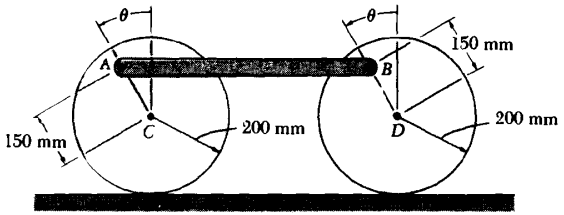


Fig. P17.34 y P17.35

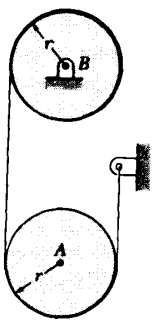


Fig. P17.36

17.35 Una barra AB de 9 kg está unida mediante pasadores a dos discos uniformes de 6 kg como se indica en la figura. El conjunto rueda sin deslizar sobre una superficie horizontal. Si la velocidad de la barra AB es de 840 mm/s a la izquierda cuando $\theta = 0$, determínense *a*) la velocidad de la barra AB cuando $\theta = 180°$ y *b*) la fuerza ejercida por la superficie sobre cada uno de los discos en ese instante.

17.36 Dos cilindros uniformes, cada uno con peso $W = 21$ lb y radio $r = 6$ in, se conectan mediante una correa como se muestra. Si el sistema se suelta desde el reposo, determínense *a*) la velocidad del centro del cilindro A después que se haya movido 4 ft y *b*) la tensión en la porción de la correa que conecta los dos cilindros.

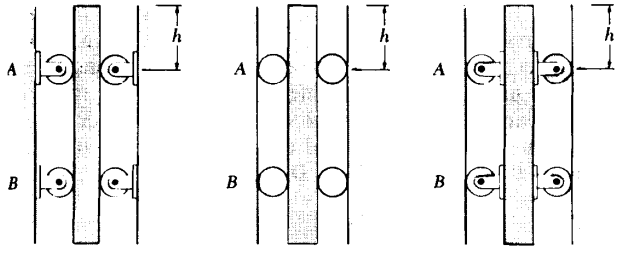


Fig. P17.37

17.37 Una barra de peso $W = 10$ lb se sostiene como se indica entre cuatro discos, cada uno de peso $W' = 4$ lb y radio $r = 3$ in. Si se sabe que las fuerzas ejercidas sobre los discos son suficientes para evitar el deslizamiento y que la barra se suelta del reposo, en cada uno de los casos aquí mostrados, determínese la velocidad de la barra después que se haya movido una distancia h.

17.38 El movimiento de la varilla AB de 6 lb se guía con collarines de peso despreciable que se deslizan libremente sobre las varillas horizontal y vertical que se muestran. Si la varilla se suelta desde el reposo cuando $\theta = 15°$, determínese la velocidad de los collarines A y B cuando $\theta = 60°$.

17.39 El movimiento de la varilla AB de 5 lb se guía mediante collarines de peso despreciable que se pueden deslizar libremente sobre las varillas horizontal y vertical que se muestran. Si se suelta la varilla del reposo cuando $\theta = 30°$, determínese la velocidad del collarín A cuando $\theta = 90°$.

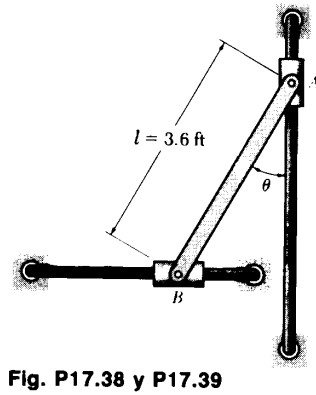


Fig. P17.38 y P17.39

17.40 Los extremos de una varilla AB de 12 kg están obligados a moverse en las ranuras cortadas en una placa vertical como se indica. Un resorte de constante 120 N/m se une al extremo A. Si la varilla se suelta del reposo cuando $\theta = 0$ y la tensión inicial del resorte es 0, determínese la velocidad del extremo A cuando *a*) $\theta = 30°$ y *b*) $\theta = 60°$.

17.41 Los extremos de una barra AB que pesa 12 kg están obligados a moverse en las ranuras cortadas en una placa vertical, como se indica. Al extremo A está sujeto un resorte de constante 120 N/m, de manera que su tensión es cero cuando $\theta = 0$. Si la barra se suelta del reposo cuando $\theta = 75°$, determínense la velocidad angular de la barra y la velocidad del extremo A cuando $\theta = 30°$.

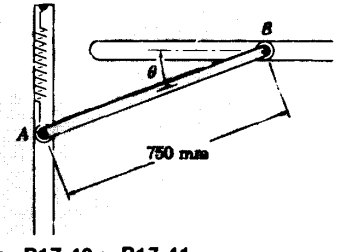


Fig. P17.40 y P17.41

17.42 El movimiento de la barra uniforme AB se guía mediante ruedas pequeñas de masa despreciable, que giran sobre la superficie aquí mostrada. Si se suelta la barra del reposo cuando $\theta = 0$, determínense la velocidad angular máxima y la velocidad correspondiente del extremo A, durante el movimiento que se produce.

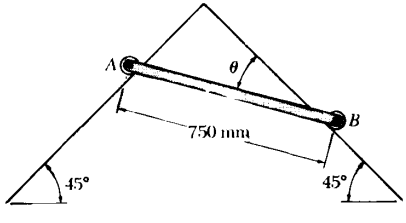


Fig. P17.42

17.43 El movimiento de una varilla de longitud R está guiado por pasadores en A y en B que se deslizan libremente en ranuras cortadas en una placa vertical como se indica. Si el extremo B se mueve ligeramente hacia la izquierda y luego se suelta, encuéntrense la velocidad angular de la barra y la velocidad de su centro de gravedad *a*) en el instante en que la velocidad del extremo B es cero y *b*) cuando el extremo B pasa por el punto D.

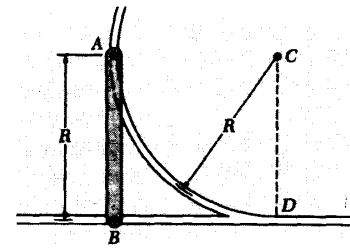


Fig. P17.43

17.44 Las barras uniformes AB y BC tienen una masa de 3 kg y 8 kg, respectivamente y el collarín C tiene 4 kg de masa. Si se suelta el sistema del reposo en la posición indicada, determínese la velocidad del punto B después que la barra AB ha girado 90°.

17.45 Las barras uniformes AB y BC tienen una masa de 3 kg y 8 kg respectivamente y el collarín C tiene una masa de 4 kg. Si se sabe que en el instante mostrado la velocidad del collarín C es de 0.9 m/s hacia abajo, determínese la velocidad del punto B después de que la barra AB haya girado 90°.

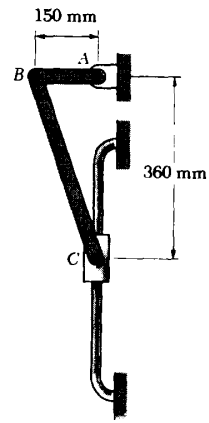


Fig. P17.44 y P17.45

17.46 Dos barras uniformes, cada una masa m y longitud l, están unidas de manera que forman la articulación que aquí se indica. El extremo D de la barra BD puede deslizarse libremente en la ranura vertical, mientras que el extremo A de la barra AB está sujeta a un soporte fijo mediante un pasador. Si el sistema se suelta desde el reposo en la posición que se muestra, determínese la velocidad del extremo D en el instante en que *a*) los extremos A y D están a la misma altura y *b*) la barra AB está horizontal.

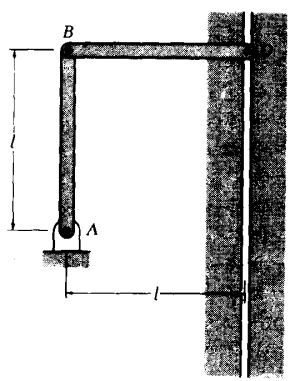


Fig. P17.46

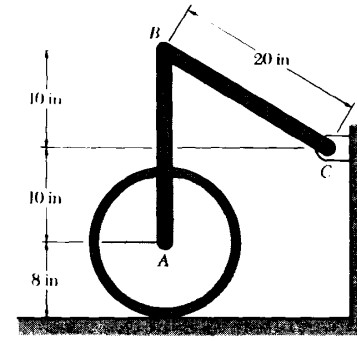


Fig. P17.47

17.47 La rueda A pesa 15 lb, tiene un radio central de giro de 6 in y rueda sin deslizar sobre la superficie horizontal. Cada una de las barras uniformes AB y BC tiene 20 in de longitud y pesa 8 lb. Si el punto A se mueve ligeramente hacia la izquierda y se suelta, obténgase la velocidad de dicho punto cuando la barra BC pasa por la posición horizontal.

17.48 El motor que se muestra en la figura tiene una maquinaria conectada al eje en *A*. El motor desarrolla 7.5 HP y funciona a una velocidad angular constante de 1200 rpm. Encuéntrese el valor del par aplicado por *a*) el eje sobre la polea *A* y *b*) el motor sobre la polea *B*.

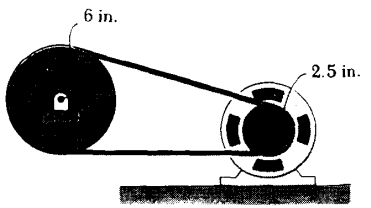


Fig. P17.48

17.49 Se utilizan tres ejes y cuatro engranajes para formar un tren de engranajes que trasmitirá 7.4 kW de un motor en *A* a una máquina herramienta en *F*. (El dibujo esquemático omite los cojinetes de los ejes.) Si se sabe que la frecuencia del motor es 30 hz, calcúlese el valor del par que se aplica al eje *a*) *AB*, *b*) *CD* y *c*) *EF*.

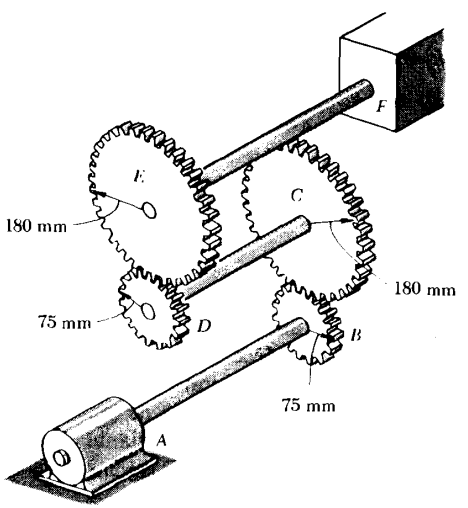


Fig. P17.49

17.50 Encuéntrese el módulo del par que debe ser aplicado por un motor para producir 400 W a una velocidad angular de *a*) 3600 rpm y *b*) 1200 rpm.

17.51 El dispositivo experimental mostrado en la figura se usa para medir la potencia de salida de una pequeña turbina. Cuando la turbina opera a 200 rpm, las lecturas de las dos escalas de resortes son 10 y 22 lb, respectivamente. Determínese la potencia que desarrolla la turbina.

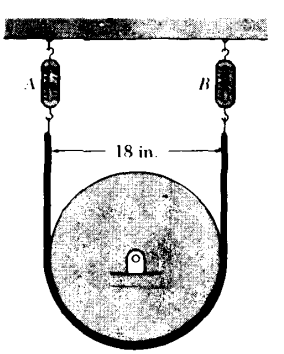


Fig. P17.51

17.8. Principio del impulso y del momento para el movimiento plano de un sólido rígido. Aplicaremos ahora el principio del impulso y del momento al análisis del movimiento plano de los sólidos rígidos y de sistemas de sólidos rígidos. Como ya se indicó en el capítulo 13, el método del impulso y del momento se adapta especialmente bien a la solución de problemas en los que intervienen el tiempo y las velocidades. Más aún, el principio del impulso y del momento proporciona el único método práctico para la solución de problemas en los que intervienen el movimiento impulsivo o impactos (Secc. 17.11 y 17.12).

Considerando de nuevo a un sólido rígido como formado por gran número de partículas P_i, recordamos de la sección 14.9 que el sistema que consta de los momentos lineales de las partículas al tiempo t_1 y el sistema de los impulsos de las fuerzas externas aplicadas de t_1 a t_2 son, juntos, equivalentes al sistema formado por las cantidades de movimiento de las partículas al tiempo t_2. Puesto que

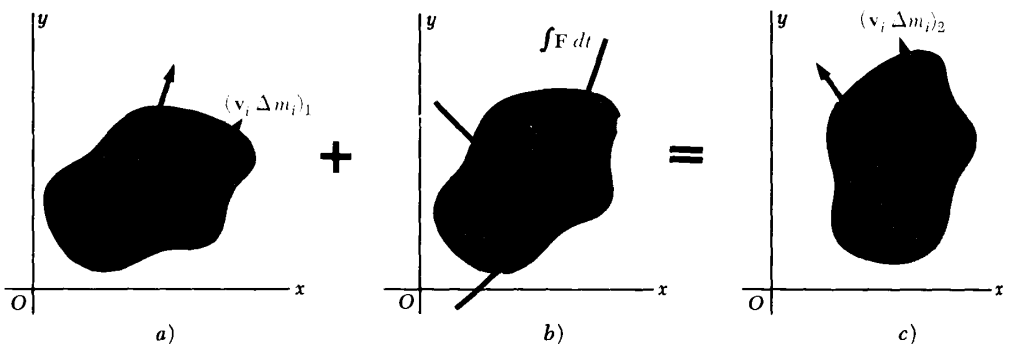


Fig. 17.6

los vectores asociados con un sólido rígido pueden ser considerados vectores deslizantes, se sigue (Secc. 3.19) que los sistemas de vectores que se muestran en la figura 17.6 son *equivalentes* en el sentido de que los vectores a la izquierda del signo de igualdad pueden transformarse en los vectores de la derecha mediante el uso de las operaciones fundamentales enumeradas en la sección 3.13. Por lo tanto, escribimos

$$\textbf{momentos sist}_1 + \textbf{Impul ext sist}_{1\to 2} = \textbf{momentos sist}_2 \qquad (17.14)$$

Pero los momentos lineales $\mathbf{v}_i\,\Delta m_i$ de las partículas pueden reducirse a un vector fijo a G, igual a la suma

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{v}_i\,\Delta m_i$$

y a un par de momento igual a la suma de los momentos de los momentos lineales respecto a G

$$\mathbf{H}_G = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}'_i \times \mathbf{v}_i\,\Delta m_i$$

Recordamos de la sección 14.3 que $\mathbf{L}$ y $\mathbf{H}_G$ definen, respectivamente, el momento lineal y el momento angular respecto a G del sistema de partículas que forman al sólido rígido. También notamos de la ecuación (14.14) que $\mathbf{L} = m\bar{\mathbf{v}}$. Por otra parte, restringiendo este análisis al movimiento plano de una placa rígida o de un sólido rígido simétrico respecto al plano de referencia, recordamos de la ecuación (16.4) que $\mathbf{H}_G = \bar{I}\boldsymbol{\omega}$. Por consiguiente, concluimos que el sistema de los momentos lineales $\mathbf{v}_i\,\Delta m_i$ es equivalente al *vector momento lineal* $m\bar{\mathbf{v}}$ fijo a G y al *par de momento el momento angular* $\bar{I}\boldsymbol{\omega}$ (Fig. 17.7)

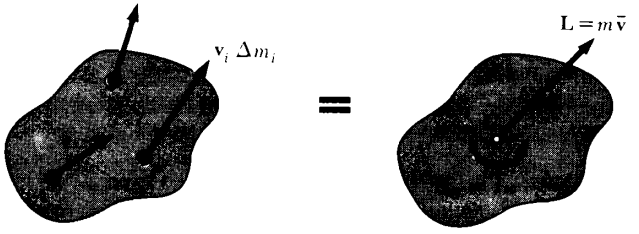
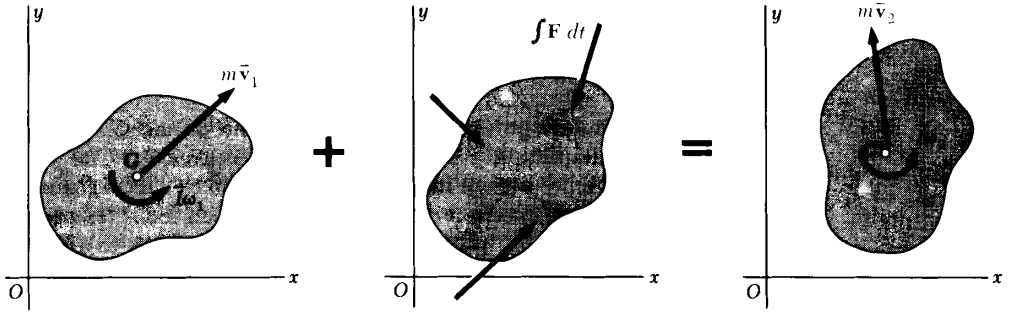


Fig. 17.7

Al observar que el sistema de los momentos lineales se reduce al vector $m\bar{\mathbf{v}}$ en el caso especial de una traslación ($\boldsymbol{\omega} = 0$) y al par $\bar{I}\boldsymbol{\omega}$ en el caso de rotación baricéntrica ($\bar{\mathbf{v}} = 0$), una vez más comprobamos que el movimiento plano de un sólido rígido simétrico respecto al plano de referencia puede descomponerse en una traslación del centro de gravedad G y una rotación alrededor de G.

Al sustituir el sistema de los momentos lineales en las partes a y c de la figura 17.6 por el vector momento lineal y el par momento equivalentes, obtenemos los tres diagramas mostrados en la figura 17.8. Esta figura expresa gráficamente la relación fundamental



a) *b)* *c)*

Fig. 17.8

(17-14) en el caso del movimiento plano de una placa rígida o de un sólido rígido simétrico respecto al plano de referencia.

De la figura 17.8 pueden obtenerse tres ecuaciones de movimiento. Se tienen dos ecuaciones de movimiento al sumar e igualar las *componentes* x e y de los momentos lineales y los impulsos, mientras que la tercera resulta al sumar e igualar los *momentos* de estos vectores *alrededor de cualquier punto arbitrario*. Los ejes coordenados pueden escogerse fijos en el espacio, o bien puede permitirse

que se muevan con el centro de gravedad del sólido mientras mantienen una dirección fija. En cualquier caso, el punto, alrededor del cual se tomen los momentos lineales, debe conservar la misma posición relativa a los ejes coordenados durante el intervalo de tiempo que se considere.

Al deducir las tres ecuaciones de movimiento de un sólido rígido se debe tener cuidado de no sumar indiscriminadamente los valores de momento lineal y angular. Se evitará la confusión si se toma en cuenta que $m\bar{v}_x$ y $m\bar{v}_y$ representan las *componentes de un vector*, es decir el vector momento lineal $m\bar{\mathbf{v}}$, mientras que $\bar{I}\omega$ representa el *módulo de un par*, es decir, el par de momento el momento angular $\bar{I}\omega$. Por consiguiente, la cantidad $\bar{I}\omega$ sólo debe sumarse al *momento* del momento lineal $m\bar{\mathbf{v}}$, nunca a este vector ni a sus componentes. Todas las cantidades que intervienen estarán entonces expresadas en las mismas unidades, a saber N · m · s o lb · ft · s.

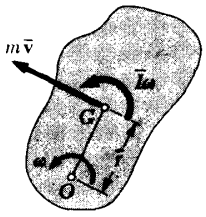


Fig. 17.9

Rotación no baricéntrica. En este caso especial de movimiento plano, la magnitud de la velocidad del centro de masas del sólido es $\bar{v} = \bar{r}\omega$, en la que $\bar{r}$ representa la distancia desde el centro de gravedad al eje de rotación fijo y ω la velocidad angular del sólido en el instante considerado. Por lo tanto, la magnitud del vector fijo momento lineal de G es $m\bar{v} = m\bar{r}\omega$. Al sumar los momentos alrededor de O del vector momento lineal con el par momento angular (Fig. 17.9) y utilizar el teorema de Steiner para los momentos de inercia, encontramos que el momento angular $\mathbf{H}_O$ del sólido alrededor de O tiene el valor†.

$$\bar{I}\omega + (m\bar{r}\omega)\bar{r} = (\bar{I} + m\bar{r}^2)\omega = I_O\omega \tag{17.15}$$

Igualmente los momentos respecto a O de los momentos lineales y los impulsos en (17.14), escribimos

$$I_O\omega_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} M_O\, dt = I_O\omega_2 \tag{17.16}$$

En el caso general de movimiento plano de un sólido rígido simétrico respecto al plano de referencia, la ecuación (17.16) puede utilizarse respecto al eje instantáneo de rotación en ciertas condiciones. Sin embargo, se recomienda que se resuelvan todos los problemas de movimiento plano con el método general descrito antes en esta sección.

17.9. Sistemas de sólidos rígidos. El movimiento de varios sólidos rígidos puede analizarse aplicando el principio del impulso y el del momento a cada sólido por separado (problema resuelto 17.6).

No obstante, al resolver problemas que contengan más de tres incógnitas (incluyendo los impulsos de reacciones desconocidas), a menudo se encuentra conveniente aplicar el principio del impulso y

† Nótese que la suma $\mathbf{H}_A$ de los momentos alrededor de cualquier punto arbitrario A de los momentos lineales de las partículas de una placa rígida *no* es, en general, igual a $I_A\omega$. (Véase el problema 17.66.)

del momento al sistema como un todo. Los diagramas del momento y el impulso se dibujan para todo el sistema de sólidos. Los diagramas de los momentos deben incluir un vector momento lineal, un par de momento el momento angular, o ambos, por cada parte móvil del sistema. Los impulsos de las fuerzas internas al sistema pueden omitirse del diagrama de impulsos porque aparecen en parejas de vectores iguales y opuestos. Al sumar e igualar sucesivamente las componentes x, las componentes y y los momentos de todos los vectores que intervienen, se obtienen tres relaciones que expresan que los momentos en el tiempo t_1 y los impulsos de las fuerzas externas forman un sistema equivalente al sistema de los momentos en el tiempo t_2†. También ahora se debe tener cuidado de no sumar indiscriminadamente con los momentos angulares los momentos lineales; cada ecuación debe comprobarse para asegurarse de que se han utilizado unidades compatibles. Este método se utilizó en el problema resuelto 17.8 y, más adelante, en los problemas resueltos 17.9 y 17.10.

17.10. Conservación del momento angular. Cuando no actúa ninguna fuerza externa sobre un sólido rígido ni sobre un sistema de sólidos rígidos, los impulsos de las fuerzas externas son cero y el sistema de los momentos lineales en el instante t_1 es equivalente al sistema de los momentos lineales en el instante t_2. Sumando e igualando sucesivamente las componentes x, componentes y y momentos de los momentos lineales a los instantes t_1 y t_2, concluimos que el momento lineal total del sistema en cualquier dirección se conserva y que su momento angular total alrededor de cualquier punto se conserva.

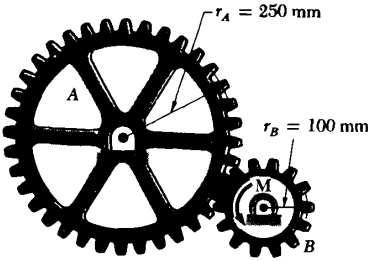
Sin embargo, hay muchas aplicaciones en ingeniería en las que el momento *lineal no se conserva* pero el *momento angular* $\mathbf{H}_O$ del sistema alrededor de un punto O arbitrario *sí se conserva:*

$$(\mathbf{H}_O)_1 = (\mathbf{H}_O)_2 \tag{17.17}$$

Estos casos se presentan cuando las líneas de acción de todas las fuerzas externas pasan por O o, más generalmente, cuando la suma de los impulsos angulares de las fuerzas externas respecto a O es cero.

Los problemas que incluyen *la conservación del momento angular* respecto a algún punto O se pueden resolver mediante el método general del impulso y del momento, es decir, dibujando los diagramas de los momentos lineales e impulsos como se describió en las secciones 17.8 y 17.9. La ecuación (17.17) se obtiene entonces sumando e igualando los momentos respecto a O (Problema resuelto 17.8). Como veremos después en el problema resuelto 17.9, pueden escribirse dos ecuaciones adicionales al sumar e igualar las componentes x e y; estas ecuaciones se utilizan para encontrar dos impulsos lineales desconocidos, como los impulsos de las componentes de la reacción en un punto fijo.

† Nótese que, al igual que en la sección 16.7, no podemos hablar de sistemas usualmente *equivalentes* porque no nos ocupa un solo sólido rígido.



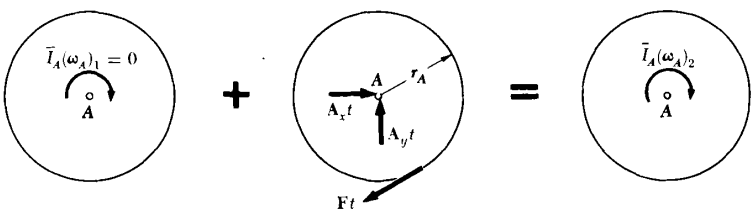
PROBLEMA RESUELTO 17.6

El engranaje A tiene una masa de 10 kg y un radio de giro de 200 mm, mientras que el engranaje B tiene una masa de 3 kg y un radio de giro de 80 mm. El sistema se encuentra en reposo cuando se aplica un par M de módulo 6 N•m al engranaje B. Despreciando el rozamiento, determínense *a*) el tiempo necesario para que la velocidad angular del engranaje B alcance 600 rpm, y *b*) la fuerza tangencial que el engranaje B aplica al engranaje A. Estos engranajes se consideraron previamente en el problema resuelto 17.2.

Solución. Aplicamos los principios del impulso y el del momento lineal a cada engranaje por separado. Como todas las fuerzas y el par son constantes, se obtienen sus impulsos al multiplicarlos por el tiempo desconocido t. Recordamos del problema resuelto 17.2 que los momentos de inercia centrales y las velocidades angulares finales son

$$\bar{I}_A = 0.400 \text{ kg}\cdot\text{m}^2 \qquad \bar{I}_B = 0.0192 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$
$$(\omega_A)_2 = 25.1 \text{ rad/s} \qquad (\omega_B)_2 = 62.8 \text{ rad/s}$$

Principio del impulso y del momento para el engranaje A. Los sistemas de momentos iniciales, impulsos y momentos finales se muestran en tres dibujos distintos.

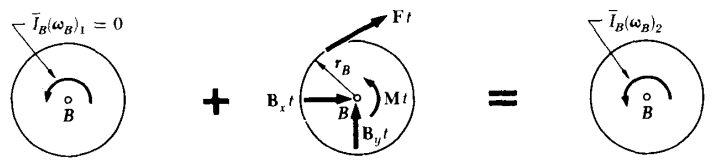


Momentos ang sist$_1$ + Impul ext ang sist$_{1\to2}$ = Momentos ang sist$_2$

$+\circlearrowleft$ **momentos respecto a** A: $0 - Ftr_A = -\bar{I}_A(\omega_A)_2$

$$Ft(0.250 \text{ m}) = (0.400 \text{ kg}\cdot\text{m}^2)(25.1 \text{ rad/s})$$
$$Ft = 40.2 \text{ N}\cdot\text{s}$$

Principio del impulso y del momento para el engranaje B.



Momentos ang sist$_1$ + Impul ext ang sist$_{1\to2}$ = Momentos ang sist$_2$

$+\circlearrowleft$ momentos respecto a B: $0 + Mt - Ftr_B = I_B(\omega_B)_2$

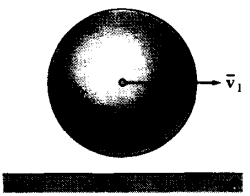
$$+(6 \text{ N}\cdot\text{m})t - (40.2 \text{ N}\cdot\text{s})(0.100 \text{ m}) = (0.0192 \text{ kg}\cdot\text{m}^2)(62.8 \text{ rad/s})$$
$$t = 0.871 \text{ s} \blacktriangleleft$$

Recordando que $Ft = 40.2$ N•s, escribimos

$$F(0.871 \text{ s}) = 40.2 \text{ N}\cdot\text{s} \qquad F = +46.2 \text{ N}$$

Por consiguiente, la fuerza aplicada por el engranaje B al engranaje A es

$$\mathbf{F} = 46.2 \text{ N} \swarrow \blacktriangleleft$$

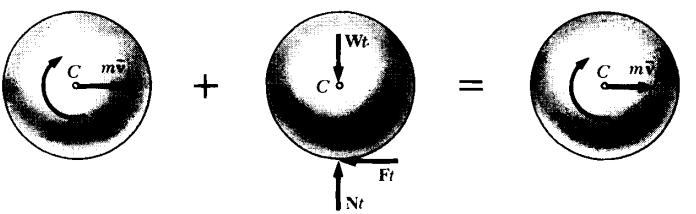


PROBLEMA RESUELTO 17.7

Una esfera uniforme de masa m y radio r se lanza sobre una superficie horizontal rugosa con una velocidad lineal $\bar{v}_1$ y sin velocidad angular. Indicando por μ_k el coeficiente de rozamiento dinámico entre la esfera y la superficie, encuéntrense *a*) el tiempo t_2 al cual la esfera comenzará a rodar sin deslizar, y *b*) las velocidades lineal y angular de la esfera al tiempo t_2.

Solución. Mientras la esfera desliza respecto a la superficie, actúan sobre ella la fuerza normal **N**, la fuerza de rozamiento **F** y su peso **W** de magnitud $W = mg$.

Principio del impulso y del momento. Aplicamos el principio del impulso y el del momento a la esfera desde el tiempo $t_1 = 0$ en que se coloca sobre la superficie, hasta el tiempo $t_2 = t$ en el tiempo que empieza a rodar sin deslizar.



momentos lineales sist$_1$ + Impul ext sist$_{1\to 2}$ = momentos lineales sist$_2$

$+\uparrow$ componentes y: $\quad Nt - Wt = 0 \qquad (1)$

$\stackrel{+}{\rightarrow}$ componentes x: $\quad m\bar{v}_1 - Ft = m\bar{v}_2 \qquad (2)$

$+\circlearrowleft$ momentos respecto a G: $\quad Ftr = \bar{I}\omega_2 \qquad (3)$

De (1) obtenemos $N = W = mg$. Durante todo el intervalo considerado, en el punto C hay deslizamiento y tenemos $F = \mu_k N = \mu_k mg$. Al sustituir F en la ecuación (2), escribimos

$$m\bar{v}_1 - \mu_k mgt = m\bar{v}_2 \qquad \bar{v}_2 = \bar{v}_1 - \mu_k gt \qquad (4)$$

Al sustituir $F = \mu_k mg$ e $I = \frac{2}{5}mr^2$ en (3)

$$\mu_k mgtr = \tfrac{2}{5}mr^2\omega_2 \qquad \omega_2 = \frac{5}{2}\frac{\mu_k g}{r}t \qquad (5)$$

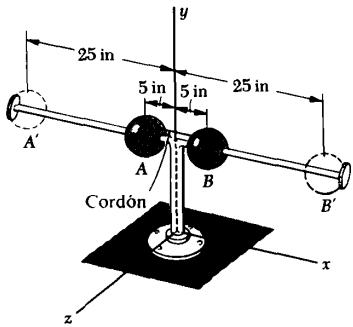
La esfera empezará a rodar sin deslizar cuando la velocidad $\mathbf{v}_C$ del punto de contacto sea cero. En ese instante, el punto C se convierte en el centro instantáneo de rotación y tenemos $\bar{v}_2 = r\omega_2$. Al sustituir de (4) y (5), escribimos

$$\bar{v}_2 = r\omega_2 \qquad \bar{v}_1 - \mu_k gt = r\left(\frac{5}{2}\frac{\mu_k g}{r}t\right) \qquad t = \frac{2}{7}\frac{\bar{v}_1}{\mu_k g} \blacktriangleleft$$

Sustituyendo esta expresión para t en (5),

$$\omega_2 = \frac{5}{2}\frac{\mu_k g}{r}\left(\frac{2}{7}\frac{\bar{v}_1}{\mu_k g}\right) \qquad \omega_2 = \frac{5}{7}\frac{\bar{v}_1}{r} \qquad \omega_2 = \frac{5}{7}\frac{\bar{v}_1}{r}\circlearrowleft \blacktriangleleft$$

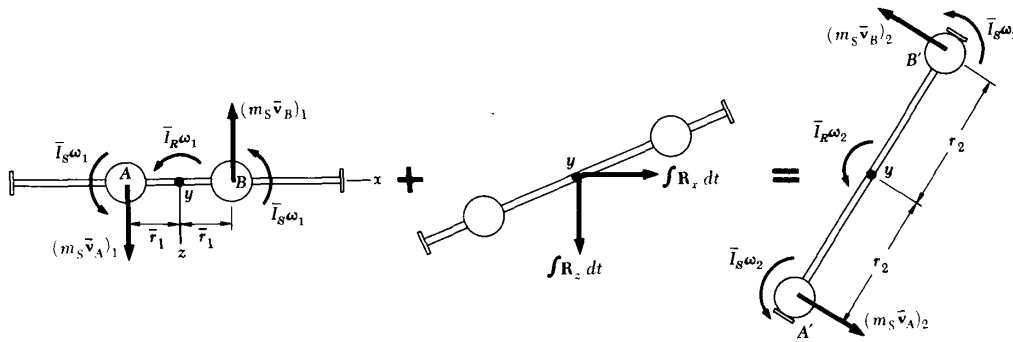
$$\bar{v}_2 = r\omega_2 \qquad \bar{v}_2 = r\left(\frac{5}{7}\frac{v_1}{r}\right) \qquad \bar{v}_2 = \tfrac{5}{7}\bar{v}_1 \rightarrow \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESUELTO 17.8

Dos esferas sólidas de 3 in de radio que pesan 2 lb cada una están montadas en A y B en la barra horizontal $A'B'$, la cual gira libremente sobre la vertical con una velocidad angular de 6 rad/s en el sentido contrario a las manecillas del reloj. Las esferas se mantienen en posición por medio de un cordón que de repente se corta. Si sabemos que el momento central de inercia de la barra y el pivote es $\bar{I}_R = 0.25$ lb•ft•s^2, obténganse *a*) la velocidad angular de la barra después de que las esferas se han movido a las posiciones A' y B', y *b*) la energía perdida a causa del choque plástico de las esferas y los topes en A' y B'.

a) **Principio del impulso y del momento.** Con objeto de determinar la velocidad angular total de la barra, expresaremos que las iniciales de las distintas partes del sistema y los impulsos de las fuerzas externas son, juntos, equivalentes a los momentos finales del sistema.



Momentos ang sist$_1$ + Imp. ext ang sist$_{1\to2}$ = Momentos ang sist$_2$

Observando que las fuerzas externas consisten en los pesos y la reacción en el pivote, que no tienen momento alrededor del eje y, y notando que $\bar{v}_A = \bar{v}_B = \bar{r}\omega$, escribimos

$+\circlearrowleft$ momentos con respecto al eje y:

$$2(m_S\bar{r}_1\omega_1)\bar{r}_1 + 2\bar{I}_S\omega_1 + \bar{I}_R\omega_1 = 2(m_S\bar{r}_2\omega_2)\bar{r}_2 + 2\bar{I}_S\omega_2 + \bar{I}_R\omega_2$$

$$(2m_S\bar{r}_1^2 + 2\bar{I}_S + \bar{I}_R)\omega_1 = (2m_S\bar{r}_2^2 + 2\bar{I}_S + \bar{I}_R)\omega_2 \qquad (1)$$

la cual expresa que *el momento angular del sistema con respecto al eje y se conserva.* Ahora calculamos

$$\bar{I}_S = \tfrac{2}{5}m_Sa^2 = \frac{2}{5}\left(\frac{2\text{ lb}}{32.2\text{ ft/s}^2}\right)(\tfrac{3}{12}\text{ ft})^2 = 0.00155\text{ lb•ft•s}^2$$

$$m_S\bar{r}_1^2 = \frac{2}{32.2}\left(\frac{5}{12}\right)^2 = 0.0108 \qquad m_S\bar{r}_2^2 = \frac{2}{32.2}\left(\frac{25}{12}\right)^2 = 0.2696$$

Sustituyendo estos valores e $\bar{I}_R = 0.25$, $\omega_1 = 6$ rad/s en (1):

$$0.275(6\text{ rad/s}) = 0.792\omega_2 \qquad \omega_2 = 2.08\text{ rad/s}\ \circlearrowleft \quad \blacktriangleleft$$

b) **Energía perdida.** La energía cinética del sistema en cualquier instante es

$$T = 2(\tfrac{1}{2}m_S\bar{v}^2 + \tfrac{1}{2}\bar{I}_S\omega^2) + \tfrac{1}{2}\bar{I}_R\omega^2 = \tfrac{1}{2}(2m_S\bar{r}^2 + 2\bar{I}_S + \bar{I}_R)\omega^2$$

Recordando los valores numéricos antes obtenidos, tenemos

$$T_1 = \tfrac{1}{2}(0.275)(6)^2 = 4.95\text{ ft•lb} \qquad T_2 = \tfrac{1}{2}(0.792)(2.08)^2 = 1.713\text{ ft•lb}$$

$$\Delta T = T_2 - T_1 = 1.71 - 4.95 \qquad \Delta T = -3.24\text{ ft•lb} \quad \blacktriangleleft$$

Problemas

17.52 Una pequeña piedra de esmeril se une al eje de un motor eléctrico que tiene una velocidad media de 3600 rpm. Cuando se elimina la energía eléctrica la unidad alcanza el reposo en 70 s. La piedra de esmeril y el rotor tienen un peso combinado de 6 lb y un radio de giro combinado de 2 in. Determínese el valor medio del par debido al rozamiento de los cojinetes del motor.

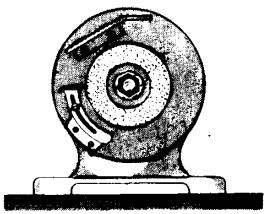


Fig. P17.52

17.53 Un volante grande tiene una masa de 2750 kg y un radio de giro de 1.15 m. Se observa que se requieren 12.8 min para que el volante se detenga a partir de una velocidad angular de 180 rpm. Determínese el valor medio del par debido al rozamiento de los cojinetes del volante.

17.54 Tres discos del mismo espesor y del mismo material se unen a un eje como se muestra. Los discos A y B tienen una masa de 6 kg y un radio $r = 175$ mm. Se aplica un par $\mathbf{M}$ de módulo 5 N · m al disco A cuando el sistema está en reposo. Determínese el radio nr del disco C si la velocidad angular del sistema es de 200 rpm después de 4 s.

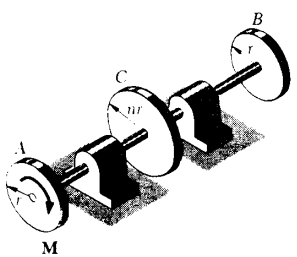


Fig. P17.54

17.55 Un tornillo se encuentra a 2 in del centro de una rueda de automóvil y se le aplica el par que aquí se muestra durante 0.10 s. Si se supone que la rueda puede girar libremente y se encuentra inicialmente en reposo, obténgase la velocidad angular resultante de la rueda, la cual pesa 42 lb y tiene un radio de giro de 10.8 in.

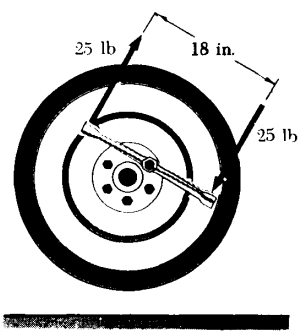


Fig. P17.55

17.56 Una esfera de radio r y peso W se pone en una esquina con una velocidad angular inicial ω_0 en sentido opuesto al de las manecillas del reloj. Simbolizando con μ_k el coeficiente de rozamiento dinámico en A y B, dedúzcase una expresión para el tiempo requerido por la esfera para alcanzar el reposo.

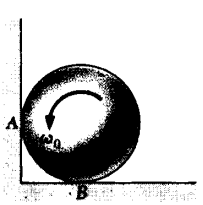


Fig. P17.56

17.57 Un disco de espesor constante, inicialmente en reposo, es puesto en contacto con una correa que se mueve con una velocidad constante v. El brazo AB que conecta al centro del disco con el pasador en B tiene un peso despreciable. Representando con μ_k el coeficiente de rozamiento dinámico entre el disco y la correa, dedúzcase una expresión para el tiempo que tarda el disco en alcanzar una velocidad angular constante.

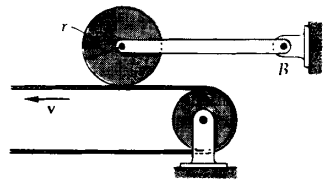


Fig. P17.57 y P17.58

17.58 El disco A tiene una masa de 2.5 kg y un radio $r = 75$ mm y se pone en contacto con la correa, que se mueve con una velocidad constante $v = 15$ m/s. El brazo AB que conecta el centro del disco con el soporte B tiene un peso despreciable. Si se sabe que $\mu_k = 0.15$ entre el disco y la correa, determínese el tiempo requerido por el disco para alcanzar una velocidad angular constante.

17.59 Cada una de las poleas dobles que aquí se muestran tienen un momento central de inercia de 0.25 kg · m^2, un radio interior de 100 mm y un radio exterior de 150 mm. Despreciando el rozamiento en los cojinetes, determínense *a*) la velocidad del cilindro 3 s después de que el sistema se ha soltado a partir del reposo y *b*) la tensión en la cuerda que conecta las poleas.

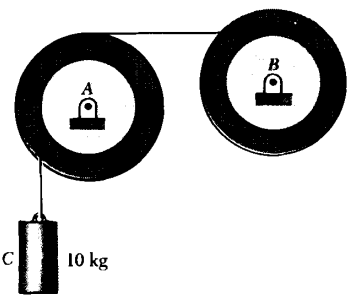


Fig. P17.59

17.60 Resuélvase el problema 17.59, suponiendo que el rozamiento en los cojinetes en A y B es equivalente a un par de módulo 0.45 N · m.

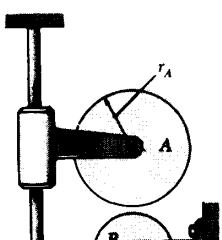


Fig. P17.61 y P17.62

17.61 El disco A está en reposo cuando se pone en contacto con el disco B, que tiene una velocidad angular ω_0. Demuéstrese que la velocidad angular final del disco B depende sólo de ω_0 y de la relación entre las masas m_A y m_B de los dos discos.

17.62 El disco B tiene una masa $m_B = 4$ kg, un radio $r_B = 90$ mm y una velocidad angular inicial $\omega_0 = 750$ rpm en el sentido de las manecillas del reloj. El disco A tiene una masa $m_A = 6$ kg, un radio $r_A = 135$ mm y está en reposo cuando se pone en contacto con el disco B. Despreciando el rozamiento en los cojinetes, calcúlense *a*) la velocidad angular final de cada disco y *b*) el impulso total de la fuerza de rozamiento que actúa sobre el disco A.

17.63 Una cinta de computadora se mueve sobre los dos tambores que se muestran. El tambor A pesa 1.4 lb y tiene un radio de giro de 0.75 in, mientras que el tambor B pesa 3.5 lb y tiene un radio de giro de 1.25 in. En la porción inferior de la cinta la tensión es constante e igual a $T_A = 0.75$ lb. Si se sabe que la cinta está inicialmente en reposo, determínense *a*) la tensión constante T_B requerida si la velocidad de la cinta deberá ser $v = 10$ ft/s después de 0.24 s y *b*) la tensión correspondiente de la porción de cinta entre los tambores.

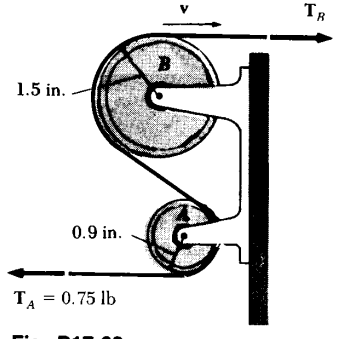


Fig. P17.63

17.64 Demuéstrese que el sistema de los momentos lineales para una placa rígida con un movimiento plano se reduce a un solo vector, y exprésese la distancia desde el centro de gravedad G a la línea de acción de este vector en función del radio central de giro $\bar{k}$ de la placa, la magnitud $\bar{v}$ de la velocidad de G y la velocidad angular ω.

17.65 Demuéstrese que, cuando una placa rígida gira alrededor de un eje fijo perpendicular a ella y que pasa por O, el sistema de los momentos lineales de sus partículas es equivalente a un solo vector de magnitud $m\bar{r}\omega$, perpendicular a la línea OG y aplicado a un punto P sobre esta línea, el cual recibe el nombre de *centro de percusión* a una distancia $GP = \bar{k}^2/\bar{r}$ desde el centro de gravedad de la placa.

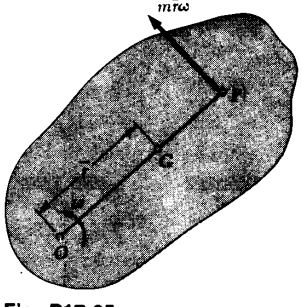


Fig. P17.65

17.66 Demuéstrese que la suma $\mathbf{H}_A$ de los momentos alrededor de un punto A de los momentos lineales de las partículas de una placa rígida con movimiento plano es igual a $I_A\omega$, en la que ω es la velocidad angular de la placa en el instante considerado, e I_A es el momento de inercia de la placa alrededor de A, si y sólo si se satisface alguna de las condiciones siguientes *a*) A es el centro de gravedad de la placa, *b*) A es el centro instantáneo de rotación, *c*) la velocidad de A está dirigida a lo largo de una línea que une al punto A y al centro de masas G.

17.67 Considérese una placa rígida inicialmente en reposo y sometida a una fuerza impulsiva $\mathbf{F}$ contenida en el plano de la placa. Definimos el *centro de percusión* P como el punto de intersección de la línea de acción de $\mathbf{F}$ con la perpendicular trazada por G. *a*) Demuéstrese que el centro instantáneo de rotación C de la placa se encuentra sobre la línea GP a una distancia $GC = \bar{k}^2/GP$ al otro lado de G. *b*) Demuéstrese que si el centro de percusión estuviese localizado en C el centro instantáneo de rotación se encontraría en P.

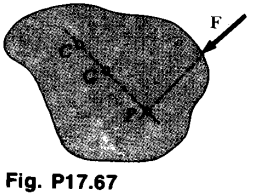


Fig. P17.67

17.68 Una rueda de radio r y radio central de giro $\bar{k}$ se coloca sobre un plano inclinado y se suelta desde el reposo al tiempo $t = 0$. Si se supone que rueda sin deslizar, obténganse *a*) la velocidad del centro de la rueda al tiempo t y *b*) el coeficiente de rozamiento estático necesario para impedir que la rueda deslice.

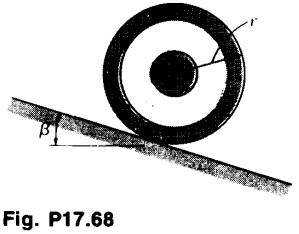


Fig. P17.68

17.69 A un rodillo cilíndrico uniforme de 15 kg, inicialmente en reposo, se le aplica una fuerza de 125 N como se muestra. Suponiendo que el cuerpo rueda sin deslizar, determínense *a*) la velocidad del centro G después de 5 s y *b*) la fuerza de rozamiento necesaria para evitar que deslice.

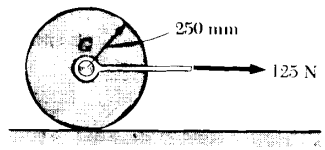


Fig. P17.69

17.70 Se enrollan cuerdas en un tubo de pared delgada y en un cilindro sólido, como se muestra en la figura. Si el tubo y el cilindro se sueltan desde el reposo en el tiempo $t = 0$, determínense la velocidad al tiempo t del centro de *a*) del tubo y *b*) del cilindro.

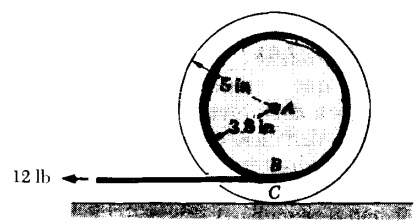


Fig. P17.71

17.71 Un tambor de radio 3.8 in se monta sobre un cilindro de radio 5 in. La unidad tambor-cilindro pesa 18 lb y tiene un radio central de giro de 3 in. Se enrolla una cuerda alrededor del tambor y se tira de ella con una fuerza de 12 lb. Si se sabe que el conjunto está inicialmente en reposo, determínense *a*) la velocidad del centro A de la rueda después de 6 s y *b*) la fuerza de rozamiento requerida para evitar que deslice.

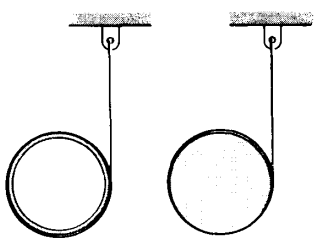


Fig. P17.70

17.72 y 17.73 La carreta mostrada, de 6 kg, se sostiene mediante dos discos uniformes, cada uno con una masa de 4 kg y un radio de 75 mm. Si la carreta se encuentra inicialmente en reposo, calcúlese su velocidad 2.5 s después de que se aplica una fuerza de 10 N. Supóngase que los discos ruedan sin deslizar.

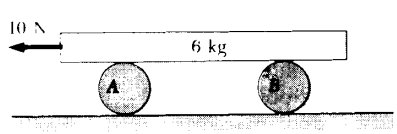


Fig. P17.72

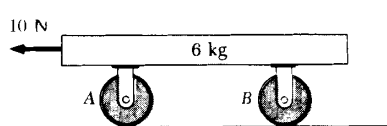


Fig. P17.73

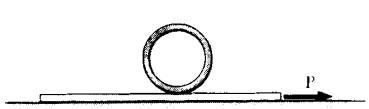


Fig. P17.74

17.74 Un tubo de 160 mm de diámetro, de masa 6 kg, descansa sobre una placa de 1.5 kg. El tubo y la placa se encuentran inicialmente en reposo cuando se aplica una fuerza **P** de módulo 25 N durante 0.75 s. Si se sabe que $\mu_s = 0.25$ y $\mu_k = 0.20$ entre todas las superficies en contacto, determínense *a*) si el tubo deslizará respecto de la placa y *b*) las velocidades resultantes del tubo y de la placa.

17.75 En la combinación en engranajes que aquí se muestra, los engranajes A y C están unidos a la barra ABC, la cual puede girar libremente sobre B, mientras que el engranaje interior B está fijo. Si el sistema está en reposo, obténgase el momento del par **M** que debe aplicarse a la barra ABC a fin de que, 2.5 s después, la velocidad angular de la barra sea de 240 rpm en el sentido de las manecillas del reloj. Los engranajes A y C pesan 2.5 lb cada uno y pueden ser considerados como discos de radio 2 in; la barra ABC pesa 4 lb.

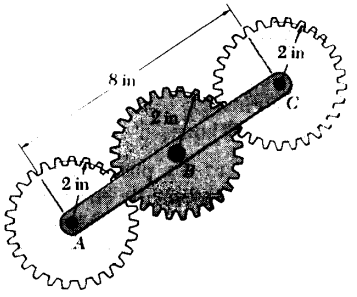


Fig. P17.75

17.76 Dos cilindros uniformes, cada uno de peso $W = 21$ lb y radio $r = 5$ in, se unen mediante una correa como se indica. Si el sistema se suelta del reposo, determínense *a*) la velocidad del centro del cilindro A 2.5 s después y *b*) la tensión en la parte de la correa que conecta los dos cilindros.

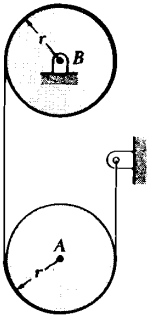


Fig. P17.76

17.77 Una esfera de radio r y masa m se pone sobre una superficie horizontal sin velocidad lineal, pero con una velocidad angular en el sentido de giro de las manecillas del reloj ω_0. Simbolizando con μ_k el coeficiente de rozamiento dinámico entre la esfera y el suelo, determínense *a*) el tiempo t_1 al cual la esfera empezará a rodar sin deslizar y *b*) las velocidades lineal y angular de la esfera en el tiempo t_1.

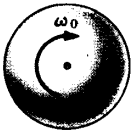


Fig. P17.77

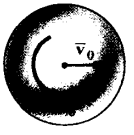


Fig. P17.78

17.78 Una esfera de masa m y radio r se proyecta a lo largo de una superficie rugosa con las velocidades iniciales que se indican. Para que la velocidad final de la esfera sea cero, exprésense: *a*) la ω_0 requerida en términos de $\bar{v}_0$ y r y *b*) el tiempo necesario para que la esfera alcance el reposo en términos de $\bar{v}_0$ y del coeficiente de rozamiento μ_k.

17.79 Los discos A y B son del mismo material y espesor y pueden girar libremente alrededor del eje vertical. El disco B está en reposo cuando se le hace caer sobre el disco A que gira con una velocidad angular de 400 rpm. Si se sabe que la masa del disco A es de 4 kg, determínense: *a*) las velocidades angulares de los discos y *b*) el cambio en la energía cinética del sistema.

17.80 En el problema 17.79 demuéstrese que si ambos discos están girando inicialmente, el cambio de energía cinética del sistema ΔT solamente depende de la velocidad relativa $\omega_{B/A}$ de los discos y obténgase una expresión para ΔT en términos de $\omega_{B/A}$.

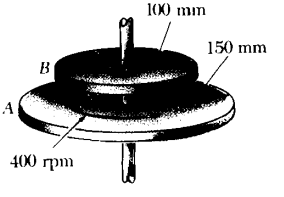


Fig. P17.79

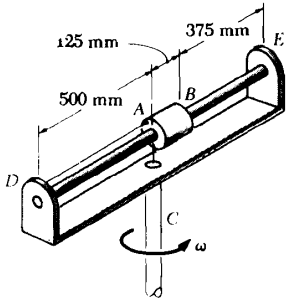


Fig. P17.82

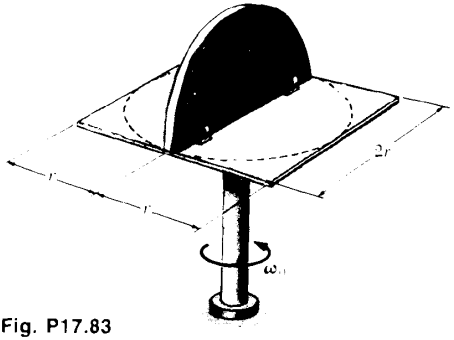


Fig. P17.83

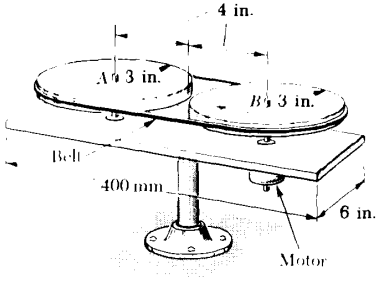


Fig. P17.84

17.81 La barra AB de masa m desliza libremente dentro del tubo CD, también de masa m. La velocidad angular del conjunto era ω_1 cuando la barra estaba totalmente dentro del tubo ($x = 0$). Despreciando el efecto del rozamiento, determínese la velocidad angular del conjunto cuando $x = \frac{2}{3} L$.

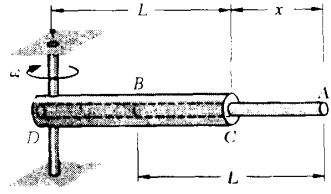


Fig. P17.81

17.82 Un tubo AB de 1.6 kg puede deslizar libremente sobre la barra DE, que puede girar libremente en un plano horizontal. Inicialmente, el conjunto gira con una velocidad angular $\omega = 5$ rad/s y el tubo se mantiene en su posición mediante una cuerda. El momento inicial de la barra y la ménsula respecto al eje de rotación vertical es de 0.30 kg · m^2 y el momento central de inercia del tubo respecto al eje vertical de rotación es 0.0025 kg · m^2. Si súbitamente se rompe la cuerda, determínense: *a*) la velocidad angular del conjunto después que el tubo se mueve hasta el extremo E y *b*) la pérdida de energía durante el choque plástico en E.

17.83 Dos paneles semicirculares de radio r cada uno, se unen mediante bisagras a la placa cuadrada como aquí se muestra. La placa y los paneles son del mismo material y espesor. Si se sabe que cuando los paneles están en posición vertical el conjunto gira con una velocidad angular ω_0, determínese la velocidad angular final del conjunto después que los paneles alcanzan el reposo en una posición horizontal.

17.84 Dos discos de 10 lb y un motor pequeño se montan sobre una plataforma rectangular, que puede girar libremente respecto a un vástago central vertical. La velocidad normal de operación del motor es de 180 rpm. Si el motor se enciende cuando el sistema está en reposo, determínese la velocidad angular de todos los elementos del sistema después que el motor haya alcanzado su velocidad normal de operación. Despréciense las masas del motor y de la banda.

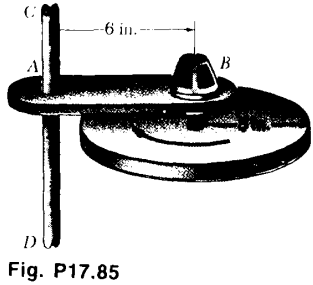


Fig. P17.85

17.85 Un disco de 10 lb está unido al eje de un motor montado sobre el brazo AB que puede girar libremente alrededor del eje vertical CD. La unidad de brazo y motor tiene un momento de inercia de 0.032 lb · ft · s^2 respecto al eje CD y la velocidad angular normal de operación del motor es de 360 rpm. Si se sabe que el sistema está inicialmente en reposo, determínense las velocidades angulares del brazo y del disco cuando el motor alcanza una velocidad angular de 360 rpm.

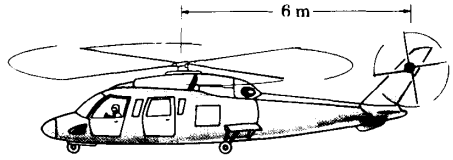


Fig. P17.86

17.86 En el helicóptero que se muestra se utiliza una hélice vertical en la cola para evitar que gire la cabina al cambiar la velocidad de las aspas principales. Suponiendo que la hélice de la cola no esté funcionando, determínese la velocidad angular final de la cabina después que la velocidad de las aspas principales haya cambiado de 200 a 300 rpm. La velocidad de las aspas principales se mide relativa a la cabina, que tiene un momento central de inercia de 1200 kg · m^2. Supóngase que cada una de las aspas es una varilla de 5 m y de 30 kg de masa.

17.87 Suponiendo que la hélice de la cola del problema 17.86 está en funcionamiento y que la velocidad angular de la cabina es nula, determínese la velocidad horizontal final de la cabina, cuando las aspas principales cambian su velocidad angular de 200 a 300 rpm. La cabina tiene una masa de 720 kg y está inicialmente en reposo. También determínese la fuerza ejercida por la hélice de cola si este cambio de velocidad ocurre uniformemente en 12 s.

17.88 El collarín B tiene una masa de 3 kg y se puede deslizar libremente sobre la barra OA que puede girar libremente en un plano horizontal. El conjunto está girando con una velocidad angular ω = 1.8 rad/s cuando se suelta un resorte localizado entre A y B, proyectando el collarín a lo largo de la barra con una velocidad relativa inicial v_r = 1.5 m/s. Si el momento de inercia de la barra y el resorte respecto a O es 0.35 kg · m^2, determínense: *a*) la distancia mínima entre el collarín y el punto O en el movimiento subsiguiente y *b*) la velocidad angular del conjunto correspondiente al instante en que el collarín se encuentra a esa mínima distancia.

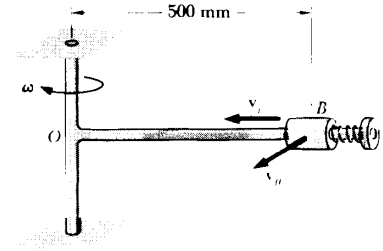


Fig. P17.88

17.89 En el problema 17.88 determínese el módulo de la velocidad relativa $\mathbf{v}_r$ requerida para que la mínima distancia entre el collarín y el punto O sea de 300 mm durante el movimiento subsiguiente.

17.90 En el problema 17.82 determínese la velocidad del tubo, relativa a la barra, al golpear el tubo el extremo E del conjunto.

17.91 En el problema 17.81, determínese la velocidad de la barra relativa al tubo cuando $x = \frac{2}{3}L$

17.92 En el problema 17.81, determínese la velocidad de la barra relativa al tubo cuando $x = \frac{1}{2}L$.

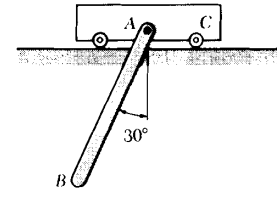


Fig. P17.93

*17.93 Una barra uniforme AB con peso de 15 lb y longitud de 3.6 ft, está unida al vehículo C de 25 lb. Si se sabe que el sistema se suelta desde el reposo en la posición que se indica y se desprecia el rozamiento, determínense: *a*) la velocidad del punto B cuando la barra AB se pone en posición vertical y *b*) la velocidad correspondiente del vehículo C.

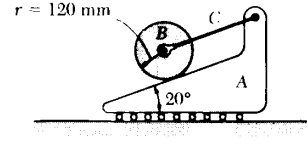


Fig. P17.94

*17.94 El cilindro B de 4 kg y la cuña A de 3 kg están en reposo en la posición que se muestra en la figura; entonces se corta la cuerda C que une el cilindro a la cuña y el cilindro rueda sin deslizar sobre la cuña. Despreciando el rozamiento entre la cuña y el suelo, determínense: *a*) la velocidad angular del cilindro después de rodar 180 mm sobre la cuña y *b*) la velocidad correspondiente de la cuña.

17.11. Percusiones. Vimos en el capítulo 13 que el método del impulso y del momento es el único práctico en la solución de problemas que contienen movimiento impulsivo. Ahora encontraremos también que, en comparación con los diferentes problemas considerados en las secciones anteriores, los problemas en los que interviene el movimiento impulsivo se adaptan especialmente a una solución mediante el método del impulso y del momento. El cálculo de los impulsos lineales y angulares es bastante simple, puesto que al considerar intervalos de tiempo muy pequeños se puede suponer que los cuerpos que intervienen ocupan la misma posición durante el intervalo.

17.12. Choque excéntrico. En las secciones 13.13 y 13.14 aprendimos a resolver problemas de *choque central*, es decir, problemas en los que los centros de gravedad de los dos cuerpos que chocan se encuentran sobre la línea de choque. Ahora analizaremos el *choque excéntrico* de dos sólidos rígidos. Considérense dos sólidos

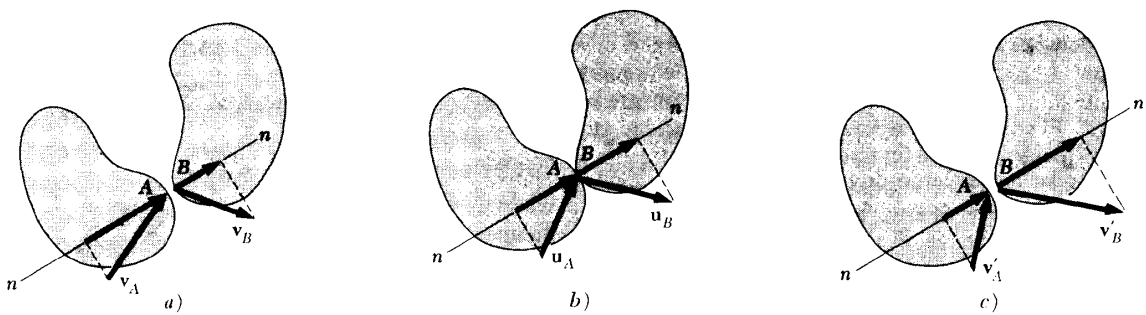


Fig. 17.10

que chocan e indiquemos por $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$ las velocidades antes del choque de *los dos puntos de contacto* A y B (Fig. 17.10*a*). Bajo el efecto del choque, los dos sólidos *se deformarán* y al final del periodo de deformación, las velocidades $\mathbf{u}_A$ y $\mathbf{u}_B$ de A y B tendrán componentes iguales a lo largo de la línea de choque nn (Fig. 17.10*b*). Entonces tendrá lugar un período de restitución, al final del cual A y B tendrán velocidades $\mathbf{v}'_A$ y $\mathbf{v}'_B$ (Fig. 17.10*c*). Suponiendo que los sólidos carecen de rozamiento, encontramos que las fuerzas que aplican uno sobre el otro están dirigidas a lo largo de la línea de choque. Indicando, respectivamente, por $\int P\,dt$ e $\int R\,dt$ al módulo del impulso de una de estas fuerzas durante el período deformación y durante el periodo de restitución, recordamos que el coeficiente de restitución e se define como el cociente:

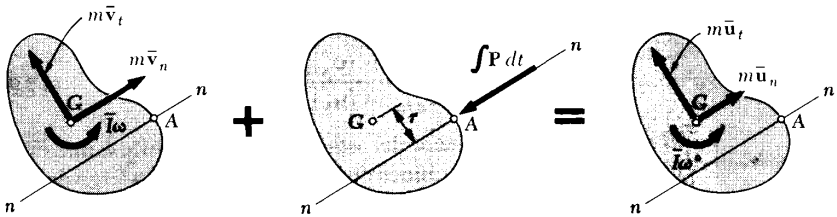
$$e = \frac{\int R\,dt}{\int P\,dt} \tag{17.18}$$

Nos proponemos demostrar que la relación que se estableció en la sección 13.13 entre las velocidades relativas de las dos partículas antes y después del choque, se cumple también entre las componentes a lo largo de la línea de choque de las velocidades relativas de los

dos puntos de contacto A y B. Por consiguiente, nos proponemos demostrar que

$$(v'_B)_n - (v'_A)_n = e[(v_A)_n - (v_B)_n] \tag{17.19}$$

Primero supondremos que el movimiento de los dos sólidos que chocan en la figura 17.10 no tiene restricción. Por tanto, las únicas fuerzas impulsivas que se ejercen sobre los sólidos durante el impacto se aplican en A y B, respectivamente. Considérese el sólido al que pertenece el punto A y dibújense los tres diagramas el de la cantidad de movimiento y los del impulso que corresponden al periodo de deformación (Fig. 17.11). Representamos por $\bar{\mathbf{v}}$ y $\bar{\mathbf{u}}$, respectivamente, la



a) *b)* *c)*

Fig. 17.11

velocidad del centro de masas al principio y al final del periodo de deformación, y por ω y ω^* la velocidad angular del sólido en los mismos instantes. Sumando e igualando las componentes de los momentos lineales e impulsos a lo largo de la línea de choque nn, escribimos

$$m\bar{v}_n - \int P\,dt = m\bar{u}_n \tag{17.20}$$

Sumando e igualando los momentos respecto a G de los momentos lineales y los impulsos, también escribimos

$$\bar{I}\omega - r\int P\,dt = \bar{I}\omega^* \tag{17.21}$$

en donde r representa la distancia perpendicular de G a la línea de choque. Ahora consideremos el periodo de restitución; obtenemos, de una manera similar.

$$m\bar{u}_n - \int R\,dt = m\bar{v}'_n \tag{17.22}$$

$$\bar{I}\omega^* - r\int R\,dt = \bar{I}\omega' \tag{17.23}$$

en las que $\bar{\mathbf{v}}'$ y ω' representan, respectivamente, la velocidad del centro de gravedad y la velocidad angular del cuerpo después del choque. Al despejar los dos impulsos de (17.20) y (17.22) y sustituir en (17.18), y después al despejar los mismos dos impulsos de (17.21) y (17.23) y de nuevo sustituir en (17.18), obtenemos las dos expresiones alternativas siguientes para el coeficiente de restitución:

$$e = \frac{\bar{u}_n - \bar{v}'_n}{\bar{v}_n - \bar{u}_n} \qquad e = \frac{\omega^\circ - \omega'}{\omega - \omega^\circ} \tag{17.24}$$

Al multiplicar por r el numerador y el denominador de la segunda expresión que obtuvimos para e y sumar al numerador y al denominador de la primera expresión respectivamente, tenemos

$$e = \frac{\bar{u}_n + r\omega^\circ - (\bar{v}'_n + r\omega')}{\bar{v}_n + r\omega - (\bar{u}_n + r\omega^\circ)} \tag{17.25}$$

Observando que $\bar{v}_n + r\omega$ representa la componente $(v_A)_n$ a lo largo de nn de la velocidad del punto de contacto A y que, de manera similar, $\bar{u}_n + r\omega^\circ$ y $\bar{v}'_n + r\omega'$ representan, respectivamente, las componentes $(u_A)_n$ y $(v'_A)_n$, escribimos

$$e = \frac{(u_A)_n - (v'_A)_n}{(v_A)_n - (u_A)_n} \tag{17.26}$$

El análisis del movimiento del segundo sólido conduce a una expresión similar para e en términos de las componentes a lo largo de nn de las velocidades sucesivas del punto B. Recordando que $(u_A)_n = (u_B)_n$ y eliminando a estas dos componentes de la velocidad mediante una manipulación similar a la utilizada en la sección 13.13, obtenemos la relación (17.19).

Si uno o los dos sólidos que chocan tienen la restricción de girar alrededor de un punto fijo O, como en el caso de un péndulo compuesto (Fig. 17.12*a*), se aplicará a O una reacción impulsiva (Fig. 17.12*b*). Comprobaremos que, aunque se debe modificar su deducción, las ecuaciones (17.26) y (17.19) siguen siendo válidas. Al aplicar la fórmula (17.16) al periodo de deformación y al periodo de restitución, escribimos

$$I_O\omega - r\int P\,dt = I_O\omega^\circ \tag{17.27}$$

$$I_O\omega^\circ - r\int R\,dt = I_O\omega \tag{17.28}$$

en donde r representa la distancia perpendicular desde el punto fijo O a la línea de impacto. Luego de r los dos impulsos de (17.27) y (17.28) y de sustituir en (17.18), escribimos, después de observar que $r\omega$, $r\omega^\circ$ y $r\omega'$ representan a las componentes a lo largo de nn de las velocidades sucesivas del punto A, escribimos

$$e = \frac{\omega^\circ - \omega'}{\omega - \omega^\circ} = \frac{r\omega^\circ - r\omega'}{r\omega - r\omega^\circ} = \frac{(u_A)_n - (v'_A)_n}{(v_A)_n - (u_A)_n}$$

y comprobamos que aún se satisface la ecuación (17.26). Por consiguiente, la ecuación (17.19) sigue siendo válida cuando uno o los dos sólidos que chocan tiene la restricción de girar alrededor de un punto fijo O.

Con objeto de encontrar las velocidades de los dos sólidos que chocan después del choque, se debe utilizar la relación (17.19) combinada con una o varias otras ecuaciones obtenidas al aplicar el principio del impulso y del momento (véase el problema resuelto 17.10).

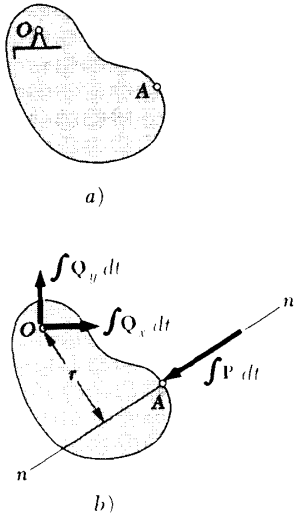
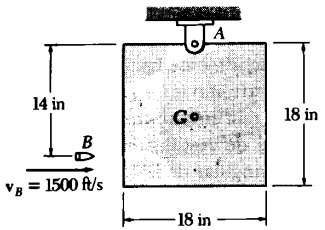


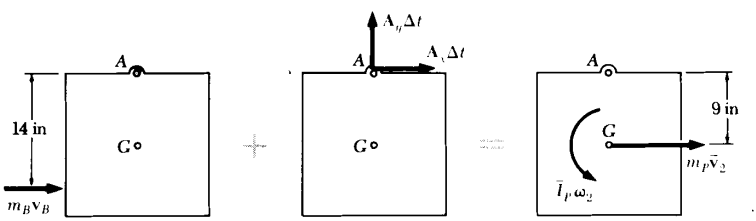
Fig. 17.12



PROBLEMA RESUELTO 17.9

Se dispara una bala B de 0.05 lb con una velocidad horizontal de 1 500 ft/s contra el costado de un panel cuadrado de 20 lb que está suspendido de una bisagra en A. Si el panel se encuentra inicialmente en reposo, determínese *a*) la velocidad angular del panel inmediatamente después de que se incrusta la bala, y *b*) la reacción impulsiva en A, suponiendo que la bala se incrusta en 0.0006s.

Solución. ***Principio del impulso y del momento.*** Consideremos a la bala y el panel como un solo sistema y expresemos que los momentos lineales iniciales de la bala y el panel y los impulsos de las fuerzas externas son, sumados, equivalentes a los momentos lineales finales del sistema. Como el intervalo de tiempo $\Delta t = 0.0006\ s$ es muy corto, despreciamos todas las fuerzas no impulsivas y consideramos sólo a los impulsos externos $\mathbf{A}_x\,\Delta t$ y $\mathbf{A}_y\,\Delta t$.



Momentos lineales sist$_1$ + Impul ext sist$_{1\to 2}$ = Momentos lineales sist$_2$

$+\circlearrowleft$ momentos alrededor de A: $m_B v_B(\frac{14}{12}\text{ ft}) + 0 = m_P\bar{v}_2(\frac{9}{12}\text{ ft}) + \bar{I}_P\omega_2$ (1)

$\overset{+}{\rightarrow}$ componentes x: $m_B v_B + A_x\,\Delta t = m_P\bar{v}_2$ (2)

$+\uparrow$ componentes y: $0 + A_y\,\Delta t = 0$ (3)

El momento central de inercia del panel cuadrado es

$$\bar{I}_P = \tfrac{1}{6}m_P b^2 = \frac{1}{6}\left(\frac{20\text{ lb}}{32.2}\right)(\tfrac{18}{12}\text{ ft})^2 = 0.2329\text{ lb}\cdot\text{ft}\cdot\text{s}^2$$

Sustituyendo este valor y los datos del problema en (1) y observando que

$$\bar{v}_2 = (\tfrac{9}{12}\text{ ft})\omega_2$$

escribimos

$$\left(\frac{0.05}{32.2}\right)(1500)(\tfrac{14}{12}) = 0.2329\omega_2 + \left(\frac{20}{32.2}\right)(\tfrac{9}{12}\omega_2)(\tfrac{9}{12})$$

$$\omega_2 = 4.67\text{ rad/s} \qquad \omega_2 = 4.67\text{ rad/s}\circlearrowleft \blacktriangleleft$$

$$\bar{v}_2 = (\tfrac{9}{12}\text{ ft})\omega_2 = (\tfrac{9}{12}\text{ ft})(4.67\text{ rad/s}) = 3.50\text{ ft/s}$$

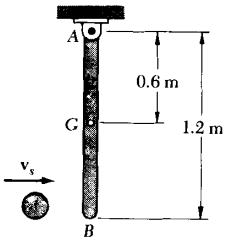
Al sustituir $\bar{v}_2 = 3.50$ ft/s y $\Delta t = 0.0006$ s en la ecuación (2), tenemos

$$\left(\frac{0.05}{32.2}\right)(1500) + A_x(0.0006) = \left(\frac{20}{32.2}\right)(3.50)$$

$$A_x = -259\text{ lb} \qquad \mathbf{A}_x = 259\text{ lb} \leftarrow \blacktriangleleft$$

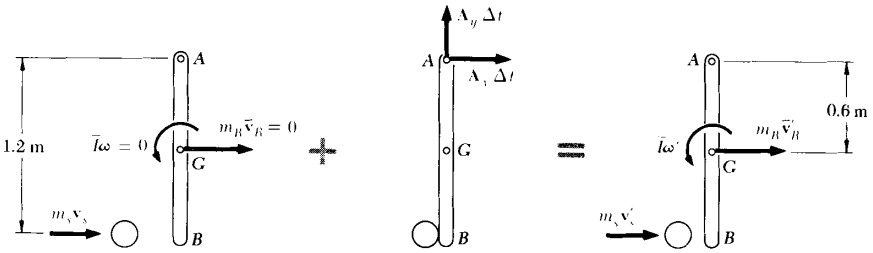
De la ecuación (3), encontramos $A_y = 0$ $\qquad \mathbf{A}_y = 0$ $\blacktriangleleft$

PROBLEMA RESUELTO 17.10



Una esfera de 2 kg que se mueve horizontalmente hacia la derecha con una velocidad inicial de 5 m/s choca con el extremo inferior de una barra rígida AB de 8 kg. La barra está suspendida de una articulación en A y se encuentra inicialmente en reposo. Si el coeficiente de restitución entre la barra y la esfera es 0.80, encuéntrense la velocidad angular de la barra y la velocidad de la esfera inmediatamente después del choque.

Principio del impulso y del momento. Consideremos a la barra y la esfera como un solo sistema y expresemos que los momentos lineales iniciales de la barra y la esfera y los impulsos de las fuerzas externas son, sumados, equivalentes a momentos lineales finales del sistema. Notamos que la única fuerza impulsiva externa al sistema es la reacción impulsiva en A.



Momentos lineales sist$_1$ + Impul ext sist$_{1\to 2}$ = momentos lineales sist$_2$

$+\circlearrowleft$ momentos con respecto a A

$$m_s v_s(1.2\text{ m}) = m_s v'_s(1.2\text{ m}) + m_B\bar{v}'_B(0.6\text{ m}) + \bar{I}\omega' \quad (1)$$

Como la barra gira alrededor de A, tenemos $\bar{v}'_B = \bar{r}\omega' = (0.6\text{ m})\,\omega'$. Además,

$$\bar{I} = \tfrac{1}{12}mL^2 = \tfrac{1}{12}(8\text{ kg})(1.2\text{ m})^2 = 0.96\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

Al sustituir estos valores y los datos del problema en la ecuación (1), tenemos

$$(2\text{ kg})(5\text{ m/s})(1.2\text{ m}) = (2\text{ kg})v'_s(1.2\text{ m}) + (8\text{ kg})(0.6\text{ m})\omega'(0.6\text{ m}) + (0.96\text{ kg}\cdot\text{m}^2)\omega'$$

$$12 = 2.4v'_s + 3.84\omega' \quad (2)$$

Velocidades relativas. Si se eligiera el sentido positivo hacia la derecha, escribimos

$$v'_B - v'_s = e(v_s - v_B)$$

Al sustituir $v_s = 5$ m/s, $v_B = 0$ y $e = 0.80$, obtenemos

$$v'_B - v'_s = 0.80(5\text{ m/s}) \quad (3)$$

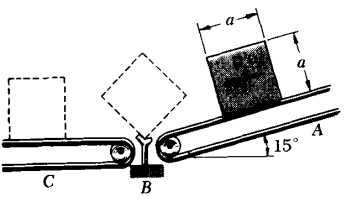
Adviértase de nuevo que la barra gira alrededor de A, entonces

$$v'_B = (1.2\text{ m})\omega' \quad (4)$$

Al resolver las ecuaciones simultáneas (2) a (4), obtenemos

$$\omega' = 3.21\text{ rad/s} \qquad \omega' = 3.21\text{ rad/s}\circlearrowleft$$

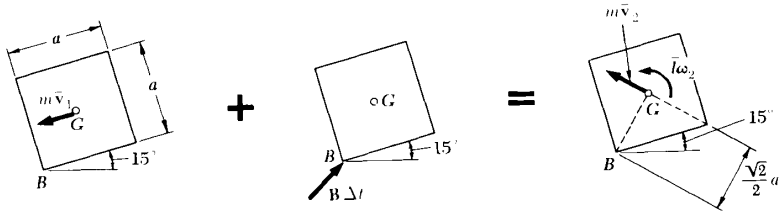
$$v'_s = -0.143\text{ m/s} \qquad v'_s = 0.143\text{ m/s} \leftarrow$$



PROBLEMA RESUELTO 17.11

Un paquete cuadrado de lado a y masa m baja sobre una cinta transportadora A con una velocidad $\bar{v}_1$ constante. Al final de la cinta transportadora, la esquina del paquete golpea contra un soporte rígido en B. Si se supone que el choque en B es perfectamente plástico, dedúzcase una expresión para la velocidad $\bar{v}_1$ mínima a la cual el paquete girará sobre B y alcanzará la cinta transportadora C.

Principio del impulso y del momento. Como el choque entre el paquete y el soporte es perfectamente plástico, el paquete gira sobre B durante el choque. Aplicamos los principios del impulso y del momento al paquete y notamos que la única fuerza impulsiva externa al paquete es la reacción impulsiva en B.



Momentos sist$_1$ + Impul ext sist$_{1\to2}$ = Momentos sist$_2$

$+\circlearrowleft$ momentos respecto a B:
$$(m\bar{v}_1)(\tfrac{1}{2}a) + 0 = (m\bar{v}_2)(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}a) + \bar{I}\omega_2 \qquad (1)$$

Como el paquete gira sobre B, tenemos $\bar{v}_2 = (GB)\omega_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,a\omega_2$. Sustituimos esta expresión, junto con $\bar{I} = \frac{1}{12}ma^2$, en la ecuación (1):

$$(m\bar{v}_1)(\tfrac{1}{2}a) = m(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}a\omega_2)(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}a) + \tfrac{1}{6}ma^2\omega_2 \qquad \bar{v}_1 = \tfrac{1}{3}a\omega_2 \qquad (2)$$

Principio de conservación de la energía. Aplicamos el principio de conservación de la energía entre la posición *2* y la posición *3*.

Posición 2. $V_2 = Wh_2$. Recordando que $\bar{v}_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,a\omega_2$, escribimos

$$T_2 = \tfrac{1}{2}m\bar{v}_2^2 + \tfrac{1}{2}\bar{I}\omega_2^2 = \tfrac{1}{2}m(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}a\omega_2)^2 + \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{6}ma^2)\omega_2^2 = \tfrac{1}{3}ma^2\omega_2^2$$

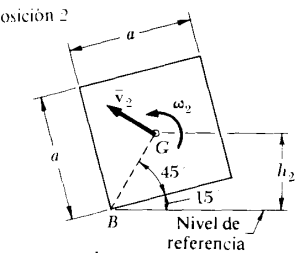
Posición 3. Puesto que el paquete debe alcanzar a la banda transportadora C, debe pasar por la posición 3, en la cual G está en la misma vertical que B. También, como deseamos obtener la velocidad mínima a la cual el paquete llegará a esta posición, elegimos $\bar{v}_3 = \omega_3 = 0$. Por consiguiente, $T_3 = 0$ y $V_3 = Wh_3$.

Conservación de la energía.

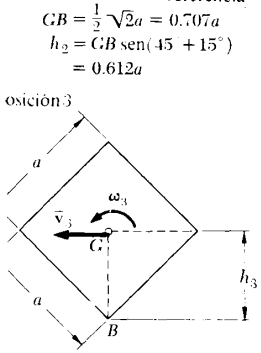
$$T_2 + V_2 = T_3 + V_3$$
$$\tfrac{1}{3}ma^2\omega_2^2 + Wh_2 = 0 + Wh_3$$
$$\omega_2^2 = \frac{3W}{ma^2}(h_3 - h_2) = \frac{3g}{a^2}(h_3 - h_2) \qquad (3)$$

Al sustituir los valores calculados de h_2 y h_3 en la ecuación (3), obtenemos

$$\omega_2^2 = \frac{3g}{a^2}(0.707a - 0.612a) = \frac{3g}{a^2}(0.095a) \qquad \omega_2 = \sqrt{0.285g/a}$$
$$\bar{v}_1 = \tfrac{1}{3}a\omega_2 = \tfrac{1}{3}a\sqrt{0.285g/a} \qquad \bar{v}_1 = 0.712\sqrt{ga}$$ ◄



$GB = \frac{1}{2}\sqrt{2}a = 0.707a$
$h_2 = GB\,\text{sen}(45° + 15°)$
$= 0.612a$



$h_3 = GB = 0.707a$

Problemas

17.95 Se dispara una bala de 30 g con una velocidad horizontal de 400 m/s contra una viga AB de madera, de 4 kg, que está sujeta mediante un pasador en A. Si $h = 600$ mm y la viga está inicialmente en reposo, determínense: *a*) la velocidad del centro de masas G de la viga inmediatamente después de incrustarse la bala y *b*) la reacción impulsiva en A, suponiendo que la bala se incrusta en 1 ms.

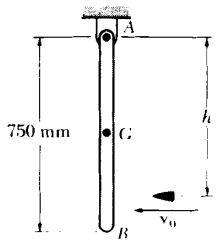


Fig. P17.95

17.96 En el problema 17.95 determínense: *a*) la distancia h que se requiere para que la reacción impulsiva en A sea cero y *b*) la velocidad del centro de masas G correspondiente, inmediatamente después de haberse incrustado la bala.

17.97 Se dispara una bala de 0.12 lb con una velocidad horizontal $\mathbf{v}_0 = -(900 \text{ ft/s})\mathbf{i}$ contra una pieza rectangular de madera de 8 lb, sujeta de una barra horizontal AB. Sabiendo que la madera está inicialmente en reposo y puede girar libremente respecto a AB, determínense: *a*) la distancia h que se requiere para que la reacción impulsiva de la barra AB sea cero y *b*) la velocidad correspondiente del punto D, inmediatamente después de que se haya incrustado la bala.

17.98 Se dispara una bala de 0.12 lb con una velocidad horizontal $\mathbf{v}_0 = -(900 \text{ ft/s})\mathbf{i}$ contra una pieza rectangular de madera, de 8 lb, sujeta de una barra horizontal AB. Sabiendo que $h = 5$ in y que la madera se encuentra inicialmente en reposo, determínense: *a*) la velocidad del punto D inmediatamente después de que se haya incrustado la bala y *b*) la reacción impulsiva de la barra, suponiendo que la bala se haya incrustado en 0.002 s.

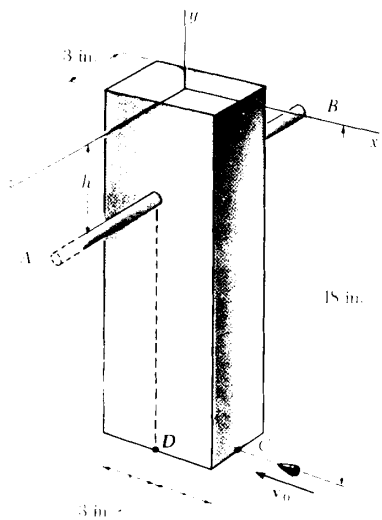


Fig. P17.97 y P17.98

17.99 Un panel de madera de 8 kg suspendido de un soporte pasador en A se encuentra inicialmente en reposo. Se suelta una esfera de metal de 2 kg a partir del reposo en B y cae dentro de un receptáculo semiesférico C unido al panel en un punto situado en su borde superior. Suponiendo un choque perfectamente plástico, determínese la velocidad del centro de masas G del panel inmediatamente después del choque.

17.100 Un panel de madera de 8 kg suspendido de un soporte pasador en A se encuentra inicialmente en reposo. Se suelta una esfera de metal de 2 kg a partir del reposo en B' y cae dentro de un receptáculo semiesférico C' unido al panel al mismo nivel que el centro de masas G. Suponiendo que el choque sea perfectamente plástico determínese la velocidad del centro de masas G del panel inmediatamente después del choque.

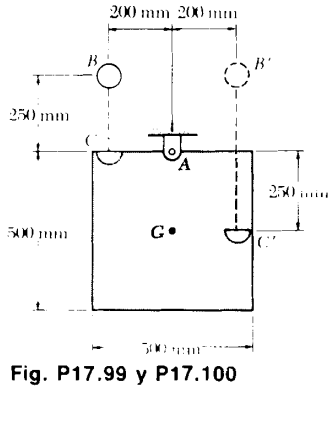


Fig. P17.99 y P17.100

17.101 Una barra uniforme AB de masa m está en reposo sobre una superficie horizontal lisa, cuando el gancho C del cursor D se engancha a un pasador pequeño en A. Si se sabe que el cursor se mueve hacia arriba con una velocidad constante $\mathbf{v}_0$, determínese el impulso ejercido sobre la barra *a*) en A y *b*) en B. Supóngase que la velocidad del cursor no cambia y que el choque es perfectamente plástico.

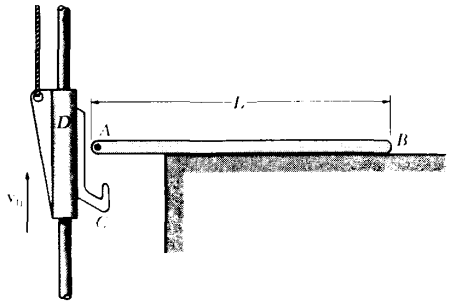


Fig. P17.101

17.102 Un disco uniforme de radio r y masa m se sostiene sobre una mesa horizontal lisa. Inicialmente el disco gira libremente respecto a su centro de masas G con una velocidad angular constante ω_1. Repentinamente se mueve el seguro B a la derecha y lo golpea un tope pequeño A soldado al borde del disco. Suponiendo que el choque de A y B es perfectamente plástico, determínese la velocidad angular del disco y la velocidad de su centro de masas inmediatamente después del choque.

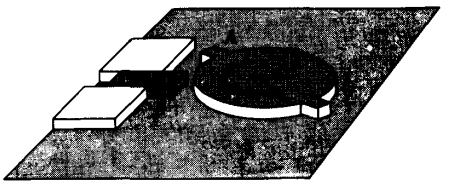


Fig. P17.102

17.103 Una varilla uniforme AB tiene en ambos extremos los ganchos que se indican y se sostiene sobre una mesa horizontal lisa. Inicialmente la varilla está enganchada en A a un pasador fijo C respecto del cual gira con una velocidad angular constante ω_1. Repentinamente el extremo B de la varilla golpea y se engancha al pasador D haciendo que se suelte el extremo A. Determínese la velocidad angular ω_2 de la varilla respecto a D después del choque.

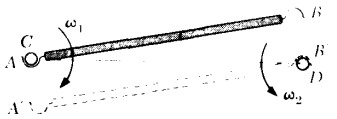


Fig. P17.103

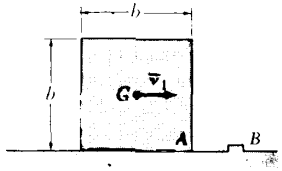


Fig. P17.104

17.104 Un bloque cuadrado de masa m se mueve a lo largo de una superficie horizontal lisa con una velocidad $\mathbf{v}_1$ y golpea un pequeño obstáculo en B. Suponiendo que el impacto entre la esquina A y el obstáculo B es perfectamente plástico, determínense la velocidad angular del bloque y la velocidad de su centro de masas G inmediatamente después del choque.

17.105 Una varilla rígida de masa m y radio central de giro $\bar{k}$ golpea un botón rígido en A, con una velocidad vertical de magnitud $\bar{v}_1$ y sin velocidad angular. Suponiendo un choque perfectamente plástico, demuéstrese que el valor de la velocidad de G después del choque es

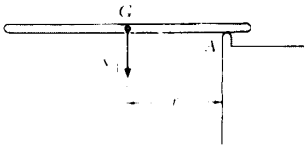


Fig. P17.105

$$\bar{v}_2 = \bar{v}_1 \frac{r^2}{r^2 + \bar{k}^2}$$

17.106 Una varilla de masa m y longitud L se suelta del reposo en la posición mostrada y pega en el filo D. Suponiendo un choque perfectamente plástico en D, determínense para $b = 0.6\,L$ *a*) la velocidad angular de la varilla inmediatamente después del choque y *b*) el ángulo máximo que girará la varilla después del choque.

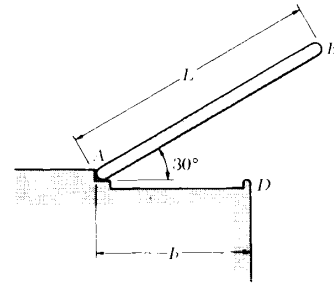


Fig. P17.106 y P17.107

17.107 Una varilla de masa m y longitud L parte del reposo en la posición que aquí se muestra y choca con D. Si se supone un choque perfectamente elástico en D ($e = 1$), determínese la distancia b para la cual la varilla rebotará sin velocidad angular.

17.108 Resuélvase el problema 17.104 suponiendo que el choque entre la esquina A y el obstáculo B es perfectamente elástico.

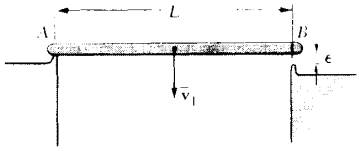


Fig. P17.109

17.109 Una varilla uniforme de longitud L se deja caer sobre soportes rígidos en A y B. Inmediatamente después de chocar con la esquina A, la velocidad de la barra es $\mathbf{v}_1$. Como el soporte B está ligeramente más bajo que el soporte A, la barra choca con A antes de chocar con B. Suponiendo un choque perfectamente elástico en A y B, calcúlense la velocidad angular de la barra y la velocidad de su centro de masas inmediatamente después que la barra *a*) choca con el soporte A, *b*) choca con el soporte B y *c*) vuelve a chocar con el soporte A.

17.110 Una varilla de longitud L, que forma un ángulo β con la vertical, choca con un plano horizontal liso en A, con una velocidad vertical $\bar{\mathbf{v}}_1$ y sin velocidad angular. Suponiendo que el choque en A sea perfectamente elástico, dedúzcase una expresión para la velocidad angular de la barra inmediatamente después del choque.

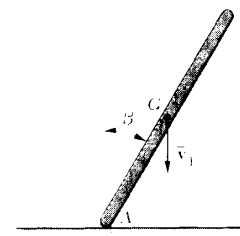


Fig. P17.110

17.111 Resuélvase el problema 17.102 suponiendo que el choque entre el tope pequeño A y el seguro B es perfectamente elástico.

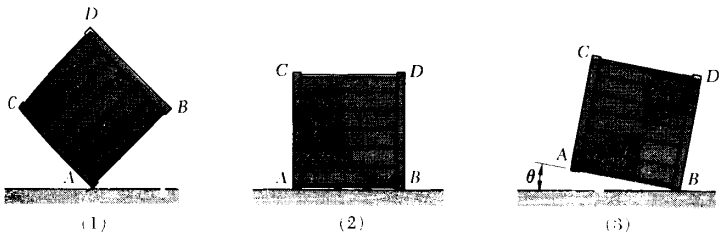


Fig. P17.112

17.112 Una caja de ensamblaje, cuadrada y cargada uniformemente, se suelta desde el reposo con su esquina D en la misma vertical que A; gira sobre A hasta que la esquina B choca con el suelo y entonces gira sobre B. El suelo es lo suficientemente rugoso para impedir que deslice y el impacto en B es perfectamente plástico. Simbolizando con ω_0 la velocidad angular de la caja inmediatamente antes de que B choque con el suelo, obténganse *a*) la velocidad angular de la caja inmediatamente después de que B choque con el suelo, *b*) la fracción de la energía cinética de la caja que se pierde durante el choque y *c*) el ángulo θ que girará la caja después de que B choque con el suelo.

17.113 La barra AB de masa 1.5 kg y longitud $L = 0.5$ m, está suspendida de un pasador A que se puede mover libremente sobre una guía horizontal. Si se aplica en B un impulso $\mathbf{Q}\,\Delta t = (1.8\ \text{N} \cdot \text{s})\mathbf{i}$, encuéntrese el ángulo máximo θ_m que girará la barra después del choque.

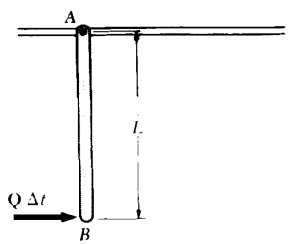


Fig. P17.113

17.114 Para la barra del problema 17.113, determínese la magnitud $\mathbf{Q}\Delta t$ del impulso con el cual el ángulo máximo que gire la barra es de *a*) 90° y *b*) 120°.

17.115 Una varilla de longitud l y peso W parte del reposo en la posición que se muestra en la figura. Se observa que la varilla rebota hacia una posición horizontal después de chocar con la superficie vertical. *a*) Determínese el coeficiente de restitución entre el punto k y la superficie. *b*) Demuéstrese que el mismo rebote se puede esperar para cualquier posición de k.

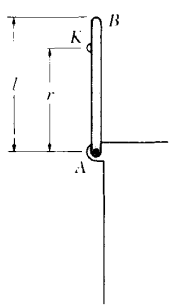


Fig. P17.115

17.116 Una varilla CD, de longitud L y masa m, se coloca vertical como aquí se indica sobre una superficie horizontal sin rozamiento. Una segunda barra idéntica AB se mueve sobre la superficie con una velocidad $\bar{v}_1$ cuando su extremo B choca de lleno con el extremo C de la barra CD. Suponiendo que el choque sea perfectamente elástico. obténgase inmediatamente después del impacto *a*) la velocidad de la barra AB, *b*) la velocidad angular de la barra CD y *c*) la velocidad del centro de masas de la barra CD.

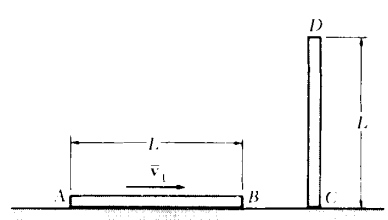


Fig. P17.116

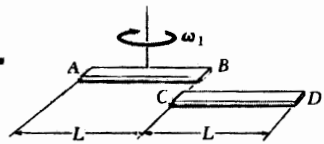


Fig. P17.117

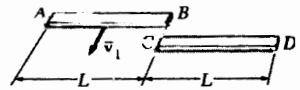


Fig. P17.118

17.117 y 17.118 Dos barras idénticas AB y CD, cada una de longitud L, pueden moverse libremente sobre una superficie horizontal lisa. La barra AB se mueve como se indica cuando el extremo B choca con el extremo C de la barra CD, la cual está en reposo. Sabiendo que en el instante del choque las barras son paralelas y suponiendo un choque perfectamente elástico ($e = 1$), determínense la velocidad angular de cada barra y la velocidad del centro de masas inmediatamente después del choque.

17.117 La barra AB gira sobre su centro de masas con una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_1$.

17.118 La barra AB se mueve con una velocidad $\bar{\mathbf{v}}_1$ en una dirección perpendicular a los ejes longitudinales de las barras.

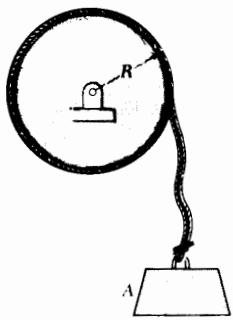


Fig. P17.119

17.119 El bloque A de masa m se ata a una cuerda que está enrollada alrededor de un disco uniforme de masa M. El bloque parte del reposo y cae a una distancia h antes de que la cuerda se tense. Obténgase una expresión para la velocidad del bloque y una para la velocidad angular del disco, inmediatamente después del choque Supóngase que el impacto es *a*) perfectamente plástico y *b*) perfectamente elástico.

17.120 Resuélvase el problema 17.119 suponiendo que $M = 8$ kg, $m = 3$ kg, $R = 250$ mm y $h = 900$ mm.

17.121 Se deja caer una esfera de masa m sobre el extremo de una varilla BD de longitud L y masa $2m$. La barra está unida a un soporte de pasador en C, que se encuentra a una distancia $c = \frac{1}{4}L$ del extremo B, Indicando con $\mathbf{v}_1$ la velocidad de la esfera justo antes de chocar con la barra y suponiendo un choque perfectamente elástico, encuéntrense inmediatamente después del choque *a*) la velocidad de la esfera y *b*) la velocidad angular de la barra.

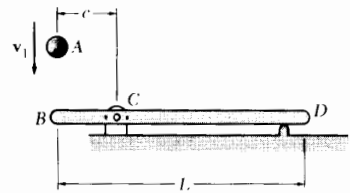


Fig. P17.121

17.122 Una esfera A de masa m y radio r rueda sin deslizar con una velocidad $\bar{\mathbf{v}}_1$ sobre un plano horizontal y choca de lleno con una esfera idéntica B, que se encuentra en reposo. Representando con μ_k el coeficiente de rozamiento dinámico entre las esferas y el plano, despreciando el rozamiento entre las esferas y suponiendo un choque perfectamente elástico ($e = 1$), determínense *a*) la velocidad inicial lineal y angular de cada esfera inmediatamente después del choque, *b*) la velocidad de cada esfera después de que haya comenzado a rodar uniformemente y *c*) discútase el caso especial en que $\mu_k = 0$.

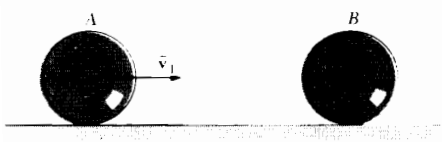


Fig. P17.122

17.123 En un juego de billar, la bola A rueda sin deslizar con una velocidad $\bar{\mathbf{v}}_0$ al chocar oblicuamente con la bola B, que se encuentra en reposo. Representando con r el radio de cada bola, con μ_k el coeficiente de rozamiento dinámico entre las bolas y la mesa, despreciando el rozamiento entre las bolas y suponiendo un impacto perfectamente elástico ($e = 1$), obténganse *a*) la velocidad lineal y angular de cada bola inmediatamente después del impacto y *b*) la velocidad de B después de que haya comenzado a rodar uniformemente.

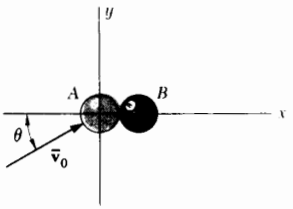


Fig. P17.123

17.124 En el problema 17.123, encuéntrese la ecuación de la trayectoria descrita por el centro de la bola A mientras está deslizando.

17.125 Con relación a las bolas de billar del problema 17.123, determínense *a*) la velocidad de la bola A después de que ha comenzado a rodar otra vez sin deslizar y *b*) el ángulo ϕ formado por las velocidades de las bolas A y B después de que han dejado de deslizar.

17.126 Una pequeña pelota de goma de radio r se lanza contra un suelo rugoso con una velocidad de $\bar{\mathbf{v}}_A$ de módulo v_0 y una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_A$ de módulo ω_0. Se observa que la pelota rebota de A a B, luego de B a A, después de A a B, etc. Suponiendo un choque perfectamente elástico, encuéntrese el módulo ω_0 necesario de la velocidad angular inicial, en términos de v_0 y de r.

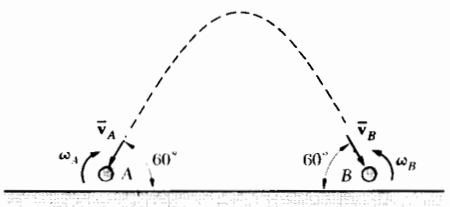


Fig. P17.126

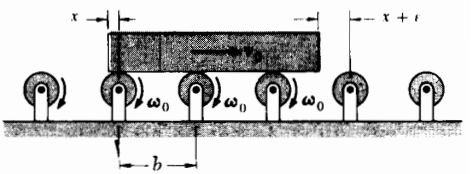


Fig. P17.127

17.127 Una placa rectangular de masa m_s se mueve sobre una serie de rodillos, cada uno de los cuales es equivalente a un disco de masa m_R, que se encuentra inicialmente en reposo. Como la longitud de la placa es ligeramente menor que tres veces la distancia b entre dos rodillos adyacentes, la placa se separa de un rodillo un poco antes de llegar a otro. Cada vez que un rodillo entra en contacto con la placa, se produce deslizamiento entre él y la placa durante un corto periodo (un tiempo menor que el que tarda la placa en recorrer la distancia b). Indicando con $\bar{\mathbf{v}}_0$ la velocidad de la placa en la posición que aquí se muestra, calcúlese su velocidad después que ha recorrido una distancia *a*) b y *b*) nb.

17.128 Resuélvase el problema 17.127 suponiendo que $v_0 = 3$ m/s, $m_s = 18$ kg, $m_R = 3$ kg y $n = 8$.

*17.129 Cada una de las barras AB y BC es de longitud $L = 15$ in y de peso $W = 2.5$ lb. Determínese la velocidad angular de cada barra inmediatamente después de aplicar en C el impulso $\mathbf{Q}\,\Delta t = (0.30 \text{ lb} \cdot \text{s})\mathbf{i}$.

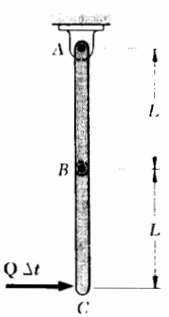


Fig. P17.129

Repaso y Resumen

En este capítulo se examinó nuevamente el teorema de las fuerzas vivas, el método del impulso y el momento. En la primera parte del capítulo se estudió el teorema de las fuerzas vivas, así como su aplicación en el análisis del movimiento de sólidos rígidos y de sistemas de sólidos rígidos.

Teorema de las fuerzas vivas para un sólido rígido

En la sección 17.2, inicialmente se expresó el teorema de las fuerzas vivas para un sólido rígido en la forma

$$T_1 + U_{1\to 2} = T_2 \tag{17.1}$$

donde T_1 y T_2 representan los valores inicial y final de la energía cinética del sólido rígido y $U_{1\to 2}$ el trabajo de las *fuerzas exteriores* que actúan sobre el sólido rígido.

Trabajo de una fuerza o un par

En la sección 17.3 se recordó la expresión obtenida en el capítulo 13 para el trabajo de una fuerza **F** aplicada en un punto A, es decir

$$U_{1\to 2} = \int_{s_1}^{s_2} (F \cos \alpha)\, ds \tag{17.3'}$$

donde F era el módulo de la fuerza, α el ángulo que forma con la dirección del movimiento de A y s la variable de integración que mide la distancia recorrida por A a lo largo de su trayectoria.

También se dedujo la expresión para el *trabajo de un par de momento* **M** aplicado a un sólido rígido durante una rotación en θ del sólido rígido:

$$U_{1\to 2} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M\, d\theta \tag{17.5}$$

Energía cinética en movimiento plano

Después se dedujo una expresión para la energía cinética de un sólido rígido en movimiento plano (sección 17.4). Se escribió:

$$T = \tfrac{1}{2} m\bar{v}^2 + \tfrac{1}{2}\bar{I}\omega^2 \tag{17.9}$$

donde $\bar{v}$ es la velocidad del centro de masas G del sólido, ω la velocidad angular del cuerpo e $\bar{I}$ su momento de inercia respecto a un eje a través de G perpendicular al plano de referencia (Fig. 17.13) (problema resuelto 17.3).

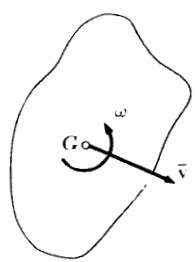


Fig. 17.13

Se observó que la energía cinética de un sólido rígido en movimiento plano se podría separar en dos partes: 1) la energía cinética $\frac{1}{2} m\bar{v}^2$ asociada al movimiento del centro de masas G del sólido y 2) la energía cinética $\frac{1}{2} \bar{I}\omega^2$ asociada a la rotación del sólido respecto de G.

Energía cinética de rotación

En el caso de un sólido rígido que gira respecto a un eje fijo que pasa por O con una velocidad angular ω, se tuvo

$$T = \tfrac{1}{2} I_O \omega^2 \tag{17.10}$$

donde I_0 era el momento de inercia del sólido respecto al eje fijo. Se observó que el resultado obtenido no se limitaba a la rotación de placas planas Oi de sólidos simétricos respecto a un plano de referencia; es válido independientemente de la forma del cuerpo o de la posición del eje de rotación.

Sistemas de sólidos rígidos

Se puede aplicar la ecuación (17.1) al movimiento de sistemas de sólidos rígidos (sección 17.5) siempre y cuando todas las fuerzas que actúen sobre los distintos sólidos relacionados, tanto internas como externas al sistema, se incluyan en el cálculo de $U_{1\to 2}$. Sin embargo, en el caso de sistemas que consten de elementos conectados mediante pasadores, o bloques y poleas conectados mediante cuerdas inextensibles o engranajes coordinados, los puntos de aplicación de las fuerzas internas se mueven a través de distancias iguales y su trabajo se anula (problemas resueltos 17.1 y 17.2).

Conservación de la energía

Cuando un sólido rígido, o un sistema de sólidos rígidos, se mueve bajo la acción de fuerzas conservativas, el teorema de las fuerzas vivas se puede expresar en la forma

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \tag{17.12}$$

que se conoce como *principio de conservación de energía* (sección 17.6). Se puede utilizar al resolver problemas relacionados con fuerzas conservativas tales como la fuerza de gravedad o la fuerza ejercida por un resorte (problemas resueltos 17.4 y 17.5). Sin embargo, cuando sea necesario determinar una reacción, el principio de conservación de la energía debe complementarse con la aplicación del principio de D'Alembert (problema resuelto 17.4).

Potencia

En la sección 17.7 se amplió el concepto de potencia de un cuerpo en rotación sujeto a un par al escribir

$$\text{Potencia} = \frac{dU}{dt} = \frac{M\, d\theta}{dt} = M\omega \tag{17.13}$$

donde M es la magnitud del par y ω la velocidad angular del cuerpo.

La parte intermedia del capítulo se dedicó al método de impulso y del momento y su aplicación a la solución de diversos tipos de problemas relativos al movimiento plano de placas rígidas y de sólidos rígidos simétricos respecto a un plano de referencia.

Principio del impulso y del momento para un sólido rígido

Inicialmente se recordó el *principio del impulso y del momento* como se dedujo en la sección 14.9 para un sistema de partículas y se aplicó al *movimiento de un sólido rígido* (sección 17.8)

$$\textbf{Momentos del sistema}_1 + \textbf{Impulso externo al sistema}_{1 \to 2} = \textbf{Momentos del sistema}_2 \qquad (17.14)$$

Después se demostró que para una placa rígida o un sólido rígido simétrico respecto a un plano de referencia, el sistema de los momentos lineales de las partículas que forman el sólido es equivalente a un vector $m\bar{v}$ unido al centro de masas G del sólido y a un par $\bar{I}\omega$ (Fig. 17.14). El vector $m\bar{v}$ está asociado a la traslación del sólido con G y representa el momento lineal del cuerpo, mientras que el par $I\omega$ corresponde a la rotación del sólido respecto de G y representa el *momento angular* del cuerpo respecto de un eje que pasa por G.

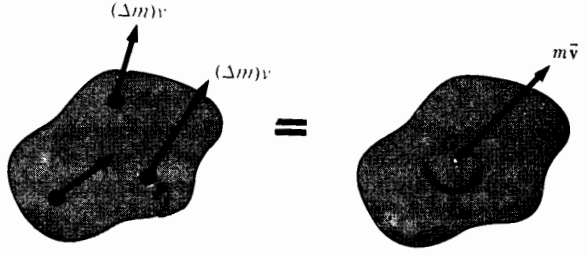


Fig. 17.14

La ecuación (17.14) se puede expresar gráficamente como se indica en la figura 17.15, al dibujar tres diagramas que representan respectivamente el sistema de los momentos iniciales del sólido, los impulsos de las fuerzas externas que actúan sobre él y el sistema de momentos finales del sólido. Sumando e igualando respectivamente las *componentes x*, *las componentes y* y los *momentos respecto a cualquier punto dado* de los vectores mostrados en esa figura, se obtienen tres ecuaciones de movimiento que pueden ser resueltas para las incógnitas deseadas (problemas resueltos 17.6 y 17.7).

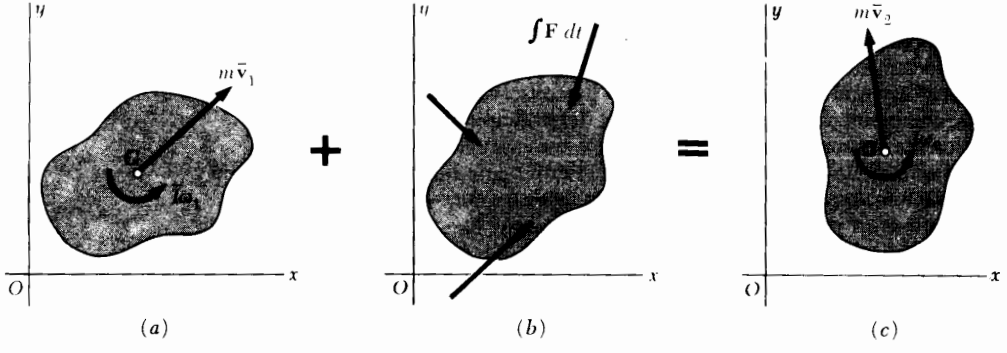


Fig. 17.15

En los problemas que se refieren a varios sólidos rígidos conectados (sección 17.9) se puede considerar cada sólido por separado (problema resuelto 17.6) o, si no hay más de tres incógnitas, el principio del impulso y del momento se aplicará al sistema en su totalidad, considerando solamente los impulsos de las fuerzas externas (problema resuelto 17.8).

Conservación del momento angular

Cuando las líneas de acción de todas las fuerzas externas que actúan sobre un sistema de sólidos rígidos pasan a través de un punto

O dado, se conserva el momento angular del sistema respecto a *O* (sección 17.10). Se sugirió que los problemas relacionados con la conservación del momento angular se podían resolver mediante el método general descrito anteriormente (problema resuelto 17.8).

Percusiones

La última parte del capítulo se dedicó a las percusiones y al *choque excéntrico* de sólidos rígidos. En la sección 17.11 se recordó que el método de impulso y del momento es el único que puede practicarse para la solución de problemas relacionados con las percusiones y que el cálculo de los impulsos en tales problemas es particularmente simple (problema resuelto 17.9).

Choque excéntrico

En la sección 17.12 se recordó que el choque excéntrico de dos sólidos rígidos se definió como un choque en el cual los centros de masas de los cuerpos en colisión no están situados sobre la línea del choque. Se demostró que, en tal situación, se mantiene una relación similar a la obtenida en el capítulo 13 para el impacto central de dos partículas con coeficiente de restitución e, pero que deben emplearse ***las velocidades de los puntos A y B donde se efectúa el contacto durante el choque***. Se tiene

$$(v'_B)_n - (v'_A)_n = e[(v_A)_n - (v_B)_n] \qquad (17.19)$$

donde $(v_A)_n$ y $(v_B)_n$ son las componentes a lo largo de la línea de choque de las velocidades de A y de B antes del choque, y $(v'_A)_n$ y $(v'_B)_n$ sus componentes después del choque (Fig. 17.16).

La ecuación 17.19 es aplicable no sólo cuando los sólidos que colisionan se mueven libremente después del choque, sino también cuando los sólidos están restringidos parcialmente en su movimiento. Deberán usarse junto con una o varias ecuaciones de las obtenidas al aplicar el principio del impulso del momento (problema resuelto 17.10). También se consideraron problemas donde se podían combinar el método de impulso y del momento y el teorema de las fuerzas vivas (problema resuelto 17.11).

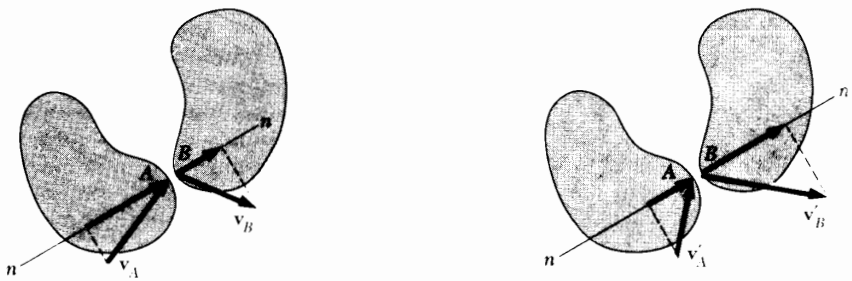


Fig. 17.16 (*a*) Antes del choque (*b*) Después del choque

Problemas de Repaso

17.130 Un cascarón esférico de pared delgada con masa m y radio r se utiliza como cubierta protectora en un experimento de transporte especial. Con objeto de quitar la cubierta se separa en dos cascarones hemisféricos que alcanzan la posición final que se muestra en la figura. Si durante un ensayo de la cubierta la velocidad an-

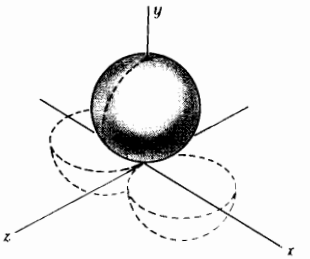


Fig. P17.130

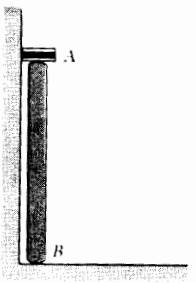


Fig. P17.131

gular inicial del cascarón es $\omega = \omega_0\mathbf{j}$, calcúlese la velocidad angular de la cubierta después de que ha llegado a su posición final. (*Sugerencia*. Para un cascarón de paredes delgadas, $I_{diámetro} = \frac{2}{3}mr^2$.)

17.131 En el extremo superior de la barra AB se coloca una cajita de fósforos. Al extremo B de la barra se le da un ligero empujón horizontal que causa que deslice sobre el suelo horizontal. Suponiendo que no hay rozamiento y despreciando el peso de la cajita de fósforos, encuéntrese el ángulo θ que habrá girado la barra cuando la cajita pierda contacto con la misma.

17.132 Un panel uniforme cuadrado, de lado l y masa m, se sostiene sobre una mesa horizontal lisa. El panel se está moviendo hacia la derecha con una velocidad $\bar{\mathbf{v}}_1$ cuando un gancho situado en el punto medio E del lado AB se engancha con el pasador fijo F. Suponiendo que el choque es perfectamente plástico, determínense la velocidad angular del panel al girar respecto a F después del choque.

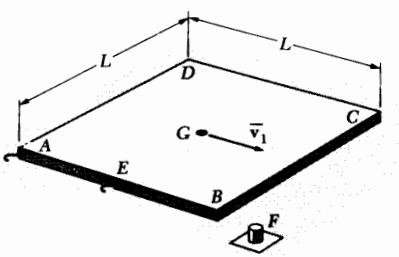


Fig. P17.132

17.133 Resuélvase el problema 17.132 suponiendo que se elimina el gancho en E y que un gancho situado en la esquina A se engancha con el pasador fijo F.

17.134 El centro de masas G de una rueda de radio R está situado a una distancia r de su centro geométrico C. El radio central de giro de la rueda se representa por $\bar{k}$. Conforme la rueda gira libremente y sin deslizar sobre un plano horizontal, se observa que su velocidad angular varía. Indicando con ω_1, ω_2 y ω_3, respectivamente, la velocidad angular de la rueda cuando G está encima de C

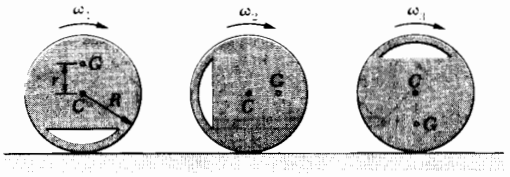


Fig. P17.134

(en su vertical) al nivel de C y debajo de C (en su vertical) demuéstrese que ω_1, ω_2 y ω_3 satisfacen la relación.

$$\frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_3^2 - \omega_2^2} = \frac{g/R + \omega_1^2}{g/R + \omega_3^2}$$

17.135 Una varilla delgada de longitud L está cayendo con una velocidad $\bar{\mathbf{v}}_1$ en el instante en que las cuerdas se ponen tensas simultáneamente. Suponiendo que los choques son perfectamente plásticos, determínense la velocidad angular de la varilla y la velocidad de su centro de masas, inmediatamente después de que las cuerdas tensan.

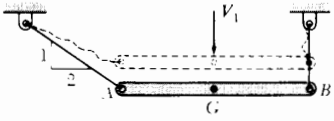


Fig. P17.135

17.136 Se dispara una bala de 25 g con una velocidad horizontal de 400 m/s, contra la esquina inferior de un panel cuadrado, de peso 3 kg y lado b = 500 mm. El panel se sostiene mediante dos alambres verticales como se indica. Determínense inmediatamente después de que la bala se ha incrustado *a*) la velocidad del centro de masas G y *b*) la velocidad angular del panel.

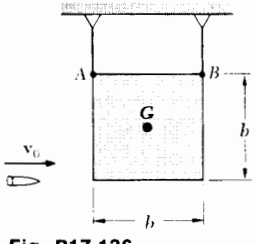


Fig. P17.136

17.137 Una pequeña pelota de 500 g puede deslizar dentro de un tubo delgado de longitud 1.2 m y masa 1.5 kg, que gira libremente respecto de un eje vertical que pasa a través de su centro C. Si la velocidad angular del tubo es 8 rad/s cuando la bola pasa a través de C, determínese la velocidad angular del tubo *a*) justo antes de que la bola salga del tubo y *b*) justo después que la bola haya salido del tubo.

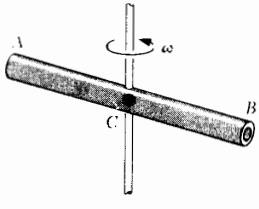


Fig. P17.137

17.138 Si se sabe que en el problema 17.137 la velocidad de la bola es de 1.8 m/s al pasar por C, determínense las componentes radial y transversal de la velocidad de la bola al salir del tubo en B.

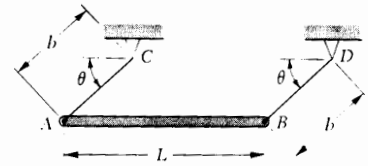


Fig. P17.139

17.139 Una barra uniforme de longitud L y peso W está unida a dos alambres, cada uno de longitud b. La barra se suelta desde el reposo cuando $\theta = 0$ y se columpia hasta la posición $\theta = 90°$, donde el alambre BD se rompe de repente. Calcúlese la tensión en el alambre AC *a*) inmediatamente antes de que se rompa el alambre BD y *b*) inmediatamente después de romperse.

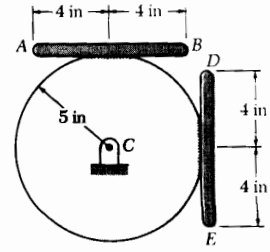


Fig. P17.140

17.140 Dos barras delgadas de 5 lb se sueldan al contorno de un disco uniforme de 8 lb, como se indica en la figura. Si se sabe que en la posición que aquí se muestra el conjunto tiene una velocidad angular de 10 rad/s en el sentido de giro de las manecillas del reloj, determínense las velocidades angulares máxima y mínima del conjunto, al girar respecto al pasador C.

17.141 Una esfera uniforme de radio R rueda hacia la derecha, sin deslizar, sobre una superficie horizontal y choca con un escalón de altura $\frac{1}{2}R$. Suponiendo que el choque es perfectamente plástico y que la esfera no desliza sobre la esquina del escalón, determínense *a*) la velocidad angular de la esfera y la velocidad de su centro inmediatamente después del choque y *b*) la mínima velocidad inicial $\bar{v}_1$ con la que la esfera alcanzará el nivel superior del escalón.

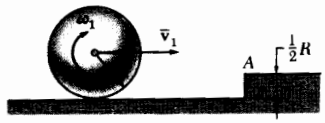


Fig. P17.141

Los siguientes problemas se proponen para ser resueltos con un ordenador.

17.C1 Cada una de las barras que se muestran en la figura tienen una longitud de 0.75 m y una masa de 6 kg. Si se sabe que el sistema abandona el reposo cuando $\beta = 60°$, elabórese un programa de ordenador y utilícese el mismo para calcular la velocidad angular de la barra AB y la velocidad del punto D, para valores de β de 60 a 0°, en intervalos de 5°.

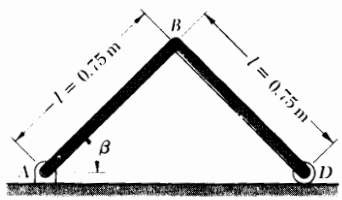


Fig. P17.C1

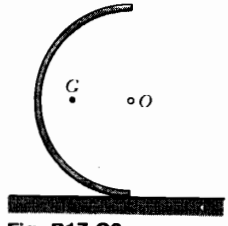


Fig. P17.C2

17.C2 Una media sección de un tubo de masa m y radio r se suelta del reposo en la posición indicada y rueda sin deslizar. *a*) Elabórese un programa de ordenador para determinar la velocidad angular de esa sección después de rodar a través de un ángulo θ. *b*) Con el programa calcúlese la velocidad angular de una media sección de tubo de radio $r = 8$ in para valores de θ de 0 a 90°, en intervalos de 5°. Obsérvese que $GO = 2r/\pi$ y que por el teorema de Steiner $\bar{I} = mr^2 - m(GO)^2$. *c*) Amplíese el programa para determinar el tiempo aproximado requerido para que la media sección ruede 180°, utilizando intervalos de 1°. [*Sugerencia.* El tiempo Δt_i requerido para que la media sección ruede a través de un ángulo $\Delta\theta_i$ se puede obtener al dividir $\Delta\theta_i$, expresado en radianes, entre la velocidad angular promedio $\frac{1}{2}(\omega_i + \omega_{i+1})$ de la media sección sobre Δt_i si la aceleración angular de la media sección se supone que permanece constante en Δt_i.]

17.C3 La barra AB de 1.5 kg y longitud $L = 240$ mm desliza libremente dentro del tubo CD de masa m_t. Si se sabe que la velocidad angular del conjunto era $\omega_1 = 8$ rad/s cuando la barra estaba completamente dentro del tubo ($x = 0$), elabórese un programa de ordenador y úsese para calcular la velocidad angular del conjunto y la velocidad de la barra relativa al tubo, para valores de x de 40 a 200 mm en intervalos de 40 mm, cuando *a*) $m_t = 0.75$ kg, *b*) $m_t = 1.5$ kg y *c*) $m_t = 3$ kg.

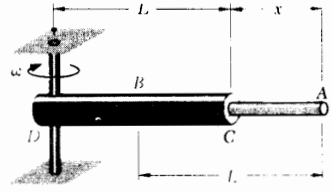


Fig. P17.C3

17.C4 Se lanza una esfera de 0.8 kg sobre el extremo de una barra BD de longitud $L = 900$ m y masa $m = 1.6$ kg. Si se sabe que la esfera golpea el extremo B de la barra con una velocidad $v_1 = 10$ m/s y se supone un choque perfectamente plástico, elabórese un programa de ordenador y utilícese el mismo para calcular, inmediatamente después del choque, la velocidad de la esfera y la velocidad angular de la barra para valores de x de 0 a 400 mm, en intervalos de 25 mm.

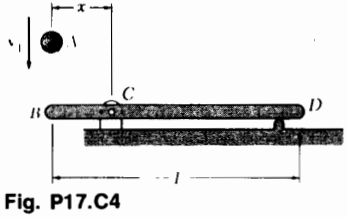


Fig. P17.C4

CAPÍTULO DIECIOCHO

Cinética del sólido rígido en tres dimensiones

***18.1. Introducción** En los capítulos 16 y 17 nos dedicamos al estudio del movimiento plano del sólido rígido y de sistemas de sólidos rígidos. En el capítulo 16 y en la segunda mitad del capítulo 17 (método del momento), nuestro estudio se restringió aún más al de placas planas y de cuerpos simétricos respecto a planos de referencia. Sin embargo, la mayor parte de los resultados fundamentales obtenidos en esos dos capítulos continúan siendo válidos en el caso del movimiento de un sólido rígido en tres dimensiones.

Por ejemplo, las dos ecuaciones fundamentales

$$\Sigma \mathbf{F} = m\bar{\mathbf{a}} \tag{18.1}$$

$$\Sigma \mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G \tag{18.2}$$

en las que se basó el análisis del movimiento plano de un sólido rígido, siguen siendo válidas en el caso del movimiento más general de un sólido rígido. Como se indicó en la sección 16.2, estas ecuaciones expresan que el sistema de las fuerzas exteriores es equivalente al sistema consistente en el vector $m\bar{\mathbf{a}}$ unido a G y el par de momento $\dot{\mathbf{H}}_G$ (Fig. 18.1). Pero la relación $\mathbf{H}_G = \bar{I}\omega$ que nos permite determinar el momento angular de una placa rígida, y que jugó un papel importante en la solución de problemas relacionados con el movimiento plano de placas y sólidos simétricos respecto al plano de referencia deja de ser válida en el caso de sólidos asimétricos o del movimiento tridimensional. Por lo tanto, será necesario desarrollar en la sección 18.2 un método más general para calcular el momento angular $\mathbf{H}_G$ de un sólido rígido en tres dimensiones.

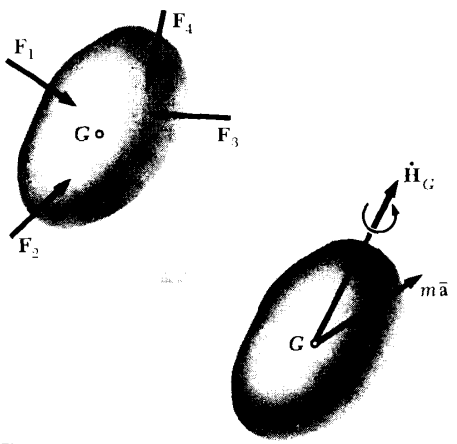


Fig. 18.1

De forma similar, la característica principal del método del impulso y del momento estudiado en la sección 17.7, es decir, la reducción de los momentos lineales de las partículas de un sólido rígido a un vector momento lineal $m\bar{\mathbf{v}}$, unido al centro de masas G del cuerpo y un par de momento angular $\mathbf{H}_G$, continúa siendo válida. Sin embargo la relación $\mathbf{H}_G = \bar{I}\omega$ tendrá que descartarse y

sustituirse por la relación más general que se presentará en la sección 18.2.

De modo similar el teorema de las fuerzas vivas (Secc. 17.2) y el principio de la conservación de la energía (Secc. 17.6) se siguen aplicando en el caso de movimiento de un sólido rígido en tres dimensiones, pero la expresión obtenida en la sección 17.4 para la energía cinética de un sólido rígido en movimiento plano se sustituirá por una nueva expresión que se obtendrá en la sección 18.4 para un sólido rígido en movimiento tridimensional.

En la segunda parte del capítulo aprenderemos primero a determinar la derivada temporal $\dot{\mathbf{H}}_G$ del momento angular $\mathbf{H}_G$ de un sólido rígido tridimensional, empleando un sistema de referencia móvil solidario al sólido respecto al cual los momentos y los productos de inercia del sólido permanecen constantes (Secc. 18.5). Expresaremos entonces las ecuaciones (18.1) y (18.2) en forma de croquis que puedan utilizarse para resolver varios problemas relacionados con el movimiento tridimensional de los sólidos rígidos (Secc. 18.6 a la 18.8).

La última parte del capítulo (Secc. 18.9 a la 18.11) se dedica al estudio del movimiento del giróscopo o, en forma más general, de un cuerpo con simetría axial con un punto fijo localizado sobre su eje de simetría. En la sección 18.10 consideraremos el caso particular de la precesión estacionaria de un giróscopo y en la sección 18.11 el movimiento de un cuerpo con simetría axial sujeto únicamente a la fuerza de su peso.

18.2. Momento angular de un sólido rígido en tres dimensiones. Veremos en esta sección cómo el momento angular $\mathbf{H}_G$ de un sólido respecto a su centro de masas G puede determinarse conociendo la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del sólido, en el caso del movimiento tridimensional.

De acuerdo con la ecuación (14.24), el momento angular de un sólido respecto a G puede expresarse como

$$\mathbf{H}_G = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}'_i \times \mathbf{v}'_i \Delta m_i) \tag{18.3}$$

donde $\mathbf{r}'_i$ y $\mathbf{v}'_i$ representan, respectivamente, el vector de posición y la velocidad de la partícula P_i de masa Δm_i relativa al sistema central de referencia $Gxyz$ (Fig. 18.2). Pero $\mathbf{v}'_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i$ donde $\boldsymbol{\omega}$ es la velocidad angular del sólido en el instante considerado. Sustituyendo en la ecuación (18.3), tenemos.

$$\mathbf{H}_G = \sum_{i=1}^{n} [\mathbf{r}'_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i) \Delta m_i]$$

Recordando la regla para determinar las componentes rectangulares del producto vectorial (Secc. 3.5), obtenemos la siguiente expresión para la componente x del momento angular:

$$H_x = \sum_{i=1}^{n} [y_i(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i)_z - z_i(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i)_y] \Delta m_i$$

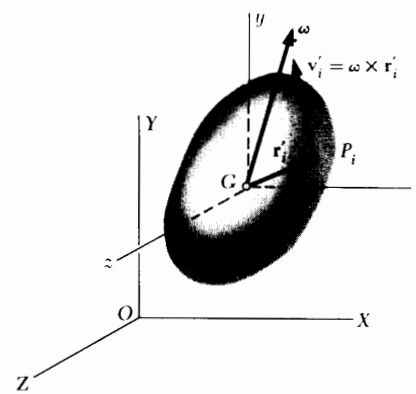


Fig. 18.2

$$= \sum_{i=1}^{n} [y_i(\omega_x y_i - \omega_y x_i) - z_i(\omega_z x_i - \omega_x z_i)]\,\Delta m_i$$

$$= \omega_x \sum_i (y_i^2 + z_i^2)\,\Delta m_i - \omega_y \sum_i x_i y_i\,\Delta m_i - \omega_z \sum_i z_i x_i\,\Delta m_i$$

Sustituyendo las sumas por integrales en esta expresión y en las dos expresiones similares que se obtienen para H_y y H_z, tenemos

$$\begin{aligned} H_x &= \omega_x \int (y^2 + z^2)\,dm - \omega_y \int xy\,dm - \omega_z \int zx\,dm \\ H_y &= -\omega_x \int xy\,dm + \omega_y \int (z^2 + x^2)\,dm - \omega_z \int yz\,dm \\ H_z &= -\omega_x \int zx\,dm - \omega_y \int yz\,dm + \omega_z \int (x^2 + y^2)\,dm \end{aligned} \tag{18.4}$$

Nos damos cuenta de que las integrales que contienen cuadrados representan *los momentos centrales de inercia* del sólido alrededor de los ejes x, y y z, respectivamente, que tienen por origen el centro de masas (Secc. 9.11); tenemos

$$\bar{I}_x = \int (y^2 + z^2)\,dm \qquad \bar{I}_y = \int (z^2 + x^2)\,dm$$
$$\bar{I}_z = \int (x^2 + y^2)\,dm \tag{18.5}$$

En forma semejante, las integrales que contienen productos de coordenadas representan a los *productos de inercia respecto de los ejes ya citados* del sólido (Secc. 9.16); de modo que

$$\bar{I}_{xy} = \int xy\,dm \qquad \bar{I}_{yz} = \int yz\,dm \qquad \bar{I}_{zx} = \int zx\,dm \tag{18.6}$$

Sustituyendo de (18.5) y (18.6) en (18.4), obtenemos las componentes del momento angular $\mathbf{H}_G$ del sólido respecto a su centro de masas G:

$$\begin{aligned} H_x &= +\bar{I}_x \omega_x - \bar{I}_{xy}\omega_y - \bar{I}_{zx}\omega_z \\ H_y &= -\bar{I}_{yz}\omega_z + \bar{I}_y \omega_y - \bar{I}_{yz}\omega_z \\ H_z &= -\bar{I}_{zx}\omega_z - \bar{I}_{zy}\omega_y + \bar{I}_z \omega_z \end{aligned} \tag{18.7}$$

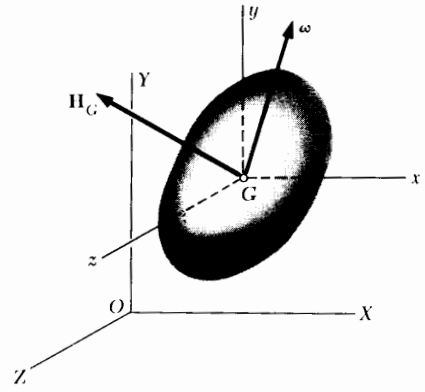


Fig. 18.3

Las relaciones (18.7) muestran que la operación que transforma al vector $\boldsymbol{\omega}$ en el vector $\mathbf{H}_G$ (Fig. 18.3) está caracterizada por la matriz de momentos y productos de inercia.

$$\begin{pmatrix} \bar{I}_x & -\bar{I}_{xy} & -\bar{I}_{zx} \\ -\bar{I}_{yz} & \bar{I}_y & -\bar{I}_{yz} \\ -\bar{I}_{zx} & -\bar{I}_{zy} & \bar{I}_z \end{pmatrix} \tag{18.8}$$

La matriz (18.8) define el *tensor de inercia* del sólido respecto a su centro de masas G†. Se obtendría un tensor de inercia nuevo si se utilizara un sistema de ejes diferentes, pero la transformación caracterizada por este nuevo tensor seguiría siendo la misma. Naturalmente, el momento angular $\mathbf{H}_G$ correspondiente a una velocidad

† Haciendo $\bar{I}_x = I_{11}$, $\bar{I}_y = I_{22}$, $\bar{I}_z = I_{33}$, y $-\bar{I}_{xy} = I_{12}$, $-\bar{I}_{zx} = I_{13}$, etc., podemos escribir el tensor de inercia (18.8) en la forma normal

angular ω dada es independiente de la elección de los ejes coordenados. Como ya se vio en la sección 9.17, siempre es posible seleccionar un sistema de ejes $Gx'y'z'$ llamado *ejes principales de inercia* con respecto al cual todos los productos de inercia de un cuerpo dado son cero. El tensor de inercia (18.8) toma entonces la forma diagonalizada

$$\begin{pmatrix} \bar{I}_{x'} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{I}_{y'} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{I}_{z'} \end{pmatrix} \tag{18.9}$$

donde $\bar{I}_{x'}$, $\bar{I}_{y'}$, $\bar{I}_{z'}$ representan los *momentos principales centrales de inercia del sólido* y las relaciones (18.7) se reducen a

$$H_{x'} = \bar{I}_{x'}\omega_{x'} \qquad H_{y'} = \bar{I}_{y'}\omega_{y'} \qquad H_{z'} = \bar{I}_{z'}\omega_{z'} \tag{18.10}$$

Adviértase que si los tres momentos de inercia principales centrales $\bar{I}_{x'}$, $\bar{I}_{y'}$, $\bar{I}_{z'}$ son iguales, las componentes $H_{x'}$, $H_{y'}$, $H_{z'}$, de momento angular alrededor de G son proporcionales a las componentes $\omega_{x'}$, $\omega_{y'}$, $\omega_{z'}$ de la velocidad angular, y los vectores $\mathbf{H}_G$ y ω son paralelos. Pero en general, los momentos centrales principales de inercia serán distintos y los vectores $\mathbf{H}_G$ y ω *tendrán direcciones diferentes*, excepto cuando dos de las tres componentes de ω sean nulas, es decir, cuando ω se dirige a lo largo de uno de los ejes coordenados. Así que *el momento angular* $\mathbf{H}_G$ *de un sólido rígido y su velocidad angular* ω *tienen la misma dirección si y sólo si* ω *se dirige a lo largo de uno de los ejes principales de inercia*‡. Como esta condición se satisface en el caso del movimiento plano de un sólido rígido simétrico respecto al plano de referencia, en las secciones 16.3 y 17.8 pudimos representar el momento angular $\mathbf{H}_G$ de dicho sólido por el vector $\bar{I}\omega$. Sin embargo, debemos darnos cuenta de que este resultado no puede extenderse al caso del movimiento plano de un cuerpo no simétrico o el caso del movimiento tridimensional de un sólido rígido. Excepto cuando ω se dirige en la dirección de un eje principal de inercia, el momento angular y la velocidad angular de un sólido rígido tienen direcciones diferentes y la relación (18.7) o (18.10) debe utilizarse para determinar $\mathbf{H}_G$ en términos de ω.

$$\begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix}$$

Al representar por H_1, H_2, H_3 a las componentes del momento angular $\mathbf{H}_G$ y por ω_1, ω_2, ω_3 a las componentes de la velocidad angular ω, podemos escribir las relaciones (18.7) en la forma

$$H_i = \sum_j I_{ij}\omega_j$$

en la que i y j toman los valores 1, 2, 3. Las cantidades I_{ij} reciben el nombre de *componentes* del tensor de inercia. Como $I_{ij} = I_{ji}$, el tensor de inercia es un *tensor simétrico de segundo orden.*

‡ En el caso especial en el que $\bar{I}_{x'} = \bar{I}_{y'} = \bar{I}_{z'}$, cualquier línea que pase por G puede considerar un eje principal de inercia; además, los vectores $\mathbf{H}_G$ y ω son siempre paralelos.

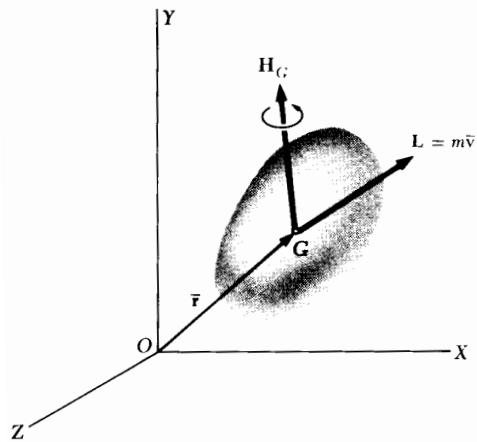
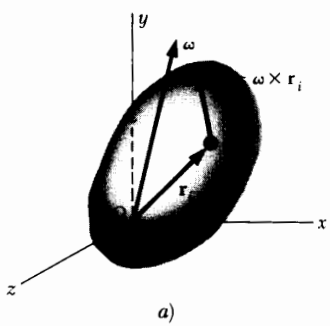


Fig. 18.4

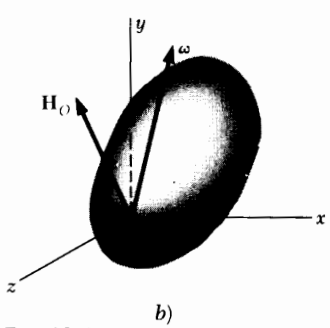
Reducción de los momentos lineales de las partículas de un sólido rígido al vector momento lineal y a un par en G. Vimos en la sección 17.8 que el sistema formado por los momentos lineales de varias partículas de un sólido rígido puede reducirse a un vector **L** unido al centro de masas G del sólido, representando el momento lineal del sólido, y a un par $\mathbf{H}_G$, representando el momento angular del sólido alrededor de G (Fig. 18.4). Estamos ahora en posición de determinar el vector **L** y el par $\mathbf{H}_G$ en el caso más general del movimiento tridimensional de un sólido rígido. Como en el caso del movimiento bidimensional considerado en la sección 17.8, el momento lineal **L** de un sólido es igual al producto $m\bar{\mathbf{v}}$ de su masa m y de la velocidad $\bar{\mathbf{v}}$ de su centro de masas G. Sin embargo, el momento angular $\mathbf{H}_G$ ya no puede obtenerse multiplicando simplemente la velocidad angular ω del sólido por el escalar $\bar{I}$; debe obtenerse ahora de las componentes de ω y de los momentos y productos de inercia centrales del sólido, haciendo uso de las ecuaciones (18.7) o (18.10).

Debemos hacer notar también que una vez que el momento lineal $m\bar{\mathbf{v}}$ y el momento angular $\mathbf{H}_G$ de un sólido rígido han sido determinados, su momento angular $\mathbf{H}_O$ alrededor de cualquier punto dado O puede obtenerse sumando los momentos alrededor de O del vector $m\bar{\mathbf{v}}$ y del par $\mathbf{H}_G$. Escribimos

$$\mathbf{H}_O = \bar{\mathbf{r}} \times m\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{H}_G \tag{18.11}$$



a)



b)

Fig. 18.5

Momento angular de un sólido rígido restringido a girar alrededor de un punto fijo. En el caso particular de un sólido rígido limitado a girar en el espacio tridimensional alrededor de un punto fijo O (Fig. 18.5*a*), algunas veces es conveniente determinar el momento angular $\mathbf{H}_O$ del sólido alrededor del punto fijo O. Si bien $\mathbf{H}_O$ podría obtenerse calculando primero $\mathbf{H}_G$, como se indicó antes y emplear la ecuación (18.11), a veces es útil determinar $\mathbf{H}_O$ directamente de la velocidad angular ω del cuerpo y sus momentos y productos de inercia respecto al sistema $Oxyz$, centrados en el punto fijo O. Recordando la ecuación (14.7), escribimos

$$\mathbf{H}_O = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i \, \Delta m_i) \tag{18.12}$$

donde $\mathbf{r}_i$ y $\mathbf{v}_i$ representan, respectivamente, el vector de posición y la velocidad de la partícula P_i respecto al sistema fijo $Oxyz$. Sustituyendo $\mathbf{v}_i = \omega \times \mathbf{r}_i$ y después de realizar operaciones semejantes a las utilizadas en la parte anterior de esta sección, encontramos que las componentes del momento angular $\mathbf{H}_O$ (Fig. 18.5*b*) están dadas por las relaciones

$$\begin{aligned} H_x &= +I_x \omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z \\ H_y &= -I_{yx}\omega_x + I_y \omega_y - I_{yz}\omega_z \\ H_z &= -I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y + I_z \omega_z \end{aligned} \tag{18.13}$$

donde los momentos de inercia I_x, I_y, I_z y los productos de inercia I_{xy}, I_{yz}, I_{zx} están calculados con respecto al sistema $Oxyz$ centrado en el punto fijo O.

***18.3. Aplicación del principio del impulso y del momento al movimiento tridimensional de un sólido rígido.** Antes de que podamos aplicar la ecuación fundamental (18.2) a la solución de problemas relacionados con el movimiento tridimensional de un sólido rígido, tendremos que aprender a calcular la derivada del vector $\mathbf{H}_G$. Esto se hará en la sección 18.5. Sin embargo, podemos utilizar inmediatamente los resultados obtenidos en la sección anterior para resolver problemas por medio de los métodos del impulso y del momento.

Recordando que el sistema formado por los momentos lineales de las partículas de un sólido rígido se reduce a un vector momento lineal $m\bar{\mathbf{v}}$ unido al centro de masas G del sólido y a un par de momento angular $\mathbf{H}_G$, representamos gráficamente la relación fundamental

$$\textbf{Sist. Momentos}_1 + \textbf{Sist. Imp}_{1\to 2}\textbf{Ext} = \textbf{Sist. Momentos}_2 \qquad (17.4)$$

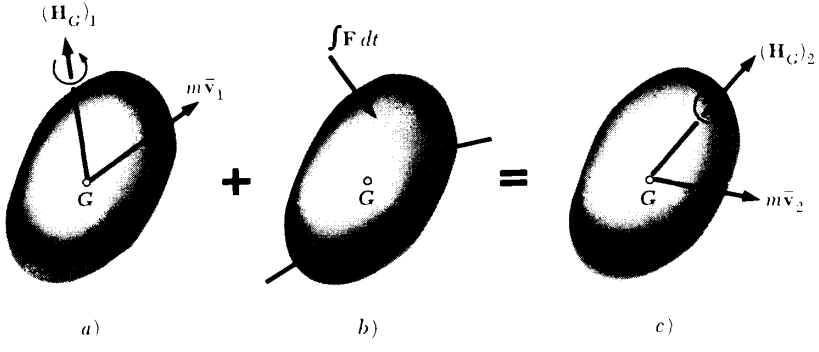


Fig. 18.6

por medio de los tres croquis mostrados en la figura 18.6. Para resolver un problema dado podemos utilizar estos croquis para escribir las ecuaciones de componentes y momentos apropiadas, recordando que las componentes del momento angular $\mathbf{H}_G$ se relacionan con las componentes de la velocidad angular ω por las ecuaciones (18.7) de la sección anterior.

Para resolver problemas que tratan con el movimiento de un sólido que gira alrededor de un punto fijo O, será conveniente eliminar el impulso de la reacción en O escribiendo una ecuación que relacione los momentos lineales e impulsos alrededor de O. Recordamos que el momento angular $\mathbf{H}_O$ alrededor de un punto fijo O puede obtenerse directamente de la ecuación (18.13), o calculando primero su momento lineal $m\bar{\mathbf{v}}$ y su momento angular $\mathbf{H}_G$ y utilizando entonces la ecuación (18.11).

18.4. Energía cinética de un sólido rígido en tres dimensiones. Considérese un sólido rígido de masa m en movimiento tridimensional. Recordamos de la sección 14.6 que si la velocidad absoluta $\mathbf{v}_i$ de cada partícula P_i del sólido se expresa como la suma de la velocidad $\bar{\mathbf{v}}$ del centro de masas G del sólido, y de la velocidad $\mathbf{v}_i'$ de la partícula relativa al sistema $Gxyz$ unido a G y de orientación fija (Fig. 18.7), la energía cinética del sistema

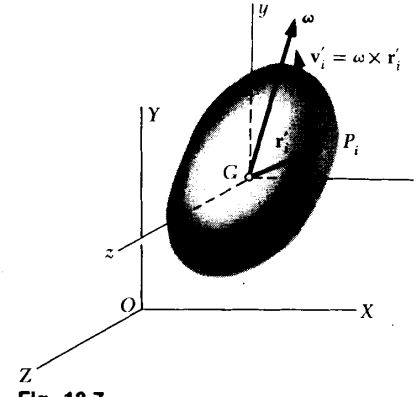


Fig. 18.7

de partículas que forman el sólido rígido puede escribirse en la forma

$$T = \tfrac{1}{2}m\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i v_i'^2 \tag{18.14}$$

donde el último término representa la energía cinética T' del sólido relativa al sistema central $Gxyz$. Como $v_i' = |\mathbf{v}_i'| = |\omega \times \mathbf{r}_i'|$, escribimos

$$T' = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i v_i'^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}|\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i'|^2\,\Delta m_i$$

Expresando el cuadrado en términos de las componentes rectangulares del producto vectorial y sustituyendo las sumas por integrales, tenemos

$$\begin{aligned} T' &= \int[(\omega_x y - \omega_y x)^2 + (\omega_y z - \omega_z y)^2 + (\omega_z x - \omega_x z)^2]\,dm \\ &= \omega_x^2\int(y^2 + z^2)\,dm + \omega_y^2\int(z^2 + x^2)\,dm + \omega_z^2\int(x^2 + y^2)\,dm \\ &\quad - 2\omega_x\omega_y\int xy\,dm - 2\omega_y\omega_z\int yz\,dm - 2\omega_z\omega_x\int zx\,dm \end{aligned}$$

o recordando las relaciones (18.5) y (18.6),

$$T' = \tfrac{1}{2}(\bar{I}_x\omega_x^2 + \bar{I}_y\omega_y^2 + \bar{I}_z\omega_z^2 - 2\bar{I}_{xy}\omega_x\omega_y - 2\bar{I}_{yz}\omega_y\omega_z - 2\bar{I}_{zx}\omega_z\omega_x) \tag{18.15}$$

Sustituyendo en (18.14) la expresión (18.15) que acabamos de obtener para la energía cinética del sólido relativa a ejes centrales escribimos

$$\begin{aligned} T = \tfrac{1}{2}m\bar{v}^2 &+ \tfrac{1}{2}(\bar{I}_x\omega_x^2 + \bar{I}_y\omega_y^2 + \bar{I}_z\omega_z^2 - 2\bar{I}_{xy}\omega_x\omega_y \\ &- 2\bar{I}_{yz}\omega_y\omega_z - 2\bar{I}_{zx}\omega_z\omega_x) \end{aligned} \tag{18.16}$$

Si los ejes de coordenadas se escogen de manera que coincidan en el instante considerado con los ejes principales x', y', z' del sólido, la relación obtenida se reduce a

$$T = \tfrac{1}{2}m\bar{v}^2 + \tfrac{1}{2}(\bar{I}_{x'}\omega_{x'}^2 + \bar{I}_{y'}\omega_{y'}^2 + \bar{I}_{z'}\omega_{z'}^2) \tag{18.17}$$

donde $\bar{\mathbf{v}}$ = velocidad del centro de masa
$\boldsymbol{\omega}$ = velocidad angular
m = masa del sólido rígido
$\bar{I}_{x'}$, $\bar{I}_{y'}$, $\bar{I}_{z'}$ = momentos principales centrales de inercia

Los resultados que hemos obtenido nos permiten extender la aplicación del teorema de las fuerzas vivas (Secc. 17.2) y del principio de la conservación de la energía (Secc. 17.6) al movimiento tridimensional de un sólido rígido.

Energía cinética de un sólido rígido con un punto fijo. En el caso particular de un sólido rígido que gira en el espacio tridimensional alrededor de un punto fijo O, la energía cinética del sólido puede expresarse en términos de sus momentos y productos de inercia con respecto a ejes unidos a O (Fig. 18.8). Recordando la definición de la energía cinética de un sistema de partículas,

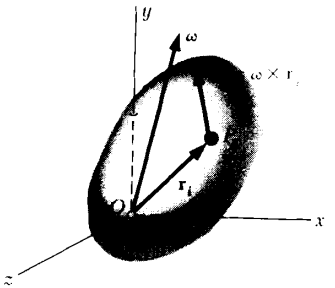


Fig. 18.8

y sustituyendo $|v_i| = |\omega \times \mathbf{r}_i|$, escribimos

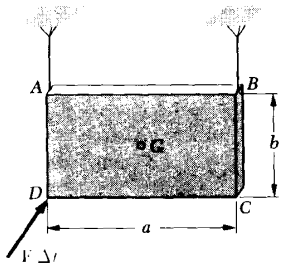
$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}|\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i|^2\,\Delta m_i \tag{18.18}$$

Por un procedimiento similar al empleado para deducir la ecuación (18.15) obtenemos

$$T = \tfrac{1}{2}(I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2 - 2I_{xy}\omega_x\omega_y - 2I_{yz}\omega_y\omega_z - 2I_{zx}\omega_z\omega_x) \tag{18.19}$$

o si los ejes principales x', y', z' del cuerpo en el origen O se eligen como ejes coordenados

$$T = \tfrac{1}{2}(I_{x'}\omega_{x'}^2 + I_{y'}\omega_{y'}^2 + I_{z'}\omega_{z'}^2) \tag{18.20}$$



PROBLEMA RESUELTO 18.1

Una placa rectangular de masa m suspendida mediante dos alambres A y B es golpeada en D en una dirección perpendicular a la de la placa. Representando por $F\,\Delta t$ el impulso aplicado en D determínese, inmediatamente después del choque, *a*) la velocidad del centro de masas G, y *b*) la velocidad angular de la placa.

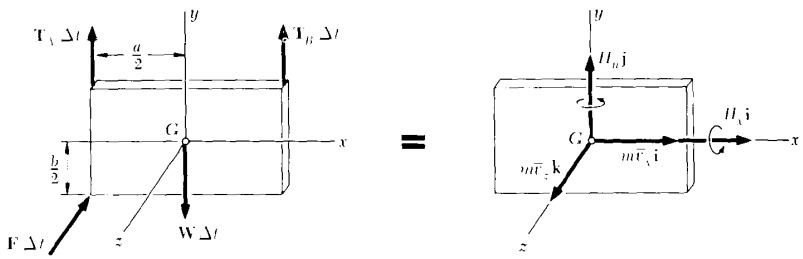
Solución. Supondremos que los alambres permanecen tensos y que las componentes $\bar{v}_y$ de $\bar{\mathbf{v}}$ y ω_z de $\boldsymbol{\omega}$ son cero después del choque. Tenemos por consiguiente.

$$\bar{\mathbf{v}} = \bar{v}_x\mathbf{i} + \bar{v}_z\mathbf{k} \qquad \boldsymbol{\omega} = \omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j}$$

y como los ejes x, y y z son ejes principales de inercia,

$$\mathbf{H}_G = \bar{I}_x\omega_x\mathbf{i} + \bar{I}_y\omega_y\mathbf{j} \qquad \mathbf{H}_G = \tfrac{1}{12}mb^2\omega_x\mathbf{i} + \tfrac{1}{12}ma^2\omega_y\mathbf{j} \tag{1}$$

Principio del impulso y del momento. Como los momentos lineales iniciales son cero, el sistema de los impulsos debe ser equivalente al sistema de los momentos lineales.

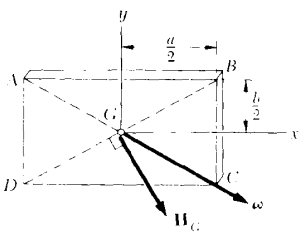


a) **Velocidad del centro de masas.** Igualando las componentes de los impulsos y de los momentos lineales en las direcciones x y z:

componentes x: $\quad 0 = m\bar{v}_x \qquad \bar{v}_x = 0$

componentes z: $\quad -F\,\Delta t = m\bar{v}_z \qquad \bar{v}_z = -F\,\Delta t/m$

$$\bar{\mathbf{v}} = \bar{v}_x\mathbf{i} + \bar{v}_z\mathbf{k} \qquad \bar{\mathbf{v}} = -(F\,\Delta t/m)\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$$

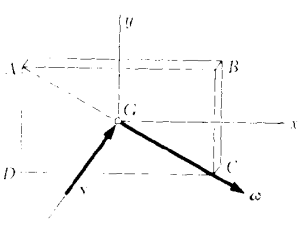


b) **Velocidad angular.** Igualando los momentos de los impulsos y de los momentos lineales alrededor de los ejes x e y:

Alrededor del eje x: $\quad \tfrac{1}{2}bF\,\Delta t = H_x$

Alrededor del eje y: $\quad -\tfrac{1}{2}aF\,\Delta t = H_y$

$$\mathbf{H}_G = H_x\mathbf{i} + H_y\mathbf{j} \qquad \mathbf{H}_G = \tfrac{1}{2}bF\,\Delta t\mathbf{i} - \tfrac{1}{2}aF\,\Delta t\mathbf{j} \tag{2}$$



Al comparar las ecuaciones (1) y (2), concluimos que

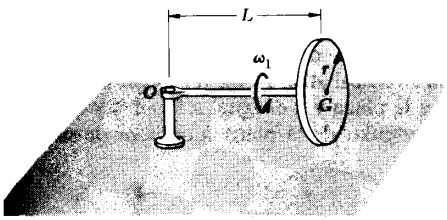
$$\omega_x = 6F\,\Delta t/mb \qquad \omega_y = -6F\,\Delta t/ma$$

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} \qquad \boldsymbol{\omega} = (6F\,\Delta t/mab)(a\mathbf{i} - b\mathbf{j}) \quad \blacktriangleleft$$

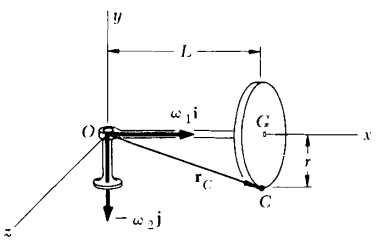
Observamos que ω está dirigida a lo largo de la diagonal AC.

Observación: Igualando las componentes y de los impulsos y de los momentos lineales y sus momentos alrededor del eje z, obtenemos dos ecuaciones adicionales que nos dan $T_A = T_B = \frac{1}{2}W$. Así comprobamos que los alambres permanecen tensos y que nuestra hipótesis fue correcta.

PROBLEMA RESUELTO 18.2



Un disco homogéneo de radio r y masa m está montado sobre un eje OG de longitud L y masa despreciable. El eje está articulado en el punto fijo O y el disco está obligado a girar sobre un suelo horizontal. Si se sabe que el disco gira en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj con una velocidad angular ω_1 alrededor del eje OG, determínense *a*) la velocidad angular del disco, *b*) su momento angular alrededor de O, *c*) su energía cinética, y *d*) el vector momento lineal y el par momento angular en G equivalentes al sistema de los momentos lineales de las partículas del disco.



***a*) Velocidad angular.** **Conforme el disco gira alrededor del eje OG también gira con respecto al eje y a la velocidad ω_2 en el sentido de las manecillas del reloj. La velocidad angular total del disco es por tanto**

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1\mathbf{i} - \omega_2\mathbf{j}$$

Para determinar ω_2 escribimos que la velocidad de C es cero:

$$\mathbf{v}_C = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_C = 0$$
$$(\omega_1\mathbf{i} - \omega_2\mathbf{j}) \times (L\mathbf{i} - r\mathbf{j}) = 0$$
$$(L\omega_2 - r\omega_1)\mathbf{k} = 0 \qquad \omega_2 = r\omega_1/L$$

Sustituyendo ω_2 en (1):

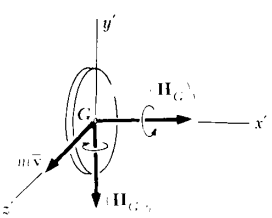
$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1\mathbf{i} - (r\omega_1/L)\mathbf{j} \blacktriangleleft$$

b) **Momento angular alrededor de O.** Suponiendo que el eje es parte del disco, podemos considerar que éste tiene un punto fijo en O. Como los ejes x, y y z son ejes principales de inercia del disco,

$$H_x = I_x\omega_x = (\tfrac{1}{2}mr^2)\omega_1$$
$$H_y = I_y\omega_y = (mL^2 + \tfrac{1}{4}mr^2)(-r\omega_1/L)$$
$$H_z = I_z\omega_z = (mL^2 + \tfrac{1}{4}mr^2)\,0 = 0$$
$$\mathbf{H}_O = \tfrac{1}{2}mr^2\omega_1\mathbf{i} - m(L^2 + \tfrac{1}{4}r^2)(r\omega_1/L)\mathbf{j} \blacktriangleleft$$

***c*) Energía cinética.** **Utilizando los valores obtenidos para los momentos de inercia y las componentes de $\boldsymbol{\omega}$, tenemos**

$$T = \tfrac{1}{2}(I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2) = \tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{2}mr^2\omega_1^2 + m(L^2 + \tfrac{1}{4}r^2)(-r\omega_1/L)^2]$$
$$T = \tfrac{1}{8}mr^2\left(6 + \frac{r^2}{L^2}\right)\omega_1^2 \blacktriangleleft$$



d) **Vector momento lineal y par en G.** El vector momento lineal $m\bar{\mathbf{v}}$ y el par de momento angular $\mathbf{H}_G$ son

$$m\bar{\mathbf{v}} = mr\omega_1\mathbf{k} \blacktriangleleft$$

y

$$\mathbf{H}_G = \bar{I}_{x'}\omega_x\mathbf{i} + \bar{I}_{y'}\omega_y\mathbf{j} + \bar{I}_{z'}\omega_z\mathbf{k} = \tfrac{1}{2}mr^2\omega_1\mathbf{i} + \tfrac{1}{4}mr^2(-r\omega_1/L)\mathbf{j}$$
$$\mathbf{H}_G = \tfrac{1}{2}mr^2\omega_1\left(\mathbf{i} - \frac{r}{2L}\mathbf{j}\right) \blacktriangleleft$$

Problemas

18.1 Una placa rectangular delgada con masa de 6 kg gira, con respecto a su diagonal vertical AB, a una velocidad angular ω. Si el eje z es perpendicular a la placa y ω es igual a 5 rad/s y constante, determínese el momento angular de la placa alrededor de su centro de masas G.

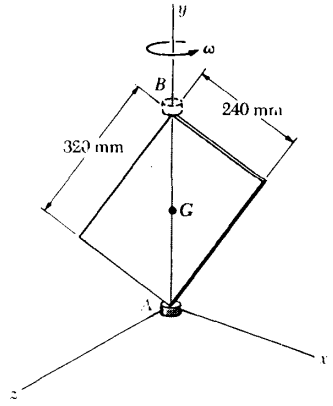


Fig. P18.1

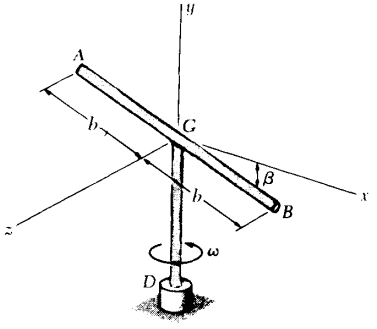


Fig. P18.2

18.2 Una barra homogénea AB de masa m y longitud $2b$ se suelda en su punto medio G a un eje vertical GD. Si se sabe que el eje gira con una velocidad angular constante ω, determínese el momento angular de la varilla respecto de G.

18.3 Un disco homogéneo delgado, de masa m y radio r, está montado sobre un eje horizontal AB. El plano del disco forma un ángulo $\beta = 20°$ con la vertical. Si el eje gira con una velocidad angular ω, determínese el ángulo θ formado por el eje y el momento angular del disco con respecto a G.

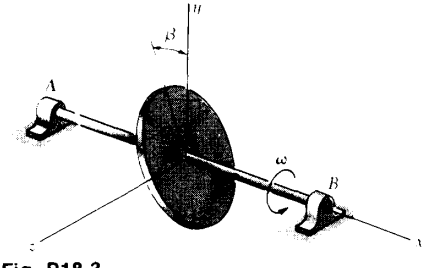


Fig. P18.3

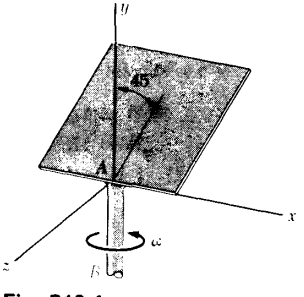


Fig. P18.4

18.4 Una placa cuadrada delgada y homogénea, de masa m y lado a, está soldada a un eje vertical AB con el que forma un ángulo de 45°. Si se sabe que el eje gira con una velocidad angular ω, determínese el momento angular de la placa respecto de A.

18.5 Un disco delgado de peso $W = 10$ lb gira a una velocidad constante $\omega_2 = 15$ rad/s respecto a un brazo ABC, que gira con una velocidad constante $\omega_1 = 5$ rad/s respecto al eje y. Determínese el momento angular del disco respecto a su centro C.

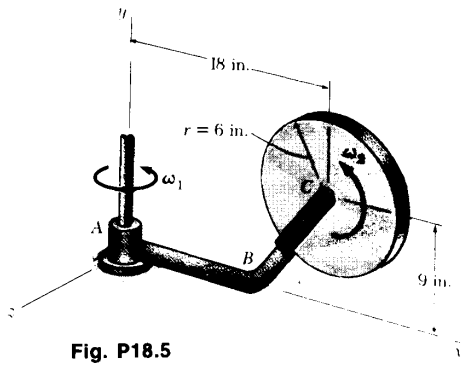


Fig. P18.5

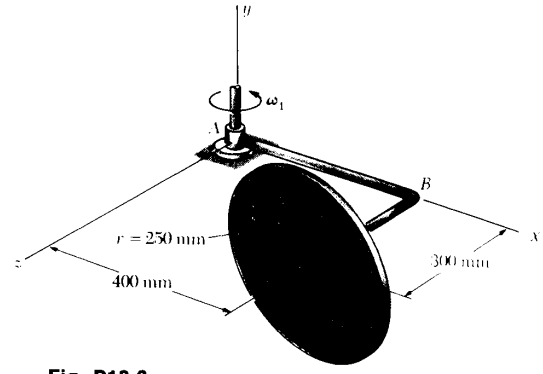


Fig. P18.6

18.6 Un disco delgado de masa $m = 5$ kg gira con velocidad angular constante $\omega_2 = 8$ rad/s, respecto al eje doblado ABC, el cual gira a su vez con una velocidad angular constante $\omega_1 = 3$ rad/s, respecto al eje y. Determínese el momento angular del disco respecto a su centro C.

18.7 El proyectil de 25 kg que aquí se muestra tiene un radio de giro de 72 mm respecto a su eje de simetría Gx y de 300 mm respecto a su eje transversal Gy. Su velocidad angular ω se puede descomponer en dos componentes: una componente, dirigida a lo largo de su eje de simetría Gx mide la *velocidad de rotación propia* delproyectil, mientras que la otra dirigida a lo largo de GD mide su *velocidad de precesión*. Si se sabe que $\theta = 8°$ y que el momento angular del proyectil respecto a su centro de masas G es $\mathbf{H}_G = (600\ \text{g}\cdot\text{m}^2/\text{s})\mathbf{i} + 16\ \text{g}\cdot\text{m}^2/\text{s})\mathbf{j}$, determínense *a*) su velocidad de rotación propia y *b*) su velocidad angular de precesión.

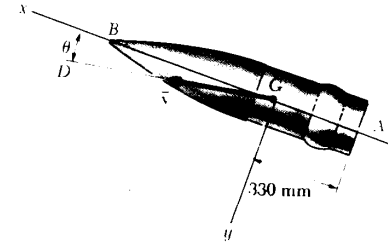


Fig. P18.7

18.8 Determínese el momento angular $\mathbf{H}_A$ del proyectil del problema 18.7, respecto al centro A de su base, si se sabe que su centro de masas G tiene una velocidad v de 750 m/s. Resuélvase el problema en términos de componentes respectivamente paralelas a los ejes x e y mostrados en la figura y a un tercer eje z que apunta hacia fuera del libro.

18.9 Determínese el momento angular del disco del problema 18.6 respecto al punto A.

18.10 Determínese el momento angular del disco del problema 18.5 respecto al punto A.

18.11 Determínese el momento angular $\mathbf{H}_O$, del disco del problema resuelto 18.2, a partir de las expresiones obtenidas para su momento lineal $m\bar{\mathbf{v}}$ y su momento angular $\mathbf{H}_G$, utilizando la ecuación (18.11). Verifíquese que el resultado es el mismo que el que se obtuvo mediante cálculo directo.

18.12 Demuéstrese que, cuando un sólido rígido gira respecto a un eje fijo, su momento angular es el mismo respecto a cualquiera de dos puntos A y B sobre el eje fijo ($\mathbf{H}_A = \mathbf{H}_B$) si y sólo si el centro de masas G del sólido se sitúa sobre el eje fijo.

18.13 Una barra homogénea de masa m' por unidad de longitud se utiliza para formar el eje aquí mostrado. Si se sabe que el eje gira con una velocidad angular constante ω, determínense *a*) el momento angular del eje respecto a G y *b*) el ángulo formado por el momento angular y el eje AB.

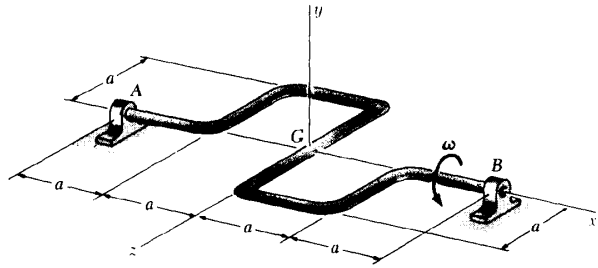


Fig. P18.13

18.14 Determínese el momento angular del eje del problema 18.13 respecto *a*) al punto A y *b*) al punto B.

18.15 Dos placas triangulares, cada una de 8 kg, se sueldan a un eje vertical AB. Si se sabe que el sistema gira con una velocidad constante $\omega = 6$ rad/s, determínese su momento angular respecto a G.

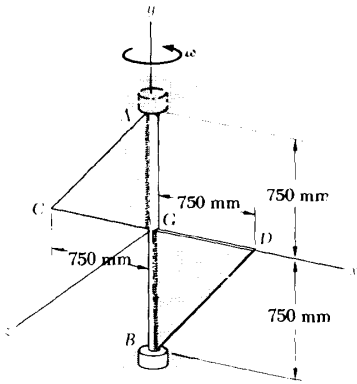


Fig. P18.15

18.16 Dos brazos con forma de L, que pesan cada uno 4 lb, se sueldan en los tercios del eje AB de 2 ft. Si se sabe que el eje AB gira con velocidad angular constante $\omega = 240$ rpm, determínense *a*) el momento angular del cuerpo respecto a A y *b*) el ángulo formado por el momento angular y el eje AB.

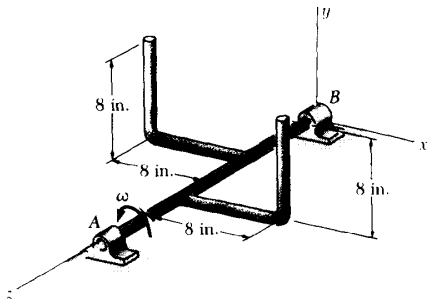


Fig. P18.16

18.17 Para el cuerpo del problema 18.16, determínense *a*) el momento angular respecto a B y *b*) el ángulo formado por el momento angular y el eje BA.

18.18 Un alambre homogéneo de masa 2.5 kg/m se utiliza para formar la figura de alambre que se indica, la cual se suspende desde el punto A. Si se aplica un impulso $\mathbf{F}\,\Delta t = (3\text{ N}\cdot\text{s})\mathbf{j}$ se aplica al punto E de coordenadas $x = 180$ mm, $y = -120$ mm, $z = 180$ mm, determínense *a*) la velocidad del centro de masas de la figura de alambre y *b*) la velocidad angular de la figura.

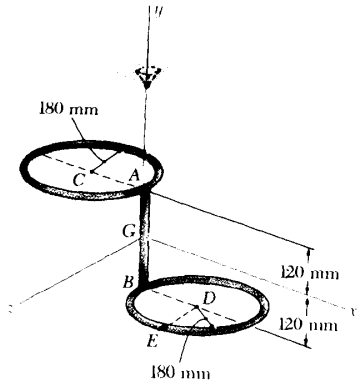


Fig. P18.18

18.19 Resuélvase el problema 18.18 suponiendo que el impulso aplicado en el punto E es $\mathbf{F}\,\Delta t = -(3\text{ N}\cdot\text{s})\mathbf{k}$.

18.20 Una barra uniforme, de masa total m, está doblada en la forma aquí mostrada y sostenida por un alambre unido en su centro de masas G. La barra doblada es golpeada en D en una dirección perpendicular al plano que contiene a la barra (en la dirección z negativa). Representando el impulso correspondiente con $\mathbf{F}\,\Delta t$, determínese, inmediatamente después del choque, *a*) la velocidad del centro de masas G y *b*) la velocidad de la barra.

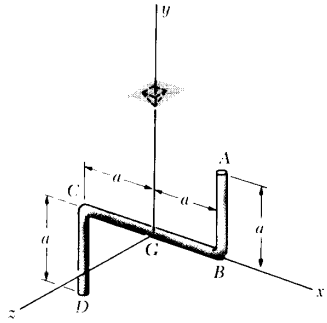


Fig. P18.20

18.21 Resuélvase el problema 18.20 suponiendo que la barra doblada es golpeada en C.

18.22 Una barra uniforme, de masa total m, se dobla para formar la figura que aquí se indica y se suspende mediante un alambre unido en B. La barra es golpeada en A en una dirección vertical hacia abajo. Representando con $\mathbf{F}\,\Delta t$ el impulso correspondiente, determínense inmediatamente después del choque *a*) la velocidad del centro de masas G y *b*) la velocidad angular de la barra.

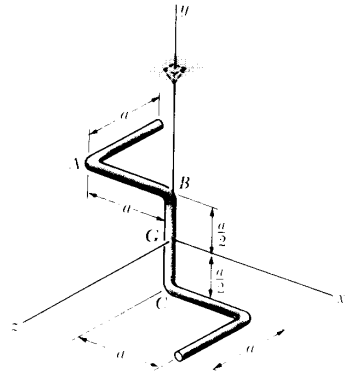


Fig. P18.22

18.23 Resuélvase el problema 18.22 suponiendo que la barra se golpea en C según el sentido negativo del eje z.

18.24 Tres barras homogéneas, cada una de masa m y longitud d, se sueldan del modo que indica la figura y se cuelgan de un alambre unido en G. El conjunto se golpea en A según una dirección vertical hacia abajo. Representando con $\mathbf{F}\,\Delta t$ el impulso correspondiente, determínense inmediatamente después del choque *a*) la velocidad del centro de masas G y *b*) la velocidad angular del conjunto.

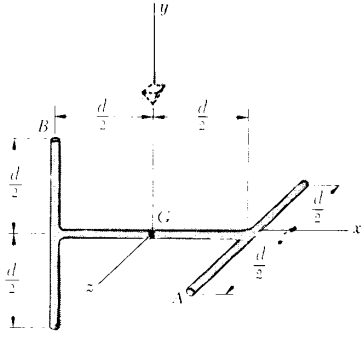


Fig. P18.24

18.25 Resuélvase el problema 18.24 suponiendo que el conjunto de varillas se golpea en B en una dirección opuesta a la del eje z.

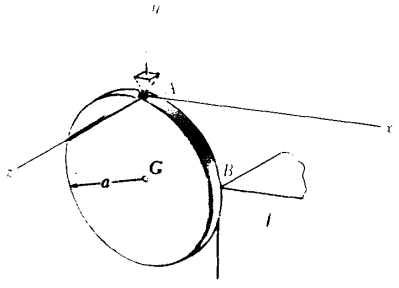


Fig. P18.26

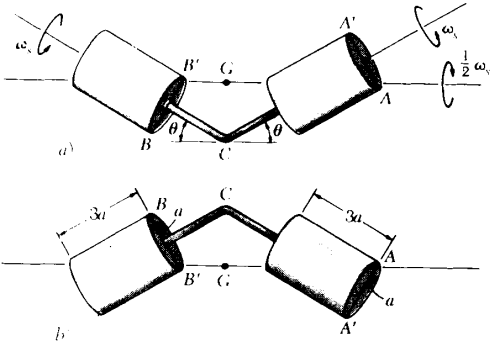


Fig. P18.28

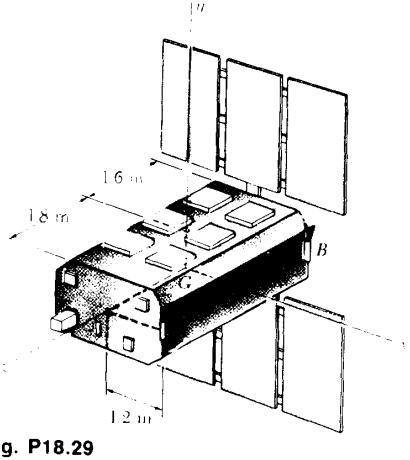


Fig. P18.29

18.26 Una placa circular de radio a y masa m, sostenida mediante una articulación en A, gira respecto al eje y con una velocidad angular constante $\omega = \omega_0$ **j** cuando se introduce repentinamente un obstáculo en B. Suponiendo que el choque en B es perfectamente plástico, determínense inmediatamente después del choque *a*) la velocidad angular de la placa y *b*) la velocidad de su centro de masas G.

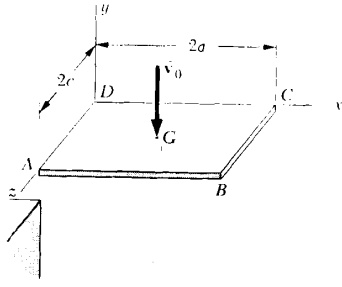


Fig. P18.27

18.27 Una placa rectangular de masa m está cayendo con una velocidad $\bar{\mathbf{v}}_0$ y sin velocidad angular, cuando su esquina A pega en un obstáculo. Suponiendo que el choque es perfectamente plástico, determínense, inmediatamente después del choque, *a*) la velocidad angular de la placa y *b*) la velocidad de su centro de masas G.

18.28 Para analizar el giro realizado por los gatos para caer sobre sus patas, después de haber sido lanzados patas arriba, puede utilizarse el modelo aquí mostrado. Consiste en dos cilindros homogéneos, cada uno de masa m, radio a y longitud $3a$, montado sobre un eje doblado. Unos motores pequeños situados dentro de los cilindros permiten que cada uno gire, con respecto a su eje z con velocidad ω_s, después de que el conjunto fue soltado desde el reposo, en la posición A. El conjunto completo debe girar a una velocidad de $\frac{1}{2}\,\omega_s$ con respecto a un eje horizontal que pase por su centro de masas G, para que complete media vuelta alrededor de ese eje cuando cada cilindro ha recorrido 360° con respecto a su eje propio (posición *b*). Determínese el ángulo θ necesario entre el eje de los cilindros y la horizontal para que ello ocurra. Despréciese la masa del eje y de los motores. (*Sugerencia.* Como sobre el conjunto no actúan fuerzas exteriores distintas a sus pesos, el momento angular de éste, con respecto a G, debe permanecer igual a cero.)

18.29 Un satélite de 1200 kg, diseñado para el estudio del Sol, tiene una velocidad angular $\omega_0 = (0.50 \text{ rad/s})\mathbf{i} + (0.075 \text{ rad/s})\mathbf{k}$, cuando se activan dos pequeños propulsores en A y en B en una dirección paralela al eje y. Si se sabe que los ejes coordenados son los ejes principales centrales y que los radios de giro del satélite son $\bar{k}_x = 1.120$ m, $\bar{k}_y = 1.200$ m, $\bar{k}_z = 0.900$ m y que cada propulsor produce un empuje de 50 N, determínense *a*) el tiempo de funcionamiento necesario de cada propulsor para que la velocidad angular del satélite se reduzca a cero y *b*) el cambio resultante en la velocidad del centro de masas G.

18.30 Si no funciona el propulsor A del problema 18.29, determínense *a*) el tiempo de funcionamiento requerido por el propulsor B para reducir a cero la componente x de la velocidad angular del satélite, *b*) la velocidad angular final producida y *c*) el cambio que se produce en la velocidad del centro de masas G.

18.31 Un satélite geoestacionario de 800 lb está girando con una velocidad angular $\omega_0 = (1.5 \text{ rad/s})\mathbf{j}$ cuando es golpeado en A por un meteorito de 6 oz que tiene una velocidad $v_0 = 4500$ ft/s relativa al satélite. Si se sabe que los radios de giro del satélite son $\bar{k}_x = \bar{k}_z = 28.8$ in y $\bar{k}_y = 32.4$ in y que, inmediatamente después de que el meteorito se ha incrustado en él, la velocidad angular del satélite es $\omega = (0.6 \text{ rad/s})\mathbf{j} + (0.37 \text{ rad/s})\mathbf{k}$, determínese la componente de la velocidad $\mathbf{v}_0$ del meteorito relativa al satélite.

18.32 Un satélite geoestacionario de 800 lb está girando con una velocidad angular $\omega_0 = (1.8 \text{ rad/s})\mathbf{j}$, cuando es golpeado en B por un meteorito de 6 oz que se desplaza a una velocidad $\mathbf{v}_0 = -(3360 \text{ ft/s})\mathbf{i} + (3480 \text{ ft/s})\mathbf{j} - (2400 \text{ ft/s})\mathbf{k}$, relativa al satélite. Sabiendo que los radios de giro del satélite son $\bar{k}_x = \bar{k}_z = 28.8$ in y $\bar{k}_y = 32.4$ in y que, inmediatamente después de que el meteorito se haya incrustado, la componente x de la velocidad angular ω del satélite es $\omega_x = 0.36$ rad/s determínense *a*) la distancia b y *b*) los componentes y y z de ω.

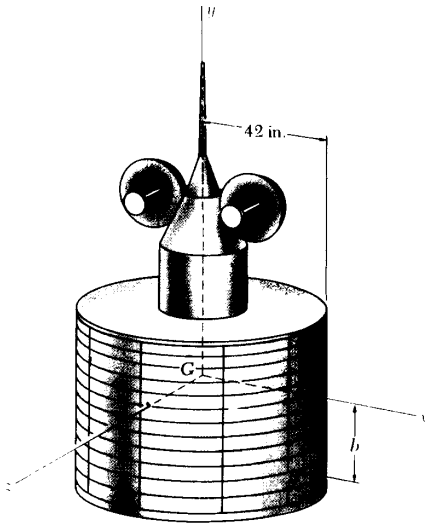


Fig. P18.31 y P18.32

18.33 Representando con ω, $\mathbf{H}_O$ y T, respectivamente, la velocidad angular, el momento angular y la energía cinética de un sólido rígido alrededor de un punto fijo O, *a*) demuéstrese que $\mathbf{H}_O \cdot \boldsymbol{\omega} = 2T$ y *b*) demuéstrese que el ángulo θ entre $\boldsymbol{\omega}$ y $\mathbf{H}_O$ siempre será agudo.

18.34 Demuéstrese que la energía cinética de un sólido rígido, con un punto fijo O, se puede expresar $T = \frac{1}{2}\mathbf{I}_{OL}\omega^2$ donde ω es la velocidad angular instantánea del cuerpo e $\mathbf{I}_{OL}$ su momento de inercia respecto a la línea de acción OL de ω. Dedúzcase esta expresión *a*) a partir de las ecuaciones (9.46) y (18.19) y *b*) al considerar T como la suma de las energías cinéticas de las partículas P_i que describen círculos de radio ρ_i alrededor de la línea OL.

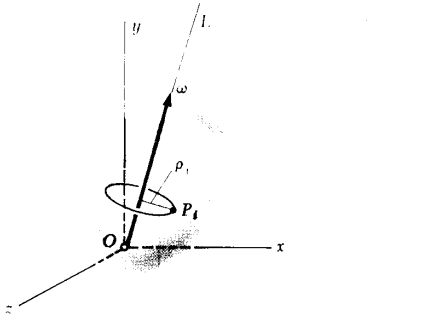


Fig. P18.34

18.35 Determínese la energía cinética de la placa del problema 18.1

18.36 Determínese la energía cinética de la placa del problema 18.4

18.37 Determínese la energía cinética del disco del problema 18.3.

18.38 Determínese la energía cinética del disco del problema 18.6.

18.39 Determínese la energía cinética del disco del problema 18.5.

18.40 Determínese la energía cinética del cuerpo del problema 18.16.

18.41 Determínese la energía cinética perdida cuando la placa del problema 18.27 golpea al obstáculo.

18.42 Determínese la pérdida de energía cinética cuando la placa del problema 18.26 golpea al obstáculo en B.

18.43 Determínese el cambio en la energía cinética del problema 18.29, en su movimiento respecto a su centro de masas, debido a la operación de los propulsores.

18.44 Determínese el cambio en la energía cinética del satélite del problema 18.32, en su movimiento respecto a su centro de masas, debido al choque con el meteorito.

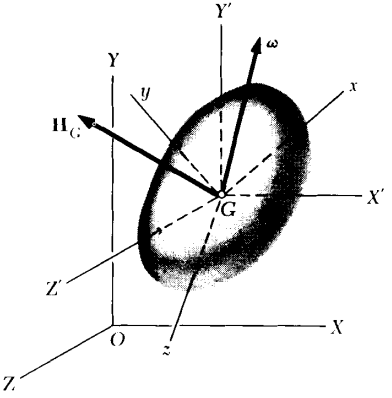


Fig. P18.9

***18.5. Movimiento de un sólido rígido en tres dimensiones.** Como se indicó en la sección 18.2, las ecuaciones fundamentales

$$\Sigma \mathbf{F} = m\bar{\mathbf{a}} \tag{18.1}$$
$$\Sigma \mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G \tag{18.2}$$

continúan siendo válidas en el caso más general del movimiento de un sólido rígido. Sin embargo, antes de que la ecuación (18.2) pudiera aplicarse al movimiento tridimensional de un sólido rígido fue necesario derivar las ecuaciones (18.7), que relacionan a las componentes del momento angular $\mathbf{H}_G$ con las de la velocidad angular ω. Nos falta aún encontrar una forma eficaz y conveniente de calcular las componentes de la derivada $\dot{\mathbf{H}}_G$ del momento angular.

Como $\mathbf{H}_G$ representa el momento angular de un sólido en su movimiento relativo a los ejes centrales $GX'Y'Z'$ de orientación fija (Fig. 18.9) y puesto que $\dot{\mathbf{H}}_G$ representa la derivada de $\mathbf{H}_G$ con respecto a los mismos ejes, parecería natural utilizar las componentes de ω y $\mathbf{H}_G$ a lo largo de los ejes X', Y' y Z' y escribir las relaciones (18.7). Pero como el sólido gira, sus momentos y productos de inercia cambiarán continuamente y será necesario determinar sus valores en función del tiempo. Por lo tanto es más conveniente emplear los ejes x, y, z solidarios al sólido, asegurándonos de que sus momentos y productos de inercia mantendrán los mismos valores durante el movimiento. Esto es posible ya que, como se indicó antes, la transformación de ω a $\mathbf{H}_G$ es independiente del sistema de ejes coordenados que se ha seleccionado. Pero la velocidad angular ω se *definirá* con respecto al sistema $GX'Y'Z'$ de orientación fija. El vector ω puede dividirse en sus componentes a lo largo de los ejes móviles x, y y z. Aplicando las relaciones (18.7) obtenemos las *componentes* del vector $\mathbf{H}_G$ a lo largo de los ejes móviles. Sin embargo, el vector $\mathbf{H}_G$ representa el momento angular con respecto a G del sólido *en su movimiento relativo al sistema* $GX'Y'Z'$.

Derivando las componentes del momento angular con respecto a t en (18.7), definimos la derivada temporal $\dot{\mathbf{H}}_G$ con respecto al sistema móvil $Gxyz$:

$$(\dot{\mathbf{H}}_G)_{Gxyz} = \dot{H}_x\mathbf{i} + \dot{H}_y\mathbf{j} + \dot{H}_z\mathbf{k} \tag{18.21}$$

donde $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ son los vectores unitarios a lo largo de los ejes móviles. Recordando de la sección 15.10 que la derivada temporal $\dot{\mathbf{H}}_G$ del vector $\mathbf{H}_G$ respecto al sistema $GX'Y'Z'$ puede obtenerse agregando a $(\dot{\mathbf{H}}_G)_{Gxyz}$ *el producto vectorial* $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H}_G$, donde $\boldsymbol{\Omega}$ representa la velocidad angular del sistema giratorio, escribimos

$$\dot{\mathbf{H}}_G = (\dot{\mathbf{H}}_G)_{Gxyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H}_G \tag{18.22}$$

donde $\mathbf{H}_G$ = momento angular del sólido con respecto al sistema $GX'Y'Z'$ de orientación fija.

$(\dot{\mathbf{H}}_G)_{Gxyz}$ = *derivada temporal* de $\mathbf{H}_G$ con respecto al sistema móvil $Gxyz$, que se calculará de las relaciones (18.7) y (18.21)

$\boldsymbol{\Omega}$ = velocidad angular del sistema móvil $Gxyz$

Sustituyendo el valor de $\dot{\mathbf{H}}_G$ de (18.22) en (18.2), tenemos

$$\Sigma \mathbf{M}_G = (\dot{\mathbf{H}}_G)_{Gxyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H}_G \tag{18.23}$$

Si el sistema móvil está solidariamente unido al sólido, como se ha supuesto en este análisis, su velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ es idéntica a la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del sólido. Pero existen muchas aplicaciones donde es ventajoso emplear un sistema de referencia que no está unido al sólido sino que gira en forma independiente. Por ejemplo, si el sólido considerado tiene simetría axial, como en el problema resuelto 18.5 o en la sección 18.9, es posible seleccionar un sistema de referencia con respecto al cual los momentos y productos de inercia del sólido permanezcan constantes, pero cuyo giro es menor que el del mismo sólido†. En consecuencia, pueden obtenerse expresiones más simples para la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y el momento angular $\mathbf{H}_G$ del sólido que las que se obtendrían si el sistema de referencia hubiera estado unido al sólido. Es evidente que en tales casos la velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ del sistema giratorio y la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del sólido son diferentes.

***18.6. Ecuaciones de Euler del movimiento. Extensión del principio de d'Alembert al movimiento de un sólido rígido en tres dimensiones.** Si los ejes x, y y z se escogen de manera que coincidan con los ejes principales de inercia del sólido, las relaciones simplificadas (18.10) pueden utilizarse para determinar las componentes del momento angular $\mathbf{H}_G$. Omitiendo las primeras de los subíndices escribimos

$$\mathbf{H}_G = \bar{I}_x \omega_x \mathbf{i} + \bar{I}_y \omega_y \mathbf{j} + \bar{I}_z \omega_z \mathbf{k} \tag{18.24}$$

donde $\bar{I}_x$, $\bar{I}_y$, $\bar{I}_z$ representan los momentos principales centrales de inercia del sólido. Sustituyendo $\mathbf{H}_G$ de (18.24) en (18.23) y $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}$, obtenemos las tres ecuaciones escalares.

$$\begin{aligned} \Sigma M_x &= \bar{I}_x \dot{\omega}_x - (\bar{I}_y - \bar{I}_z)\omega_y \omega_z \\ \Sigma M_y &= \bar{I}_y \dot{\omega}_y - (\bar{I}_z - \bar{I}_x)\omega_z \omega_x \\ \Sigma M_z &= \bar{I}_z \dot{\omega}_z - (\bar{I}_x - \bar{I}_y)\omega_x \omega_y \end{aligned} \tag{18.25}$$

Estas ecuaciones, llamadas *ecuaciones de Euler del movimiento* en honor al matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783), pueden utilizarse para analizar el movimiento de un sólido rígido con respecto a su centro de masas. *Sin embargo, en las secciones siguientes deberemos* emplear la ecuación (18.23) en vez de las ecuaciones (18.25), ya que la primera es más general y la forma vectorial compacta en que está expresada es más fácil de recordar.

Escribiendo la ecuación (18.1) en forma escalar, obtenemos las tres ecuaciones adicionales.

$$\Sigma F_x = m\bar{a}_x \qquad \Sigma F_y = m\bar{a}_y \qquad \Sigma F_z = m\bar{a}_z \tag{18.26}$$

que junto con las ecuaciones de Euler forma un sistema de seis ecuaciones diferenciales. Dando condiciones iniciales adecuadas, es-

† Con más propiedad, el sistema de referencia no girará (Véase la sección 18.9).

tas ecuaciones diferenciales tienen una solución única. Así que el movimiento de un sólido rígido en tres dimensiones está definido completamente por la resultante y el momento resultante de las fuerzas exteriores que actúan sobre él. Este resultado se reconocerá como una generalización de un resultado semejante obtenido en la sección 16.4, en el caso del movimiento plano de una placa rígida. Se sigue que en tres, así como en dos dimensiones dos sistemas de fuerzas equivalentes tienen el mismo efecto sobre un sólido rígido determinado.

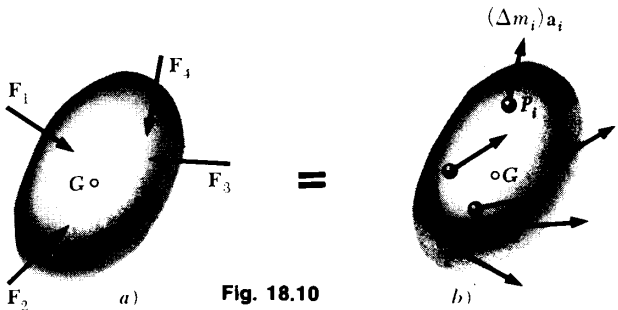


Fig. 18.10

Considerando en particular el sistema de las fuerzas exteriores que actúan sobre un sólido rígido (Fig. 18.10*a*) y el sistema de las fuerzas inerciales asociadas con las partículas que forman el sólido rígido (Fig. 18.10*b*), podemos establecer que los dos sistemas son equivalentes. Ésta es la extensión del principio de d'Alembert al movimiento tridimensional de un sólido rígido. Sustituyendo las fuerzas inerciales en la figura 18.10*b* por un sistema fuerza-par equivalente, comprobamos que el sistema formado por el vector $m\bar{\mathbf{a}}$ unido al centro de masas G del sólido y el par de momento $\dot{\mathbf{H}}_G$ (Fig. 18.11), donde $\dot{\mathbf{H}}_G$ se obtiene de las relaciones (18.7) y (18.22). Los problemas relacionados con el movimiento tridimensional de un sólido rígido pueden resolverse considerando la ecuación esquemática representada en la figura 18.11, y escribiendo ecuaciones escalares adecuadas que relacionen las componentes o momentos de las fuerzas exteriores y las fuerzas inerciales (véase problema resuelto 18.3).

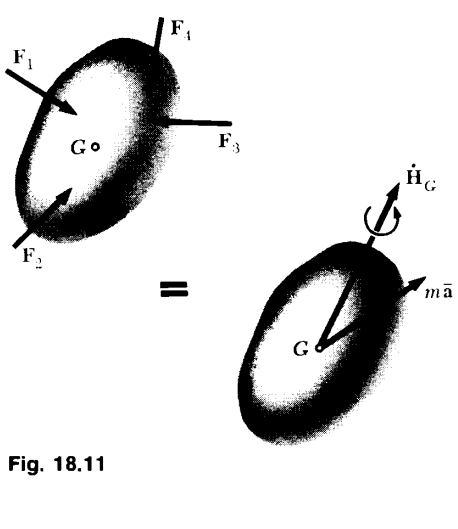


Fig. 18.11

***18.7. Movimiento de un sólido rígido con un punto fijo.** Cuando un sólido rígido está obligado a girar alrededor de un punto fijo O es deseable escribir una ecuación que incluye los momentos con respecto a O de las fuerzas exteriores e inerciales, ya que esta ecuación no contendrá la reacción desconocida en O. Aunque tal ecuación puede obtenerse de la figura 18.11, puede ser más conveniente escribirla considerando la derivada temporal del momento angular $\mathbf{H}_O$ del sólido alrededor del punto fijo O (Fig. 18.12). Recordando la ecuación (14.11), escribimos

$$\Sigma \mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O \tag{18.27}$$

donde $\dot{\mathbf{H}}_O$ representa la derivada temporal del vector $\mathbf{H}_O$ con respecto al sistema fijo $OXYZ$. Una deducción similar a la utilizada en la sec-

ción 18.5 nos permite relacionar $\dot{\mathbf{H}}_O$ con la derivada temporal $(\dot{\mathbf{H}}_O)_{Oxyz}$ de $\mathbf{H}_O$ con respecto al sistema giratorio $Oxyz$. Sustituyendo en (18.27) llegamos a la ecuación

$$\Sigma\mathbf{M}_O = (\dot{\mathbf{H}}_O)_{Oxyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H}_O \tag{18.28}$$

donde $\Sigma\mathbf{M}_O$ = suma de momentos con respecto a O de las fuerzas aplicadas al sólido rígido.
$\mathbf{H}_O$ = momento angular del sólido con respecto al sistema fijo $OXYZ$
$(\dot{\mathbf{H}}_O)_{Oxyz}$ = derivada temporal de $\mathbf{H}_O$ con respecto al sistema móvil $Oxyz$, que se calculará de las relaciones (18.13)
$\boldsymbol{\Omega}$ = velocidad angular del sistema móvil $Oxyz$

Si el sistema móvil está solidariamente unido al sólido, su velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ es idéntica a la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del sólido. Sin embargo, como se indicó en el último párrafo de la sección 18.5, existen muchas aplicaciones donde es conveniente utilizar un sistema de referencia que no está unido al sólido sino que gira en forma independiente.

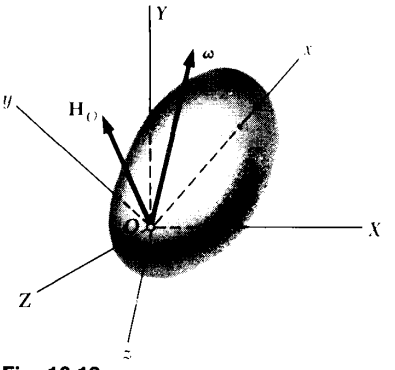


Fig. 18.12

***18.8. Rotación de un sólido rígido alrededor de un eje fijo.** Utilizaremos la ecuación (18.28), que se obtuvo en la sección anterior para analizar el movimiento de un sólido rígido obligado a girar alrededor de un eje fijo AB (Fig. 18.13). En primer lugar, observamos que la velocidad angular del sólido con respecto al sistema fijo $OXYZ$ está representada por el vector ω dirigido a lo largo del eje de rotación. Uniendo el sistema de referencia en movimiento $Oxyz$ al sólido con el eje z a lo largo de AB, tenemos $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k}$. Sustituyendo $\omega_x = 0$, $\omega_y = 0$ $\omega_z = \omega$ en las relaciones (18.13), obtenemos las componentes a lo largo de los ejes giratorios del momento angular $\mathbf{H}_O$ del sólido alrededor de O:

$$H_x = -I_{xz}\omega \qquad H_y = -I_{yz}\omega \qquad H_z = I_z\omega$$

Como el sistema $Oxyz$ está unido al sólido, tenemos que $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}$ y la ecuación (18.28) nos da

$$\begin{aligned}\Sigma\mathbf{M}_O &= (\dot{\mathbf{H}}_O)_{Oxyz} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}_O \\ &= (-I_{xz}\mathbf{i} - I_{yz}\mathbf{j} + I_z\mathbf{k})\dot{\omega} + \omega\mathbf{k} \times (-I_{xz}\mathbf{i} - I_{yz}\mathbf{j} + I_z\mathbf{k})\omega \\ &= (-I_{xz}\mathbf{i} - I_{yz}\mathbf{j} + I_z\mathbf{k})\alpha + (-I_{xz}\mathbf{j} + I_{yz}\mathbf{i})\omega^2\end{aligned}$$

El resultado obtenido puede expresarse con las tres ecuaciones escalares

$$\begin{aligned}\Sigma M_x &= -I_{xz}\alpha + I_{yz}\omega^2 \\ \Sigma M_y &= -I_{yz}\alpha - I_{xz}\omega^2 \\ \Sigma M_z &= I_z\alpha\end{aligned} \tag{18.29}$$

Cuando se conocen las fuerzas aplicadas al sólido, la aceleración angular α puede obtenerse de la última de las ecuaciones (18.29). La velocidad angular ω se determina entonces por integración y los valores obtenidos para α y ω pueden sustituirse en las primeras

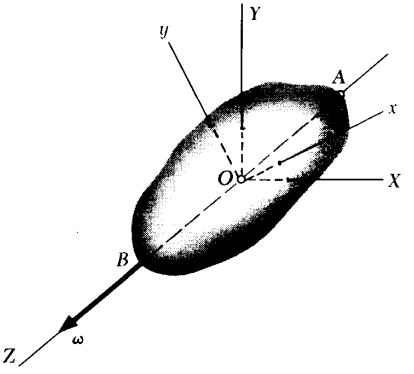


Fig. 18.13

dos ecuaciones (18.29). Estas ecuaciones, más las tres ecuaciones (18.26) que definen el movimiento del centro de masas del sólido, pueden utilizarse entonces para determinar las reacciones en los puntos de apoyo A y B.

Debe observarse que pueden seleccionarse ejes distintos a los mostrados en la figura 18.13 para analizar la rotación de un sólido rígido alrededor de un eje fijo. En muchos casos los ejes principales de inercia del sólido serán más ventajosos. Por lo tanto es conveniente regresar a la ecuación (18.28) y seleccionar el sistema de ejes que mejor se adapte al problema que se considere.

Si el sólido es simétrico con respecto al plano xy, los productos de inercia I_{xz} e I_{yz} son iguales a cero y las ecuaciones (18.29) se reducen a

$$\Sigma M_x = 0 \qquad \Sigma M_y = 0 \qquad \Sigma M_z = I_z\alpha \tag{18.30}$$

que concuerdan con los resultados obtenidos en el capítulo 16. Si, por otra parte, los productos de inercia I_{xz} e I_{yz} son diferentes de cero, la suma de los momentos de las fuerzas exteriores alrededor de los ejes x e y serán también diferentes de cero, aun cuando el sólido gire a velocidad angular constante ω. De hecho, en el último caso las ecuaciones (18.29) dan

$$\Sigma M_x = I_{yz}\omega^2 \qquad \Sigma M_y = -I_{xz}\omega^2 \qquad \Sigma M_z = 0 \tag{18.31}$$

Esta última observación nos lleva al estudio del equilibrio *de ejes* o árboles rotatorios. Consideremos, por ejemplo, el eje del cigüeñal mostrado en la figura 18.14*a*, que es simétrico con respecto a su centro de masas G. Observamos primero que cuando el eje del cigüeñal está en reposo no ejerce una fuerza lateral sobre sus soportes, ya que su centro de gravedad se encuentra en la vertical de A. Se dice que el eje está equilibrado o compensado *estáticamente*. La reacción en A, llamada frecuentemente *reacción estática*, es vertical y su módulo es igual al peso W del eje. Supongamos que éste gira con una velocidad angular constante ω. Si unimos nuestro sistema de referencia al árbol con su origen en G, el eje z a lo largo de AB y el eje y en el plano de simetría del árbol (Fig. 18.14*b*), resulta que I_{xz} es cero y que I_{yz} es positivo. De acuerdo con las ecuaciones (18.31), las fuerzas externas deben incluir un par de momento $I_{yz}\omega^2\mathbf{i}$. Como este par está formado por la reacción en B y la componente horizontal de la reacción en A, tenemos

$$\mathbf{A}_y = \frac{I_{yz}\omega^2}{l}\mathbf{j} \qquad \mathbf{B} = -\frac{I_{yz}\omega^2}{l}\mathbf{j} \tag{18.32}$$

Como las reacciones en los cojinetes o puntos de apoyo son proporcionales a ω^2, el árbol tenderá a salirse de sus cojinetes o puntos de apoyo al girar a alta velocidad. Más aún, como las reacciones en los cojinetes $\mathbf{A}_y$ y $\mathbf{B}$, llamadas *reacciones dinámicas*, están contenidas en el plano yz, giran con el árbol y hacen que vibre la estructura soporte. Estos efectos indeseables se evitarán reacomodando la distribución de masas a lo largo del árbol o agregando masas correctoras que permiten que I_{yz} sea igual a cero. Las reacciones dinámicas A_y y $\mathbf{B}$ se anularán y las reacciones en los cojinetes o puntos de apoyo se reducirán a la reacción estática $\mathbf{A}_z$, cuya dirección es fija. Entonces el árbol estará tanto *dinámica como estáticamente* equilibrado.

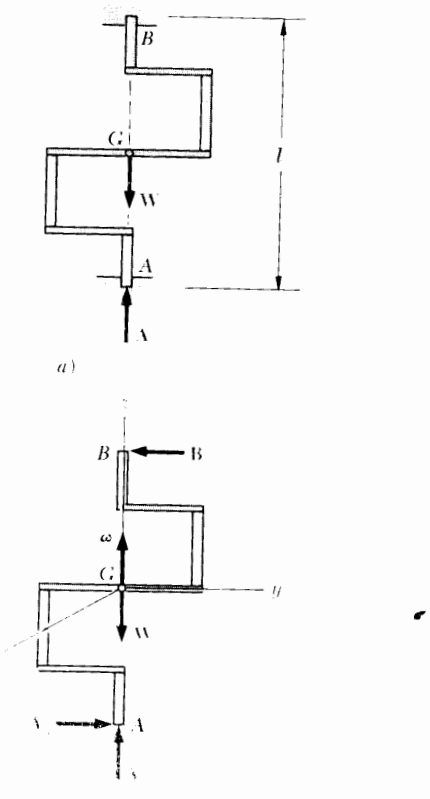
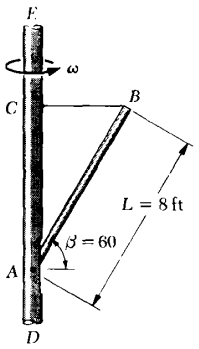


Fig. 18.14

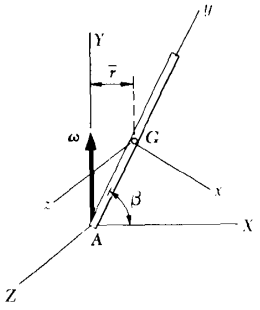


PROBLEMA RESUELTO 18.3

Una varilla AB de longitud $L = 8$ ft y peso $W = 40$ lb está unida por un pasador en A a un eje vertical DE que gira con una velocidad angular constante ω de 15 rad/s. La varilla se mantiene en posición por medio de un alambre horizontal BC unido al eje y al extremo B de la barra. Determínense la tensión en el alambre y la reacción en A.

Solución. Las fuerzas inerciales se reducen al vector $m\bar{\mathbf{a}}$ unido a G y el par $\dot{\mathbf{H}}_G$. Como G describe un círculo horizontal de radio $\mathbf{r} = \frac{1}{2}L\cos\beta$ a la velocidad angular ω, constante, tenemos

$$\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{a}_n = -\bar{r}\omega^2\mathbf{I} = -(\tfrac{1}{2}L\cos\beta)\omega^2\mathbf{I} = -(450\ \text{ft/s}^2)\mathbf{I}$$
$$m\bar{\mathbf{a}} = \frac{40}{g}(-450\mathbf{I}) = -(559\ \text{lb})\mathbf{I}$$

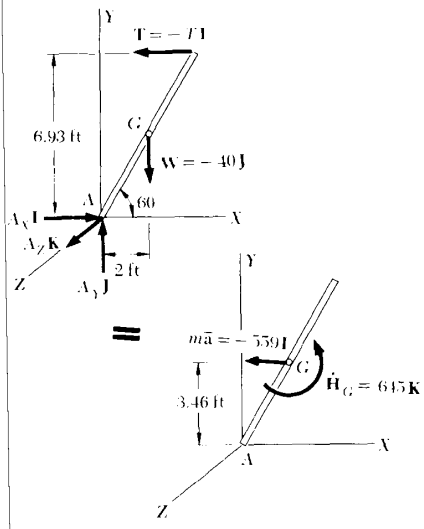


Determinación de $\dot{\mathbf{H}}_G$. Calculamos primero el momento angular $\mathbf{H}_G$. Utilizando los ejes centrales principales de inercia x, y y z, escribimos

$$\bar{I}_x = \tfrac{1}{12}mL^2 \qquad \bar{I}_y = 0 \qquad \bar{I}_z = \tfrac{1}{12}mL^2$$
$$\omega_x = -\omega\cos\beta \qquad \omega_y = \omega\,\text{sen}\,\beta \qquad \omega_z = 0$$
$$\mathbf{H}_G = \bar{I}_x\omega_x\mathbf{i} + \bar{I}_y\omega_y\mathbf{j} + \bar{I}_z\omega_z\mathbf{k}$$
$$\mathbf{H}_G = -\tfrac{1}{12}mL^2\omega\cos\beta\,\mathbf{i}$$

La derivada temporal $\dot{\mathbf{H}}_G$ de $\mathbf{H}_G$ respecto a los ejes de orientación fija se obtiene de la ecuación (18.22). Adviértase que la derivada temporal $(\dot{\mathbf{H}}_G)_{Gxyz}$ de $\mathbf{H}_G$ con respecto al sistema giratorio $Gxyz$ es cero y que la velocidad angular Ω de ese sistema es igual a la velocidad angular ω de la varilla, tenemos

$$\dot{\mathbf{H}}_G = (\dot{\mathbf{H}}_G)_{Gxyz} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}_G$$
$$\dot{\mathbf{H}}_G = 0 + (-\omega\cos\beta\,\mathbf{i} + \omega\,\text{sen}\,\beta\,\mathbf{j}) \times (-\tfrac{1}{12}mL^2\omega\cos\beta\,\mathbf{i})$$
$$\dot{\mathbf{H}}_G = \tfrac{1}{12}mL^2\omega^2\,\text{sen}\,\beta\cos\beta\,\mathbf{k} = (645\ \text{lb}\cdot\text{ft})\mathbf{k}$$

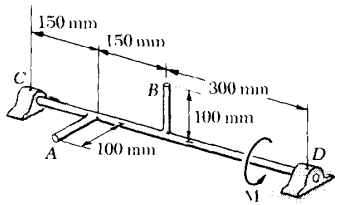


Ecuaciones de movimiento. Expresando que el sistema de las fuerzas externas es equivalente al sistema de las fuerzas inerciales, escribimos

$$\Sigma\mathbf{M}_A = \Sigma(\mathbf{M}_A)_{\text{eff}}:$$
$$6.93\mathbf{J} \times (-T\mathbf{I}) + 2\mathbf{I} \times (-40\mathbf{J}) = 3.46\mathbf{J} \times (-559\mathbf{I}) + 645\,\mathbf{K}$$
$$(6.93T - 80)\mathbf{K} = (1934 + 645)\mathbf{K} \qquad T = 384\ \text{lb} \blacktriangleleft$$

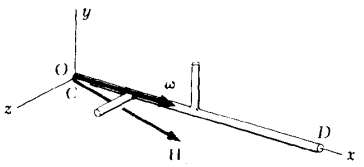
$$\Sigma\mathbf{F} = \Sigma\mathbf{F}_{\text{eff}}: \quad A_X\mathbf{I} + A_Y\mathbf{J} + A_Z\mathbf{K} - 384\mathbf{I} - 40\mathbf{J} = -559\mathbf{I}$$
$$\mathbf{A} = -(175\ \text{lb})\mathbf{I} + (40\ \text{lb})\mathbf{J} \blacktriangleleft$$

Observación. El valor de T pudo haberse obtenido de $\mathbf{H}_A$ y de la ecuación (18.28). Sin embargo, el método utilizado aquí también nos proporciona la reacción en A. Además, llama la atención sobre el efecto de la asimetría de la varilla en la solución del problema, mostrando claramente que tanto el vector $m\mathbf{a}$ como el par $\dot{\mathbf{H}}_G$ deben emplearse para representar las fuerzas inerciales.



PROBLEMA RESUELTO 18.4

Dos barras A y B de 100 mm, cada una de 300 g de masa, están soldadas al árbol CD que está sostenido por cojinetes en C y D. Si al árbol se aplica un par $\mathbf{M}$ de módulo igual a 6 N·m, determínense las componentes de las reacciones dinámicas en C y D en el instante en que el árbol ha alcanzado una velocidad angular de 1 200 rpm. Despréciese el momento de inercia propio del árbol.

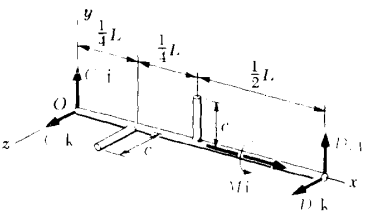


Momento angular alrededor de O. Unimos al sólido el sistema de referencia $Oxyz$ y observamos que los ejes escogidos no son ejes principales de inercia para el sólido. Como el sólido gira alrededor del eje x, tenemos $\omega_x = \omega$ y $\omega_y = \omega_z = 0$. Sustituyendo en las ecuaciones (18.13)

$$H_x = I_x\omega \qquad H_y = -I_{xy}\omega \qquad H_z = -I_{xz}\omega$$
$$\mathbf{H}_O = (I_x\mathbf{i} - I_{xy}\mathbf{j} - I_{xz}\mathbf{k})\omega$$

Momento en O de las fuerzas exteriores. Como el sistema de referencia gira con una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$, la ecuación (18.28) nos da

$$\begin{aligned}\Sigma\mathbf{M}_O &= (\dot{\mathbf{H}}_O)_{Oxyz} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}_O \\ &= (I_x\mathbf{i} - I_{xy}\mathbf{j} - I_{xz}\mathbf{k})\alpha + \omega\mathbf{i} \times (I_x\mathbf{i} - I_{xy}\mathbf{j} - I_{xz}\mathbf{k})\omega \\ &= I_x\alpha\mathbf{i} - (I_{xy}\alpha - I_{xz}\omega^2)\mathbf{j} - (I_{xz}\alpha + I_{xy}\omega^2)\mathbf{k} \qquad (1)\end{aligned}$$



Reacción dinámica en D. Las fuerzas exteriores consisten en los pesos del árbol y las barras, el par $\mathbf{M}$, las reacciones estáticas en C y D y las reacciones dinámicas en C y D. Como los pesos y las reacciones estáticas están equilibrados (o compensados), las fuerzas exteriores se reducen al par $\mathbf{M}$ y a las reacciones dinámicas $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$ como se muestra en la figura. Tomando los momentos con respecto a O, tenemos

$$\Sigma\mathbf{M}_O = L\mathbf{i} \times (D_y\mathbf{j} + D_z\mathbf{k}) + M\mathbf{i} = M\mathbf{i} - D_zL\mathbf{j} + D_yL\mathbf{k} \qquad (2)$$

Al igualar los coeficientes del vector unitario $\mathbf{i}$ en (1) y (2),

$$M = I_x\alpha \qquad M = 2(\tfrac{1}{3}mc^2)\alpha \qquad \alpha = 3M/2mc^2$$

Al igualar los coeficientes de $\mathbf{k}$ y $\mathbf{j}$ en (1) y (2):

$$D_y = -(I_{xz}\alpha + I_{xy}\omega^2)/L \qquad D_z = (I_{xy}\alpha - I_{xz}\omega^2)/L \qquad (3)$$

Utilizando el teorema de Steiner y notando que el producto de inercia de cada barra es cero con respecto a ejes centrales, tenemos

$$I_{xy} = \Sigma m\bar{x}\bar{y} = m(\tfrac{1}{2}L)(\tfrac{1}{2}c) = \tfrac{1}{4}mLc$$
$$I_{xz} = \Sigma m\bar{x}\bar{z} = m(\tfrac{1}{4}L)(\tfrac{1}{2}c) = \tfrac{1}{8}mLc$$

Sustituyendo en (3) los valores encontrados para I_{xy}, I_{xz} y α:

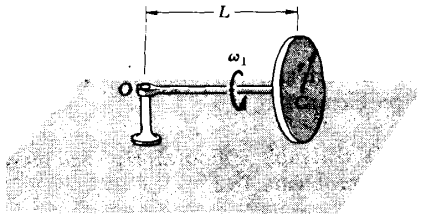
$$D_y = -\tfrac{3}{16}(M/c) - \tfrac{1}{4}mc\omega^2 \qquad D_z = \tfrac{3}{8}(M/c) - \tfrac{1}{8}mc\omega^2$$

Sustituyendo $\omega = 1\,200$ rpm $= 125.7$ rad/s, $c = 0.100$ m, $M = 6$ N·m y $m = 0.300$ kg, tenemos

$$D_y = -129.8\ \text{N} \qquad D_z = -36.8\ \text{N} \quad \blacleftarrow$$

Reacción dinámica en C. Utilizando un sistema de referencia unido a D, obtenemos ecuaciones semejantes a las ecuaciones (3), que nos dan

$$C_y = -152.2\ \text{N} \qquad C_z = -165.2\ \text{N} \quad \blacleftarrow$$



PROBLEMA RESUELTO 18.5

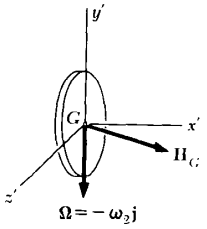
Un disco homogéneo de radio r y masa m está montado sobre un eje OG de longitud L y masa despreciable. El eje está articulado en un punto fijo O y el disco está obligado girar sobre un plano horizontal. Si se sabe que el disco gira en el sentido opuesto a las manecillas del reloj a velocidad angular constante ω_1 respecto al eje, determínese *a*) la fuerza (que se supone vertical) ejercida por el plano sobre el disco, y *b*) la reacción en la articulación O.

Solución. Las fuerzas exteriores se reducen al vector $m\bar{\mathbf{a}}$ unido a G y al par $\dot{\mathbf{H}}_G$. Recordando del problema resuelto 18.2 que el eje gira con respecto al eje $\dot{y}$ con una velocidad angular $\omega_2 = r\omega_1/L$, escribimos

$$m\bar{\mathbf{a}} = -mL\omega_2^2\mathbf{i} = -mL(r\omega_1/L)^2\mathbf{i} = -(mr^2\omega_1^2/L)\mathbf{i} \tag{1}$$

Determinación de $\dot{\mathbf{H}}_G$. Recordamos del problema resuelto 18.2 que el momento angular del disco con respecto a G es

$$\mathbf{H}_G = \tfrac{1}{2}mr^2\omega_1\left(\mathbf{i} - \frac{r}{2L}\mathbf{j}\right)$$



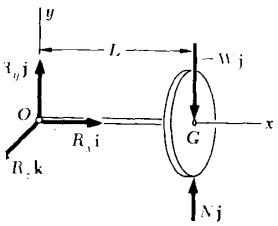
donde $\mathbf{H}_G$ se divide en sus componentes a lo largo de los ejes móviles x', y', z' a lo largo de OG y y' vertical. La derivada temporal $\dot{\mathbf{H}}_G$ de $\mathbf{H}_G$ con respecto a los ejes de orientación fija se obtiene de la ecuación (18.22). Adviértase que la derivada temporal $(\dot{\mathbf{H}}_G)_{Gx'y'z'}$ de $\mathbf{H}_G$ con respecto al sistema móvil es cero y que la velocidad angular Ω de ese sistema es

$$\Omega = -\omega_2\mathbf{j} = -(r\omega_1/L)\mathbf{j}$$

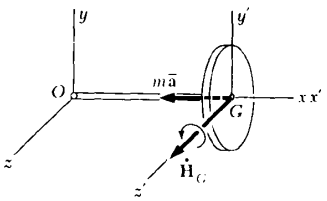
tenemos

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{H}}_G &= (\dot{\mathbf{H}}_G)_{Gx'y'z'} + \Omega \times \mathbf{H}_G \\ &= 0 - \frac{r\omega_1}{L}\mathbf{j} \times \tfrac{1}{2}mr^2\omega_1\left(\mathbf{i} - \frac{r}{2L}\mathbf{j}\right) \\ &= \tfrac{1}{2}mr^2(r/L)\omega_1^2\mathbf{k}\end{aligned} \tag{2}$$

Ecuaciones del movimiento. Expresando que el sistema de las fuerzas exteriores es equivalente al sistema de las fuerzas inerciales, escribimos



=



$$\Sigma\mathbf{M}_O = \Sigma(\mathbf{M}_O)_{\text{fuerza-par}}: \qquad L\mathbf{i} \times (N\mathbf{j} - W\mathbf{j}) = \dot{\mathbf{H}}_G$$

$$(N - W)L\mathbf{k} = \tfrac{1}{2}mr^2(r/L)\omega_1^2\mathbf{k}$$

$$N = W + \tfrac{1}{2}mr(r/L)^2\omega_1^2 \qquad \mathbf{N} = [W + \tfrac{1}{2}mr(r/L)^2\omega_1^2]\mathbf{j} \tag{3}$$

$$\Sigma\mathbf{F} = \Sigma\mathbf{F}_{\text{fuerza-par}}: \qquad \mathbf{R} + N\mathbf{j} - W\mathbf{j} = m\bar{\mathbf{a}}$$

Sustituyendo N de (3), $m\mathbf{a}$ de (1) y al resolver para $\mathbf{R}$, obtenemos

$$\mathbf{R} = -(mr^2\omega_1^2/L)\mathbf{i} - \tfrac{1}{2}mr(r/L)^2\omega_1^2\mathbf{j}$$

$$\mathbf{R} = -\frac{mr^2\omega_1^2}{L}\left(\mathbf{i} + \frac{r}{2L}\mathbf{j}\right)$$

Problemas

18.45 Determínese la derivada temporal $\dot{\mathbf{H}}_G$, del momento angular de la placa del problema 18.1.

18.46 Determínese la derivada temporal $\dot{\mathbf{H}}_G$, del momento angular $\mathbf{H}_G$, de la barra del problema 18.2.

18.47 Determínese la derivada temporal $\dot{\mathbf{H}}_G$, del momento angular $\mathbf{H}_G$, del disco del problema 18.3 para un valor arbitrario de β, si se sabe que su velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ permanece constante.

18.48 Determínese la derivada temporal $\dot{\mathbf{H}}_A$, del momento angular $\mathbf{H}_A$, de la placa del problema 18.4, si se sabe que su velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ permanece constante.

18.49 Determínese la derivada temporal $\dot{\mathbf{H}}_C$, del momento angular $\mathbf{H}_C$, del disco del problema 18.5.

18.50 Determínese la derivada temporal $\dot{\mathbf{H}}_C$, del momento angular $\mathbf{H}_C$, del disco del problema 18.6.

18.51 Determínese la derivada temporal $\dot{\mathbf{H}}_G$, del momento angular $\mathbf{H}_G$, del disco del problema 18.3 para un valor arbitrario de β, si se sabe que el disco tiene una velocidad angular $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{i}$ y una aceleración angular $\boldsymbol{\alpha} = \alpha\mathbf{i}$.

18.52 Determínese la derivada temporal $\dot{\mathbf{H}}_A$, del momento angular $\mathbf{H}_A$, de la placa del problema 18.4, si se sabe que tiene una velocidad angular $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{j}$ y una aceleración angular $\boldsymbol{\alpha} = \alpha\mathbf{j}$.

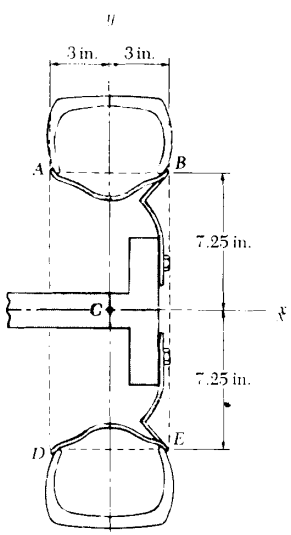


Fig. P18.53 y P18.54

18.53 Cuando la rueda de 40 lb que aquí se muestra se une a una máquina de equilibrado y se hace girar a 750 rpm, se observa que las fuerzas que ejerce la rueda sobre la máquina equivalen a un sistema fuerza par que consiste en una fuerza $\mathbf{F} = (36.2 \text{ lb})\mathbf{j}$ aplicada en C y a un par $\mathbf{M}_C = -(10.85 \text{ lb} \cdot \text{ft})\mathbf{k}$ tomando un sistema móvil dextrógiro que es solidario a la rueda. *a*) Determínese la distancia del eje de rotación al centro de masas de la rueda y los productos de inercia $\mathbf{I}_{xy}$ e $\mathbf{I}_{zx}$. *b*) Si sólo se pueden usar dos plomos de conexión para equilibrar la rueda, tanto estática como dinámicamente. ¿Cuánto deberán pesar estos plomos y en cuáles de los puntos A, B, D o E deberán ser colocados?

18.54 Después de acoplar la rueda de 40 lb, que se indica, a la máquina de equilibrado y hacerla girar con una velocidad angular de 900 rpm, un mecánico descubrió que para equilibrar la rueda tanto estática como dinámicamente debería usar dos plomos de corrección, uno de 6 oz de peso colocado en A y uno de 2 oz de peso colocado en E. Utilizando un sistema de referencia dextrógiro solidario a la rueda (con el eje z perpendicular al plano de la figura), determínense antes de que los plomos de corrección se hayan colocado *a*) la distancia del eje de rotación al centro de masas de la rueda y los productos de inercia $\mathbf{I}_{xy}$ e $\mathbf{I}_{zx}$ y *b*) el sistema fuerza par en C equivalente a las fuerzas que ejerce la rueda sobre la máquina.

18.55 Una placa triangular homogénea delgada, de masa 2.5 kg, está soldada a un eje vertical ligero, sostenido por cojinetes en A y B. Si se sabe que la placa gira a una velocidad angular constante $\omega = 8$ rad/s, determínense las reacciones dinámicas en A y B.

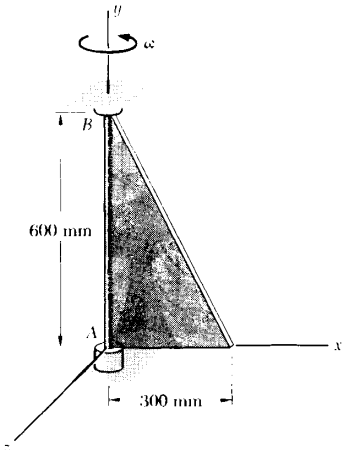


Fig. P18.55

18.56 Una barra delgada y homogénea, de peso w por unidad de longitud, se utiliza para formar el eje que se indica en la figura. Si se sabe que el eje gira con una velocidad constante ω, determínense las reacciones dinámicas en A y B.

18.57 Dos brazos en forma de L, con peso de 4 lb cada uno, están soldados a la tercera parte de un árbol horizontal de 2 ft, sostenido por cojinetes en A y B. El conjunto se encuentra en reposo ($\omega = 0$) cuando un par de momento $\mathbf{M}_0 = (20 \text{ lb} \cdot \text{in})\mathbf{k}$ se aplica al árbol. Determínense *a*) la aceleración angular resultante del árbol y *b*) las reacciones dinámicas en A y B inmediatamente después de que el par ha sido aplicado.

18.58 Si se sabe que la placa del problema 18.55 se encuentra inicialmente en reposo ($\omega = 0$), cuando un par de momento $\mathbf{M}_0 = (0.75 \text{ N} \cdot \text{M})\mathbf{j}$ se le aplica, determínense *a*) la aceleración angular de la placa y *b*) las reacciones dinámicas en A y B inmediatamente después de que el par se ha aplicado.

18.59 La figura aquí mostrada, formada por placas metálicas, es de espesor uniforme y tiene una masa de 600 g. Se une a un eje ligero sostenido mediante cojinetes en A y B, separados 150 mm. El conjunto está en reposo cuando se somete a un par $\mathbf{M}_0$ en la forma indicada en la figura. Si la aceleración angular resultante es $\alpha = (12 \text{ rad/s}^2)\mathbf{k}$, determínense *a*) el par $\mathbf{M}_0$ y *b*) las reacciones dinámicas en A y B inmediatamente después de aplicarse el par.

18.60 Si se sabe que el árbol del problema 18.56 está inicialmente en reposo ($\omega = 0$), determínense *a*) el par $\mathbf{M}_0$ necesario para imprimir al eje una aceleración $\boldsymbol{\alpha} = \alpha\mathbf{i}$ y *b*) las reacciones dinámicas en A y B inmediatamente después de aplicar el par $\mathbf{M}_0$.

18.61 Para el sólido metálico del problema 18.59, determínense *a*) la velocidad angular del sólido 0.6 s después de que se ha aplicado el par $\mathbf{M}_0$ sobre él y *b*) el módulo de las reacciones dinámicas en A y B en ese momento.

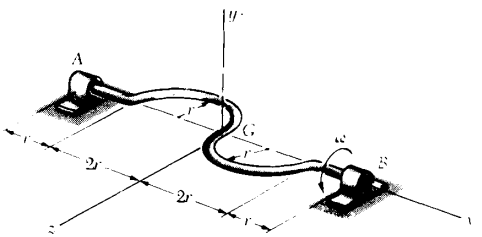


Fig. P18.56

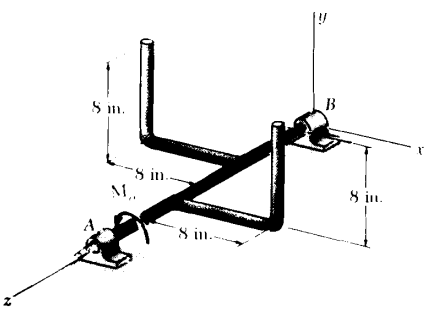


Fig. P18.57

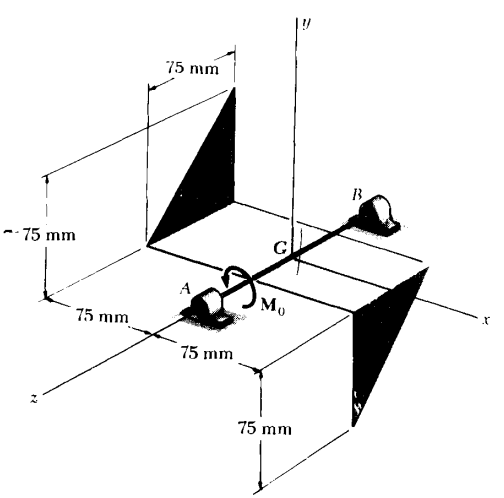


Fig. P18.59

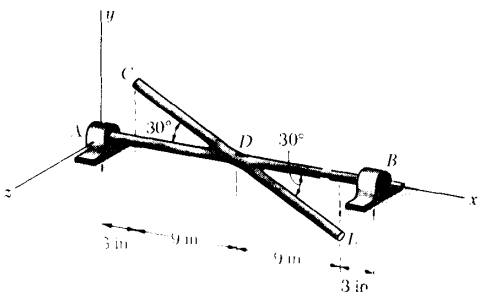


Fig. P18.62

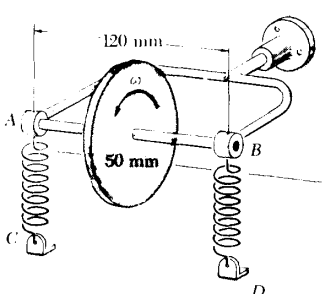


Fig. P18.64

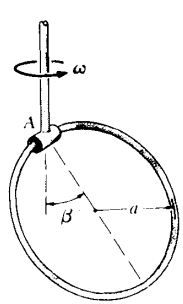


Fig. P18.67

18.62 Dos barras uniformes *CD* y *DE*, cada una con peso de 2.5 lb, se sueldan al eje *AB*. Si se sabe que $\boldsymbol{\omega} = (12 \text{ rad/s})\mathbf{i}$ y $\boldsymbol{\alpha} = (45 \text{ rad/s}^2)\mathbf{i}$, en el instante que se muestra, determínense *a*) el par **M** que se aplica al eje y *b*) las reacciones dinámicas en *A* y *B*.

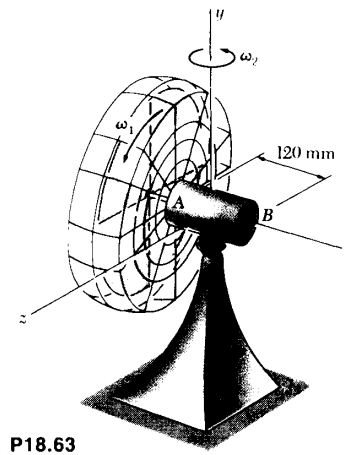


Fig. P18.63

18.63 Las aspas de un ventilador y el rotor de su motor tienen una masa total de 200 g y un radio de giro combinado de 75 mm. Están sostenidos por cojinetes en *A* y *B*, separados 120 mm y tienen una velocidad angular ω_1 de 2400 rpm en la posición de alta velocidad. Determínense las reacciones dinámicas en *A* y *B* cuando la caja del motor tiene una velocidad angular ω_2 de 0.5 rad/s como se muestra en la figura.

18.64 La estructura de cierto tipo de indicador de giro de una aeronave se muestra esquemáticamente en la figura. Los muelles *AC* y *BD* están inicialmente comprimidos y ejercen fuerzas verticales iguales en *A* y *B* cuando el avión se mueve describiendo una trayectoria recta. Cada muelle tiene una constante de 600 N/m y el disco uniforme tiene una masa de 250 g y gira a razón de 12 000 rpm. Determínese el ángulo a que girará la horquilla cuando el piloto realiza un giro horizontal de 800 m de radio, hacia la derecha con una velocidad de 720 km/h. Indíquese si el punto *A* se moverá hacia arriba o hacia abajo.

18.65 Cada neumático de un automóvil pesa 50 lb y tiene un radio de giro de 9 in. El automóvil se mueve sobre una curva no peraltada, de radio 500 ft, con una velocidad de 60 mi/h. Si se sabe que cada neumático tiene 23 in de diámetro y que la distancia transversal entre los neumáticos es de 60 in, determínese la reacción normal adicional que sobre cada uno de los neumáticos exteriores produce la rotación del automóvil.

18.66 Una hélice de tres aspas de un aeroplano pesa 300 lb y tiene un radio de giro de 3 ft. Si se sabe que la hélice gira a 1500 rpm, determínese el módulo del par aplicado por la hélice a su eje, cuando el aeroplano describe una órbita circular de radio 1200 ft a una velocidad de 350 mi/h.

18.67 Un anillo delgado de radio *a* se une mediante un collarín en *A* a un eje vertical que gira a una velocidad constante ω. Dedúzcase una expresión *a*) para el ángulo constante β que el plano del anillo forma con la vertical y *b*) para el valor máximo de ω para el cual el anillo permanecerá vertical ($\beta = 0$).

18.68 Una placa cuadrada uniforme, de lado a y masa m, está sujeta con pasadores en A y B a una horquilla que gira con una velocidad angular constante ω. Determínense *a*) el valor de ω para el cual el ángulo β mantiene el valor constante $\beta = 40°$ y *b*) el intervalo de valores de ω para el cual la placa permanece vertical ($\beta = 90°$).

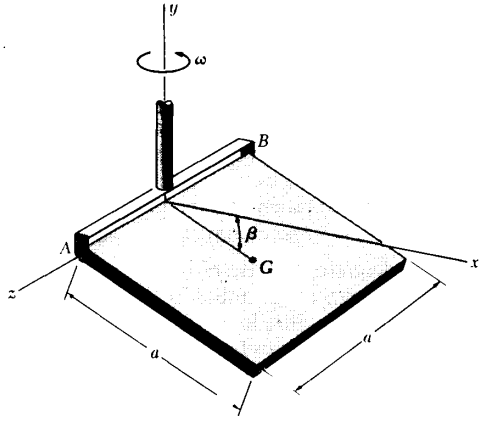


Fig. P18.68

18.69 Se muestran las características básicas de cierto tipo de molino. Un disco de peso W está montado sobre un eje AB respecto del cual puede girar libremente. El eje AB se une mediante una clavija al eje vertical que gira con una velocidad angular constante ω_1. El disco gira sobre el interior de un cilindro vertical. (Sólo se muestra la mitad del cilindro.) Determínese la mínima velocidad angular ω_1 para la cual se mantiene el contacto entre el disco y el cilindro.

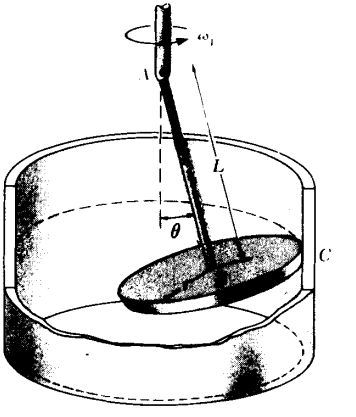


Fig. P18.69

18.70 Una barra delgada AB de longitud L está unida al brazo BC por una horquilla en B y se pone a girar alrededor de la vertical con una velocidad angular ω. Si se sabe que la barra forma un ángulo $\theta = 20°$ con la horizontal, dedúzcase una expresión para el valor correspondiente de la velocidad angular ω.

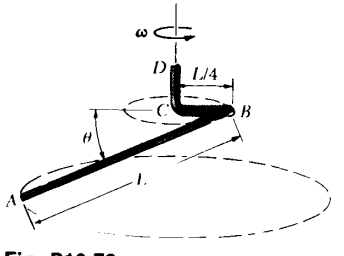


Fig. P18.70

18.71 Dos discos, cada uno de 10 lb de peso y radio 12 in, giran en la forma aquí indicada a 1200 rpm alrededor de la barra AB, que está unida al árbol CD. Se hace que el sistema completo gire alrededor del eje z con una velocidad angular Ω de 60 rpm. *a*) Determínense las reacciones dinámicas en C y D cuando el sistema se encuentra en la posición de la figura. *b*) Resuélvase la parte *a* suponiendo que el sentido de giro del disco B se invierte.

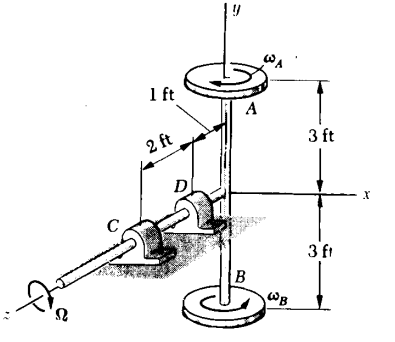


Fig. P18.71

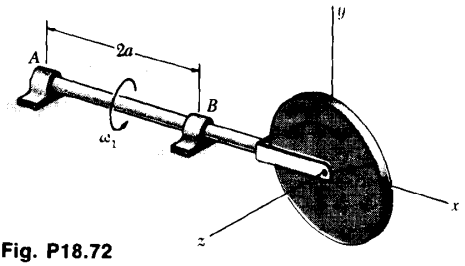


Fig. P18.72

18.72 Un disco homogéneo delgado, de masa m y radio a, está sostenido por una barra horizontal ABC que termina en forma de horquilla. El disco y la barra giran con las velocidades angulares mostradas en la figura. Suponiendo que tanto ω_1 como ω_2 son constantes, determínense las reacciones dinámicas en A y en B.

18.73 Un disco delgado de masa $m = 5$ kg gira con una velocidad angular ω_2 con respecto al eje doblado ABC, que a su vez gira con una velocidad angular ω_1 alrededor del eje y. Si se sabe que $\omega_1 = 3$ rad/s y $\omega_2 = 8$ rad/s y que ambas son constantes, determínese el sistema fuerza par que representa la reacción dinámica del soporte en A.

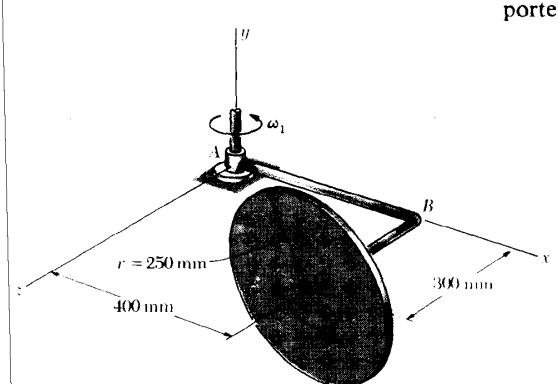


Fig. P18.73

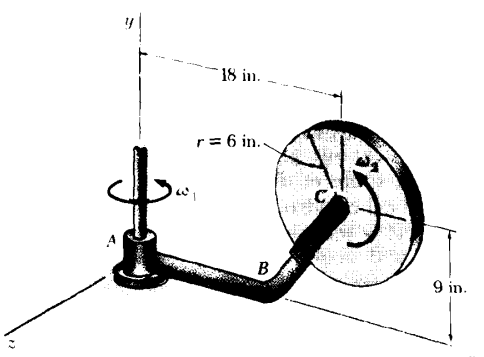


Fig. P18.74

18.74 Un disco delgado de peso $W = 10$ lb gira con una velocidad angular ω_2 respecto al brazo ABC, que a su vez gira con una velocidad angular ω_1 alrededor del eje y. Si se sabe que $\omega_1 = 5$ rad/s y $\omega_2 = 15$ rad/s y que ambas son constantes, determínese el sistema fuerza par que representa la reacción dinámica del soporte en A.

18.75 Para el disco del problema 18.73 determínense *a*) el par $M_1\mathbf{j}$ que se deberá aplicar al eje doblado ABC para proporcionarle una aceleración angular $\alpha_1 = (7.5 \text{ rad/s}^2)\mathbf{j}$ cuando $\omega_1 = 3$ rad/s, si se sabe que el disco gira con una velocidad angular constante $\omega_2 = 8$ rad/s y *b*) el sistema fuerza par que representa la reacción dinámica en A en ese instante. Supóngase que el eje doblado ABC tiene masa despreciable.

18.76 Para el problema 18.73 determínense *a*) el par $M_1\mathbf{j}$ que se deberá aplicar al eje doblado ABC para mantenerlo girando con una velocidad angular constante $\omega_1 = 3$ rad/s en el instante en que la velocidad angular ω_2 del disco tiene una magnitud de 8 rad/s y decrece a razón de 1.8 rad/s^2 ocasionada por el rozamiento en el eje en C y *b*) el sistema fuerza par que representa la reacción dinámica en A en ese instante.

18.77 Para el disco del problema 18.72 determínense *a*) el par $M_1\mathbf{i}$ que se deberá aplicar a la barra AB para proporcionarle una aceleración angular $\alpha_1\mathbf{i}$ cuando la barra tiene una velocidad angular $\omega_1\mathbf{i}$, si se sabe que el disco gira con una velocidad angular constante ω_2 y *b*) las reacciones dinámicas en A y en B en ese momento.

18.78 Para el disco del problema 18.74 determínense *a*) el par $M_1\mathbf{j}$ que se deberá aplicar al brazo ABC para proporcionarle una aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}_1 = -(7.5 \text{ rad/s}^2)\mathbf{j}$ cuando $\omega_1 = 5$ rad/s, si se sabe que el disco gira con una velocidad angular constante $\omega_2 = 15$ rad/s y *b*) el sistema fuerza par que representa la reacción dinámica en A en ese momento. Supóngase que ABC tiene una masa despreciable.

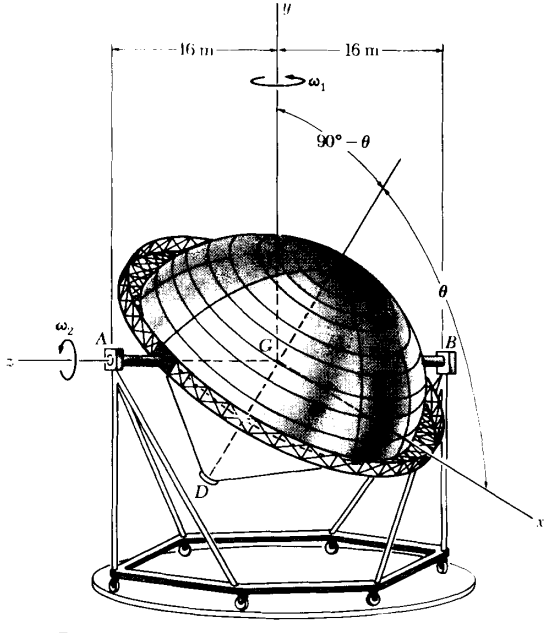


Fig. P18.79

*18.79 Un lente experimental de Fresnel, concentrador de energía solar, puede girar alrededor del eje horizontal AB que pasa por su centro de masas G. Está sostenido en A y en B por una celosía de acero que puede girar alrededor del eje vertical y. El concentrador tiene una masa de 30 Mg, un radio de giro de 12 m con respecto a su eje de simetría CD y un radio de giro de 10 m con respecto a cualquier eje transversal que pase por G. Si se sabe que las velocidades angulares ω_1 y ω_2 tienen ambas módulo constante, siendo su valor 0.25 rad/s y 0.20 rad/s, respectivamente, determínense para la posición $\theta = 60°$ *a*) las fuerzas ejercidas sobre el concentrador en A y en B y *b*) el par $M_2\mathbf{k}$ aplicado al concentrador en ese instante.

*18.80 Una barra homogénea y delgada AB, de masa m y longitud L, se pone a girar a una velocidad constante ω_2 respecto al eje horizontal z, mientras que el marco CD se pone a girar a una velocidad constante ω_1 respecto al eje vertical y. Exprésense en función del ángulo θ *a*) el par $\mathbf{M}_1$ necesario para mantener la rotación del marco, *b*) el par $\mathbf{M}_2$ que se requiere para mantener la rotación de la barra y *c*) las reacciones dinámicas C y D.

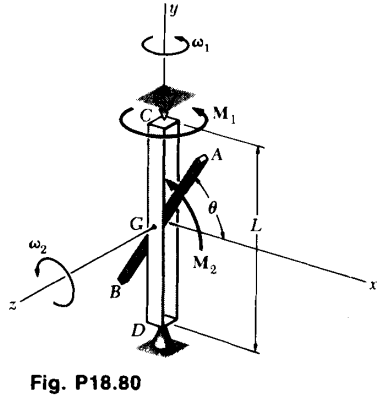


Fig. P18.80

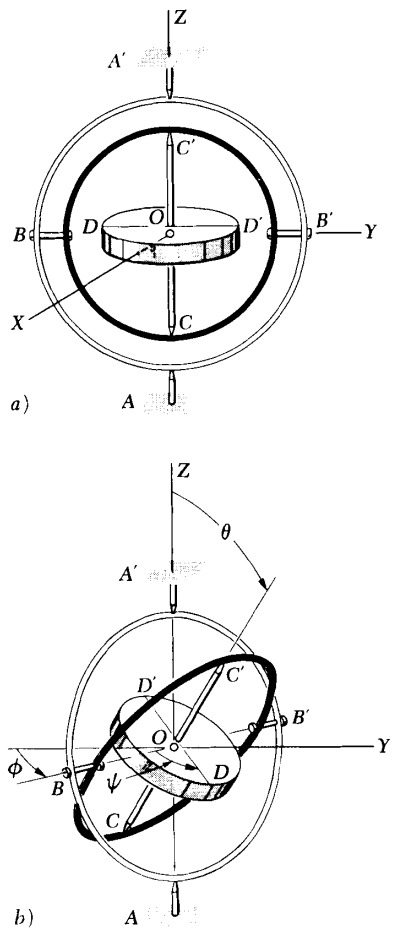


Fig. 18.15

*18.9. Movimiento de un giróscopo. Ángulos de Euler.

Un *giróscopo* es, en esencia, un rotor que puede girar libremente con respecto a su eje geométrico. Cuando está montado en una suspensión Cardán (Fig. 18.15), un giróscopo puede tomar cualquier orientación pero su centro de masas debe permanecer fijo en el espacio. Para definir la posición de un giróscopo en cualquier instante seleccionaremos un sistema de referencia fijo $OXYZ$, con el origen O localizado en el centro de masas del giróscopo y el eje Z a lo largo de la línea definida por los cojinetes A y A' del aro exterior, y consideraremos una posición de referencia del giróscopo en la cual los dos aros y un diámetro dado DD' del rotor se localizan en el plano fijo YZ (Fig. 18.15*a*), El giróscopo puede traerse desde esta posición de referencia hasta cualquier posición arbitraria (Fig. 18.15*b*) por medio de los siguientes pasos: 1) un giro del aro exterior de ángulo ϕ alrededor del eje de AA', 2) un giro del aro interior de ángulo o alrededor del eje BB' y 3) un giro del rotor de ángulo ψ con respecto a CC'. Los ángulos ϕ, θ y ψ se llaman *ángulos de Euler* y caracterizan completamente la posición del giróscopo en cualquier instante dado. Sus derivadas $\dot{\phi}$, $\dot{\theta}$ y $\dot{\psi}$ definen las velocidades de *precesión*, de *nutación* y de *rotación propia* del giróscopo en el instante considerado, respectivamente.

Para calcular las componentes de la velocidad angular y del momento angular del giróscopo utilizaremos un sistema móvil de ejes *Oxyz solidario al aro interior*, con el eje y a lo largo de BB' y el eje z a lo largo de CC' (Fig. 18.16). Estos ejes son ejes principales de inercia del giróscopo, pero aunque lo siguen en su precesión y nutación no siguen la rotación propia. Por esa razón son más convenientes que los ejes solidariamente unidos al giróscopo. Ahora expresaremos la velocidad angular ω del giróscopo con respecto al sistema de referencia fijo $OXYZ$ como la suma de las tres velocidades angulares parciales, correspondiendo a la precesión, la nutación y la rotación propia del giróscopo, respectivamente. Representando por $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ los vectores unitarios a lo largo de los ejes de rotación y por $\mathbf{K}$ el vector unitario a lo largo de la dirección fija Z, tenemos

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\phi}\mathbf{K} + \dot{\theta}\mathbf{j} + \dot{\psi}\mathbf{k} \tag{18.33}$$

Como las componentes vectoriales obtenidas para ω en (18.33) no son ortogonales (Fig. 18.16), descompondremos el vector unitario $\mathbf{K}$ en componentes a lo largo de los ejes x y z; escribimos

$$\mathbf{K} = -\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{k} \tag{18.34}$$

y sustituyendo $\mathbf{K}$ en (18.33),

$$\boldsymbol{\omega} = -\dot{\phi}\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{i} + \dot{\theta}\mathbf{j} + (\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)\mathbf{k} \tag{18.35}$$

Como los ejes de coordenadas son ejes principales de inercia, las componentes del momento angular $\mathbf{H}_O$ pueden obtenerse multipli-

cando las componentes de ω por los momentos de inercia del rotor alrededor de los ejes x, y y z, respectivamente. Representando por I el momento de inercia del rotor alrededor de su eje de rotación propia, por I' su momento de inercia alrededor del eje perpendicular que pasa por O y despreciando la masa de los aros, escribimos.

$$\mathbf{H}_O = -I'\dot{\phi}\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{i} + I'\dot{\theta}\mathbf{j} + I(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)\mathbf{k} \tag{18.36}$$

Recordando que los ejes móviles están unidos al aro interior y por tanto no giran sobre sí mismos, expresamos su velocidad angular como la suma

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\phi}\mathbf{K} + \dot{\theta}\mathbf{j} \tag{18.37}$$

o, sustituyendo $\mathbf{K}$ de (18.34),

$$\boldsymbol{\Omega} = -\dot{\phi}\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{i} + \dot{\theta}\mathbf{j} + \dot{\phi}\cos\theta\,\mathbf{k} \tag{18.38}$$

Sustituyendo $\mathbf{H}_O$ y Ω de (18.36) y (18.38) en la ecuación

$$\Sigma\mathbf{M}_O = (\dot{\mathbf{H}}_O)_{Oxyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H}_O \tag{18.28}$$

obtenemos las tres ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}
\Sigma M_x &= -I'(\ddot{\phi}\,\text{sen}\,\theta + 2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta) + I\dot{\theta}(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta) \\
\Sigma M_y &= I'(\ddot{\theta} - \dot{\phi}^2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta) + I\dot{\phi}\,\text{sen}\,\theta(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta) \\
\Sigma M_z &= I\frac{d}{dt}(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)
\end{aligned} \tag{18.39}$$

Las ecuaciones (18.39) definen el movimiento de un giróscopo sujeto a un sistema de fuerzas dado cuando la masa de sus aros se desprecia. Pueden utilizarse también para definir el movimiento de un *sólido de revolución* (sólido con un eje de simetría) unido a un punto sobre su eje de simetría, o al movimiento de un sólido de revolución con respecto a su centro de masas. Aunque los aros del giróscopo nos ayudan a imaginarnos los ángulos de Euler, es evidente que estos ángulos pueden utilizarse para definir la posición de cualquier sólido rígido alrededor de ejes centrados en un punto del sólido, independientemente de la forma en la cual el sólido está sostenido.

Como las ecuaciones (18.39) no son lineales, en general no será posible expresar los ángulos de Euler ϕ, θ, y ψ como funciones analíticas del tiempo t y deben emplearse métodos numéricos para resolverlas. Sin embargo, como veremos en las secciones siguientes, hay varios casos particulares de interés que pueden analizarse fácilmente.

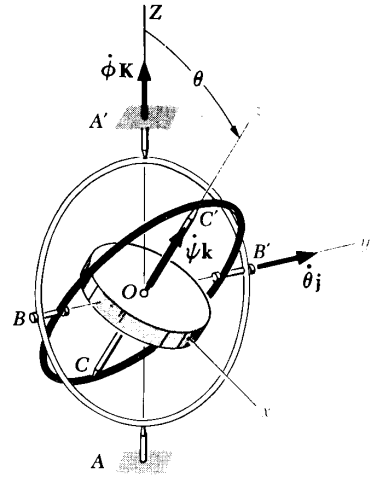


Fig. 18.16

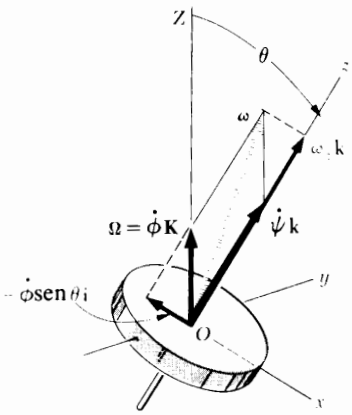


Fig. 18.17

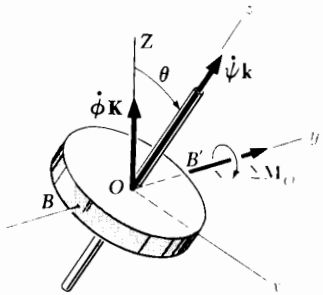


Fig. 18.18

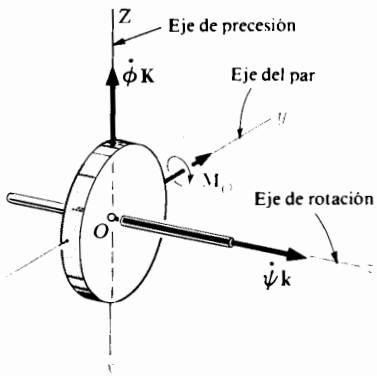


Fig. 18.19

***18.10. Precesión estacionaria de un giróscopo.** Consideraremos en esta sección el caso particular del movimiento giroscópico en el que el ángulo θ, la velocidad de precesión $\dot{\phi}$ y la velocidad de rotación propia $\dot{\psi}$ permanecen constantes. Nos proponemos determinar las fuerzas que deben aplicarse al giróscopo para mantener este movimiento, conocido como *precesión estacionaria* de un giróscopo.

En vez de aplicar las ecuaciones generales (18.39) determinaremos la suma de los momentos de las fuerzas requeridas, calculando la derivada temporal del momento angular del giróscopo en el caso particular considerado. Observamos primero que la velocidad angular ω del giróscopo, su momento angular $\mathbf{H}_O$ y la velocidad angular Ω del sistema de referencia móvil (Fig. 18.17) vienen dadas, respectivamente, por

$$\boldsymbol{\omega} = -\dot{\phi}\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{i} + \omega_z\mathbf{k} \tag{18.40}$$

$$\mathbf{H}_O = -I'\dot{\phi}\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{i} + I\omega_z\mathbf{k} \tag{18.41}$$

$$\boldsymbol{\Omega} = -\dot{\phi}\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{i} + \dot{\phi}\cos\theta\,\mathbf{k} \tag{18.42}$$

donde $\omega_z = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta$ = componente sobre el eje de rotación propia de la velocidad angular total del giróscopo.

Como θ, $\dot{\phi}$, y $\dot{\psi}$ son constantes, el vector $\mathbf{H}_O$ es constante en módulo y dirección respecto al sistema de referencia móvil y su derivada temporal $(\dot{\mathbf{H}}_O)_{Oxyz}$ respecto a ese sistema es cero. Entonces la ecuación (18.28) se reduce a

$$\Sigma\mathbf{M}_O = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H}_O \tag{18.43}$$

que da, después de sustituir (18.41) y (18.42),

$$\Sigma\mathbf{M}_O = (I\omega_z - I'\dot{\phi}\cos\theta)\dot{\phi}\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{j} \tag{18.44}$$

Como el centro de masas del giróscopo está fijo en el espacio, tenemos de (18.1), $\Sigma\mathbf{F} = 0$; entonces las fuerzas que deben aplicarse al giróscopo para mantener su precesión estacionaria se reducen a un par de momento igual al miembro del lado derecho de la ecuación (18.44). Se observa que *este par debe aplicarse alrededor de un eje perpendicular a los ejes de precesión y de rotación propia del giróscopo* (Fig. 18.18).

En el caso particular de que el eje de precesión y el eje de rotación propia forman un ángulo recto entre sí, tenemos $\theta = 90°$ y la ecuación (18.44) se reduce a

$$\Sigma\mathbf{M}_O = I\dot{\psi}\dot{\phi}\mathbf{j} \tag{18.45}$$

Así que si aplicamos al giróscopo un par $\mathbf{M}_O$ alrededor de un eje perpendicular a su eje de rotación, el giróscopo realizará precesión alrededor de un eje perpendicular tanto al eje de rotación propia como al eje del par y en un sentido tal que los vectores que representan a la rotación propia y a la precesión, respectivamente, forman un triedro trirrectángulo a derechas (Fig. 18.19).

Por los pares relativamente grandes requeridos para cambiar la orientación de sus ejes, los giróscopos se utilizan como estabilizado-

res en torpedos y barcos. Las balas y los proyectiles giratorios permanecen tangentes a sus trayectorias a causa de la acción giroscópica. Y es fácil mantener a una bicicleta en equilibrio a altas velocidades por el efecto estabilizante de sus ruedas giratorias. Sin embargo, la acción giroscópica no es siempre conveniente y debe tomarse en consideración en el diseño de cojinetes en los que apoyen árboles rotatorios sujetos a precesión estacionaria. Las reacciones ejercidas por las hélices en un avión que cambia su dirección de vuelo deben tomarse también en consideración y compensarse cuando sea posible, por medio de los timones.

18.11. Movimiento de un sólido de revolución no sujeto a ninguna fuerza. Consideraremos en esta sección el movimiento de un sólido de revolución no sujeto a ninguna fuerza, excepto su propio peso, con respecto a su centro de masas. Ejemplos de tales movimientos son realizados por proyectiles si la resistencia del aire se desprecia, y por satélites artificiales y vehículos espaciales después de que han quemado el combustible de sus cohetes de lanzamiento.

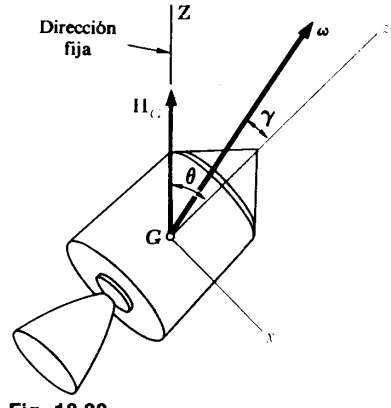


Fig. 18.20

Como la suma de los momentos de las fuerzas exteriores alrededor del centro de masas G del sólido es cero, la ecuación (18.2) nos da $\dot{\mathbf{H}}_G = 0$, se sigue que el momento angular $\mathbf{H}_G$ del sólido con respecto a G es constante. Entonces, la dirección de $\mathbf{H}_G$ está fija en el espacio y puede utilizarse para definir el eje Z, o eje de precesión (Fig. 18.20). Seleccionando un sistema de ejes móviles $Gxyz$ con el eje z a lo largo del eje de simetría del sólido y el eje x en el plano definido por los ejes Z y z, tenemos

$$H_x = -H_G \operatorname{sen}\theta \qquad H_y = 0 \qquad H_z = H_G \cos\theta \tag{18.46}$$

donde θ representa el ángulo formado por los ejes Z y z y H_G es el módulo constante del momento angular del sólido alrededor de G. Como los ejes x, y y z son ejes principales de inercia del sólido considerado, podemos escribir

$$H_x = I'\omega_x \qquad H_y = I'\omega_y \qquad H_z = I\omega_z \tag{18.47}$$

donde I representa el momento de inercia del sólido alrededor de su eje de simetría e I' es su momento de inercia alrededor del eje transversal que pasa por G. De las ecuaciones (18.46) y (18.47) se sigue que

$$\omega_x = -\frac{H_G \operatorname{sen}\theta}{I'} \qquad \omega_y = 0 \qquad \omega_z = \frac{H_G \cos\theta}{I} \tag{18.48}$$

La segunda de las relaciones obtenidas muestra que la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ no tiene componente a lo largo del eje y, es decir, a lo largo de un eje perpendicular al plano Zz. Entonces, el ángulo θ formado por los ejes Z y z permanece constante y *el cuerpo realiza una precesión estacionaria con respecto al eje Z.*

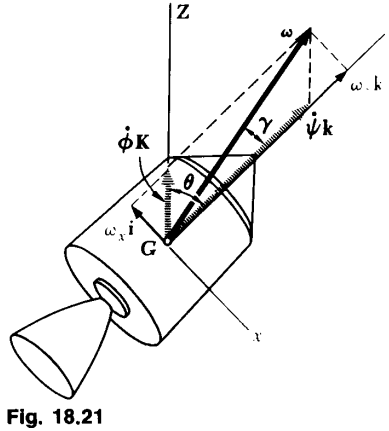
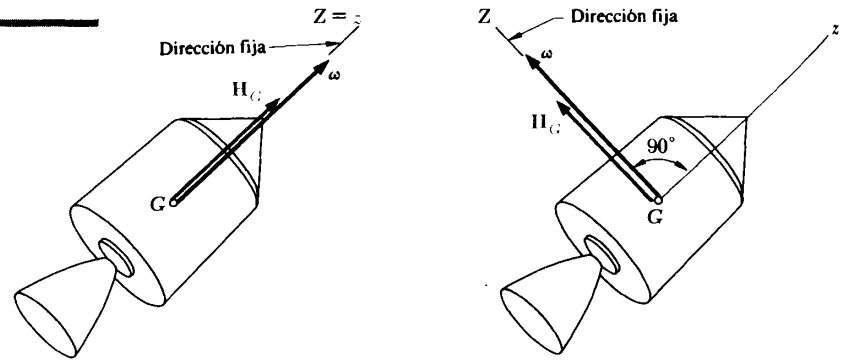


Fig. 18.21

Dividiendo la primera y la tercera de las relaciones (18.48) miembro a miembro y observando en la figura 18.21 que $-\omega_x/\omega_z = \operatorname{tg}\gamma$, obtenemos la siguiente relación entre los ángulos γ y θ que los vectores $\boldsymbol{\omega}$ y $\mathbf{H}_G$, respectivamente, forman con el eje de simetría del sólido:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{I}{I'}\operatorname{tg}\theta \tag{18.49}$$



a) *b*)

Fig. 18.22

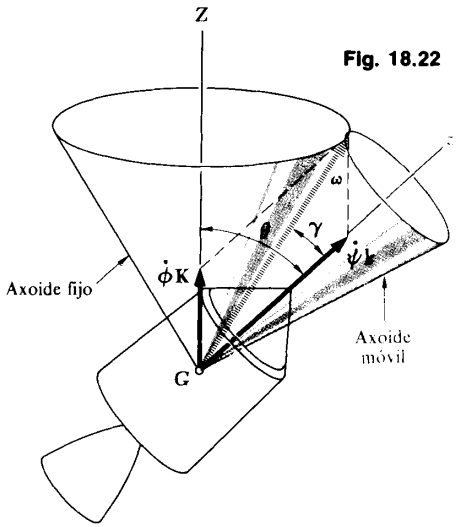


Fig. 18.23

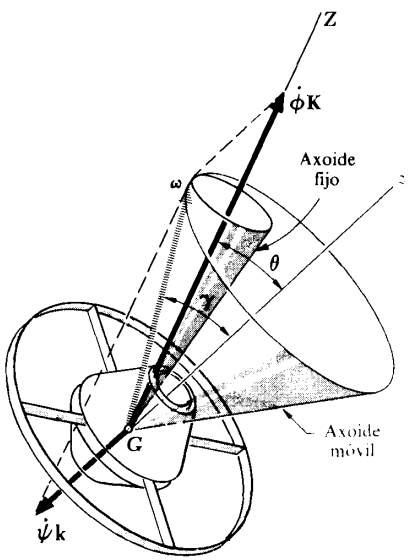


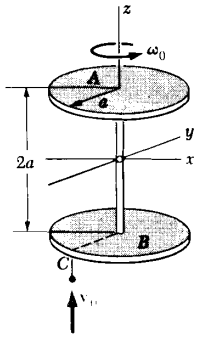
Fig. 18.24

Existen dos casos particulares de movimiento de un sólido de revolución no sujeto a fuerzas en los que no existe precesión: 1) Si el sólido se pone a girar alrededor de su eje de simetría, tenemos $\omega_x = 0$ y por (18.47), $H_x = 0$; los vectores $\boldsymbol{\omega}$ y $\mathbf{H}_G$ tienen la misma orientación y el sólido permanece girando con respecto a su eje de simetría (Fig. 18.22*a*) y 2) Si el sólido se pone a girar alrededor de un eje transversal tenemos $\omega_z = 0$ y de (18.47), $H_z = 0$; nuevamente $\boldsymbol{\omega}$ y $\mathbf{H}_G$ tiene la misma orientación y el sólido permanece girando con respecto al eje transversal dado (Fig. 18.22*b*).

Considerando ahora el caso general representado en la figura 18.21, recordamos de la sección 15.12 que el movimiento de un sólido con respecto a un punto fijo —o con respecto a su centro de masas— puede representarse por el movimiento de un axoide móvil girando sobre un axoide fijo. En el caso de la precesión estacionaria los dos axoides son conos de base circular, ya que los ángulos γ y θ-γ que la velocidad angular ω forma con el eje de simetría y con el de precesión, respectivamente, son constantes. Deben distinguirse dos casos:

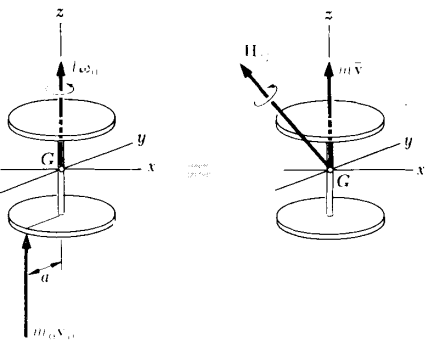
1. $I < I'$. Este es el caso de un sólido alargado, como el vehículo espacial de la figura 18.23. De (18.49) tenemos $\gamma < \theta$; el vector ω se encuentra en el interior del ángulo ZGz; el axoide fijo y el axoide móvil son tangentes externamente; la rotación propia y la precesión son ambas en sentido opuesto a las manecillas del reloj vista desde el eje z positivo. Se dice que la precesión es *directa*.

2. $I > I'$. Este es el caso de un sólido achatado, como el satélite de la figura 18.24. (De (18.49) tenemos $\gamma > \theta$; como el vector ω debe encontrarse fuera del ángulo ZGz, el vector $\dot{\psi}\mathbf{k}$ tiene un sentido negativo del eje z; el axoide fijo se encuentra en el interior del axoide móvil; la precesión y la rotación tienen sentidos opuestos y se dice que la precesión es *inversa*.



PROBLEMA RESUELTO 18.6

Se sabe que un satélite espacial de masa m es dinámicamente equivalente a dos discos delgados de masas iguales. Los discos son de radios $a = 800$ mm y están unidos rígidamente por una varilla de longitud $2a$. Inicialmente el satélite está girando libremente alrededor de su eje de simetría con una velocidad angular $\omega_0 = 60$ rpm. Un meteorito de masa $m_0 = m/1\,000$ que viaja con una velocidad $\mathbf{v}_0$ de 2 000 m/s relativa al satélite, golpea a éste y se queda incrustado en C. Determínense *a*) la velocidad angular del satélite inmediatamente después del choque, *b*) el eje de precesión del movimiento resultante, y *c*) las velocidades de precesión y de rotación propia.



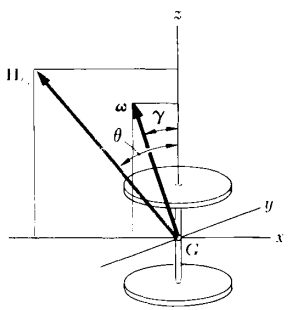
Solución. *Momentos de inercia.* Notamos que los ejes mostrados son los ejes principales de inercia para el satélite y escribimos

$$I = I_z = \tfrac{1}{2}ma^2 \qquad I' = I_x = I_y = 2[\tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{2}m)a^2 + (\tfrac{1}{2}m)a^2] = \tfrac{5}{4}ma^2$$

Principio del impulso y del momento. Consideramos al satélite y al meteorito como un solo sistema. Como no actúan fuerzas exteriores sobre este sistema, los momentos angulares antes y después del choque son equivalentes. Tomando los momentos alrededor de G escribimos

$$-a\mathbf{j} \times m_0 v_0 \mathbf{k} + I\omega_0 \mathbf{k} = \mathbf{H}_G$$

$$\mathbf{H}_G = -m_0 v_0 a\mathbf{i} + I\omega_0 \mathbf{k} \tag{1}$$



Velocidad angular después del choque. Sustituyendo los valores obtenidos para las componentes de $\mathbf{H}_G$ y para los momentos de inercia en

$$H_x = I_x\omega_x \qquad H_y = I_y\omega_y \qquad H_z = I_z\omega_z$$

escribimos

$$-m_0 v_0 a = I'\omega_x = \tfrac{5}{4}ma^2\omega_x \qquad 0 = I'\omega_y \qquad I\omega_0 = I\omega_z$$

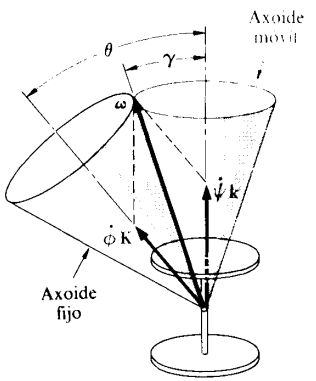
$$\omega_x = -\frac{4}{5}\frac{m_0 v_0}{ma} \qquad \omega_y = 0 \qquad \omega_z = \omega_0 \tag{2}$$

Para el satélite considerado tenemos $\omega_0 = 60$ rpm $= 6.283$ rad/s, $m_0/m = 1/1\,000$, $a = 0.800$ m, y $v_0 = 2\,000$ m/s; encontramos

$$\omega_x = -2 \text{ rad/s} \qquad \omega_y = 0 \qquad \omega_z = 6.283 \text{ rad/s}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_z^2} = 6.594 \text{ rad/s} \qquad \tan\gamma = \frac{-\omega_x}{\omega_z} = +0.3183$$

$$\omega = 63.0 \text{ rpm} \qquad \gamma = 17.7° \blacktriangleleft$$



Eje de precesión. Como en movimiento libre la dirección del momento angular $\mathbf{H}_G$ está fija en el espacio, el satélite tendrá precesión con respecto a esta dirección. El ángulo θ formado por el eje de precesión y el eje z es

$$\tan\theta = \frac{-H_x}{H_z} = \frac{m_0 v_0 a}{I\omega_0} = \frac{2m_0 v_0}{ma\omega_0} = 0.796$$

$$\theta = 38.5° \blacktriangleleft$$

Velocidades angulares de precesión y de rotación propia. Trazamos los axoides en el espacio y en el cuerpo para el movimiento libre del satélite. Utilizando la ley de los senos, calculamos las velocidades de precesión y de rotación propia.

$$\frac{\omega}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{\dot{\phi}}{\operatorname{sen}\gamma} = \frac{\dot{\psi}}{\operatorname{sen}(\theta - \gamma)}$$

$$\dot{\phi} = 30.8 \text{ rpm} \qquad \dot{\psi} = 35.9 \text{ rpm} \blacktriangleleft$$

Problemas

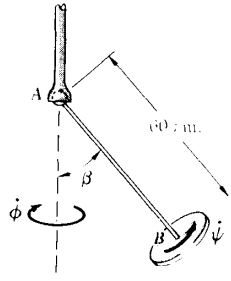


Fig. P18.81

18.81 Un disco de 2 kg y 150 mm de diámetro se une al extremo de una varilla AB, de masa despreciable, que está sostenida por una articulación esférica en A. Si se observa que el disco gira con respecto a la vertical en el sentido indicado, a la velocidad angular constante de 36 rpm, determínese la velocidad angular de rotación propia $\dot{\psi}$ del disco respecto a AB cuando $\beta = 60°$.

18.82 Resuélvase el problema 18.81 suponiendo la misma velocidad angular de precesión estacionaria y $\beta = 30°$.

18.83 El trompo aquí mostrado pesa 3 oz y está apoyado en el punto fijo O. Los radios de giro del trompo alrededor de su eje de simetría y con respecto a un eje transversal que pasa por O son 0.84 in y 1.80 in, respectivamente. Se sabe $c = 1.50$ in y que la velocidad angular de rotación propia del trompo (alrededor de su eje de simetría) es de 1800 rpm. Determínense las dos posibles velocidades angulares de precesión correspondientes a $\theta = 30°$.

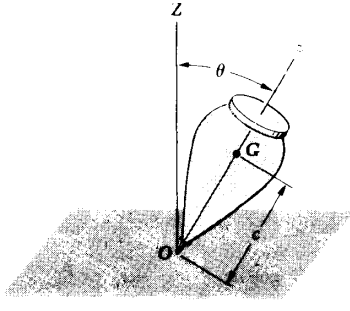


Fig. P18.83 y P18.84

18.84 El trompo mostrado en la figura está apoyado en el punto fijo O y sus momentos de inercia respecto a su eje de simetría y a un eje transversal que pasa por O se representan, respectivamente, por I e I'. *a*) Demuéstrese que la condición de la precesión uniforme o estacionaria del trompo es

$$(I\omega_z - I'\dot{\phi}\cos\theta)\dot{\phi} = Wc$$

donde $\dot{\phi}$ es la velocidad angular de precesión y ω_z es la componente de la velocidad angular a lo largo del eje de simetría del trompo. *b*) Demuéstrese que, si la velocidad angular de rotación propia del trompo es muy grande, comparada con su velocidad angular de precesión, la condición para la precesión estacionaria es $I\dot{\psi}\,\dot{\phi} \approx Wc$. *c*) Determínese el error de porcentaje introducido cuando la más lenta de las dos velocidades angulares de precesión obtenidas para el trompo del problema 18.83 se aproxima mediante esta última relación.

18.85 Una esfera homogénea de radio c está unida como se indica en la figura a una cuerda AB. La cuerda forma un ángulo β con la vertical y gira respecto al eje vertical con una velocidad angular constante $\dot{\phi}$, mientras que la esfera gira con una velocidad angular constante $\dot{\psi}$ respecto a su diámetro BC. Determínese el ángulo θ que forma BC con la vertical.

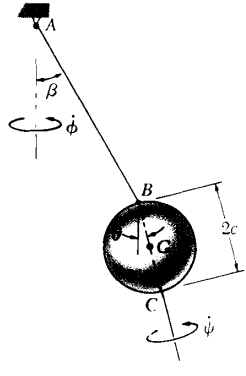


Fig. P18.85 y P18.86

18.86 Una esfera homogénea, de radio $c = 40$ mm, está unida como se indica en la figura a una cuerda AB. La cuerda forma un ángulo $\beta = 30°$ con la vertical y se observa que gira respecto al eje vertical con una velocidad angular constante $\dot{\phi} = 5$ rad/s respecto a la vertical, a través de A. Determínese el ángulo θ que forma el diámetro BC con la vertical, si se sabe que la esfera *a*) no gira, *b*) gira respecto a su diámetro BC con una velocidad angular de rotación propia $\dot{\psi} = 30$ rad/s y *c*) gira respecto a BC con una velocidad angular de rotación propia $\dot{\psi} = -30$ rad/s.

18.87 Un cono homogéneo de altura h, con una base de diámetro $d < h$, está unido en la forma indicada en la figura a una cuerda AB. El cono gira con respecto a su eje BC con una velocidad angular constante $\dot{\psi}$ y gira con respecto a la vertical que pasa por A con una velocidad angular de precesión constante $\dot{\phi}$. Determínese el ángulo β para el cual el eje BC del cono está alineado con la cuerda AB ($\theta = \beta$).

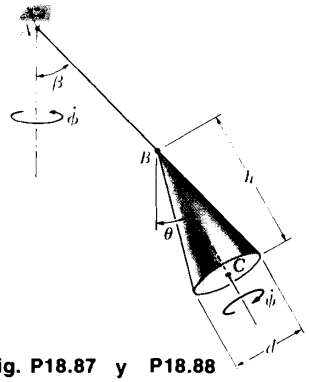


Fig. P18.87 y P18.88

18.88 Un cono homogéneo, de altura $h = 12$ in y diámetro de la base $d = 6$ in, está unido en la forma indicada a una cuerda AB. Si se sabe que los ángulos que forman la cuerda AB y el eje BC, con el eje vertical del cono son $\beta = 45°$ y $\theta = 30°$, respectivamente, y que el cono gira a la velocidad angular constante $\phi = 8$ rad/s en el sentido indicado, determínense *a*) la velocidad angular de rotación propia del cono, alrededor de su eje BC y *b*) la longitud de la cuerda AB.

18.89 Si la Tierra fuera una esfera, la atracción gravitatoria del Sol, la Luna y los planetas sería en todo momento equivalente a una sola fuerza **R**, que actuaría en el centro de masas de la Tierra. Sin embargo, es realmente un esferoide achatado por los Polos y el sistema gravitatorio que actúa sobre ella es equivalente a una fuerza **R** y un par **M**. Si se sabe que el efecto del par **M** es hacer que el eje terrestre gire con un movimiento de precesión respecto al eje GA con una velocidad angular de una revolución en 25 800 años, determínese el módulo del par medio **M** aplicado a la Tierra. Supóngase que la densidad media de la Tierra es 5.51, que su radio promedio es 3960 mi y que $\bar{I} = \frac{2}{5} mR^2$.

(*Nota.* Esta precesión forzada se conoce como precesión de los equinoccios y no debe confundirse con la precesión libre expuesta en el problema 18.97.)

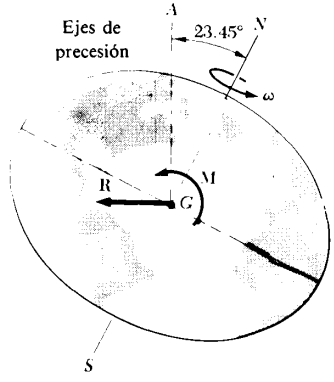


Fig. P18.89

18.90 Un registro fotográfico de alta velocidad muestra que cierto proyectil fue lanzado con una velocidad horizontal $\bar{\mathbf{v}}$ de 600 m/s y con su eje de simetría formando un ángulo $\beta = 4°$ con la horizontal. La velocidad de rotación propia del proyectil fue de 5000 rpm y la resistencia al avance de la atmósfera era equivalente a una fuerza **D** de 150 N actuando en el centro de presión C_p situado a una distancia $c = 120$ mm de G. *a*) Si se sabe que el proyectil tiene una masa de 18 kg y un radio de giro de 40 mm respecto a su eje de simetría, determínese su velocidad angular de precesión estacionaria aproximada. *b*) Si además se sabe que el radio de giro del proyectil respecto a un eje transversal que pasa por G es de 160 mm, determínense los valores exactos de dos posibles velocidades angulares de precesión.

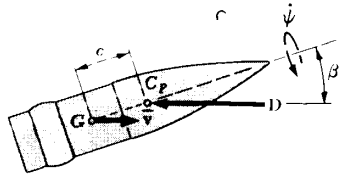


Fig. P18.90

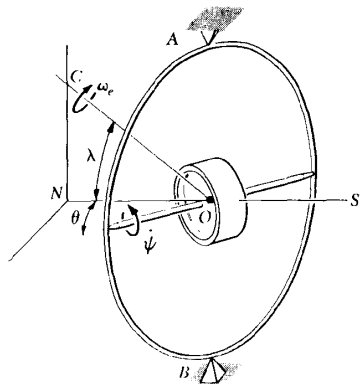


Fig. P18.91

18.91 Las características básicas de un girocompás están mostradas en la figura. El rotor gira a una velocidad angular $\dot{\psi}$ con respecto a un eje montado en un solo aro, que puede girar libremente respecto al eje vertical AB. El ángulo formado por el eje del rotor y el plano del meridiano está representado por θ y la latitud del lugar se representa por λ. Se observa que la línea OC es paralela al eje de la Tierra y se representa por ω_e la velocidad angular de la Tierra respecto a ese eje. *a*) Demuéstrese que las ecuaciones de movimiento del girocompás son

$$I'\ddot{\theta} + I\omega_z\omega_e \cos\lambda \operatorname{sen}\theta - I'\omega_e^2 \cos^2\lambda \operatorname{sen}\theta \cos\theta = 0$$
$$I\dot{\omega}_z = 0$$

donde ω_z es la componente de la velocidad angular total a lo largo del eje del rotor, I e I' son los momentos de inercia del rotor respecto a su eje de simetría y a un eje transversal que pasa por O, respectivamente. *b*) Despreciando el término que contiene ω_e^2 demuéstrese que, para valores pequeños de θ, se tiene

$$\ddot{\theta} + \frac{I\omega_z\omega_e \cos\lambda}{I'}\theta = 0$$

y que el eje del girocompás oscila respecto a la dirección norte-sur.

18.92 Demuéstrese que, para un sólido de revolución no sujeto a fuerzas, la velocidad angular de precesión y de rotación propia pueden expresarse, respectivamente, como

$$\dot{\phi} = \frac{H_G}{I'}$$

y

$$\dot{\psi} = \frac{H_G \cos\theta\,(I' - I)}{II'}$$

donde H_G es el valor constante del momento angular del sólido.

18.93 *a*) Demuéstrese que para un sólido de revolución, no sujeto a fuerzas, la velocidad angular de precesión puede expresarse así:

$$\dot{\phi} = \frac{I\omega_z}{I' \cos\theta}$$

donde ω_z es la componente de ω a lo largo del eje de simetría del cuerpo. *b*) Con este resultado compruébese que la condición (18.44) para la precesión estacionaria se satisface en un sólido de revolución no sujeto a fuerzas.

18.94 Demuéstrese que el vector de velocidad ω angular de un sólido de revolución, no sujeto a fuerzas, se observa desde el sólido mismo que gira alrededor del eje de simetría, con velocidad angular constante.

$$n = \frac{I' - I}{I'}\omega_z$$

donde ω_z es la componente de ω a lo largo del eje de simetría del cuerpo.

18.95 Para un sólido de revolución, no sujeto a fuerzas, compruébese *a*) que la velocidad angular de precesión inversa nunca puede ser menor que el doble de la velocidad de rotación propia en torno a su eje y *b*) que en la figura 18.24 el eje de simetría del sólido no puede ser inferior al axoide fijo.

18.96 Se lanza una moneda al aire y, durante su movimiento libre, se observa que el ángulo β entre el plano de la moneda y la horizontal es constante. *a*) Obténgase una expresión para el ángulo formado por la velocidad angular de la moneda y la vertical. *b*) Simbolizando con $\dot{\psi}$ la velocidad angular de la moneda alrededor de su eje de simetría, dedúzcase una expresión para la velocidad angular de precesión. *c*) Resuélvanse las partes *a* y *b* para el caso $\beta = 20°$.



Fig. P18.96

18.97 Utilizando la relación proporcionada en el problema 18.94, determínese el periodo de precesión estacionaria del Polo Norte de la Tierra, con respecto a su eje de simetría. La Tierra puede considerarse como un esferoide achatado, de momento de inercia axial I y transversal $I' = 0.9967I$. (*Nota.* Las observaciones muestran un periodo de precesión del Polo Norte de aproximadamente 432.5 dias solares medios; la diferencia entre los periodos observados y los calculados se debe al hecho de que la Tierra no es un sólido perfectamente rígido. La precesión libre considerada aquí no debe confundirse con la precesión mucho más lenta de los equinoccios, que es una precesión forzada. Véase el problema 18.89).

18.98 La estación espacial que se muestra tiene un movimiento de precesión respecto a la dirección fija OC, con una velocidad angular de una revolución por hora. Suponiendo que la estación sea dinámicamente equivalente a un cilindro homogéneo de longitud 30 m y radio 3 m, determínese la velocidad angular de la estación alrededor de su eje de simetría.

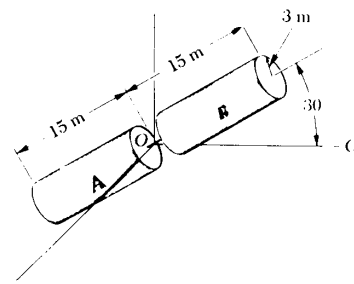


Fig. P18.98

18.99 El elemento de unión que conecta las partes A y B de la estación espacial del problema 18.98 puede suprimirse para permitir que cada parte se mueva libremente. Dinámicamente, A y B equivalen a dos cilindros de 15 m de longitud y 3 m de radio cada uno. Si se sabe que, cuando se suprime la unión, la estación se orienta como se indica, determínense el eje y la velocidad angular de B, así como la de rotación en torno a su eje de simetría.

18.100 Un satélite geoestacionario de 800 lb está girando con una velocidad angular $\omega_0 = (1.5 \text{ rad/s})\mathbf{j}$ cuando es golpeado en B por un meteorito de 6 oz, que se movía con una velocidad $\mathbf{v}_0 = -(1600 \text{ ft/s})\mathbf{i} + (1300 \text{ ft/s})\mathbf{j} + (4000 \text{ ft/s})\mathbf{k}$ relativa al satélite. Si se sabe que $b = 20$ in y que los radios de giro del satélite con $\bar{k}_x = \bar{k}_z = 28.8$ in y $\bar{k}_y = 32.4$ in, determínense el eje de precesión y la velocidad angular de precesión y de rotación propia del satélite después del choque.

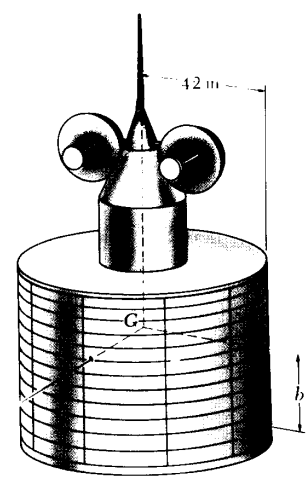


Fig. P18.100

18.101 Resuélvase el problema 18.100 suponiendo que el meteorito golpea al satélite en A, en vez de hacerlo en B.

18.102 Resuélvase el problema resuelto 18.6 suponiendo que el meteorito golpea al satélite en C, con una velocidad $\mathbf{v}_0 = +(2000 \text{ m/s})\mathbf{i}$.

18.103 Una vez establecido el movimiento descrito en el problema resuelto 18.6, la barra que conecta los discos A y B se rompe y el disco A se mueve libremente como un cuerpo separado. Si se sabe que la barra y el eje z coinciden cuando la barra se rompe, determínense el eje de precesión, la velocidad angular de precesión y de rotación propia para el movimiento seguido por el disco A.

18.104 La velocidad angular del balón de la figura, que acaba de ser golpeado, es horizontal y su eje de simetría OC está orientado en la forma aquí indicada. Si se sabe que el módulo de ω es 180 rpm y que la relación entre los momentos de inercia axial y transversal es $\frac{I}{I'} = \frac{1}{3}$, determínense *a*) la orientación del eje de precesión OA y *b*) la velocidad angular de precesión y de rotación propia.

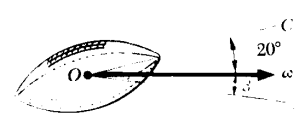


Fig. P18.104

18.105 Una barra homogénea AB, esbelta, de masa m y longitud L, puede girar libremente alrededor de un eje horizontal que pasa por su centro de masas G. El eje está sostenido por un marco de masa despreciable que puede girar libremente alrededor de la vertical CD. Si se sabe que inicialmente $\theta = \theta_0$, $\dot{\theta} = 0$ y $\dot{\phi} = \dot{\phi}_0$, demuéstrese que la varilla oscilará respecto al eje vertical y determínense *a*) el intervalo de valores del ángulo θ durante ese movimiento, *b*) el valor máximo de $\dot{\theta}$ y *c*) el valor mínimo de $\dot{\phi}$.

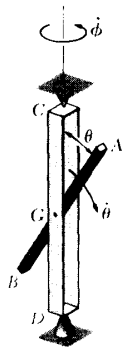


Fig. P18.105

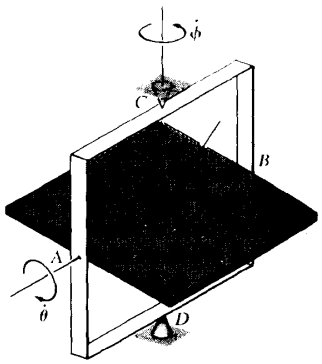


Fig. P18.106

18.106 Resuélvase el problema 18.105, suponiendo que la barra se reemplaza por una placa delgada y homogénea, de forma cuadrada, de masa m y lado a.

18.107 Una placa homogénea de masa m y radio a está soldada a una barra AB de masa despreciable, que está conectada mediante una horquilla al eje vertical AC. La barra y la esfera pueden girar libremente alrededor del eje horizontal en A y el eje AC puede girar libremente alrededor de un eje vertical. El sistema se suelta en la posición $\beta = 0$ con una velocidad angular $\dot{\phi}_0$ alrededor del eje vertical y sin velocidad angular alrededor del horizontal. Si se sabe que el valor máximo de β a partir de entonces es 30°, determínense *a*) la velocidad angular inicial $\dot{\phi}_0$ y *b*) el valor de $\dot{\phi}$ cuando $\beta = 30°$.

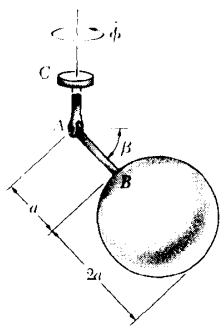


Fig. P18.107

*18.108 El trompo aquí mostrado está sostenido en el punto fijo O. Sean ϕ, θ y ψ los ángulos Euler que definen la posición del trompo respecto a un sistema de referencia fijo. Se considerará el movimiento general del trompo en que todos los ángulos Euler varían.

a) Observando que la $\Sigma M_z = 0$ y $\Sigma M_Z = 0$ y representando por I e I', respectivamente, los momentos de inercia del trompo con respecto a su eje de simetría y respecto a un eje transversal que pasa por O, obténganse las dos ecuaciones diferenciales de primer orden del movimiento

$$I'\dot{\phi}\,\text{sen}^2\,\theta + I(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)\cos\theta = \alpha \tag{1}$$

$$I(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta) = \beta \tag{2}$$

donde α y β son constantes que dependen de las condiciones iniciales. Estas ecuaciones expresan que el momento angular del trompo se conserva tanto alrededor del eje Z como del eje z, es decir, la componente rectangular de $\mathbf{H}_O$ a lo largo de cada uno de estos ejes es constante.

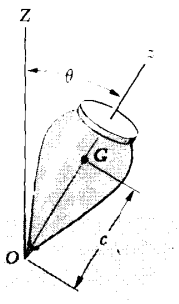


Fig. P18.108

b) Utilícense las ecuaciones (1) y (2) para demostrar que la componente ω_z, de la velocidad angular del trompo es constante y que la velocidad angular de precesión $\dot{\phi}$ depende del valor del ángulo de nutación θ.

*18.109 *a*) Aplicando el principio de la conservación de la energía, dedúzcase una tercera ecuación diferencial para el movimiento general del trompo del problema 18.108. *b*) Eliminando las derivadas $\dot{\phi}$ y $\dot{\psi}$ de la ecuación obtenida y partiendo de las dos ecuaciones del problema 18.108, demuéstrese que la velocidad angular de nutación $\dot{\theta}$ se define mediante la ecuación diferencial $\dot{\theta}^2 = f(\theta)$, donde

$$f(\theta) = \frac{1}{I'}\left(2E - \frac{\beta^2}{I} - 2mgc\cos\theta\right) - \left(\frac{\alpha - \beta\cos\theta}{I'\,\text{sen}\,\theta}\right)^2$$

*18.110 Un disco homogéneo y delgado se monta sobre un eje ligero OA, que está sostenido por una articulación esférica en O. El disco se suelta en la posición $\beta = 0$, con una velocidad angular de rotación propia $\dot{\psi}_0$ en el sentido de las manecillas del reloj, vista desde O y sin precesión ni nutación. Si se sabe que el valor más grande de β en el movimiento posterior es $\beta = 30°$, determínense *a*) la velocidad angular de rotación $\dot{\psi}_0$ del disco en su posición inicial y *b*) la velocidad angular de precesión y de rotación propia conforme el disco pasa por su posición más baja. (*Sugerencia.* Utilícese el principio de la conservación de la energía y el hecho de que el momento angular del sólido se conserva tanto alrededor del eje Z como del eje z; véase el problema 18.108 parte *a*.)

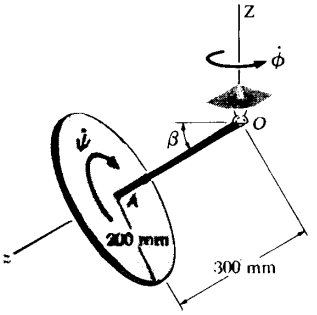


Fig. P18.110 y P18.111

*18.111 Un disco homogéneo y delgado está montado sobre un eje ligero OA que está sostenido por una articulación esférica en O. El disco se suelta en la posición $\beta = 0$ con una velocidad angular de rotación propia $\dot{\psi} = 20$ rad/s, en el sentido de las manecillas del reloj vista desde O y sin precesión ni nutación. Determínense *a*) el valor más grande β en el movimiento subsiguiente y *b*) la velocidad angular de precesión y de rotación propia cuando el disco pasa por su posición más baja. (Véase la sugerencia del problema 18.110.)

*18.112 Una esfera homogénea de masa m y radio a está soldada a una varilla AB, de masa despreciable, que sostiene por una articulación esférica en A. La esfera se suelta en la posición $\beta = 0$ con una velocidad angular de precesión $\phi_0 = \sqrt{17g/11a}$ y sin rotación propia ni nutación. Determínese el máximo valor de β en el movimiento posterior. (Véase la sugerencia del problema 18.110.)

*18.113 Una esfera homogénea de masa m y radio a está soldada a una barra AB de longitud a y masa despreciable, que se sostiene mediante una articulación esférica en A. La esfera se suelta en la posición $\beta = 0$, con una velocidad angular de precesión $\dot{\phi} = \dot{\phi}_0$ y sin rotación propia ni nutación. Si se sabe que el valor máximo de β en el movimiento subsiguiente es 30°, determínense *a*) la velocidad angular de precesión $\dot{\phi}_0$ de la esfera en su posición inicial y *b*) la velocidad angular de precesión y de rotación propia cuando $\beta = 30°$. (Véase la sugerencia del problema 18.110.)

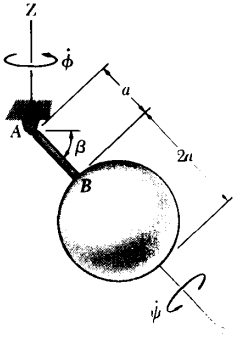
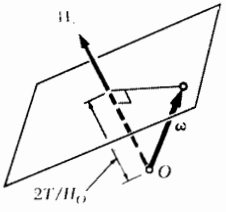


Fig. P18.112 y P18.113



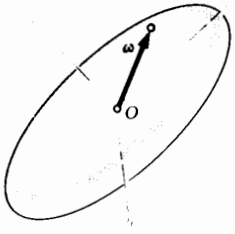


Fig. P18.114

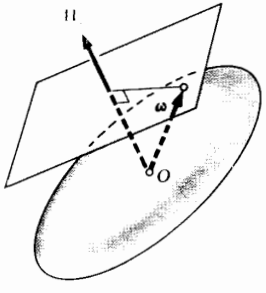


Fig. P18.115

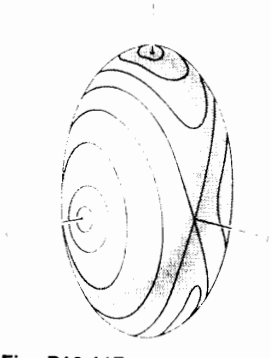


Fig. P18.117

*18.114 Considérese un sólido rígido de forma arbitraria con una ligadura en su centro de masas O y que no está sujeto a ninguna fuerza excepto su peso y la reacción del soporte en O. *a*) Compruébese que el momento angular $\mathbf{H}_O$ del sólido alrededor del punto fijo O es constante en módulo y dirección, que su energía cinética T es constante y que también es constante la proyección a lo largo de $\mathbf{H}_O$, de la velocidad angular ω del sólido. *b*) Demuéstrese que el extremo del vector ω describe una curva sobre un plano fijo en el espacio (llamado plano invariable), que es perpendicular a $\mathbf{H}_O$ y a una distancia $2T/H_O$ de O. *c*) Demuéstrese que, con respecto a un sistema de referencia sujeto al sólido y que coincide con sus ejes principales de inercia, el extremo del vector ω parece describir una curva sobre un elipsoide de ecuación

$$I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2 = 2T = \text{constante}$$

Este elipsoide (llamado *elipsoide de Poinsot*) está unido rígidamente al sólido y tiene la misma forma que el elipsoide de inercia, aunque distinto tamaño.

*18.115 En relación con el problema 18.114, *a*) compruébese que el elipsoide de Poinsot es tangente al plano invariable y *b*) demuéstrese que el movimiento del sólido rígido deberá ser tal que el elipsoide de Poinsot parece que rueda sobre el plano invariable. (*Sugerencia*. En la parte *a*, demuéstrese que la normal al elipsoide de Poinsot, en el extremo de ω, es paralela a $\mathbf{H}_O$. Recuérdese que la dirección de la normal a una superficie de ecuación $F(x, y, z) =$ constante, en un punto P, es la misma que el **grad** F en el punto P.)

*18.116 Utilizando los resultados obtenidos en los problemas 18.114 y 18.115 demuéstrese que, para un sólido de revolución unido a su centro de masas O y no sujeto a fuerzas distintas de su peso y la reacción en O, el elipsoide de Poinsot es un elipsoide de revolución y los axoides fijo y móvil son conos de base circular y tangentes entre sí. Demuéstrese que *a*) los dos conos son tangentes externamente y la precesión es directa, cuando $I < I'$, donde I e I' representan, respectivamente, los momentos de inercia axial y transversal del cuerpo y *b*) que el axoide fijo está en el interior del axoide móvil y la precesión es inversa cuando $I > I'$.

*18.117 En relación con los problemas 18.114 y 18.115 *a*) demuéstrese que la curva (llamada *polodia*), descrita por el extremo del vector ω con respecto a un sistema de referencia que coincide con los ejes principales de inercia del sólido rígido, está definida por las ecuaciones

$$I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2 = 2T = \text{constante} \tag{1}$$

$$I_x^2\omega_x^2 + I_y^2\omega_y^2 + I_z^2\omega_z^2 = H_O^2 = \text{constante} \tag{2}$$

y que esta curva puede, por lo tanto, obtenerse de la intersección de la elipsoide de Poinsot con el elipsoide definido por la ecuación (2). *b*) Demuéstrese también que, suponiendo $I_x > I_y > I_z$, las polodias obtenidas para los distintos valores de $\mathbf{H}_O$ tienen las formas indicadas en la figura. *c*) Utilizando el resultado obtenido en la parte *b*, demuéstrese que un sólido rígido, no sujeto a fuerzas, puede girar alrededor de un eje que pasa por el centro de masas si y sólo si ese eje coincide con uno de los ejes principales de inercia del sólido y que el movimiento será estable si el eje de rotación coincide con el eje mayor o con el menor del elipsoide de Poinsot (el eje z o el eje x de la figura) y será inestable si coincide con el intermedio (eje y).

Repaso y Resumen

Este capítulo se dedicó al análisis cinemático del movimiento del sólido rígido en tres dimensiones.

Ecuaciones fundamentales del movimiento de un sólido rígido

Primero se observó (sección 18.1) que las dos ecuaciones fundamentales que se dedujeron en el capítulo 14 para el movimiento de un sistema de partículas

$$\Sigma \mathbf{F} = m\bar{\mathbf{a}} \tag{18.1}$$

$$\Sigma \mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G \tag{18.2}$$

proporcionan la fundamentación del análisis al igual que lo hicieron en el capítulo 16 en el caso del movimiento plano de sólidos rígidos. El cálculo del momento angular $\mathbf{H}_G$ del sólido y de su derivada respecto al tiempo $\dot{\mathbf{H}}_G$, sin embargo, se emplean mucho más en este caso.

Momento angular de un sólido rígido en tres dimensiones

En la sección 18.2 se vio que las componentes rectangulares del momento angular $\mathbf{H}_G$ de un sólido rígido se podían expresar como sigue, en términos de las componentes de su velocidad angular ω y de sus momentos y productos de inercia centrales:

$$\begin{aligned} H_x &= +\bar{I}_x\,\omega_x - \bar{I}_{xy}\omega_y - \bar{I}_{xz}\omega_z \\ H_y &= -\bar{I}_{yx}\omega_x + \bar{I}_y\,\omega_y - \bar{I}_{yz}\omega_z \\ H_z &= -\bar{I}_{zx}\omega_x - \bar{I}_{zy}\omega_y + \bar{I}_z\,\omega_z \end{aligned} \tag{18.7}$$

Si se utilizan los *ejes principales de inercia* $Gx'y'z'$, se reducen estas relaciones a

$$H_{x'} = \bar{I}_{x'}\omega_{x'} \qquad H_{y'} = \bar{I}_{y'}\omega_{y'} \qquad H_{z'} = \bar{I}_{z'}\omega_{z'} \tag{18.10}$$

Se observó que, en general, *el momento angular* $\mathbf{H}_G$ *y la velocidad angular* ω *no tienen la misma dirección* (Figura 18.25). Pero tendrán la misma dirección si ω está dirigida a lo largo de alguno de los ejes principales de inercia del sólido.

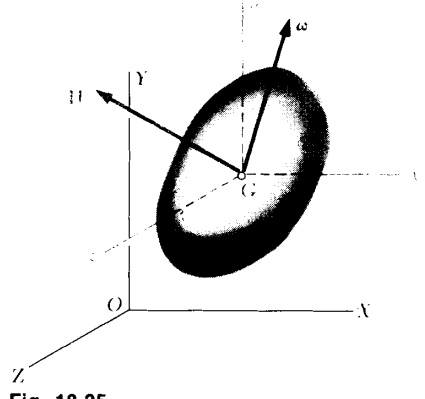


Fig. 18.25

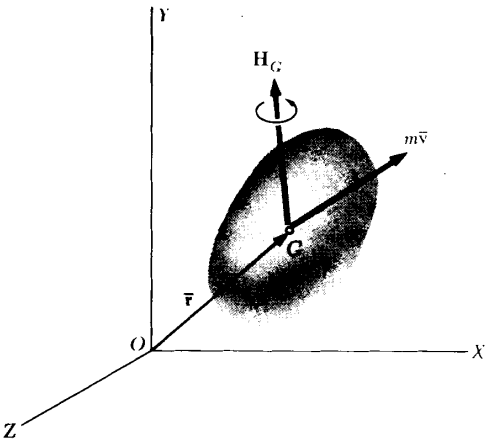


Fig. 18.26

Momento angular respecto a un punto cualquiera

Recordando que el sistema de momentos lineales de las partículas que forman al sólido se pueden reducir a un vector $m\bar{\mathbf{v}}$ unido en G y a un par $\mathbf{H}_G$ (figura 18.26), se observó que, una vez determinados el momento lineal $m\bar{\mathbf{v}}$ y el momento angular $\mathbf{H}_G$ del sólido rígido, el momento angular del sólido rígido $\mathbf{H}_O$ respecto a cualquier punto O se podía obtener por medio de la ecuación

$$\mathbf{H}_O = \bar{\mathbf{r}} \times m\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{H}_G \tag{18.11}$$

Sólido rígido con un punto fijo

En el caso particular de un sólido rígido que está *obligado a girar respecto a un punto fijo O*, las componentes del momento angular $\mathbf{H}_O$ del sólido, respecto a O, se pueden obtener directamente a partir de las componentes de su velocidad angular y de sus momentos y productos de inercia respecto a ejes que pasan por **O**. Se escribió

$$\begin{aligned} H_x &= +I_x\,\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z \\ H_y &= -I_{yx}\omega_x + I_y\,\omega_y - I_{yz}\omega_z \\ H_z &= -I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y + I_z\,\omega_z \end{aligned} \tag{18.13}$$

Principio del impulso y del momento

El *principio de impulso y del momento* para un sólido rígido en movimiento tridimensional (sección 18.3) se expresa mediante la misma fórmula fundamental que se utiliza en el capítulo 17 para un sólido rígido en movimiento plano.

$$\textbf{Sistema de momentos}_1 + \textbf{Impulso externo al sistema}_{1\to 2} = \textbf{Sistema de momentos}_2 \tag{17.4}$$

pero los sistemas de momentos inicial y final se deberán representar en este caso como se indicó en la figura 18.26, y $\mathbf{H}_G$ se deberá calcular a partir de las relaciones (18.7) o (10.10) (problemas resueltos 18.1 y 18.2).

La *energía cinética* de un sólido rígido en movimiento tridimensional se puede dividir en dos partes (sección 18.4) una, asociada con el movimiento de su centro de masas G y la otra con su movimiento respecto a G. Utilizando los ejes central y principal x', y', z'; se escribió

Energía cinética de un sólido rígido en tres dimensiones

$$T = \tfrac{1}{2}m\bar{v}^2 + \tfrac{1}{2}(\bar{I}_{x'}\omega_{x'}^2 + \bar{I}_{y'}\omega_{y'}^2 + \bar{I}_{z'}\omega_{z'}^2) \tag{18.17}$$

donde $\bar{\mathbf{v}}$ = velocidad del centro de masas
ω = velocidad angular
m = masa del sólido rígido
$\bar{I}_{x'}, \bar{I}_{y'}, \bar{I}_{z'}$ = momentos de inercia centrales principales.

También se observó que, en el caso de un sólido rígido *obligado a girar respecto a un punto fijo O*, la energía cinética del sólido se podía expresar como

$$T = \tfrac{1}{2}(I_{x'}\omega_{x'}^2 + I_{y'}\omega_{y'}^2 + I_{z'}\omega_{z'}^2) \tag{18.20}$$

donde x', y' y z' son los ejes principales de inercia del sólido en O. Los resultados obtenidos en la sección 18.4 hacen posible extender el movimiento tridimensional de un sólido rígido a la aplicación del *principio de trabajo* y el *principio de la conservación de la energía*.

Empleo de un sistema de referencia móvil para establecer las ecuaciones del movimiento de un sólido rígido en el espacio

La segunda parte del capítulo se dedicó a la aplicación de las ecuaciones fundamentales

$$\Sigma\mathbf{F} = m\bar{\mathbf{a}} \tag{18.1}$$

$$\Sigma\mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G \tag{18.2}$$

al movimiento de un sólido rígido en tres dimensiones. Primero se recordó (sección 18.5) que $\mathbf{H}_G$ representa el momento angular del sólido relativo a un sistema central $GX'Y'Z'$ de orientación fija (Fig. 18.27) y que $\dot{\mathbf{H}}_G$ en la ecuación (18.2) representa la razón de cambio de $\mathbf{H}_G$ respecto a ese sistema. Se observó que, conforme el sólido gira, sus momentos y productos de inercia respecto al sistema $GX'Y'Z'$ cambian continuamente. Por lo tanto, es más conveniente utilizar un sistema $Gxyz$ en rotación con el sólido y descomponer ω en sus componentes y calcular los momentos y productos de inercia que se usarán para determinar $\mathbf{H}_G$ a partir de las ecuaciones (18.7) o (18.10). Sin embargo, puesto que $\dot{\mathbf{H}}_G$ en la ecuación (18.2) representa la derivada temporal de $\mathbf{H}_G$ respecto al sistema $GX'Y'Z'$, de orientación fija, se deberá utilizar el método de la sección 15.10 para determinar su valor. Recordando la ecuación (15.31) se escribió

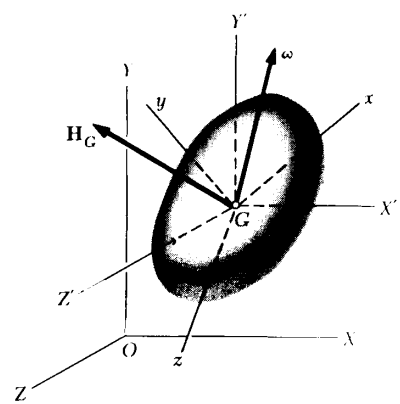


Fig. 18.27

$$\dot{\mathbf{H}}_G = (\dot{\mathbf{H}}_G)_{Gxyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H}_G \tag{18.22}$$

donde $\mathbf{H}_G$ = momento angular del cuerpo respecto al sistema $GX'Y'Z'$ de orientación fija
$(\dot{\mathbf{H}}_G)_{Gxyz}$ = derivada temporal de $\mathbf{H}_G$ respecto al sistema móvil $Gxyz$, que se debe calcular de las relaciones (18.7)
$\boldsymbol{\Omega}$ = velocidad angular del sistema móvil $Gxyz$

Sustituyendo $\dot{\mathbf{H}}_G$ de (18.22) en (18.2) se obtuvo

$$\Sigma\mathbf{M}_G = (\dot{\mathbf{H}}_G)_{Gxyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H}_G \tag{18.23}$$

Si el sistema móvil está unido al sólido, su velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ es idénticamente igual a la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del sólido. Sin embargo, existen muchas aplicaciones en que conviene utilizar un sistema de referencia que no esté unido al sólido, sino que gire de manera independiente (problema resuelto 18.5).

Ecuaciones de movimiento de Euler
Principio de D'Alembert

Haciendo $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}$ en la ecuación 18.23, utilizando ejes principales y escribiendo esta ecuación en forma escalar se obtuvieron las *ecuaciones de movimiento de Euler* (sección 18.6). Un comentario sobre la solución de estas ecuaciones y de las ecuaciones escalares correspondientes a la ecuación (18.1) permitió extender el principio de D'Alembert al movimiento tridimensional de un sólido rígido y concluir que el sistema de fuerzas externas que actúan sobre el sólido rígido es *equivalente* a las fuerzas efectivas del sólido, representadas por el vector $m\bar{\mathbf{a}}$ y por el par $\dot{\mathbf{H}}_G$ (Fig. 18.28). Los problemas relacionados con movimiento en tres dimensiones de un sólido rígido se pueden resolver al considerar la ecuación esquemática representada en la figura 18.28 y al escribir ecuaciones escalares apropiadas que relacionen las componentes, o los momentos, de las fuerzas externas y efectivas (problemas resueltos 18.3 y 18.5).

Ecuación esquemática

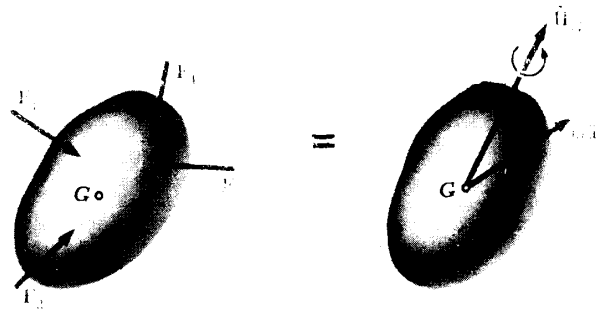


Fig. 18.28

Sólido rígido con un punto fijo

En el caso de un sólido rígido que está *obligado a girar respecto a un punto fijo O*, se puede utilizar un método alternativo de solución relacionando los momentos de las fuerzas y las razones de cambio del momento angular respecto al punto *O*. Se escribió (sección 18.7):

$$\Sigma \mathbf{M}_O = (\dot{\mathbf{H}}_O)_{Oxyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H}_O \tag{18.28}$$

donde $\Sigma \mathbf{M}_O$ = la suma de los momentos de las fuerzas aplicadas al sólido rígido respecto a *O*.
$\mathbf{H}_O$ = momento angular del sólido respecto al sistema fijo *OXYZ*
$(\dot{\mathbf{H}}_O)_{Oxyz}$ = derivada temporal de $\mathbf{H}_O$ respecto al sistema *Oxyz*, que se calculará de las relaciones (18.13).
$\boldsymbol{\Omega}$ = velocidad angular del sistema móvil *Oxyz*.

Este método se puede usar para resolver ciertos problemas relacionados con la rotación de un sólido rígido respecto a ejes fijos (sección 18.8) tales como un árbol desequilibrado en rotación (problema resuelto 18.4).

En la última parte del capítulo se consideró el movimiento de giróscopos y de otros sólidos de revolución. Presentando los *ángulos de Euler* ϕ, θ, ψ para definir la posición de un giróscopo (Fig 18.29), se observó que sus derivadas $\dot{\phi}$, $\dot{\theta}$, $\dot{\psi}$ representan, respectivamente, las derivadas temporales de la *precesión*, *nutación* y *rotación propia* de un giróscopo (*sección 18.9* ω). Expresando la velocidad angular ω en términos de estas derivadas, se escribió

$$\omega = -\dot{\phi} \operatorname{sen} \theta \mathbf{i} + \dot{\theta}\mathbf{j} + (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)\mathbf{k} \qquad (18.35)$$

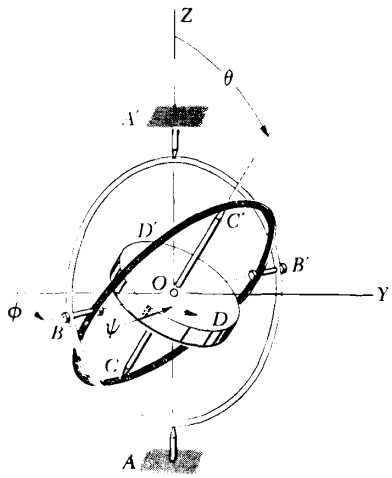


Fig. 18.29

Movimiento de un giróscopo

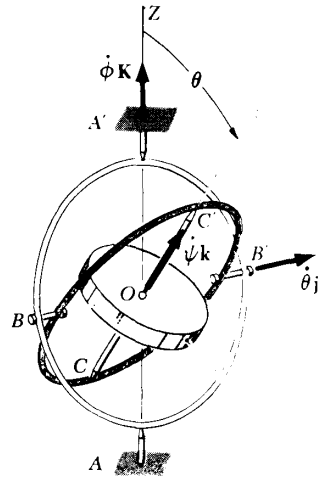


Fig. 18.30

donde los vectores unitarios están asociados a un sistema de referencia *Oxyz* unido al aro interno del giróscopo (Fig. 18.30) y giran, por tanto, con la velocidad angular

$$\Omega = -\dot{\phi} \operatorname{sen} \theta \mathbf{i} + \dot{\theta}\mathbf{j} + \dot{\phi} \cos \theta \mathbf{k} \qquad (18.38)$$

Representando con I el momento de inercia del giróscopo respecto a su eje de giro z y con I' su momento de inercia respecto a un eje transversal que pase por O, se escribió

$$\mathbf{H}_O = -I'\dot{\phi} \operatorname{sen} \theta \mathbf{j} + I'\dot{\theta}\mathbf{j} + I(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)\mathbf{k} \qquad (18.36)$$

Sustituyendo para $\mathbf{H}_O$ y Ω en la ecuación (18.28), se obtuvieron las ecuaciones diferenciales que definen el movimiento del giróscopo.

En el caso particular de la *precesión uniforme* de un giróscopo (sección 18.10), el ángulo θ, la velocidad angular de precesión $\dot{\phi}$ y la velocidad angular de rotación propia $\dot{\psi}$ permanecen constantes. Se vio que tal movimiento es posible sólo si los momentos de las fuerzas externas respecto de O satisfacen la relación.

$$\Sigma \mathbf{M}_O = (I\omega_z - I'\dot{\phi} \cos \theta)\dot{\phi} \operatorname{sen} \theta \mathbf{j} \qquad (18.44)$$

es decir, si las fuerzas externas se reducen a un par de momento igual al segundo miembro de la ecuación (18.44) y aplicado *respecto a un eje perpendicular al eje de precesión y al eje de giro* (Fig. 18.31). El capítulo terminó con un comentario sobre el movimiento de un sólido de revolución, girando sobre su eje y con un movimiento de precesión sin fuerzas actuando sobre él (sección 18.11; problema resuelto 18.6).

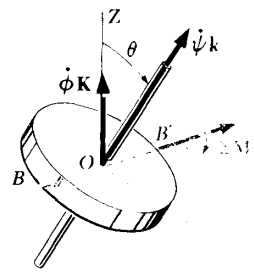


Fig. 18.31

Problemas de Repaso

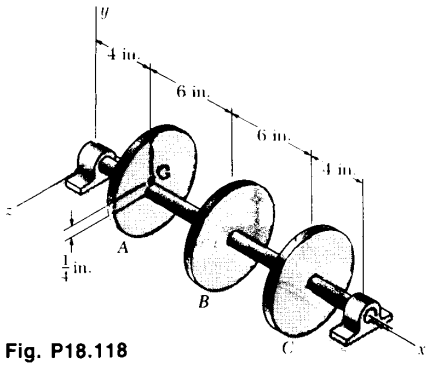


Fig. P18.118

18.118 Tres discos de 25 lb, están unidos a un árbol que gira a 720 rpm. El disco A está unido excéntricamente de manera que su centro de masas está a $\frac{1}{4}$ in del eje de rotación, mientras que los discos B y C están unidos de modo que sus centros de masas coinciden con el eje de rotación. ¿Dónde se le deberán colocar plomos de 2 lb al disco B y al C para equilibrar el sistema dinámicamente?

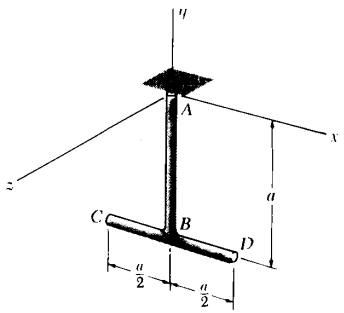


Fig. P18.119

18.119 Dos barras uniformes AB y CD se sueldan en B para formar un conjunto en forma de T y de masa total m. El ensamblaje se cuelga de una rótula en A y se golpea en C en una dirección perpendicular a un plano (en la dirección negativa). Representando el impulso correspondiente mediante $\mathbf{F}\Delta t$, determínense inmediatamente después del choque *a*) la velocidad angular del conjunto *y b*) su eje instantáneo de rotación.

18.120 Un disco delgado homogéneo, de 800 g de masa y radio 100 mm, gira a una velocidad angular constante $\omega_2 = 20$ rad/s respecto al brazo ABC, el cual a su vez gira a una razón constante $\omega_1 = 10$ rad/s respecto al eje x. Determínese el momento angular del disco respecto al punto C.

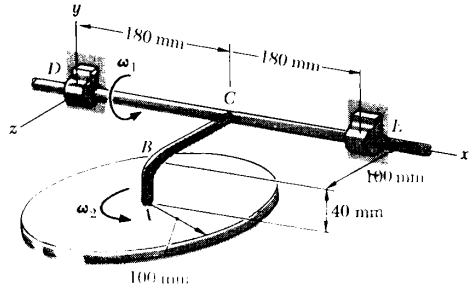


Fig. P18.120 y P18.121

18.121 Un disco homogéneo delgado, de masa 800 g y radio 100 mm, gira a una velocidad angular constante $\omega_2 = 20$ rad/s respecto al brazo ABC, el cual a su vez gira a una velocidad angular constante $\omega_1 = 10$ rad/s respecto al eje x. Para la posición aquí mostrada, determínense las reacciones dinámicas en los soportes D y E.

18.122 El engranaje A gira sobre un engranaje fijo B y gira respecto a un eje AD de longitud $L = 500$ mm, el cual está unido rígidamente en D al eje vertical DE. El eje DE se hace girar con una velocidad angular constante ω_1 de módulo 4 rad/s. Suponiendo que el engranaje A se puede considerar como un disco delgado de masa 2 kg y radio $a = 100$ mm y que $\beta = 30°$, determínense *a*) el momento angular del engranaje A respecto al punto D y *b*) la energía cinética del engranaje A.

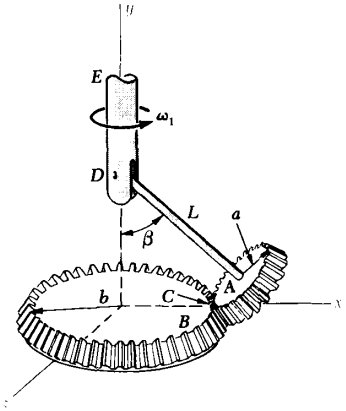


Fig. P18.122

18.123 Un disco delgado, de peso $W = 8$ lb, gira con velocidad angular constante $\omega_2 = 12$ rad/s respecto al brazo OA, el cual a su vez gira con una velocidad angular constante $\omega_1 = 4$ rad/s respecto al eje y. Determínese el momento angular del disco respecto a su centro A.

18.124 Un disco delgado, de peso $W = 8$ lb, gira con una velocidad angular ω_2 respecto al brazo OA, el cual a su vez gira con una velocidad angular ω_1 respecto al eje y. Determínense *a*) el par $M_L\mathbf{j}$ que se deberá aplicar al brazo OA para darle una aceleración angular $\alpha_1 = (6 \text{ rad/s})\mathbf{j}$ cuando $\omega_1 = 4$ rad/s, si se sabe que el disco gira con una velocidad angular constante $\omega_2 = 12$ rad/s y *b*) el sistema fuerza-par que representa la reacción dinámica en O en ese momento. Supóngase que el brazo OA tiene masa despreciable.

18.125 Una barra uniforme AB, de longitud l y masa m, está unida al pasador de una articulación que gira con una velocidad angular constante ω. Determínense *a*) el ángulo β constante que forma la barra con la vertical y *b*) el rango de valores de ω para el cual la barra permanece vertical ($\beta = 0$).

18.126 Un satélite de 240 kg está girando con una velocidad angular $\omega_O = (1.5 \text{ rad/s})\mathbf{i}$ cuando es golpeado en A por un meteorito de 30 g que se mueve con una velocidad $\mathbf{v}o = -(576 \text{ m/s})\mathbf{i} - (432 \text{ m/s})\mathbf{j} + (960 \text{ m/s})\mathbf{k}$ relativo al satélite. Si se sabe que sus radios de giro son $\bar{k}_x x = 300$ mm y $\bar{k}_y = \bar{k}_z = 400$ mm, determínese la velocidad angular del satélite inmediatamente después de que el meteorito se incruste.

18.127 Determínese el eje de precesión y las velocidades angulares de precesión y rotación propia del satélite del problema 18.126, después del choque.

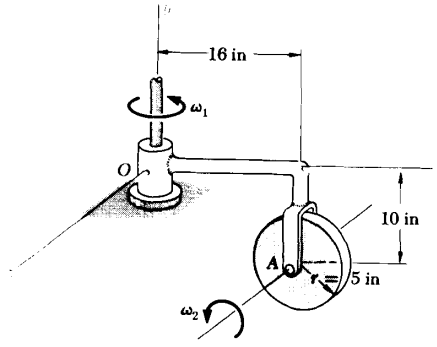


Fig. P18.123 y P18.124

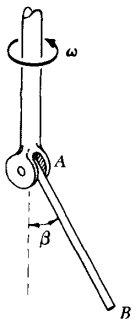


Fig. P18.125

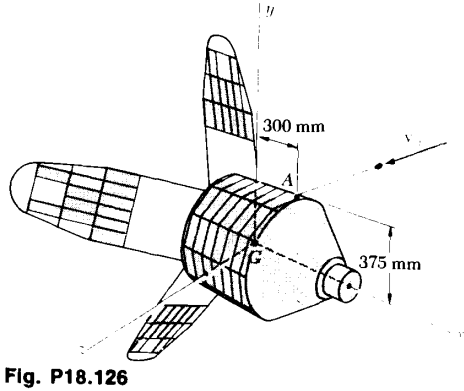


Fig. P18.126

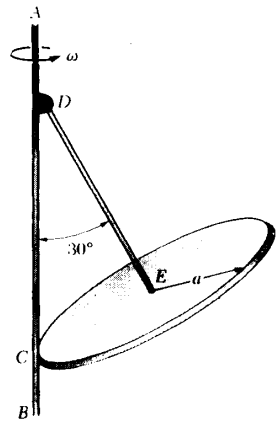


Fig. P18.128

18.128 Un disco de masa m y radio a está rígidamente unido a una barra DE de masa despreciable. La barra DE está unida a un eje vertical AB por medio de una articulación en D y el disco se apoya contra el eje en C. Observando que, cuando el eje AB se hace girar, el mismo punto del disco permanece en contacto con el eje en C, determínese el valor de la velocidad angular ω para la cual la reacción en C será cero.

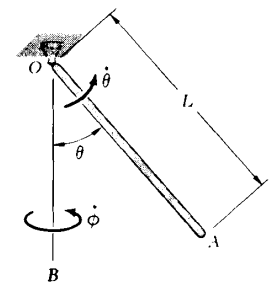


Fig. P18.129

18.129 Una barra homogénea OA, de masa m y longitud L, se sostiene mediante una rótula en O y puede oscilar libremente bajo su propio peso. Si la varilla se mantiene en una posición horizontal ($\theta = 90°$) y se le da una velocidad angular inicial $\dot{\phi}_O = \sqrt{8g/L}$ respecto a la vertical OB, determínense *a*) el mínimo valor de θ en el movimiento que sigue, y *b*) el valor correspondiente de la velocidad angular de la barra respecto a OB. (*Sugerencia.* Aplíquese el principio de la conservación de la energía y el principio del impulso y del momento, observando que puesto que $\Sigma M_{OB} = 0$, la componente de $\mathbf{H}_O$ a lo largo de OB debe ser constante.)

Los siguientes problemas están diseñados para ser resueltos con la ayuda de un ordenador.

18.C1 Se dispara una bala de 20 g con una velocidad inicial $\mathbf{v}_0 = -(250 \text{ m/s})\mathbf{k}$ dentro de una placa circular de 8 kg que cuelga de una rótula en O. La bala golpea el punto A y se incrusta en la placa. Escríbase un programa de ordenador y utilícese para calcular, inmediatamente después del impacto, la velocidad angular de la placa y los ejes instantáneos de rotación para valores de θ de 0 a 80° en intervalos de 10°.

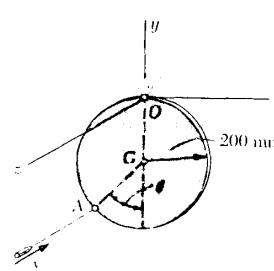


Fig. P18.C1

18.C2 Un satélite geoestacionario de 800 lb gira con una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_0 = (1.5 \text{ rad/s})\mathbf{j}$ cuando es golpeado en B por un meteorito de 6 oz que se desplaza con una velocidad $\mathbf{v}_0 = -(2800 \text{ ft/s})\mathbf{i} + (2900 \text{ ft/s})\mathbf{j} - (2000 \text{ ft/s})\mathbf{k}$ relativa al satélite. Los radios de giro del satélite son $\bar{k}_x = \bar{k}_z = 28.8$ in y $\bar{k}_y = 32.4$ in. Escríbase un programa de ordenador y utilícese para calcular, inmediatamente después de que se incrusta el meteorito en B, las componentes rectangulares y el módulo de la velocidad angular del satélite para valores de b de 0 a 30 in, en intervalos de 2 in. Amplíese el programa y utilícese para calcular, con los mismos valores de b, el cambio de energía cinética asociado a la rotación del satélite.

18.C3 El trompo aquí mostrado se sostiene en un punto fijo O y está en un movimiento de precesión uniforme respecto al eje z. Pesa 3 oz y sus radios de giro respecto a sus ejes de simetría y a un eje transversal que pasa por O son de 0.84 in y 1.80 in, respectivamente, y la distancia de O a su centro de masas G es $c = 1.50$ in. Escríbase un programa de ordenador que calcule, para ciertos valores del ángulo θ y de la velocidad $\dot{\psi}$ *a*) la velocidad angular de precesión $\dot{\phi}$ correspondiente al mínimo de los dos valores obtenidos al resolver la ecuación proporcionada en la parte *a* del problema 18.84, *b*) el valor aproximado de $\dot{\phi}$ obtenido de la condición para la precesión uniforme, $I\dot{\psi}\dot{\phi} \simeq W_c$, proporcionada en la parte *b* del problema 18.84 y *c*) el porcentaje de error introducido por esta aproximación. Utilícese el programa anterior con valores de θ iguales a 15°, 30° y 45° y con valores de $\dot{\psi}$ iguales a 1050, 1200, 1500, 1800, 2400 y 6000 rpm.

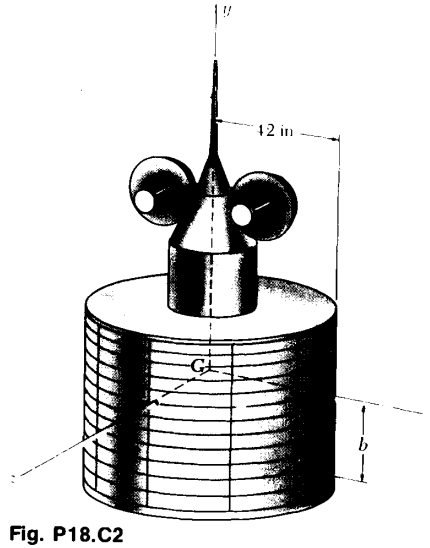


Fig. P18.C2

18.C4 El trompo mostrado en la figura se sostiene en un punto fijo O y sus radios de giro respecto a su eje de simetría y a un eje transversal que pasa por O están representados, respectivamente, por k y k'. El trompo gira a una velocidad angular $\dot{\psi}_0$ respecto a su eje de simetría, el cual forma un ángulo θ_0 con la vertical al ser soltado con velocidad angular de precesión cero ($\dot{\phi}_0 = 0$) y velocidad angular de nutación cero ($\dot{\theta} = 0$). Se observa que el eje del trompo cae y, al caer, empieza el movimiento de precesión. Tras alcanzar un valor máximo θ_m, el ángulo θ decrece hasta recuperar su valor inicial θ_0; las velocidades angulares de precesión y de nutación son nuevamente de cero. Este movimiento, conocido como movimiento cuspidal, se repite indefinidamente, con el punto G oscilando entre un nivel superior correspondiente a $\theta = \theta_0$ y un nivel inferior correspondiente a $\theta = \theta_m$. *a*) En relación al problema 18.109*b*, demuéstrese que la velocidad angular de nutación $\dot{\theta}$ del trompo se define mediante la ecuación diferencial $\dot{\theta}^2 = f(\theta)$, donde

$$f(\theta) = (\cos\theta_0 - \cos\theta)\left(\frac{2gc}{k'^2} - \frac{k^4}{k'^4}\dot{\psi}_0^2\frac{\cos\theta_0 - \cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\right)$$

y exprésese $\dot{\psi}_0^2$ en términos de θ_0 y θ_m al hacer $\theta = \theta_m$ en la ecuación anterior y observando, puesto que $\dot{\theta}_m = 0$, que $f(\theta_m) = 0$. *b*) Escríbase un programa de ordenador para calcular el período de oscilación del eje del trompo, observando que el tiempo Δt_i que corresponde a un incremento $\Delta\theta_i$, del ángulo θ, se puede obtener al dividir $\Delta\theta_i$ entre la velocidad angular promedio de nutación $\frac{1}{2}(\theta_i + \theta_{i+1})$ del trompo durante Δt_i si se supone que la segunda derivada θ del ángulo θ, permanece constante durante Δt_i. *c*) Si se sabe que $c = 36$ mm, $k = 20$ mm, $k' = 45$ mm, $\theta_0 = 30°$ y $\theta_m = 40°$, determínese la velocidad angular inicial de giro del trompo y obténgase un valor aproximado del período de oscilación de su eje, utilizando incrementos $\Delta\theta_i = 0.1°$.

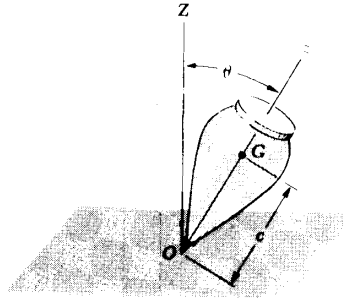


Fig. P18.C3 y P18.C4

CAPÍTULO DIECINUEVE

Vibraciones mecánicas

19.1. Introducción Una *vibración mecánica* es el movimiento de una partícula material o de un sólido rígido que oscila alrededor de una posición de equilibrio. La mayor parte de las vibraciones en máquinas y estructuras son indeseables porque aumentan los esfuerzos y las tensiones y por las pérdidas de energía que las acompañan. Deben por lo tanto eliminarse o reducirse al máximo con diseños apropiados. El análisis de las vibraciones se ha vuelto cada vez más importante en los últimos años debido a la tendencia actual de emplear máquinas de alta velocidad y estructuras más ligeras. Es previsible que esta tendencia continúe y que haya una necesidad mayor de desarrollar en el futuro el análisis de la vibraciones.

El análisis de vibraciones es un tema muy amplio al cual se han dedicado libros completos. Por lo tanto, limitaremos nuestro estudio a los tipos más simples de vibraciones, a saber, las vibraciones de un sólido o un sistema de sólidos con un grado de libertad.

Una vibración mecánica se produce casi siempre cuando un sistema es desplazado desde una posición de equilibrio estable. El sistema tiende a regresar a esa posición bajo la acción de fuerzas de restitución (ya sean fuerzas elásticas, como en el caso de la masa unida a un resorte, o fuerzas gravitacionales en el caso de un péndulo). Pero el sistema alcanza generalmente su posición inicial con cierta velocidad adquirida que lo lleva más allá de esa posición. Como el proceso puede repetirse indefinidamente, el sistema permanece moviéndose de un lado al otro atravesando su posición de equilibrio. El intervalo de tiempo necesario para que el sistema efectúe el ciclo completo de movimiento se llama *periodo* de la vibración. El número de ciclos por unidad de tiempo define la *frecuencia* y el desplazamiento máximo del sistema de su posición de equilibrio se llama *amplitud* de la vibración.

Cuando el movimiento es mantenido únicamente por las fuerzas de restitución se dice que la vibración es una *vibración libre* (Secc. 19.2 a la 19.6). Cuando se aplica una fuerza periódica al sistema, el movimiento resultante se describe como una *vibración forzada* (Secc. 19.7). Cuando los efectos del rozamiento pueden despreciarse se dice

que las vibraciones son *no amortiguadas*. Pero en realidad todas las vibraciones son *amortiguadas* hasta cierto grado. Si una vibración libre es sólo ligeramente amortiguada, su amplitud decrece lentamente hasta que después de cierto tiempo el movimiento se detiene. Pero el amortiguamiento puede ser lo bastante grande para impedir cualquier vibración real; el sistema regresa entonces lentamente a su posición inicial (Secc. 19.8). Una vibración forzada amortiguada dura tanto como dura la aplicación de la fuerza periódica que produce la vibración. Pero la amplitud de la vibración se modifica por la magnitud de las fuerzas de amortiguamiento (Secc. 19.9).

VIBRACIONES SIN AMORTIGUAMIENTO

19.2. Vibraciones libres de partículas. Movimiento armónico simple. Considérese un cuerpo de masa m unido a un resorte de constante k (Fig. 19.1*a*). Como ahora nos importa sólo el movimiento de su masa nos referimos a este cuerpo como una partícula. Cuando la partícula está en equilibrio estático, las fuerzas que actúan sobre ella son su peso **W** y la fuerza **T** ejercida por el resorte, de módulo $T = k\delta_{est}$, donde δ_{est} representa la elongación del resorte. Tenemos, por consiguiente,

$$W = k\delta_{est} \tag{19.1}$$

Supóngase ahora que la partícula se desplaza una distancia x_m desde su posición de equilibrio y se suelta sin velocidad inicial. Si x_m se ha escogido más pequeña que δ_{est}, la partícula se moverá hacia atrás y uno y otro lado de su posición de equilibrio, generándose una vibración de amplitud x_m. Nótese que la vibración puede también producirse dándole cierta velocidad inicial a la partícula cuando está en su posición de equilibrio $x = 0$ o, en forma más general, soltando la partícula desde cualquier posición dada $x = x_0$ con una velocidad inicial $\mathbf{v}_0$.

Para analizar la vibración consideraremos la partícula en una posición P en cierto tiempo t (Fig. 19.1*b*). Representando por x el desplazamiento OP medido desde la posición de equilibrio O (positivo hacia abajo), notamos que las fuerzas que actúan sobre la partícula son su peso **W** y la fuerza **T** ejercida por el resorte, que en esta posición tiene un módulo $T = k(\delta_{est} + x)$. Recordando (19.1) encontramos que el módulo de la resultante **F** de las dos fuerzas (positiva hacia abajo) es

$$F = W - k(\delta_{est} + x) = -kx \tag{19.2}$$

En esta forma la *resultante* de las fuerzas ejercidas sobre la partícula es proporcional al desplazamiento OP *medido desde la posición de equilibrio*. Recordando la convención de signo notamos que **F** está siempre dirigida *hacia* la posición de equilibrio O. Sustituyendo F en la ecuación fundamental $F = ma$ y recordando que a es la segunda derivada, $\ddot{x}$, *de* x con respecto a t, escribimos

$$\boxed{m\ddot{x} + kx = 0} \tag{19.3}$$

Nótese que la misma convención de signo debe utilizarse para la aceleración $\ddot{x}$ y para el desplazamiento x, es decir, positivo hacia abajo.

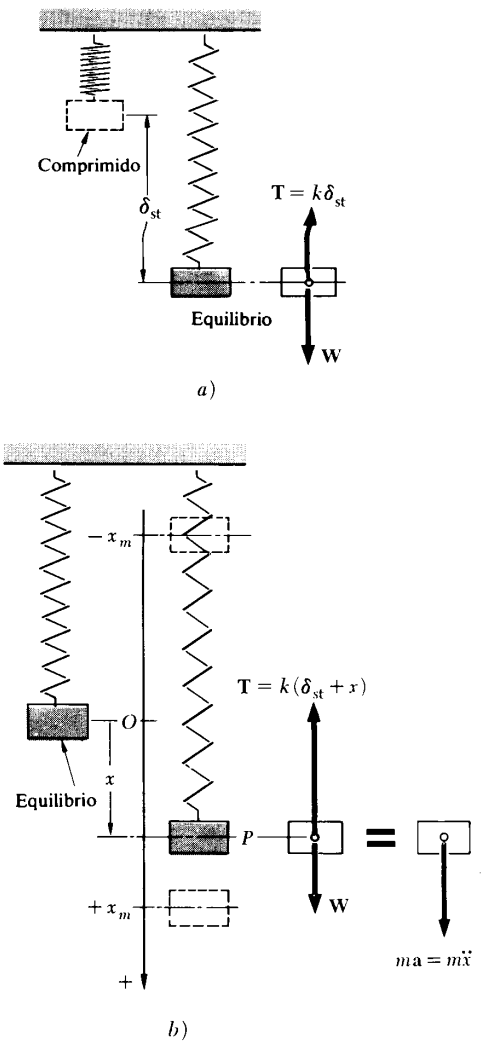


Fig. 19.1

La ecuación (19.3) es una ecuación diferencial lineal de segundo orden. Escogiendo

$$p^2 = \frac{k}{m} \tag{19.4}$$

escribimos (19.3) en la forma

$$\ddot{x} + p^2 x = 0 \tag{19.5}$$

El movimiento definido por la ecuación (19.5) se llama *movimiento armónico simple*. Se caracteriza por el hecho de que *la aceleración es proporcional al desplazamiento y de sentido opuesto*. Notamos que cada una de las funciones $x_1 = \text{sen } pt$ y $x_2 = \cos pt$ satisfacen (19.5). Por lo tanto, estas funciones constituyen dos *soluciones particulares* de la ecuación diferencial (19.5). Como veremos ahora, la *solución general* de (19.5) puede obtenerse multiplicando las dos soluciones particulares por constantes arbitrarias A y B sumándolas. Escribimos

$$x = Ax_1 + Bx_2 = A \text{ sen } pt + B \cos pt \tag{19.6}$$

Al derivar, tenemos sucesivamente la velocidad y la aceleración al tiempo t:

$$v = \dot{x} = Ap \cos pt - Bp \text{ sen } pt \tag{19.7}$$

$$a = \ddot{x} = -Ap^2 \text{ sen } pt - Bp^2 \cos pt \tag{19.8}$$

Sustituyendo (19.6) y (19.8) en (19.5), comprobamos que la expresión (19.6) es una solución de la ecuación diferencial (19.5). Como esta expresión contiene dos constantes arbitrarias A y B, la solución obtenida es la solución general de la ecuación diferencial. El valor de las constantes A y B depende de las *condiciones iniciales* del movimiento. Por ejemplo, tenemos $A = 0$ si la partícula es desplazada desde su posición de equilibrio y se suelta $t = 0$ sin velocidad inicial, y tenemos $B = 0$ si P parte de O en $t = 0$ con cierta velocidad inicial. En general, sustituyendo $t = 0$ y los valores iniciales x_0 y v_0 del desplazamiento y la velocidad en (19.6) y (19.7), encontramos $A = v_0/p$ y $B = x_0$.

Las expresiones obtenidas para el desplazamiento, la velocidad y la aceleración de la partícula, pueden escribirse en forma más compacta si observamos que (19.6) expresa que el desplazamiento $x = OP$ es la suma de las componentes x de los dos vectores **A** y **B**, respectivamente, de módulo A y B dirigidos en la forma indicada en la figura 19.2*a*. Conforme t varía, ambos vectores giran en el sentido de movimiento de las manecillas del reloj; notamos también que el módulo de su resultante $\overrightarrow{OQ}$ es igual al desplazamiento máximo x_m. El movimiento armónico simple de P a lo largo del eje x puede obtenerse entonces proyectando sobre este eje el movimiento de un punto Q que describe un *círculo auxiliar* de radio x_m *con una velocidad angular constante p*.

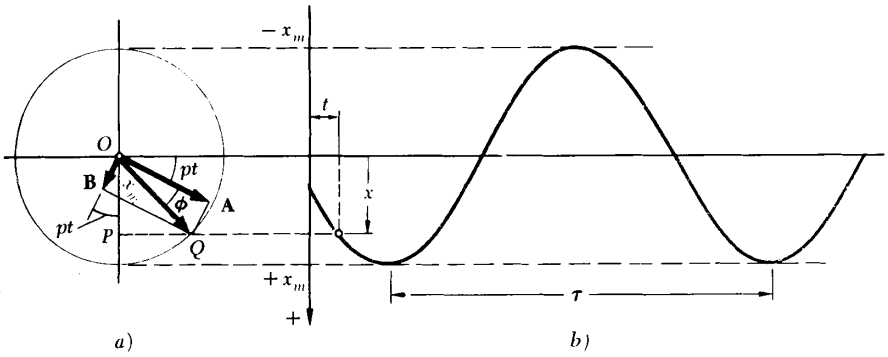


Fig. 19.2

Representando por ϕ el ángulo formado por los vectores $\overrightarrow{OQ}$ y **A**, escribimos

$$OP = OQ\,\text{sen}\,(pt + \phi) \tag{19.9}$$

que nos conduce a nuevas expresiones para el desplazamiento, la velocidad y la aceleración de P:

$$x = x_m\,\text{sen}(pt + \phi) \tag{19.10}$$

$$v = \dot{x} = x_m p \cos(pt + \phi) \tag{19.11}$$

$$a = \ddot{x} = -x_m p^2 \,\text{sen}(pt + \phi) \tag{19.12}$$

La curva de desplazamiento-tiempo se representa por una curva senoidal (Fig. 19.2*b*), y el valor máximo x_m del desplazamiento se llama *amplitud* de la vibración. La velocidad angular p del punto Q que describe el círculo auxiliar se conoce como la *frecuencia circular* de vibración y se mide en rad/s, mientras que el ángulo ϕ que define la posición inicial de Q sobre el círculo se llama *ángulo de fase*. De la figura 19.2 notamos que un *ciclo* completo se ha descrito después de que el ángulo pt ha aumentado 2π rad. El valor correspondiente de t, representado por τ, se llama *periodo* de vibración y se mide en segundos. Tenemos

$$\text{Periodo} = \tau = \frac{2\pi}{p} \tag{19.13}$$

El número de ciclos que efectúa en la unidad de tiempo se representa por f y se conoce como *frecuencia* de vibración. Escribimos

$$\text{Frecuencia} = f = \frac{1}{\tau} = \frac{p}{2\pi} \tag{19.14}$$

La unidad de frecuencia es una frecuencia de 1 ciclo por segundo correspondiente a un periodo de 1 s. En términos de las unidades básicas, la unidad de frecuencia es, por lo tanto, 1/s o s^{-1}, denominado *hercio* (Hz) en el sistema SI de unidades. De la ecuación (19.14) también se sigue que una frecuencia de 1 s^{-1} o 1 Hz corresponde a una frecuencia circular de 2π rad/s. En los problemas relacionados con velocidades angulares expresadas en revoluciones por minuto (rpm), tenemos 1 rpm $= \frac{1}{60}$ s^{-1} $= \frac{1}{60}$ Hz o bien 1 rpm $= (2\pi/60)$ rad/s.

Recordando que p se definió (19.4) en términos de la constante k del resorte y la masa m de la partícula, observamos que el periodo y la frecuencia son independientes de las condiciones iniciales y de la amplitud de la vibración. Notamos que τ y f dependen de la *masa* en lugar del *peso* de la partícula y por lo tanto son independientes del valor de g.

Las curvas de velocidad contra tiempo y aceleración contra tiempo pueden representarse por curvas senoidales del mismo periodo que la curva del desplazamiento contra el tiempo, pero con diferentes ángulos de fase. De (19.11) y (19.12) notamos que los valores máximos de las magnitudes de la velocidad y la aceleración son

$$v_m = x_m p \qquad a_m = x_m p^2 \tag{19.15}$$

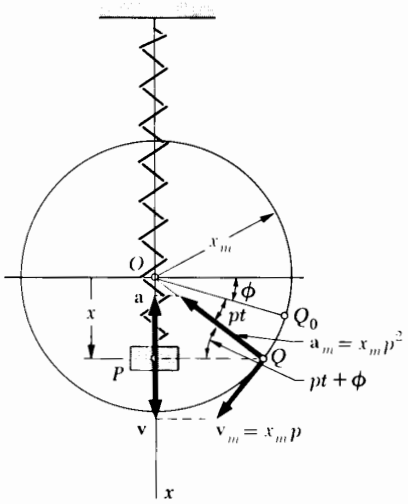
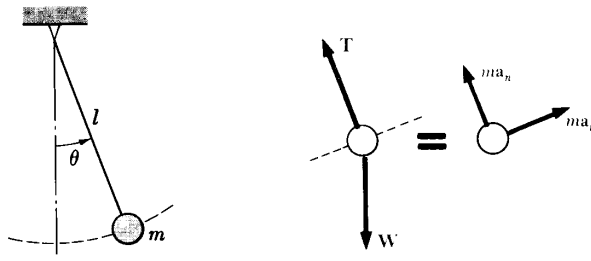


Fig. 19.3

Como el punto Q describe el círculo auxiliar de radio x_m a la velocidad angular constante p, su velocidad y aceleración son iguales, respectivamente, a las expresiones (19.15). De las ecuaciones (19.11) y (19.12) encontramos por lo tanto que la velocidad y la aceleración de P puede obtenerse en cualquier instante proyectando sobre el eje x los vectores de magnitud $v_m = x_m p$ y $a_m = x_m p^2$ representando la velocidad y la aceleración de Q en el mismo instante (Fig. 19.3), respectivamente.

Los resultados obtenidos no se limitan a la solución del problema de una masa unida a un resorte. Pueden utilizarse para analizar el movimiento rectilíneo de una partícula *siempre y cuando la resultante* **F** *de las fuerzas que actúan sobre la partícula sea proporcional al desplazamiento* x *y dirigida hacia* O. La ecuación fundamental del movimiento $F = ma$ puede escribirse entonces en la forma (19.5), que caracteriza el movimiento armónico simple. Observando que el coeficiente de x en (19.5) representa el cuadrado de la frecuencia circular p de vibración, obtenemos fácilmente p y después de sustituirla en (19.13) y (19.14) podemos obtener el periodo τ y la frecuencia de vibración f.

19.3. Péndulo simple (solución aproximada). La mayor parte de las vibraciones encontradas en aplicaciones en ingeniería pueden representarse por un movimiento armónico simple. Muchas otras, aunque de un tipo diferente, pueden *aproximarse* por un movimiento armónico simple siempre que su amplitud permanezca constante. Considérese, por ejemplo, un *péndulo simple* que consiste en una plomada de masa m unida a una cuerda de longitud l que puede oscilar en un plano vertical (Fig. 19.4*a*). En un tiempo t dado, la cuerda forma un ángulo θ con la vertical. Las fuerzas que actúan sobre la plomada son su peso **W** y la fuerza **T** ejercida por la cuerda



a) *b*)

Fig. 19.4

(Fig. 19.4*b*). Descomponiendo el vector $m\mathbf{a}$ en sus componentes tangencial y normal, con $m\mathbf{a}_t$ dirigida a la derecha, es decir, en la dirección correspondiente a valores crecientes de θ, y observando que $a_t = l\alpha = l\ddot{\theta}$, escribimos

$$\Sigma F_t = ma_t \qquad -W \operatorname{sen}\theta = ml\ddot{\theta}$$

Notando que $W = mg$ y al dividir entre ml obtenemos

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta = 0 \tag{19.16}$$

Para oscilaciones de pequeña amplitud podemos sustituir sen θ por θ expresado en radianes y escribir

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0 \tag{19.17}$$

Comparando con (19.5), encontramos que la ecuación obtenida es de un movimiento armónico simple y que la frecuencia circular p de las oscilaciones es igual a $(g/l)^{1/2}$. Sustituyendo en (19.13), obtenemos el periodo de oscilaciones pequeñas de un péndulo de longitud l:

$$\tau = \frac{2\pi}{p} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{19.18}$$

***19.4. Péndulo simple (solución exacta).** La expresión (19.18) es sólo aproximada. Para obtener una relación exacta para el periodo de oscilaciones de un péndulo simple debemos regresar a (19.16). Multiplicando ambos términos por $2\dot{\theta}$ e integrando desde una posición inicial correspondiente a la máxima desviación, es decir, $\theta = \theta_m$ y $\dot{\theta} =$ escribimos.

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_m)$$

o

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_m)$$

Al sustituir cos θ por $1 - 2\,\text{sen}^2(\theta/2)$ y $\cos\theta_m$ por una expresión semejante, y al despejar dt e integrando sobre un cuarto de periodo desde $t = 0$, $\theta = 0$ a $t = \tau/4$, $\theta = \theta_m$, tenemos

$$\tau = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\theta_m} \frac{d\theta}{\sqrt{\text{sen}^2(\theta_m/2) - \text{sen}^2(\theta/2)}}$$

La integral en el miembro derecho se conoce como *integral elíptica*, que no puede expresarse en términos de funciones usuales algebraicas o trigonométricas. Sin embargo, escribiendo

$$\text{sen}(\theta/2) = \text{sen}(\theta_m/2)\,\text{sen}\,\phi$$

podemos escribir

$$\tau = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \text{sen}^2(\theta_m/2)\text{sen}^2\,\phi}} \qquad (19.19)$$

donde la integral obtenida, comúnmente representada por K, puede encontrarse en *tablas de integrales elípticas* para varios valores de $\theta_m/2$. † Para comparar el resultado que acabamos de obtener con el de la sección anterior, escribimos (19.19) en la forma

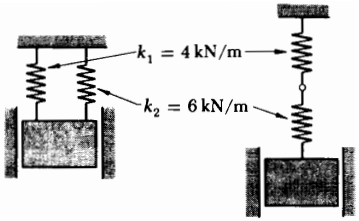
$$\tau = \frac{2K}{\pi}\left(2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\right) \qquad (19.20)$$

La relación (19.20) muestra que el valor real del periodo de un péndulo simple puede obtenerse multiplicando el valor aproximado (19.18) por el factor de corrección $2K/\pi$. Algunos valores del factor de corrección están dados en la Tabla 19.1 para distintos valores de la amplitud θ_m. Notamos que para los cálculos usuales en ingeniería el factor de corrección puede omitirse mientras la amplitud no exceda de 10°.

Tabla 19.1 Factor de corrección del periodo de un péndulo simple

θ_m	0°	10°	20°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
K	1.571	1.574	1.583	1.598	1.686	1.854	2.157	2.768	∞
$2K/\pi$	1.000	1.002	1.008	1.017	1.073	1.180	1.373	1.762	∞

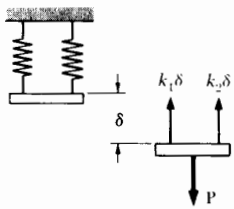
† Véase, por ejemplo, "Standard Mathematical Tables", Chemical Rubber Publishing Company, Cleveland, Ohio.



a) *b)*

PROBLEMA RESUELTO 19.1

Un bloque de 50 kg se mueve entre guías verticales en la forma indicada. Se tira del bloque 40 mm por debajo de su posición de equilibrio y se suelta. Para cada disposición de los resortes mostrada determínense el periodo de vibración, la velocidad máxima del bloque y la aceleración máxima del bloque.



a) **Resortes unidos en paralelo.** Determinamos primero la constante k de un solo resorte equivalente a los dos resortes *encontrando el módulo de la fuerza* **P** necesaria para producir una deflexión dada δ. Como para una deflexión δ las magnitudes de las fuerzas ejercidas por los resortes son $k_1\delta$ y $k_2\delta$, respectivamente tenemos

$$P = k_1\delta + k_2\delta = (k_1 + k_2)\delta$$

La constante k del resorte equivalente es

$$k = \frac{P}{\delta} = k_1 + k_2 = 4\text{ kN/m} + 6\text{ kN/m} = 10\text{ kN/m} = 10^4\text{ N/m}$$

Periodo de vibración: Como $m = 50$ kg, la ecuación (19.4) nos da

$$p^2 = \frac{k}{m} = \frac{10^4\text{ N/m}}{50\text{ kg}} \qquad p = 14.14\text{ rad/s}$$

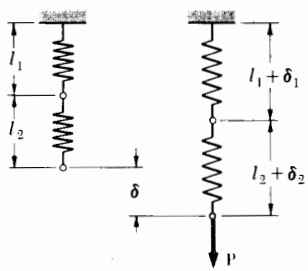
$$\tau = 2\pi/p \qquad \tau = 0.444\text{ s} \blacktriangleleft$$

Velocidad máxima: $v_m = x_m p = (0.040\text{ m})(14.14\text{ rad/s})$

$$v_m = 0.566\text{ m/s} \qquad \mathbf{v}_m = 0.566\text{ m/s}\ \downarrow \blacktriangleleft$$

Aceleración máxima: $a_m = x_m p^2 = (0.040\text{ m})(14.14\text{ rad/s})^2$

$$a_m = 8.00\text{ m/s}^2 \qquad \mathbf{a}_m = 8.00\text{ m/s}^2\ \uparrow \blacktriangleleft$$



b) **Resortes unidos en serie.** Determinemos primero la constante k de un solo resorte equivalente a los dos resortes *encontrando la elongación total* δ de los resortes bajo una carga estática dada **P**. Para facilitar el cálculo se utiliza una carga estática de magnitud $P = 12$ kN.

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = \frac{P}{k_1} + \frac{P}{k_2} = \frac{12\text{ kN}}{4\text{ kN/m}} + \frac{12\text{ kN}}{6\text{ kN/m}} = 5\text{ m}$$

$$k = \frac{P}{\delta} = \frac{12\text{ kN}}{5\text{ m}} = 2.4\text{ kN/m} = 2400\text{ N/m}$$

Periodo de vibración: $p^2 = \dfrac{k}{m} = \dfrac{2400\text{ N/m}}{50\text{ kg}} \qquad p = 6.93\text{ rad/s}$

$$\tau = \frac{2\pi}{p} \qquad \tau = 0.907\text{ s} \blacktriangleleft$$

Velocidad máxima: $v_m = x_m p = (0.040\text{ m})(6.93\text{ rad/s})$

$$v_m = 0.277\text{ m/s} \qquad \mathbf{v}_m = 0.277\text{ m/s}\ \downarrow \blacktriangleleft$$

Aceleración máxima: $a_m = x_m p^2 = (0.040\text{ m})(6.93\text{ rad/s})^2$

$$a_m = 1.920\text{ m/s}^2 \qquad \mathbf{a}_m = 1.920\text{ m/s}^2\ \uparrow \blacktriangleleft$$

Problemas

19.1 Determínense la velocidad máxima y la aceleración máxima de una partícula que realiza un movimiento armónico simple con una amplitud de 3 mm y una frecuencia de 20 Hz.

19.2 Se sabe que una partícula realiza un movimiento armónico simple. Si la velocidad máxima es de 200 mm/s y la aceleración máxima es de 4 m/s^2, determínense la amplitud y la frecuencia de movimiento.

19.3 Determínense la velocidad máxima y la aceleración máxima de una partícula que realiza un movimiento armónico simple con una amplitud de 135 mm y un periodo de 1.2 s.

19.4 Un collar de 7.5 lb está unido a un resorte de constante 5 lb/in y puede deslizarse sin rozamiento sobre una barra horizontal. Si el collarín se mueve 3 in desde su posición de equilibrio y se suelta, determínense la velocidad máxima y la aceleración máxima del mismo durante el movimiento resultante.



Fig. P19.4 y P19.5

19.5 Un collarín de 4 lb está unido a un resorte de constante 6 lb/in y puede deslizarse sin rozamiento en una barra horizontal. El collarín está en reposo cuando es golpeado por un mazo y recibe una velocidad inicial de 55 in/s. Determínense la amplitud durante el movimiento resultante y la aceleración máxima del collarín.

19.6 Un motor de velocidad variable está unido rígidamente a la viga *BC*. El rotor está ligeramente desequilibrado y hace que la viga vibre con una frecuencia igual a la velocidad del motor. Cuando la velocidad es menor que 600 rpm o mayor de 1200 rpm, se observa que un pequeño objeto, colocado en *A* permanece en contacto con la viga. Para una velocidad entre 600 y 1200 rpm se observa que el objeto "brinca" y realmente pierde contacto con la viga. Determínese la amplitud del movimiento de *A* cuando la velocidad del motor es *a*) 600 rpm y *b*) 1200 rpm. Exprésense los resultados en el SI y en unidades del sistema inglés.

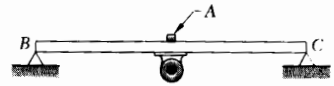


Fig. P19.6

19.7 Un paquete de instrumentos *B* es colocado sobre una mesa vibratoria *C* en la forma indicada. A la mesa se le comunica horizontalmente un movimiento armónico simple con una frecuencia de 3 Hz. Si se sabe que el coeficiente de rozamiento estático entre el paquete y la mesa es $\mu_s = 0.40$, determínese la amplitud máxima permitida del movimiento para que el paquete no deslice sobre la mesa. Exprésense las respuestas en SI y en unidades del sistema inglés.

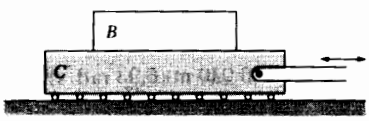


Fig. P19.7

19.8 Un collarín de 2.5 kg descansa sobre el resorte mostrado en la figura (sin estar unido a éste). El collarín se baja 75 mm y se

suelta. Si el movimiento producido fuera un movimiento armónico simple, determínense *a*) el valor máximo que podría tomar la constante k y *b*) la posición, velocidad y aceleración correspondientes del collarín, 0.12 s después de que se suelta.

19.9 Un collarín de 5 kg está unido a un resorte de constante $k = 900$ N/m como se indica en la figura. Si se mueve 50 mm hacia abajo de su posición de equilibrio y se suelta, determínense *a*) el tiempo necesario para que el collarín se mueva 75 mm hacia arriba y *b*) la velocidad y aceleración correspondientes del collarín.

19.10 Se une un collarín de 4 lb a un resorte de constante $k =$ 6 lb/in, como se indica. Si se desplaza al collarín 2.5 in abajo de su posición de equilibrio y se le suelta, determínense *a*) el tiempo necesario para que el collarín se mueva 2 in hacia arriba y *b*) la velocidad y aceleración correspondientes del collarín.

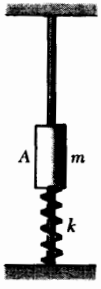
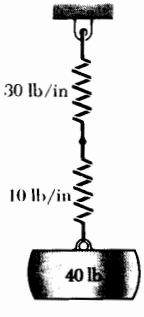


Fig. P19.8, P19.9, y P19.10

19.11 En el problema 19.10 determínense la posición, velocidad y aceleración del collarín 0.15 s después de haberlo soltado.

19.12 y 19.13 Un bloque de 40 lb se sostiene mediante la disposición de resortes que se indica. Si se mueve verticalmente hacia abajo de su posición de equilibrio y se suelta, determínense *a*) el periodo y la frecuencia del movimiento resultante y *b*) la velocidad y aceleración máximas del bloque si la amplitud del movimiento es 1.25 in.



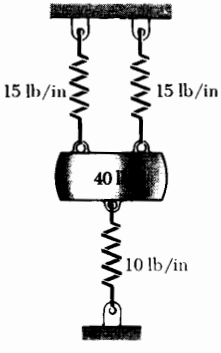
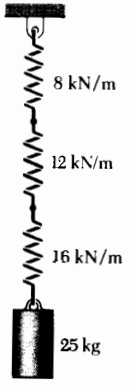


Fig. P19.12 **Fig. P19.13**

19.14 y 19.15 Un bloque de 25 kg se obtiene mediante la disposición de resortes que se muestra en las figuras. Si el bloque se mueve verticalmente hacia abajo desde su posición de equilibrio y se suelta, determínense *a*) el periodo y la frecuencia del movimiento resultante y *b*) la velocidad y aceleración máximas del bloque si la amplitud del movimiento es 30 mm.



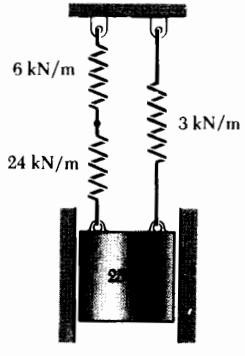


Fig. P19.14 **Fig. P19.15**

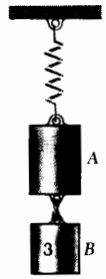


Fig. P19.16 y P19.17

19.16 Se observa que el periodo de vibración del sistema que se muestra es 0.6 s. Si después de quitar el cilindro *B* se observa que el periodo es 0.5 s, determínense *a*) el peso del cilindro *A* y *b*) la constante del resorte.

19.17 Se ha observado que el periodo de vibración del sistema que se indica es 2.4 s. Después de eliminar el cilindro *B* y reemplazarlo por un cilindro de 4 lb se observa que el periodo es de 2.6 s. Determínense *a*) el peso del cilindro *A* y *b*) la constante del resorte.

19.18 Se observa que el periodo de vibración del sistema que se indica es 0.8 s. Si al eliminar el bloque el periodo es 0.7 s, determínense *a*) la masa del bloque *C* y *b*) el periodo de vibración cuando se han eliminado los bloques *A* y *B*.

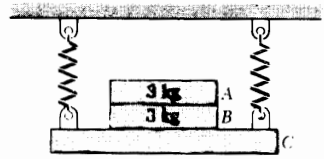


Fig. P19.18

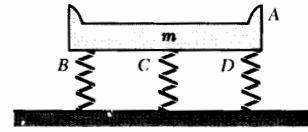


Fig. P19.19

19.19 Una bandeja de masa *m* se une a tres resortes como se indica. El periodo de vibración de la bandeja es 0.5 s y después de eliminar el resorte central *C* se observa que el periodo es 0.6 s. Si se sabe que la constante del resorte *C* es de 125 N/m, determínese la masa *m* de la bandeja.

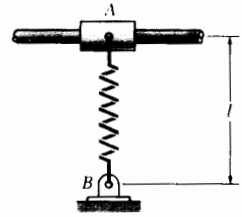


Fig. P19.20

19.20 Un collarín de masa *m* se desliza sin fricción sobre una barra horizontal y está unido a un resorte *AB* de constante *k*. *a*) Si la longitud sin deformación del resorte es exactamente igual a *l*, demuéstrese que el collarín no ejecuta movimiento armónico simple aun cuando la amplitud de las oscilaciones sea pequeña. *b*) Si la longitud sin deformación del resorte es menor que *l*, demuéstrese que el movimiento se puede asemejar a un movimiento armónico simple para oscilaciones pequeñas.

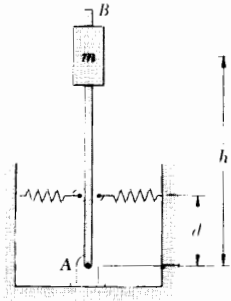


Fig. P19.21 y P19.22

19.21 La barra *AB* está unida a una articulación en *A* y a dos resortes, cada uno de constante *k* como se indica. Si $h = 700$ mm, $d = 300$ mm y $m = 20$ kg, determínese el valor de *k* para el cual el periodo de oscilaciones pequeñas es de *a*) 1 s y *b*) infinito. Despréciese la masa de la barra y supóngase que ambos resortes pueden actuar tanto a tracción como a compresión.

19.22 Con relación al sistema mostrado en la figura, si $h = 700$ mm y $d = 500$ mm y ambos resortes tienen una constante $k = 600$ N/m, determínese la masa *m* para la cual el periodo de oscilaciones pequeñas es *a*) 0.50 s, *b*) infinito. Despréciese la masa de la barra y supóngase que cada resorte puede actuar tanto a compresión como a tracción.

19.23 Representando con δ_{st} la deflexión estática de una viga bajo una carga dada, demuéstrese que la frecuencia de vibración de la carga es

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}}$$

Despréciese la masa de la viga y supóngase que la carga permanece en contacto con ella.

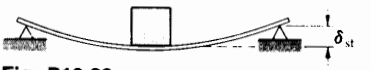


Fig. P19.23

*19.24 Desarrollando el integrando en la ecuación (19.19) de la sección 19.4 en una serie de potencias pares de sen θ e integrando, demuéstrese que el periodo de un péndulo simple de longitud l puede obtenerse por la ecuación

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \tfrac{1}{4}\operatorname{sen}^2\frac{\theta_m}{2}\right)$$

donde θ_m es la amplitud de las oscilaciones.

*19.25 Utilizando la fórmula dada en el problema 19.24, determínese la amplitud θ_m para la cual el periodo de un péndulo simple es 1% mayor que el periodo del mismo péndulo, para oscilaciones pequeñas.

*19.26 Utilizando los datos de la tabla 19.1, determínese el periodo de un péndulo simple de longitud $l = 800$ mm *a*) para oscilaciones pequeñas y *b*) para oscilaciones de amplitud $\theta_m = 30°$ y *c*) para oscilaciones de amplitud $\theta_m = 90°$.

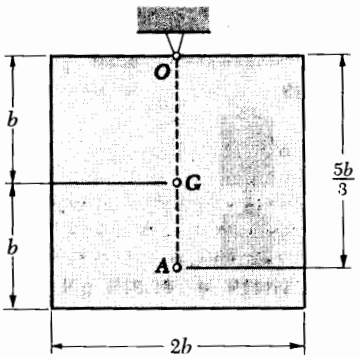
*19.27 Utilizando una tabla de integrales elípticas, determínese el periodo de un péndulo simple de longitud $l = 800$ mm, si la amplitud de las oscilaciones es $\theta_m = 40°$.

19.5. Vibraciones libres de sólidos rígidos. El análisis de las vibraciones de un sólido rígido o de un sistema de sólidos rígidos que poseen un solo grado de libertad es semejante al análisis de las vibraciones de una partícula. Una variable apropiada, como la distancia x o el ángulo θ, se escoge para definir la posición de un sólido o el sistema de sólidos y se escribe una ecuación que relacione esta variable y su segunda derivada con respecto a t. Si la ecuación obtenida es de la misma forma que (19.5), es decir, si tenemos

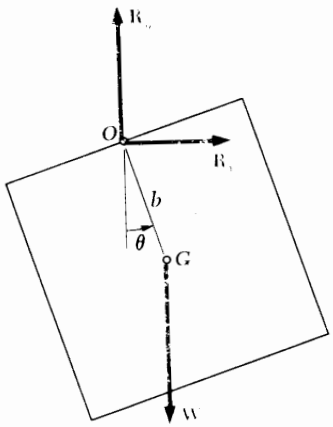
$$\ddot{x} + p^2x = 0 \qquad \text{o} \qquad \ddot{\theta} + p^2\theta = 0 \tag{19.21}$$

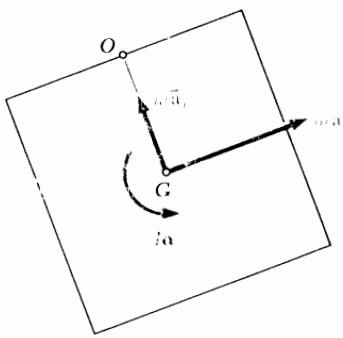
la vibración considerada es un movimiento armónico simple. El periodo y la frecuencia de la vibración pueden obtenerse entonces identificando p y sustituyéndola en (19.13) y (19.14).

En general, una forma sencilla para obtener una de las ecuaciones (19.21) es expresar que el sistema de las fuerzas externas es equivalente al sistema de las fuerzas inerciales trazando un diagrama de sólido libre para un valor arbitrario de la variable y escribiendo la ecuación de movimiento adecuada. Recordamos que nuestro objetivo debe ser *la determinación del coeficiente* de la variable x



a)





b)

Fig. 19.5

o θ, *no* la determinación de la variable misma ni la derivada $\bar{x}$ o $\ddot{\theta}$. Hagamos este coeficiente igual a p^2, entonces obtenemos la frecuencia circular p de la cual pueden determinarse τ y f.

El método que hemos esbozado puede utilizarse para analizar vibraciones que están verdaderamente representadas por un movimiento armónico simple o vibraciones de amplitud pequeña que pueden *aproximarse* por un movimiento armónico simple. Como un ejemplo, determinaremos el periodo para el caso de oscilaciones pequeñas de una placa cuadrada de lado $2b$ que está suspendida del punto medio O de un lado (Fig. 19.5*a*). Consideremos la placa en una posición arbitraria definida por el ángulo θ que la línea OG forma con la vertical y trazamos un diagrama para expresar que el peso $\mathbf{W}$ de la placa y las componentes $\mathbf{R}_x$ y $\mathbf{R}_y$ de la reacción en O son equivalentes a los vectores $m\mathbf{a}_t$ y $m\mathbf{a}_n$ y al par $\bar{I}\boldsymbol{\alpha}$ (Fig. 19.5*b*). Como la velocidad angular y la aceleración de la placa son iguales a $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$, respectivamente, los módulos de los dos vectores son $mb\dot{\theta}^2$ y $mb\ddot{\theta}$, respectivamente, mientras el momento del par es $\bar{I}\ddot{\theta}$. En aplicaciones anteriores de este método (Cap. 16), tratamos siempre que fue posible de suponer el sentido correcto para la aceleración. Sin embargo, aquí debemos suponer el mismo sentido positivo para θ y $\ddot{\theta}$ para obtener una ecuación de la forma (19.21). En consecuencia, la aceleración angular $\ddot{\theta}$ se supondrá positiva en el sentido opuesto a las manecillas del reloj aunque esta suposición es obviamente poco realista. Igualando los momentos alrededor de O, escribimos

$$+\circlearrowleft \qquad -W(b\,\mathrm{sen}\,\theta) = (mb\ddot{\theta})b + \bar{I}\ddot{\theta}$$

Notando que $\bar{I} = \frac{1}{12}m[(2b)^2 + (2b)^2] = \frac{2}{3}mb^2$ y $W = mg$, obtenemos

$$\ddot{\theta} + \frac{3}{5}\frac{g}{b}\,\mathrm{sen}\,\theta = 0 \tag{19.22}$$

Para oscilaciones de amplitud pequeña podemos sustituir sen θ por θ, expresada en radianes y escribir

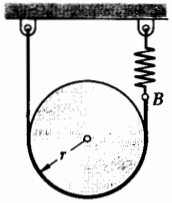
$$\ddot{\theta} + \frac{3}{5}\frac{g}{b}\theta = 0 \tag{19.23}$$

Comparando con (19.21), vemos que la ecuación obtenida es de un movimiento armónico simple y que la frecuencia circular p de las oscilaciones es igual a $(3g/5b)^{1/2}$. Sustituyendo en (19.13), encontramos que el periodo de las oscilaciones es

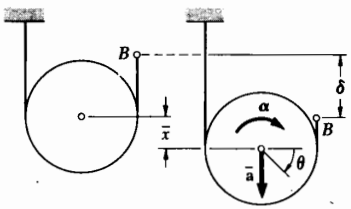
$$\tau = \frac{2\pi}{p} = 2\pi\sqrt{\frac{5b}{3g}} \tag{19.24}$$

El resultado obtenido es válido sólo para oscilaciones de amplitud pequeña. Una descripción más exacta del movimiento de la placa se obtiene comparando las ecuaciones (19.16) y (19.22). Notamos que las dos ecuaciones son idénticas si escogemos $l = 5b/3$. Esto significa que la placa oscilará como un péndulo simple de longitud $l = 5b/3$ y el resultado de la sección 19.4 puede utilizarse para corregir el valor del periodo dado en (19.24). El punto A de la placa que se encuentra sobre la línea OG a la distancia $l = 5b/3$ desde O se define como el *centro de oscilación* correspondiente a O (Fig. 19.5*a*).

PROBLEMA RESUELTO 19.2



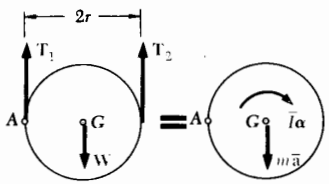
Un cilindro de peso W y radio r está suspendido por una cuerda que le da vuelta en la forma indicada. Un extremo de la cuerda está unido directamente a un soporte rígido mientras que el otro extremo está unido a un resorte de constante k. Determínense el periodo y la frecuencia de la vibración del cilindro.



Cinemática del movimiento. Expresamos el desplazamiento lineal y la aceleración del cilindro en términos del desplazamiento angular θ. Escogiendo el sentido positivo en el sentido de las manecillas del reloj y midiendo los desplazamientos desde la posición de equilibrio, escribimos

$$\bar{x} = r\theta \qquad \delta = 2\bar{x} = 2r\theta$$

$$\alpha = \ddot{\theta} \curvearrowright \qquad \bar{a} = r\alpha = r\ddot{\theta} \qquad \bar{\mathbf{a}} = r\ddot{\theta} \downarrow \tag{1}$$



Ecuaciones de movimiento. El sistema de fuerzas externas que actúan sobre el cilindro consiste en el peso $\mathbf{W}$ y de las fuerzas $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$ ejercidas por la cuerda. Expresamos que este sistema es equivalente al sistema de fuerzas inerciales representando por el vector $m\bar{a}$ aplicado en G y al par $\bar{I}\alpha$.

$$+\circlearrowright \Sigma M_A = \Sigma(M_A)_{\text{eff}}: \qquad Wr - T_2(2r) = m\bar{a}r + \bar{I}\alpha \tag{2}$$

Cuando el cilindro está en su posición de equilibrio, la tensión de la cuerda es $T_0 = \frac{1}{2}W$. Notamos que para un desplazamiento angular θ, el módulo de $\mathbf{T}_2$ es

$$T_2 = T_0 + k\delta = \tfrac{1}{2}W + k\delta = \tfrac{1}{2}W + k(2r\theta) \tag{3}$$

Sustituyendo (1) y (3) en (2) y recordando que $\bar{I} = \frac{1}{2}mr^2$, escribimos

$$Wr - (\tfrac{1}{2}W + 2kr\theta)(2r) = m(r\ddot{\theta})r + \tfrac{1}{2}mr^2\ddot{\theta}$$

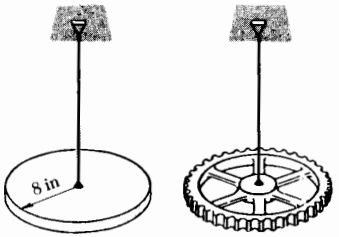
$$\ddot{\theta} + \frac{8}{3}\frac{k}{m}\theta = 0$$

El movimiento es armónico simple y tenemos

$$p^2 = \frac{8}{3}\frac{k}{m} \qquad p = \sqrt{\frac{8}{3}\frac{k}{m}}$$

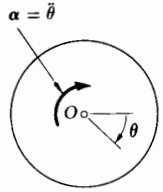
$$\tau = \frac{2\pi}{p} \qquad \tau = 2\pi\sqrt{\frac{3}{8}\frac{m}{k}} \blacktriangleleft$$

$$f = \frac{p}{2\pi} \qquad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{8}{3}\frac{k}{m}} \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESUELTO 19.3

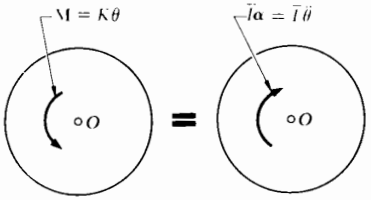
Un disco circular que pesa 20 lb y de radio 8 in, está suspendido de un alambre en la forma indicada. El disco se gira (produciendo una deformación por torsión al alambre) y después se suelta; el periodo de la vibración torsional es 1.13 s. Un engranaje es posteriormente suspendido del mismo alambre y se observa que el periodo de vibración torsional es 1.93 s. Suponiendo que el momento de par ejercido por el alambre es proporcional al ángulo de torsión, determínese *a*) la constante torsional del alambre, *b*) el momento de inercia central del engranaje, y *c*) la velocidad angular máxima alcanzada por el engranaje si se gira 90° y se suelta.



a) **Vibración del disco.** Sea θ el desplazamiento angular del disco entonces expresamos que el módulo del par ejercido por el alambre es $M = K\theta$, donde K es la constante torsional elástica del alambre. Como este par debe ser equivalente al par $\bar{I}\alpha$ que representa las fuerzas reales del disco, escribimos

$$+\circlearrowleft \Sigma M_O = \Sigma(M_O)_{\text{eff}}: \qquad +K\theta = -\bar{I}\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{K}{\bar{I}}\theta = 0$$



El movimiento es armónico simple y tenemos

$$p^2 = \frac{K}{\bar{I}} \qquad \tau = \frac{2\pi}{p} \qquad \tau = 2\pi\sqrt{\frac{\bar{I}}{K}} \tag{1}$$

Para el disco tenemos

$$\tau = 1.13 \text{ s} \qquad \bar{I} = \tfrac{1}{2}mr^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{20 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2}\right)\left(\frac{8}{12} \text{ ft}\right)^2 = 0.138 \text{ lb·ft·s}^2$$

Sustituyendo en (1) obtenemos

$$1.13 = 2\pi\sqrt{\frac{0.138}{K}} \qquad K = 4.27 \text{ lb·ft/rad}$$

b) **Vibración del engranaje.** Como el periodo de vibración del engranaje es de 1.93 s y $K = 4.27$ lb ft/rad, la ecuación (1) nos da

$$1.93 = 2\pi\sqrt{\frac{\bar{I}}{4.27}} \qquad \bar{I}_{\text{eng}} = 0.403 \text{ lb·ft·s}^2$$

c) **Velocidad angular máxima del engranaje.** Como el movimiento e armónico simple, tenemos

$$\theta = \theta_m \operatorname{sen} pt \qquad \omega = \theta_m p \cos pt \qquad \omega_m = \theta_m p$$

Recordando que $\theta_m = 90° = 1.571$ rad y $\tau = 1.93$ s, escribimos

$$\omega_m = \theta_m p = \theta_m\left(\frac{2\pi}{\tau}\right) = (1.571 \text{ rad})\left(\frac{2\pi}{1.93 \text{ s}}\right)$$

$$\omega_m = 5.11 \text{ rad/s}$$

Problemas

19.28 La barra uniforme de 4 kg que se muestra en la figura, se une a un resorte de constante $k = 750$ N/m. Si el extremo A de la barra se baja 40 mm y se suelta, determínense *a*) el periodo de vibración y *b*) la velocidad máxima del extremo A

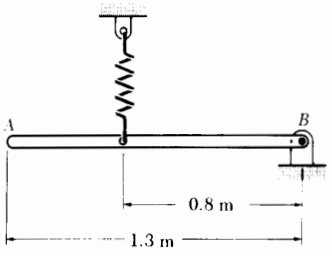


Fig. P19.28

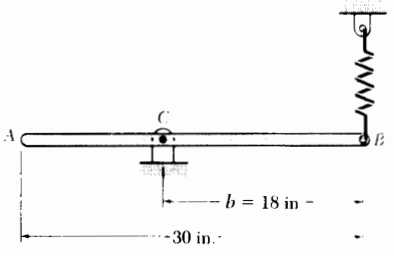


Fig. P19.29

19.29 La barra uniforme que se indica pesa 15 lb y se une a un resorte de constante $k = 4$ lb/in. Si el extremo B de la barra se desplaza 0.4 in y se suelta, determínense *a*) el periodo de vibración y *b*) la velocidad máxima del extremo B.

19.30 Una barra esbelta AB, de 15 lb, está remachada a un disco uniforme de 12 lb como se muestra. Una correa está unida al borde del disco y a un resorte que mantiene la barra en reposo en la posición mostrada. Si el extremo A de la barra se mueve 0.75 in hacia abajo y se suelta, determínense *a*) el periodo de vibración y *b*) la velocidad máxima del extremo A.

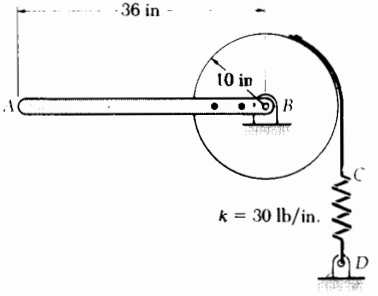


Fig. P19.30

19.31 Un cilindro uniforme de 5 kg rueda sin deslizar sobre un plano inclinado y está unido al resorte AB como se indica. Si el centro del cilindro se desplaza 10 mm hacia abajo del plano inclinado a partir de su posición de equilibrio y se suelta, determínense *a*) el periodo de vibración y *b*) la velocidad máxima del centro del cilindro.

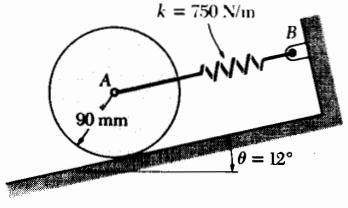


Fig. P19.31

19.32 Se coloca una correa sobre el borde de un volante de 240 kg y se une, como aquí se muestra, a dos resortes, ambos de constante $k = 15$ kN/m. Se tira del extremo C de la banda 40 mm hacia abajo y se suelta, observándose que el periodo de vibración del volante es 0.5 s. Si se sabe que la tensión inicial en la correa es de magnitud suficiente para evitar deslizamiento, determínense *a*) la velocidad angular máxima del volante y *b*) el radio de giro central del volante.

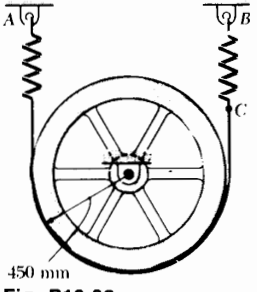


Fig. P19.32

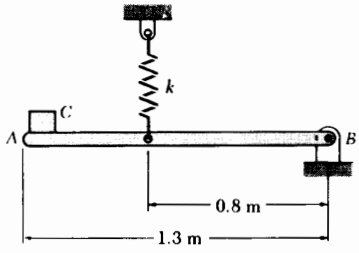


Fig. P19.35

19.33 Si se sabe que el radio de giro central del volante del problema 19.32 es 380 mm, determínense *a*) el periodo de vibración y *b*) la velocidad angular máxima del volante.

19.34 Con relación al problema 19.29 determínense *a*) el valor de b para el cual se obtendría el mínimo periodo de vibración y *b*) el periodo de vibración correspondiente.

19.35 La barra uniforme AB de 4 kg está unida como se indica a un resorte de constante $k = 750$ N/m. Se coloca un pequeño bloque C de 0.5 kg sobre la barra en A. *a*) Si el extremo A de la barra se mueve entonces hacia abajo una pequeña distancia δ_0 y se suelta, determínese el periodo de la vibración y *b*) el máximo valor posible de δ_0 para que el bloque C permanezca en contacto con la barra todo el tiempo.

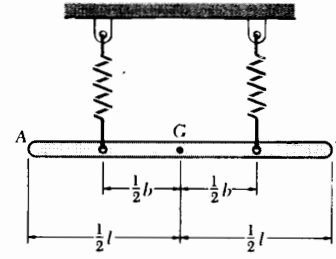


Fig. P19.36

19.36 Una varilla de masa m y longitud l se sostiene mediante dos resortes, ambos de constante k. Determínese la frecuencia de la vibración resultante, si a la varilla *a*) se le da un pequeño desplazamiento vertical y se suelta; *b*) se le gira un pequeño ángulo, respecto al eje horizontal a través de G y se suelta. *c*) Determínese la relación b/l para la cual las frecuencias encontradas en los apartados a y b son iguales.

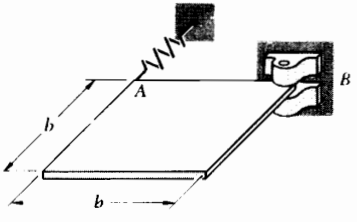


Fig. P19.37

19.37 Una placa uniforme y cuadrada, de masa m, se sostiene en un plano horizontal mediante un pasador en B y se une en A a un resorte de constante k. Si a la esquina A se le da un pequeño desplazamiento y se suelta, determínese el periodo del movimiento resultante.

19.38 Un péndulo compuesto se define como una placa rígida que oscila alrededor de un punto fijo O llamado centro de suspensión. Demuéstrese que el periodo de oscilación de un péndulo compuesto es igual al periodo de oscilación de un péndulo simple de longitud OA donde la distancia desde A al centro de masa G es $GA = (\bar{k}^2/\bar{r})$. El punto A se define como el centro de oscilación y coincide con el centro de percusión definido en el problema 17.65.

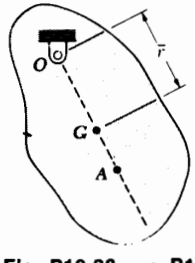


Fig. P19.38 y P19.39

19.39 Una placa rígida oscila respecto a un punto fijo O. Demuéstrese que el mínimo periodo de oscilación ocurre cuando la distancia r del punto O al centro de masas G es igual a k.

19.40 Demuéstrese que, si el péndulo compuesto del problema 19.38 se sostiene de A y no en O, el periodo de oscilación es el mismo que antes y el nuevo centro de oscilación se sitúa en O.

19.41 Una barra uniforme de longitud l puede oscilar respecto a una articulación situada a una distancia c, del centro de masa G de la barra. *a*) Determínese la frecuencia de oscilaciones pequeñas si $c = \frac{1}{2} l$. *b*) Determínese un segundo valor de c para el cual la frecuencia de oscilaciones pequeñas es la misma que la encontrada en el apartado *a*.

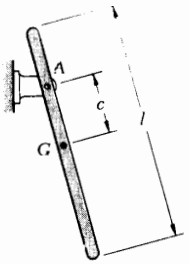


Fig. P19.41 y P19.42

19.42 Una barra uniforme de longitud l puede oscilar respecto a una articulación A situada a una distancia c del centro de masas G de la barra. Determínense *a*) la distancia c para la cual el periodo de oscilación es mínimo y *b*) el valor correspondiente del periodo.

19.43 Una placa rectangular uniforme se sostiene de un pasador situado en el punto medio de uno de sus lados, como se indica. Considerando constante la dimensión b, determínense *a*) la relación c/b para la cual el periodo de oscilación de la placa es mínimo y *b*) la relación c/b para la cual el periodo de oscilación de la placa es el mismo que el periodo de un péndulo simple de longitud c.

19.44 Una placa rectangular uniforme se sostiene de un pasador situado en el punto medio de un lado como se indica. *a*) Determínese el periodo de oscilaciones pequeñas si $c = b$. *b*) Considerando constante la dimensión b, determínese un segundo valor de c para el cual el periodo de oscilación es el mismo que el encontrado en el apartado *a*.

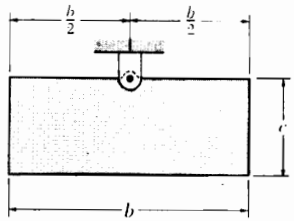


Fig. P19.43 y P19.44

19.45 Un alambre delgado y homogéneo se dobla en la forma de un triángulo equilátero de lado $l = 300$ mm. Determínese el periodo de oscilaciones pequeñas si el cable *a*) se cuelga como se indica y *b*) se cuelga de un pasador situado en el punto medio de un lado.

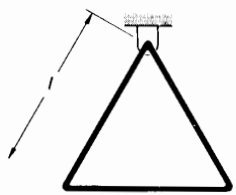


Fig. P19.45

19.46 Dos barras uniformes, ambas de masa m y longitud l, se sueldan para formar la disposición, en forma de T, que se muestra en la figura. Determínese la frecuencia de oscilaciones pequeñas del cuerpo resultante.

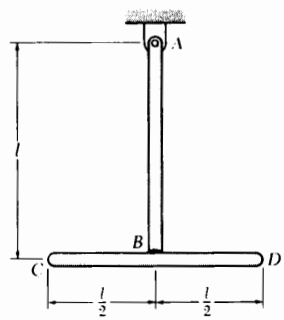


Fig. P19.46

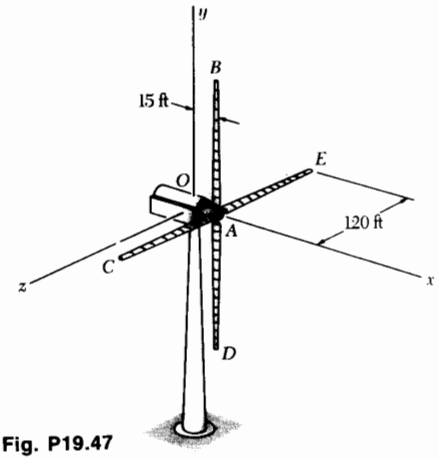


Fig. P19.47

19.47 El álabe AB del generador de una aeroturbina (o turbina eólica) mostrado, se va a quitar temporalmente. El movimiento del generador alrededor del eje y se impide, pero los tres álabes que permanecen pueden oscilar como una unidad respecto al eje x. Suponiendo que cada álabe es equivalente a una varilla de 120 ft, determínese el periodo en el caso de oscilaciones de amplitud pequeña de los álabes, en ausencia del viento.

19.48 Se observa que el periodo de oscilaciones pequeñas con respecto a A, de una biela, es 1.03 s. Si se sabe que la distancia r_a es de 160 mm, determínese el radio de giro central de la biela.

19.49 Una biela está suspendida por una cuña o apoyo simple en el punto A; se observa que el periodo para el caso de oscilaciones de amplitud pequeña es 0.87 s. Entonces, se invierte la biela y se suspende por un apoyo simple en el punto B, obteniéndose en este caso un periodo para oscilaciones de amplitud pequeña igual a 0.78 s. Si se sabe que $r_a + r_b = 255$ mm, determínense *a*) la posición del centro de masas G y *b*) el radio de giro central k.

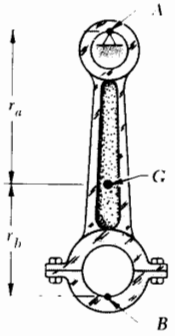


Fig. P19.48 y P19.49

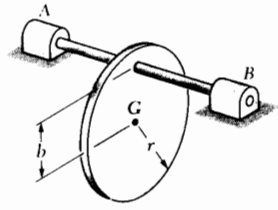


Fig. P19.50

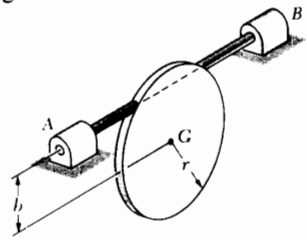


Fig. P19.51

19.50 19.51 Un disco delgado de radio r puede oscilar respecto a un eje AB, situado como se indica, a una distancia b de su centro de masa G. *a*) Determínese el periodo de oscilaciones pequeñas si $b = r$. *b*) Determínese un segundo valor de b para el cual el periodo de oscilación es el mismo que en el apartado *a*.

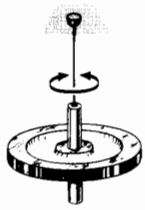


Fig. P19.52

19.52 Se observa un periodo de 4.1 s para las oscilaciones angulares de un rotor giroscópico de 450 g, suspendido de un cable como se indica. Si se sabe que se obtiene un periodo de 6.2 s cuando se suspende una esfera de acero de 50 mm de diámetro en la misma forma, determínese el radio de giro central del rotor (densidad del acero = 7850 kg/m^3).

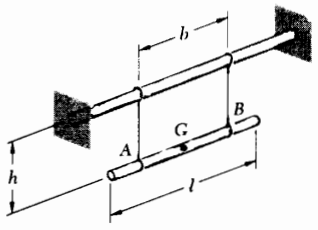


Fig. P19.53

Una varilla de longitud l se cuelga de dos cables verticales de longitud h, ambos situados a una distancia $\frac{1}{2}\,b$ de su centro de masas G. Determínese el período de oscilación cuando *a*) se gira la barra un pequeño ángulo respecto de un plano vertical que pasa por G y se suelta y *b*) se le da a la barra una pequeña traslación horizontal a lo largo de AB y se suelta.

Resuélvase el problema 19.53 suponiendo que $h = 300$ mm, $b = 400$ mm y $l = 600$ mm.

Una varilla de 3 kg se cuelga de un cable de acero que se sabe que tiene una constante de resorte de torsión $K = 1.95$ N · m/rad. Si se gira la varilla 180° respecto de la vertical y se suelta, determínense *a*) el periodo de oscilación y *b*) la velocidad máxima del extremo A de la barra.

Un disco uniforme, de radio 12 in y peso 20 lb, se une a un eje vertical que está sostenido rígidamente en B. Se sabe que el disco rota 5° cuando al mismo se le aplica un par estático de 120 lb · in. Si el disco se gira 3° y se suelta, determínense *a*) el periodo de la vibración resultante y *b*) la velocidad máxima de un punto en el perímetro del disco.

Un molde de acero está rígidamente atornillado al disco del problema 19.56. Si se sabe que el periodo de vibración torsional del disco y el molde es de 0.41 s, determínese el momento de inercia del molde respecto al eje AB.

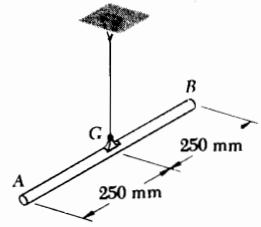


Fig. P19.55

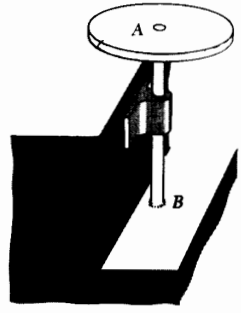


Fig. P19.56

Vimos en la sección 19.2 que cuando una partícula de masa m tiene movimiento armónico simple, la resultante $\mathbf{F}$ de las fuerzas ejercidas sobre las partículas tiene un módulo proporcional al desplazamiento x medido desde la posición de equilibrio O y dirigida hacia O; *escribimos* $F = -kx$. En relación con la sección 13.6, notamos que $\mathbf{F}$ es una *fuerza conservativa* y que la energía potencial correspondiente es $V = \frac{1}{2}kx^2$, donde V se supone igual a cero en la posición de equilibrio $x = 0$. Como la velocidad de la partícula es igual a $\dot{x}$, *su energía cinética es* $T = \frac{1}{2}\,m\dot{x}^2$ y podemos expresar que la energía total de la partícula se conserva escribiendo

$$T + V = \text{constante} \qquad \tfrac{1}{2}m\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2}kx^2 = \text{constante}$$

Haciendo $p^2 = k/m$ como en (19.4), donde p es la frecuencia circular de vibración, tenemos

$$\dot{x}^2 + p^2x^2 = \text{constante} \tag{19.25}$$

La ecuación (19.25) es característica del movimiento armónico simple; puede obtenerse directamente de (19.5) multiplicando ambos términos por $2\dot{x}$ e integrando.

El principio de la conservación de la energía nos proporciona una forma conveniente para determinar el periodo de vibración de un cuerpo rígido o de un sistema de cuerpos rígidos que poseen un solo grado de libertad una vez que se ha establecido que el movimiento del sistema es un movimiento armónico simple, o que puede aproximarse por un movimiento armónico simple. Escogiendo una variable adecuada, como una distancia x o un ángulo θ, consideramos dos posiciones particulares del sistema:

1. *El desplazamiento del sistema es máximo:* tenemos $T_1 = 0$, y V_1 puede expresarse en términos de la amplitud x_m o θ_m *(escogiendo* $V = 0$ en la posición de equilibrio).
2. *El sistema pasa por su posición de equilibrio;* tenemos $V_2 = 0$ y T_2 puede expresarse en términos de la velocidad máxima $\dot{x}_m$ o $\dot{\theta}_m$.

Entonces expresamos que la energía total del sistema se conserva y escribimos $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$. Recordando de (19.15) que para el movimiento armónico simple la velocidad máxima es igual al producto de la amplitud y de la frecuencia circular p, encontramos que la ecuación obtenida puede resolverse para p.

Como un ejemplo, consideraremos nuevamente la placa cuadrada de la sección 19.5. En la posición de desplazamiento máximo. (Fig. 19.6*a*), tenemos

$$T_1 = 0 \qquad V_1 = W(b - b\cos\theta_m) = Wb(1 - \cos\theta_m)$$

o, como $1 - \cos\theta_m = 2\,sen^2(\theta_m/2) \approx 2(\theta_m/2)^2 = \theta_m^2/2$ para oscilaciones de amplitud pequeña,

$$T_1 = 0 \qquad V_1 = \tfrac{1}{2}Wb\theta_m^2 \tag{19.26}$$

Como la placa pasa por su posición de equilibrio (Fig. 19.6*b*), su velocidad es máxima y tenemos

$$T_2 = \tfrac{1}{2}m\bar{v}_m^2 + \tfrac{1}{2}\bar{I}\omega_m^2 = \tfrac{1}{2}mb^2\dot{\theta}_m^2 + \tfrac{1}{2}\bar{I}\dot{\theta}_m^2 \qquad V_2 = 0$$

o, recordando de la sección 19.5 que $\bar{I} = \frac{2}{3}mb^2$,

$$T_2 = \tfrac{1}{2}(\tfrac{5}{3}mb^2)\dot{\theta}_m^2 \qquad V_2 = 0 \tag{19.27}$$

Sustituyendo de (19.26) y (19.27) en $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$ y notando que la velocidad máxima $\dot{\theta}_m$ es igual al producto $\theta_m p$, escribimos

$$\tfrac{1}{2}Wb\theta_m^2 = \tfrac{1}{2}(\tfrac{5}{3}mb^2)\theta_m^2 p^2 \tag{19.28}$$

que nos da $p^2 = 3g/5b$ y

$$\tau = \frac{2\pi}{p} = 2\pi\sqrt{\frac{5b}{3g}} \tag{19.29}$$

como obtuvimos previamente.

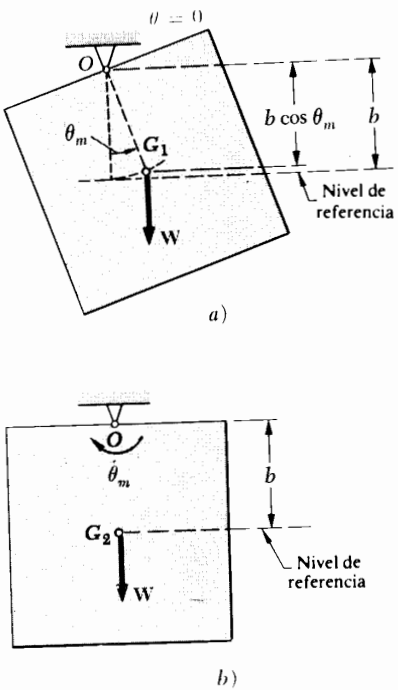
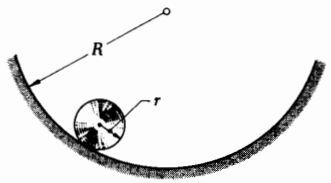


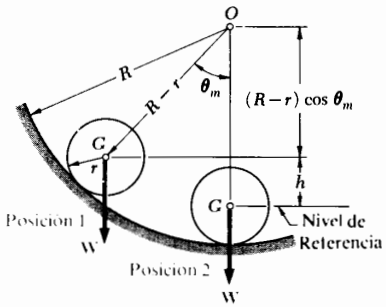
Fig. 19.6



PROBLEMA RESUELTO 19.4

Determínese el periodo de oscilación de amplitud pequeña de un cilindro de radio r que rueda sin deslizar en el interior de una superficie curva de radio R.

Solución. Representamos por θ el ángulo que la línea OG forma con la vertical. Como el cilindro rueda sin deslizar, podemos aplicar el principio de conservación de la energía entre la posición *1*, donde $\theta = \theta_m$, y la posición *2*, donde $\theta = 0$.



Posición 1. ***Energía cinética.*** Como la velocidad del cilindro es cero tenemos $T_1 = 0$.

Energía potencial. Escogiendo un nivel de referencia como el mostrado y representando por W el peso del cilindro, tenemos

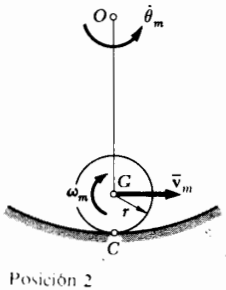
$$V_1 = Wh = W(R - r)(1 - \cos\theta)$$

Notando que para oscilaciones de amplitud pequeña, $(1 - \cos\theta) = 2\,\text{sen}^2$ $(1 - \cos\theta) = 2\,\text{sen}^2\,(\theta/2) \approx \theta^2/2$, tenemos

$$V_1 = W(R - r)\frac{\theta_m^2}{2}$$

Posición 2. Representando por $\dot{\theta}_m$ la velocidad angular de la línea OG conforme el cilindro pasa por la posición *2* y observando que el punto C es el centro instantáneo de rotación del cilindro, escribimos

$$\bar{v}_m = (R - r)\dot{\theta}_m \qquad \omega_m = \frac{\bar{v}_m}{r} = \frac{R - r}{r}\dot{\theta}_m$$



Energía cinética

$$\begin{aligned} T_2 &= \tfrac{1}{2}m\bar{v}_m^2 + \tfrac{1}{2}\bar{I}\omega_m^2 \\ &= \tfrac{1}{2}m(R - r)^2\dot{\theta}_m^2 + \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}mr^2)\left(\frac{R - r}{r}\right)^2\dot{\theta}_m^2 \\ &= \tfrac{3}{4}m(R - r)^2\dot{\theta}_m^2 \end{aligned}$$

Energía potencial

$$V_2 = 0$$

Conservación de la energía

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

$$0 + W(R - r)\frac{\theta_m^2}{2} = \tfrac{3}{4}m(R - r)^2\dot{\theta}_m^2 + 0$$

Como $\dot{\theta}_m = p\theta_m$ y $W = mg$, escribimos

$$mg(R - r)\frac{\theta_m^2}{2} = \tfrac{3}{4}m(R - r)^2(p\theta_m)^2 \qquad p^2 = \frac{2}{3}\frac{g}{R - r}$$

$$\tau = \frac{2\pi}{p} \qquad \tau = 2\pi\sqrt{\frac{3}{2}\frac{R - r}{g}} \quad \blacktriangleleft$$

Problemas

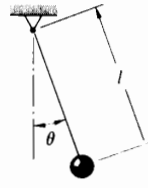


Fig. P19.58

19.58 Usando el método de la sección 19.6 determínese el periodo de un péndulo simple de longitud l.

19.59 Se observa que los resortes de la suspensión de un automóvil se alargan 180 mm hasta una posición sin deformación cuando se levanta el coche mediante varios gatos hidráulicos. Suponiendo que cada resorte cargue una porción igual del peso del automóvil, determínese la frecuencia de las vibraciones verticales libres del cuerpo.

19.60 Utilizando el método de la sección 19.6 resuélvase el problema 19.4.

19.61 Resuélvase el problema 19.5 usando el método de la sección 19.6.

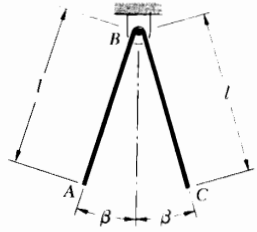


Fig. P19.62 y P19.63

19.62 Un alambre homogéneo de longitud $2l$ se dobla como se indica y se le deja oscilar respecto a un pasador, sin rozamiento, en B. Representando por τ_0 el periodo de oscilaciones pequeñas cuando $\beta = 0$, determínese el ángulo β para el cual el periodo de oscilaciones pequeñas es $2\tau_0$.

19.63 Si se sabe que $l = 600$ mm y $\beta = 30°$, determínese el periodo de oscilaciones pequeñas del alambre homogéneo doblado que aquí se muestra.

19.64 Un alambre homogéneo doblado en forma de un cuadrado de lado l, se sostiene mediante una rótula en A. Determínese el periodo de oscilaciones pequeñas del alambre a) en el plano del cuadrado y b) en una dirección perpendicular al cuadrado.

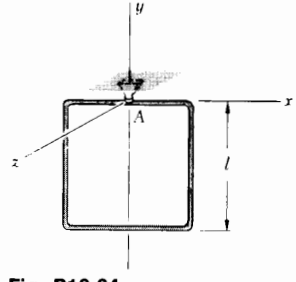


Fig. P19.64

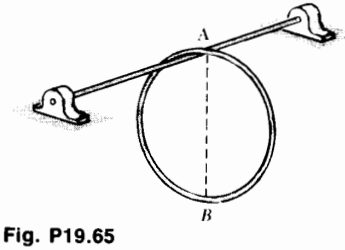


Fig. P19.65

19.65 Un anillo delgado de radio r y masa m se suspende de una varilla rugosa como aquí se indica. Determínese la frecuencia de oscilaciones pequeñas del anillo a) en el plano del anillo y b) en una dirección perpendicular al plano del anillo. Supóngase que la fricción es lo suficientemente grande como para evitar el deslizamiento en A.

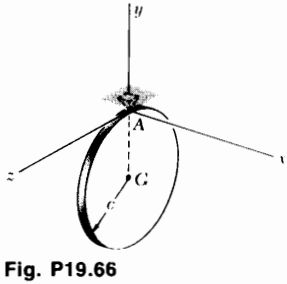


Fig. P19.66

19.66 Un disco uniforme, de radio c se sostiene mediante una rótula en A. Determínese la frecuencia de oscilaciones pequeñas del disco a) en el plano del disco y b) en una dirección perpendicular al disco.

19.67 Se observa que, cuando al reborde de un volante de 6 ft de diámetro se une un pequeño objeto con un peso de 8 lb, el periodo de oscilaciones pequeñas del volante es 22 s. Despreciando la fricción en el eje, determínese el momento de inercia central del volante.

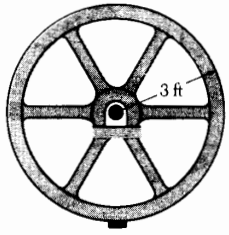


Fig. P19.67

19.68 Utilizando el método de la sección 19.6 resuélvase el problema 19.46.

19.69 Una barra uniforme AB pesa 6 lb y se une a dos resortes, como se indica. Si se le proporciona al extremo C un pequeño desplazamiento y se suelta, determínese la frecuencia de la vibración de la barra.

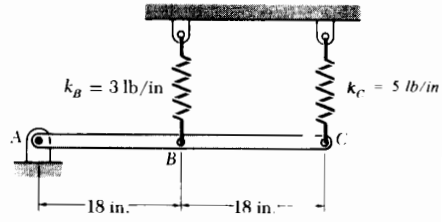


Fig. P19.69

19.70 Para la barra del problema 19.69 determínese su frecuencia de vibración si se intercambian los resortes de manera que k_B = 5 lb/in y k_C = 3 lb/in.

19.71 La varilla AB, de 5 kg, está soldada a un disco uniforme de 8 kg. Un resorte de constante 450 N/m está unido al disco y mantiene la barra en reposo en la posición mostrada. Si al extremo B de la barra se le da un pequeño desplazamiento y se suelta, determínese el periodo de vibración de la barra.

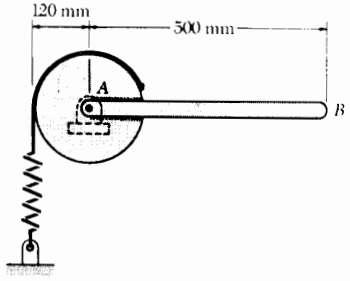


Fig. P19.71

19.72 Considerando la barra y el disco del problema 19.71, determínese la constante del resorte para la cual el periodo de vibración de la barra es 1.6 s.

19.73 19.74 Dos barras uniformes AB y CD ambas de longitud l y masa m, están unidas a dos engranajes como aquí se muestra. Despreciando la masa de los engranajes, determínese el periodo de oscilaciones pequeñas del sistema.

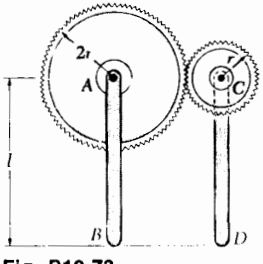


Fig. P19.73

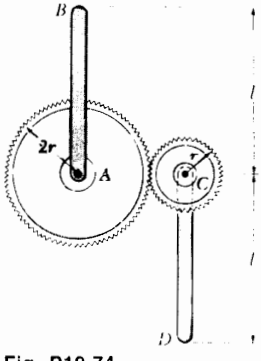


Fig. P19.74

19.75 Dos discos uniformes de 6 kg están unidos a la barra *AB* de 9 kg que se muestra. Si se sabe que la constante del resorte es 5 kN/m y que los discos ruedan sin deslizar, determínese la frecuencia de vibración del sistema.

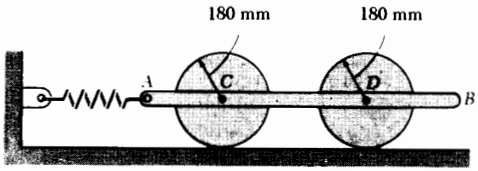


Fig. P19.75

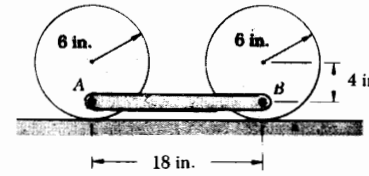


Fig. P19.76

19.76 La barra *AB* de 20 lb está unida a dos discos de 8 lb como aquí se indica. Si se sabe que los discos ruedan sin deslizar, determínese la frecuencia de oscilaciones pequeñas del sistema.

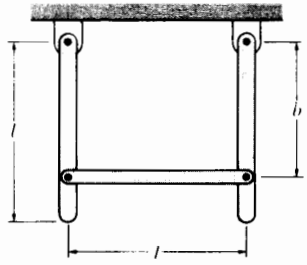


Fig. P19.77 y P19.78

19.77 Tres barras idénticas se conectan como se indica. Si $b = \frac{3}{4}l$, determínese la frecuencia de oscilaciones pequeñas del sistema.

19.78 Tres barras idénticas se conectan como se indica. Determínense *a*) la distancia *b* para la cual es máxima la frecuencia de oscilaciones y *b*) la frecuencia máxima correspondiente.

19.79 La barra *AB* de 3 lb está remachada a un disco de 5 lb. Si se sabe que el disco rueda sin deslizar, determínese el periodo de pequeñas oscilaciones del sistema.

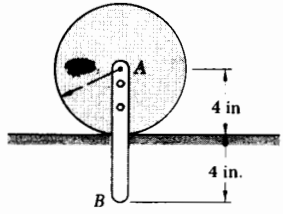


Fig. P19.79

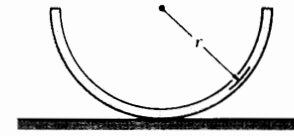


Fig. P19.80

19.80 Una media sección de tubo se coloca sobre una superficie horizontal, se gira un ángulo pequeño y luego se suelta. Suponiendo que dicha sección se balancee sin deslizar, determínese el periodo de oscilación.

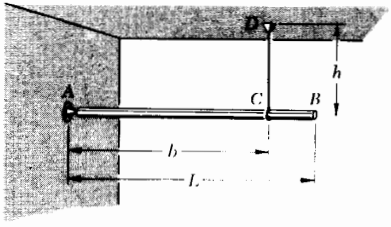


Fig. P19.81

19.81 Una barra uniforme de longitud *L* se sostiene mediante una rótula en *A*, y por medio de un cable vertical *CD*. Dedúzcase una expresión para el periodo de oscilación de la barra si el extremo *B* se desplaza horizontalmente un poco y luego se suelta.

19.82 Resuélvase el problema 19.81 suponiendo que $L = 900$ mm, $b = 750$ mm y $h = 400$ mm.

19.83 Un trozo de tubo uniforme se cuelga de dos cables verticales unidos en A y B; determínese el periodo de oscilación en términos de l_1 y l_2 cuando el punto B se desplaza un poco horizontalmente hacia la derecha y se suelta.

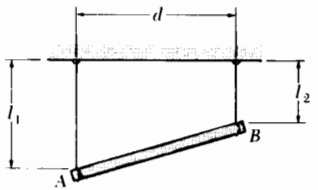


Fig. P19.83

*19.84 Conforme un cuerpo sumergido se desplaza a través de un fluido, sus partículas se mueven alrededor del cuerpo y, por tanto, adquieren energía cinética. En el caso de una esfera que se mueve en un fluido ideal, la energía cinética total adquirida por el fluido es $\frac{1}{4}\rho V v^2$ donde ρ es la densidad máxima del fluido, V el volumen de la esfera y v la velocidad de la esfera. Considérese un cascarón esférico hueco de 3 in de radio que se mantiene sumergido en un recipiente con agua, por un resorte de constante 3 lb/in. *a*) Despreciando el rozamiento del fluido, determínese el periodo de vibración del cascarón cuando el desplazamiento es vertical y después se suelta. *b*) Resuélvase el apartado *a* suponiendo que el recipiente es acelerado hacia arriba con una aceleración constante de 10 ft/s^2.



Fig. P19.84

*19.85 Una placa delgada de longitud l descansa sobre un medio cilindro de radio r. Dedúzcase una expresión para el periodo de oscilaciones pequeñas de la placa.

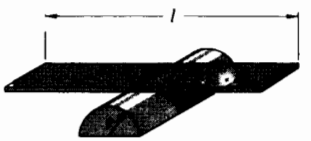


Fig. P19.85

19.7. Vibraciones forzadas Las vibraciones más importantes desde el punto de vista de las aplicaciones en ingeniería son las *vibraciones forzadas* de un sistema. Estas vibraciones ocurren cuando un sistema está sujeto a una fuerza periódica o cuando está unido elásticamente a un soporte que tiene un movimiento alternativo.

Consideremos primero el caso de un cuerpo de masa m suspendido de un resorte y sujeto a una fuerza periódica **P** de módulo $P = P_m \operatorname{sen} \omega t$ (Fig. 19.7). Esta fuerza puede ser una fuerza externa inercial aplicada al cuerpo o una fuerza centrífuga producida por la rotación de alguna parte no equilibrada del cuerpo (véase problema resuelto 19.5). Representando por x el desplazamiento del cuerpo, medido desde su posición de equilibrio, escribimos la ecuación de movimiento

$$+\downarrow \Sigma F = ma: \qquad P_m \operatorname{sen} \omega t + W - k(\delta_{st} + x) = m\ddot{x}$$

Recordando que $W = k\delta_{est}$, tenemos

$$m\ddot{x} + kx = P_m \operatorname{sen} \omega t \tag{19.30}$$

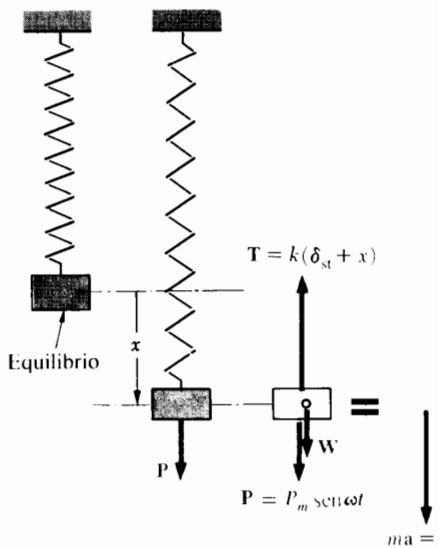


Fig. 19.7

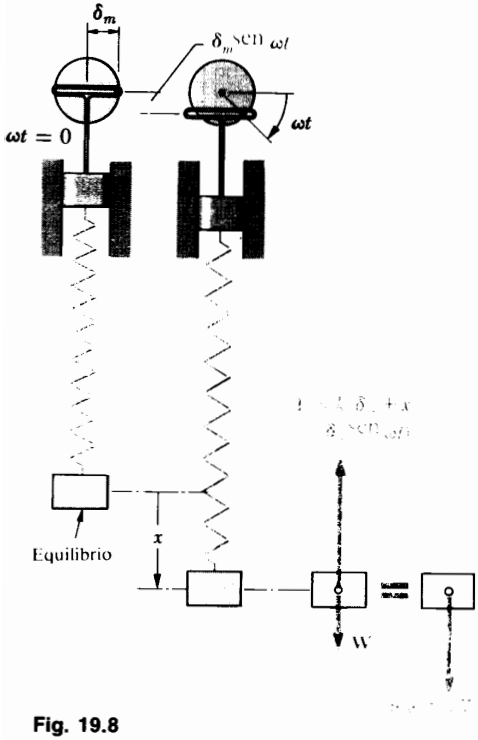


Fig. 19.8

Enseguida consideremos el caso de un cuerpo de masa m suspendido de un resorte unido a un soporte en movimiento cuyo desplazamiento δ es igual a δ_m *sen* ωt (Fig. 19.8). Midiendo el desplazamiento x del cuerpo desde la posición de equilibrio estático correspondiente a $\omega t = 0$, encontramos que la elongación total del resorte al tiempo t es $\delta_{est} + x - \delta_m$ *sen* ωt. La ecuación de movimiento es entonces

$$+\downarrow \Sigma F = ma: \qquad W - k(\delta_{est} + x - \delta_m \operatorname{sen}\omega t) = m\ddot{x}$$

Recordando que $W = k\delta_{est}$, tenemos

$$\boldsymbol{m\ddot{x} + kx = k\delta_m} \operatorname{sen} \omega t \tag{19.31}$$

Notamos que las ecuaciones (19.30) y (19.31) son de la misma forma y que una solución de la primera ecuación satisfará la segunda si hacemos $P_m = k\delta_m$.

Una ecuación diferencial como (19.30) o (19.31) que posee un miembro derecho diferente de cero se dice que es *no homogénea*. Su solución general se obtiene sumando una solución particular de la ecuación dada a la solución general de la ecuación *homogénea* correspondiente (con miembro derecho igual a cero). Una *solución particular* de (19.30) o de (19.31) puede obtenerse proponiendo una solución de la forma

$$x_{\text{part}} = X_m \operatorname{sen} \omega t \tag{19.32}$$

Sustituyendo x_{part} por x en (19.30), encontramos

$$-m\omega^2 X_m \operatorname{sen} \omega t + kX_m \operatorname{sen} \omega t = P_m \operatorname{sen} \omega t$$

que puede resolverse para la amplitud,

$$X_m = \frac{P_m}{k - m\omega^2}$$

Recordando de (19.4) que $k/m = p^2$, donde p es la frecuencia circular de la vibración libre del cuerpo, escribimos

$$\boldsymbol{x_m = \frac{P_m/k}{1 - (\omega/p)^2}} \tag{19.33}$$

Sustituyendo (19.32) en (19.31), obtenemos en forma semejante

$$\boldsymbol{x_m = \frac{\delta_m}{1 - (\omega/p)^2}} \tag{19.33'}$$

La ecuación homogénea correspondiente a (19.30) o (19.31) es la ecuación (19.3) que define la vibración libre del cuerpo. Su solución general, llamada *función complementaria,* se encontró en la sección 19.2,

$$x_{\text{comp}} = A \operatorname{sen} pt + B \cos pt \tag{19.34}$$

Sumando la solución particular (19.32) y la función complementaria (19.34) obtenemos la *solución general* de las ecuaciones (19.30) y (19.31):

$$x = A \operatorname{sen} pt + B \cos pt + x_m \operatorname{sen} \omega t \tag{19.35}$$

Notamos que la vibración obtenida consiste en dos vibraciones superpuestas. Los primeros dos términos en (19.35) representan una vibración libre del sistema. La frecuencia de esta vibración, llamada *frecuencia natural* del sistema, depende sólo de la constante k del resorte y de la masa m del cuerpo, y las constantes A y B pueden determinarse de las condiciones iniciales. Esta vibración libre también se llama vibración *transitoria* ya que en realidad será amortiguada rápidamente por las fuerzas de rozamiento (Secc. 19.9).

El último término en (19.35) representa la vibración del *estado estacionario* producido y mantenido por la fuerza aplicada o por el movimiento aplicado por el soporte. Esta frecuencia es la *frecuencia forzada* generada por esta fuerza o movimiento y, su amplitud x_m, definida por (19.33) o (19.33'), depende de la *razón de frecuencia* ω/p. La razón de la amplitud x_m de la vibración de estado estacionario a la deformación estática P_m/k causada por una fuerza P_m, o a la amplitud δ_m del movimiento de soporte se le llama *factor de amplificación.* De (19.33) y (19.33'), obtenemos

$$\text{Factor de amplificación} = \frac{x_m}{P_m/k} = \frac{x_m}{\delta_m} = \frac{1}{1 - (\omega/p)^2} \tag{19.36}$$

El factor de amplificación ha sido graficado en la figura 19.9 en función de la razón de frecuencias ω/p. Notamos que cuando $\omega = p$, la amplitud de la vibración forzada se vuelve infinita. La fuerza aplicada o el movimiento aplicado por el soporte se dice que está en *resonancia* con el sistema dado. En realidad, la amplitud de vibración permanece finita a causa de las fuerzas de amortiguamiento (Secc. 19.9); sin embargo, tal situación debe evitarse si la frecuencia forzada no debe escogerse muy cercana a la frecuencia natural del sistema. Notamos también que para $\omega < p$ el coeficiente de sen ωt en (19.35) es positivo, mientras que para $\omega > p$ este coeficiente es negativo. En el primer caso la vibración forzada está *en fase* con la fuerza aplicada o el movimiento aplicado por el soporte, mientras que en el segundo caso está 180° *fuera de fase.*

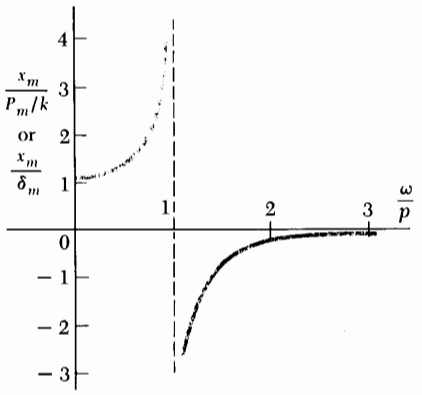
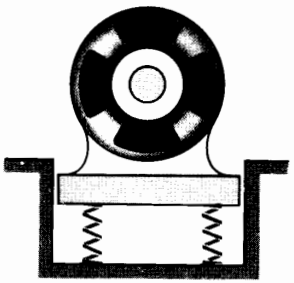


Fig. 19.9



PROBLEMA RESUELTO 19.5

Un motor que pesa 350 lb está sostenido por cuatro muelles, cada uno de los cuales tiene una constante de 750 lb/in. El desequilibrio del rotor es equivalente a un peso de 1 oz localizado a 6 in del eje de rotación. Si se sabe que el motor está restringido a moverse verticalmente, determínese *a*) la velocidad en rpm para la cual ocurrirá resonancia, y *b*) la amplitud de la vibración del motor a una velocidad de 1 200 rpm.

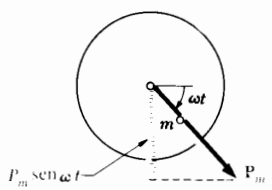
a) **Velocidad de resonancia.** La velocidad de resonancia es igual a la frecuencia circular (en rpm) de la vibración libre del motor. La masa del motor y la constante equivalente de los muelles sostenedores son

$$m = \frac{350 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2} = 10.87 \text{ lb}\cdot\text{s}^2/\text{ft}$$

$$k = 4(750 \text{ lb/in}) = 3000 \text{ lb/in} = 36\,000 \text{ lb/ft}$$

$$p = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{36\,000}{10.87}} = 57.5 \text{ rad/s} = 549 \text{ rpm}$$

Velocidad de Resonancia = 549 rpm ◄



b) **Amplitud de la vibración a 1 200 rpm.** La velocidad angular del peso y la masa equivalente al peso de 1 oz son

$$\omega = 1200 \text{ rpm} = 125.7 \text{ rad/s}$$

$$m = (1 \text{ oz})\frac{1 \text{ lb}}{16 \text{ oz}}\frac{1}{32.2 \text{ ft/s}^2} = 0.00194 \text{ lb}\cdot\text{s}^2/\text{ft}$$

El módulo de la fuerza centrífuga por causa del desequilibrio del rotor es

$$P_m = ma_n = mr\omega^2 = (0.00194 \text{ lb}\cdot\text{s}^2/\text{ft})(\tfrac{6}{12} \text{ ft})(125.7 \text{ rad/s})^2 = 15.3 \text{ lb}$$

La deformación estática que sería provocada por una carga constante P_m es

$$\frac{P_m}{k} = \frac{15.3 \text{ lb}}{3000 \text{ lb/in}} = 0.00510 \text{ in}$$

Sustituyendo el valor de P_m/k junto con los valores conocidos de ω y p en la ecuación (19.33), obtenemos

$$x_m = \frac{P_m/k}{1 - (\omega/p)^2} = \frac{0.00510 \text{ in}}{1 - (125.7/57.5)^2} = -0.00135 \text{ in}$$

$x_m = 0.00135$ in (fuera de fase) ◄

Nota. Como $\omega > p$, la vibración está 180° fuera de fase con la fuerza centrífuga en virtud del desequilibrio del rotor. Por ejemplo, cuando la masa desequilibrada está directamente abajo del eje de rotación, la posición del motor es $x_m = 0.00135$ in arriba de la posición de equilibrio.

Problemas

19.86 Un cilindro de 4 kg se cuelga de un resorte de constante 324 N/m y sobre él actúa una fuerza vertical periódica de módulo $P = P_m$ sen ωt, donde $P_m = 15$ N. Determínese la amplitud del movimiento del cilindro si *a*) $\omega = 6$ rad/s y *b*) $\omega = 12$ rad/s.

19.87 Un cilindro de masa m se cuelga de un resorte de constante k y sobre él actúa una fuerza vertical periódica de módulo $P = P_m$ sen ωt. Determínese el rango de valores de ω para el cual la amplitud de la vibración excede el doble de la deformación estática ocasionada por una fuerza de módulo constante P_m.

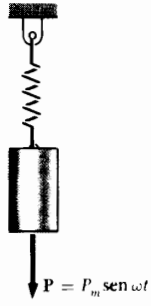


Fig. P19.86 y P19.87

19.88 En el problema 19.87, determínese el intervalo de valores de ω para el cual la amplitud de la vibración es menor que la deformación estática ocasionada por una fuerza constante de módulo P_m.

19.89 Un péndulo simple de longitud l se cuelga de un collarín C, el cual es forzado a moverse horizontalmente de acuerdo con la relación $x_C = \delta_m$ sen ωt. Determínese el intervalo de valores de ω para el cual la amplitud del movimiento de la plomada es menor que δ_m. (Supóngase que δ_m es menor que la longitud l del péndulo.)

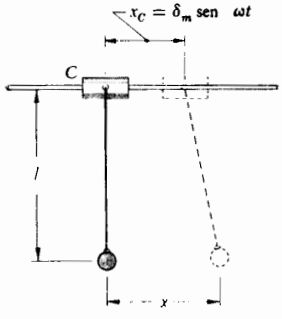


Fig. P19.89

19.90 En el problema 19.89, determínese el intervalo de valores de ω para el cual la amplitud del movimiento de la plomada excede $2\delta_m$.

19.91 Un motor de 100 kg se sostiene mediante una viga ligera y horizontal. El desequilibramiento del rotor es equivalente a una masa de 22 g situada a 180 mm del eje de rotación. Si se sabe que la deformación estática de la viga, debida al peso del motor, es 5.5 mm, determínese *a*) la velocidad (en rpm) a la cual la resonancia ocurrirá y *b*) la amplitud de la vibración estacionaria del motor a una velocidad de 720 rpm.

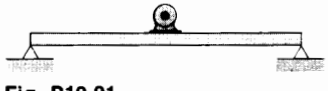


Fig. P19.91

19.92 Resuélvase el problema 19.91 suponiendo que el motor de 100 kg se sostiene mediante un conjunto de resortes que tienen una constante total de 45 kN/m.

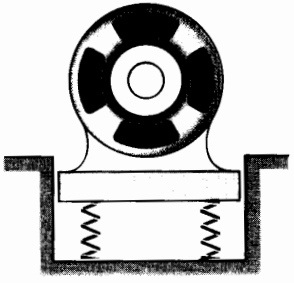


Fig. P19.95

19.93 Conforme un motor sostenido mediante resortes incrementa lentamente su velocidad, de 300 a 400 rpm, se observa que la amplitud de la vibración debida al desequilibrio del rotor decrece continuamente, de 0.075 a 0.040 in. Determínese la velocidad para la cual se producirá la resonancia.

19.94 Considérese el motor soportado por medio de resortes, del problema 19.93 y determínese la velocidad del motor para la cual la amplitud de la vibración es 0.125 in.

19.95 Un motor de masa 18 kg se sostiene mediante 4 resortes, cada uno de constante 40 kN/m. El motor está restringido a moverse verticalmente y se observa que la amplitud de su movimiento es de 1.5 mm a una velocidad de 1200 rpm. Si se sabe que la masa del rotor es 4 kg, determínese la distancia entre el centro de masas del rotor y el eje del árbol.

19.96 En el problema 19.95, determínese la amplitud del movimiento vertical del motor a una velocidad de *a*) 450 rpm, *b*) 1600 rpm y *c*) 900 rpm.

19.97 La barra AB está rígidamente unida al armazón de un motor que gira a una velocidad constante. Después de que un anillo de masa m se coloca sobre el resorte, se observa que vibra con una amplitud de 15 mm. Luego de colocar dos anillos, ambos de masa m, sobre el resorte, se observa que la amplitud es de 18 mm. ¿Qué amplitud de vibración debe esperarse cuando se pongan tres anillos de masa m sobre el resorte? (Obténganse dos respuestas.)

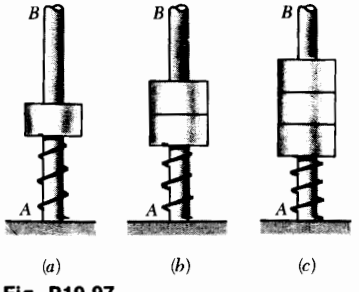


Fig. P19.97

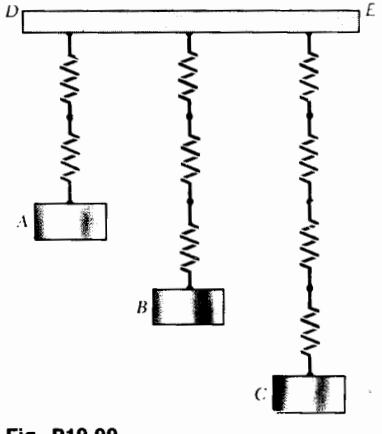


Fig. P19.99

19.98 Resuélvase el problema 19.97, suponiendo que la velocidad del motor se cambia y que el movimiento de un anillo tiene una amplitud de 9 mm y el de dos anillos tiene una amplitud de 3 mm.

19.99 Tres cilindros idénticos, A, B y C, se cuelgan de una barra DE por dos o más resortes idénticos, en la forma indicada en la figura. Se sabe que la barra DE se mueve verticalmente de acuerdo con la relación $y = \delta_m \operatorname{sen} \omega t$. Si las amplitudes de vibración de los cilindros A y B son 3 in y 1.5 in, respectivamente, determínese la amplitud esperada de la vibración del cilindro C. (Obténganse dos respuestas.)

19.100 Resuélvase el problema 19.99 suponiendo que las amplitudes de vibración de los cilindros A y B son 1.6 in y 2.4 in, respectivamente.

19.101 Un motor de velocidad variable está rígidamente unido a la viga *BC*. Cuando la velocidad del motor es menor que 600 rpm o mayor que 1200 rpm, se observa que un objeto pequeño colocado en *A* permanece en contacto con la viga. Para velocidad entre 600 y 1200 rpm, se observa que el objeto "brinca" y que de hecho pierde contacto con la viga. Determínese la velocidad con que se producirá resonancia.

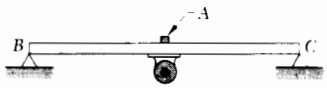


Fig. P19.101

19.102 Un disco de masa m está unido al punto medio del árbol vertical AB, que gira a una velocidad angular constante ω. Si se representa con k la constante del resorte del sistema para un movimiento horizontal del disco y por e la excentricidad del disco respecto al árbol, demuéstrese que la deformación del centro del árbol puede escribirse en la forma

$$r = \frac{e(\omega/p)^2}{1 - (\omega/p)^2}$$

donde $p = \sqrt{k/m}$

19.103 Un disco de masa 25 kg está unido, con una excentricidad $e = 0.2$ mm, al punto medio de un árbol vertical AB que gira con una velocidad angular ω. Si se sabe que una fuerza estática de 180 N deformará el árbol 0.3 mm, determínense *a*) la velocidad angular ω a la cual se producirá resonancia y *b*) la deformación r del árbol cuando $\omega = 1350$ rpm.

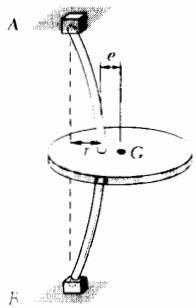


Fig. P19.102 y P19.103

19.104 Se observa que la amplitud del movimiento de la plomada del péndulo que se muestra es 30 mm, cuando la amplitud del movimiento del collarín es 10 mm. Si se sabe que la longitud del péndulo es $l = 800$ mm, determínense los dos posibles valores de la frecuencia del movimiento horizontal del collarín C.

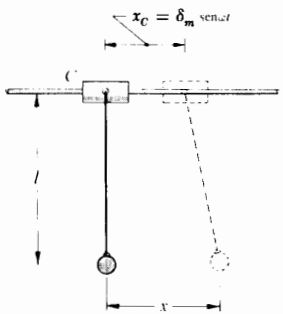


Fig. P19.104 y P19.105

19.105 Se cuelga un péndulo de un collarín C como se indica en la figura. Si se sabe que la amplitud del movimiento de la plomada es de 24 mm para $l = 600$ mm, y 35 mm para $l = 400$ mm, determínense la frecuencia y la amplitud del movimiento horizontal del collarín C.

19.106 Un remolque pequeño, que pesa 600 lb con su carga, se sostiene mediante dos resortes, ambos de constante 100 lb/in. Se tira del remolque sobre un camino cuya superficie se asemeja a una curva senoidal de amplitud $1\frac{1}{2}$ in y 16 ft de separación entre amplitudes máximas positivas sucesivas (es decir, la distancia entre dos crestas sucesivas es 16 ft y la distancia vertical de una cresta a un valle es 3 in). Determínense *a*) la velocidad a la cual se producirá la resonancia y *b*) la amplitud de la vibración del remolque a una velocidad de 40 mi/h.

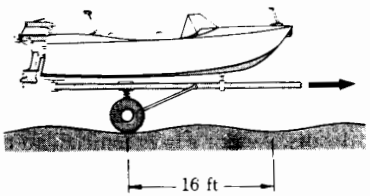


Fig. P19.106

19.107 Si se sabe que la amplitud de la vibración del remolque del problema 19.106 no debe exceder $\frac{3}{4}$ in, determínese la mínima velocidad a la cual se puede tirar del remolque sobre el camino.

VIBRACIONES AMORTIGUADAS

***19.8 Vibraciones Libres Amortiguadas.** Se supuso que los sistemas vibrantes considerados en la primera parte de este capítulo estaban libres de amortiguamiento. En realidad, todas las vibraciones son amortiguadas hasta cierto grado por fuerzas de rozamiento. Estas fuerzas pueden ser causadas por *rozamiento entre dos superficies secas* o *rozamiento de Coulomb*, entre sólidos rígidos por *rozamiento en el seno de un fluido* cuando un sólido rígido se mueve en un fluido, o por *rozamiento interno* entre las moléculas de un sólido que parece elástico.

Un tipo de amortiguamiento de especial interés es el *amortiguamiento viscoso* causado por el rozamiento a velocidades bajas y moderadas. El amortiguamiento viscoso está caracterizado por el hecho de que la fuerza de fricción o rozamiento es *directamente proporcional a la velocidad* del cuerpo en movimiento. Como un ejemplo, consideraremos nuevamente un cuerpo de masa m suspendido de un resorte k y supondremos que el cuerpo está unido al émbolo de un amortiguador (Fig. 19.10). El módulo de la fuerza de fricción ejercida sobre el émbolo por el fluido que lo rodea es igual a $c\dot{x}$ donde la constante c, expresada en N • s/m o lb •s/ft y conocida como *coeficiente de amortiguamiento viscoso*, depende de las propiedades físicas del fluido y de la construcción del amortiguador. La ecuación de movimiento es

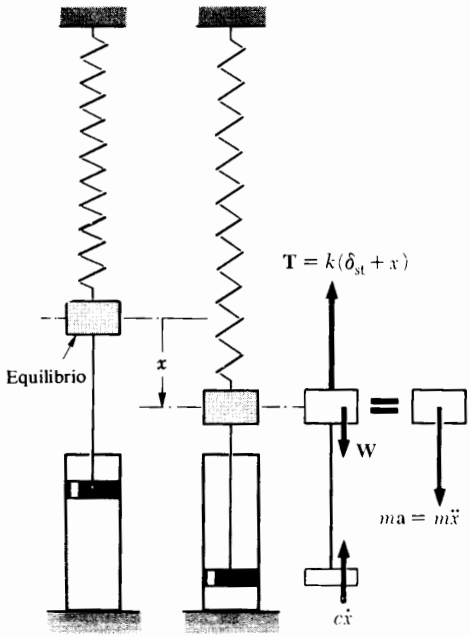


Fig. 19.10

$$+\downarrow \Sigma F = ma: \qquad W - k(\delta_{est} + x) - c\dot{x} = m\ddot{x}$$

Recordando que $W = k\delta_{est}$, escribimos

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \tag{19.37}$$

Sustituyendo $x = e^{\lambda t}$ en (19.37) y dividiendo entre $e^{\lambda t}$ escribimos la *ecuación característica*

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0 \tag{19.38}$$

y obtenemos las raíces

$$\lambda = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \tag{19.39}$$

Definiendo el *coeficiente crítico de amortiguamiento* c_c como el valor de c que hace que el radical en (19.39) sea igual a cero, escribimos

$$\left(\frac{c_c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} = 0 \qquad c_c = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2mp \tag{19.40}$$

donde p es la frecuencia circular del sistema en ausencia de amortiguamiento. Podemos distinguir tres casos diferentes de amortiguamiento dependiendo del valor del coeficiente c.

1. *Sobreamortiguamiento:* $c > c_c$. *Las raíces* λ_1 y λ_2 de la ecuación característica (19.38) son reales y distintas y la solución general de la ecuación diferencial (19.37) es

$$x = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} \tag{19.41}$$

   Esta solución corresponde a un movimiento no vibratorio. Como λ_1 y λ_2 son negativas, x tiende a cero conforme t aumenta indefinidamente. Pero el sistema regresa realmente a su posición de equilibrio después de un tiempo finito.
2. *Amortiguamiento crítico:* $c = c_c$. La ecuación característica tiene una doble raíz $\lambda = -c_c/2m = -p$ y la solución general de (19.37) es

$$x = (A + Bt)e^{-pt} \tag{19.42}$$

   El movimiento obtenido es nuevamente no vibratorio. Los sistemas críticamente amortiguados son de especial interés en aplicaciones en ingeniería ya que regresan a su posición de equilibrio en el tiempo más corto posible sin oscilaciones.
3. *Amortiguamiento subcrítico:* $c < c_c$. Las raíces de (19.38) son complejas y conjugadas y la solución general de (19.37) es de la forma

$$x = e^{-(c/2m)t}(A \operatorname{sen} qt + B \cos qt) \tag{19.43}$$

donde q está definida por la relación

$$q^2 = \frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2$$

Sustituyendo $k/m = p^2$ y recordando (19.40) escribimos

$$q = p\sqrt{1 - \left(\frac{c}{c_c}\right)^2} \tag{19.44}$$

donde la constante c/c_c se conoce como *factor de amortiguamiento.* Una sustitución similar a la utilizada en la sección 19.2 nos permite escribir la solución general de (19.37) en la forma

$$x = x_m e^{-(c/2m)t} \operatorname{sen}(qt + \phi) \tag{19.45}$$

El movimiento definido por (19.45) es vibratorio con amplitud decreciente (Fig. 19.11). Aunque este movimiento en realidad no se repite, el intervalo de tiempo $\tau = 2\pi/q$, correspondiente a dos puntos sucesivos donde la curva (19.45) toca una de las curvas límites mostradas en la figura 19.11, se llama comunmente periodo de la vibración amortiguada. Recordando (19.44) observamos que τ es mayor que el periodo de vibración del sistema correspondiente no amortiguable.

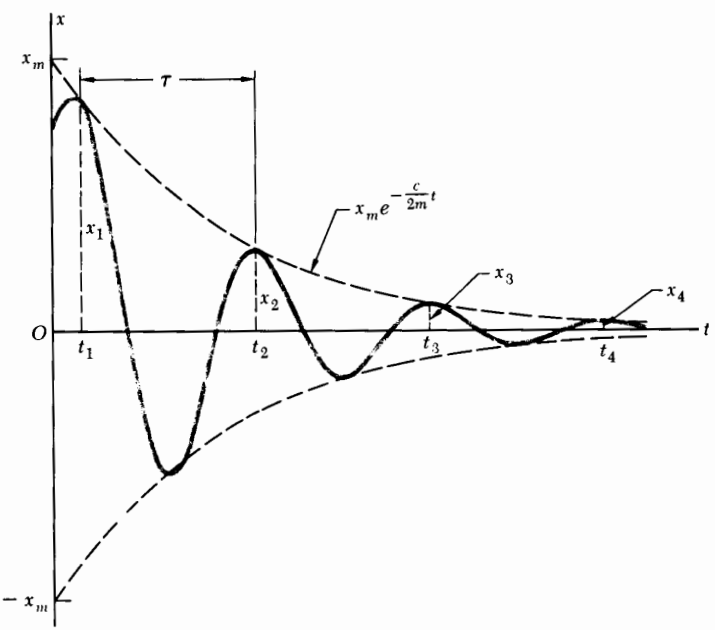


Fig. 19.11

19.9. Vibraciones Forzadas Amortiguadas. Si el sistema considerado en la sección anterior está sujeto a una fuerza periódica **P** de módulo $P = P_m \operatorname{sen} \omega t$, la ecuación de movimiento se transforma en

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P_m \operatorname{sen} \omega t \tag{19.46}$$

La solución general de (19.46) se obtiene sumando una solución particular de (19.46) a la función complementaria o solución general de la ecuación homogénea (19.37). La función complementaria está dada por (19.41), (19.42) o (19.43), dependiendo del tipo de amortiguamiento considerado y representa un movimiento *transitorio* que al final se amortigua.

Nuestro interés en esta sección está centrado en la vibración estacionaria representada por una solución particular (19.46) de la forma

$$x_{\text{part}} = x_m \operatorname{sen} (\omega t - \varphi) \tag{19.47}$$

Sustituyendo x_{part} para x en (19.46), obtenemos

$$-m\omega^2 x_m \operatorname{sen} (\omega t - \varphi) + c\omega x_m \cos (\omega t - \varphi) + kx_m \operatorname{sen} (\omega t - \varphi) = P_m \operatorname{sen} \omega t$$

Haciendo $\omega t - \varphi$ sucesivamente igual a 0 y a $\pi/2$, escribimos

$$c\omega x_m = P_m \operatorname{sen} \varphi \tag{19.48}$$

$$(k - m\omega^2)x_m = P_m \cos \varphi \tag{19.49}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de (19.48) y (19.49) y sumándolos tenemos

$$[(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2]x_m^2 = P_m^2 \tag{19.50}$$

Despejando x_m de (19.50) y dividiendo (19.48) y (19.49) miembro a miembro obtenemos, respectivamente

$$x_m = \frac{P_m}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \qquad \tan \varphi = \frac{c\omega}{k - m\omega^2} \tag{19.51}$$

Recordando de (19.4) que $k/m = p^2$, donde p es la frecuencia circular de la vibración libre no amortiguada y de (19.40) que $2mp = c_c$ donde c_c es el coeficiente de amortiguamiento crítico del sistema, escribimos

$$\frac{x_m}{P_m/k} = \frac{x_m}{\delta_m} = \frac{1}{\sqrt{[1 - (\omega/p)^2]^2 + [2(c/c_c)(\omega/p)]^2}} \tag{19.52}$$

$$\tan \varphi = \frac{2(c/c_c)(\omega/p)}{1 - (\omega/p)^2} \tag{19.53}$$

La fórmula (19.52) expresa el factor de amplificación en términos de la razón de frecuencias ω/p y el factor de amortiguamiento c/c_c. Puede utilizarse para determinar la amplitud de la vibración estacionaria producida por una fuerza aplicada de módulo $P = P_m$ sen ωt o por un movimiento producido por el soporte $\delta = \delta_m$ sen ωt. La fórmula (19.53) define en términos de los mismos parámetros la *diferencia de fase* φ entre la fuerza aplicada o el movimiento producido por el soporte y la vibración estacionaria resultante del sistema amortiguado. El factor de amplificación se ha graficado en función de la razón de frecuencias en la figura 19.12 para distintos valores del factor de amortiguamiento. Observamos que la amplitud de la vibración forzada puede mantenerse pequeña escogiendo un coeficiente de amortiguamiento viscoso grande c o manteniendo la frecuencia natural y la frecuencia forzada bastante separadas.

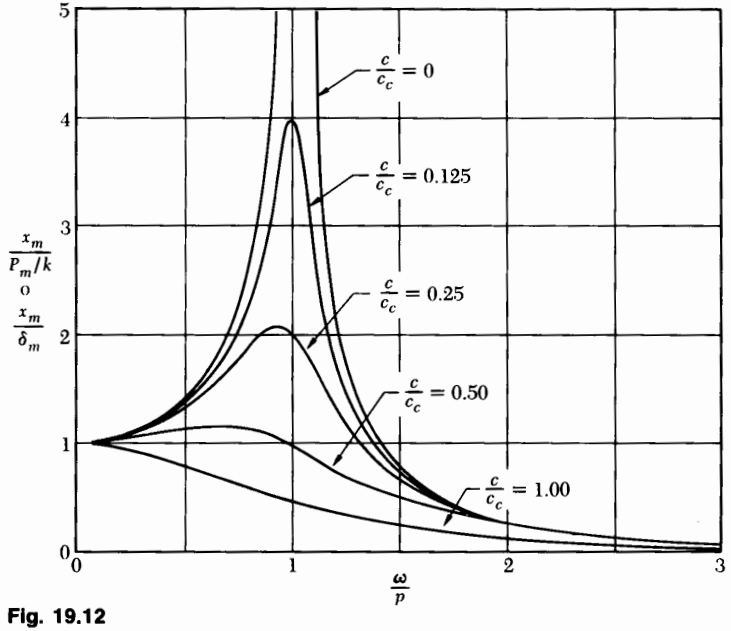


Fig. 19.12

*** 19.10 Analogías eléctricas.** Los circuitos eléctricos oscilantes están caracterizados por ecuaciones diferenciales del mismo tipo que las obtenidas en las secciones anteriores. Su análisis es por lo tanto similar al de un sistema mecánico y los resultados obtenidos para un sistema vibrante determinado pueden extenderse al circuito equivalente. A la inversa cualquier resultado obtenido para un circuito eléctrico podrá también aplicarse al sistema mecánico correspondiente.

Considérese un circuito eléctrico que consiste en una bobina de coeficiente de autoinducción L, una resistencia de valor R y un condensador de capacidad C conectados en serie con una fuente

electromotriz alterna $E = E_m \operatorname{sen} \omega t$ (Fig. 19.13). Se recuerda de la teoría elemental de circuitos† que si i representa la corriente del circuito y q la carga eléctrica en el condensador, la caída en potencial es $L(di/dt)$ a través de la bobina, Ri a través de la resistencia y q/C a través del condensador. Expresando que la suma algebraica de la fuerza electromotriz aplicada y de las caídas de potencial a lo largo del circuito es cero, escribimos

$$E_m \operatorname{sen} \omega t - L\frac{di}{dt} - Ri - \frac{q}{C} = 0 \qquad (19.54)$$

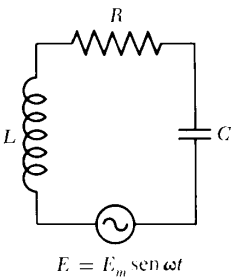


Fig. 19.13

Reordenando los términos y recordando que en cualquier instante la corriente i es igual a la derivada temporal $\dot{q}$ de la carga q, tenemos

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = E_m \operatorname{sen} \omega t \qquad (19.55)$$

Comprobemos que la ecuación (19.55), que define las oscilaciones del circuito eléctrico de la figura 19.13, es del mismo tipo que la ecuación (19.46) que caracteriza las vibraciones forzadas amortiguadas del sistema mecánico de la figura 19.10. Comparando las dos ecuaciones podemos construir una tabla de las expresiones análogas mecánicas y eléctricas.

La Tabla 19.12 puede utilizarse para extender a sus análogos eléctricos los resultados obtenidos en las secciones anteriores para distintos sistemas mecánicos. Por ejemplo, la amplitud i_m de la corriente en el circuito de la figura 19.13 puede obtenerse notando que corresponde al valor máximo v_m de la velocidad en el sistema mecánico análogo. Recordando que $v_m = \omega x_m$,

Tabla 19.2 Características de un sistema mecánico y de su análogo eléctrico

Sistema Mecánico		Circuito Eléctrico	
m	Masa	L	Coeficiente de autoinducción
c	Coeficiente de amortiguamiento viscoso	R	Resistencia
k	Constante del resorte	$1/C$	Inverso de la capacidad
x	Desplazamiento	q	Carga
v	Velocidad	i	Intensidad de la corriente
P	Fuerza aplicada	E	Fuerza electromotriz aplica

† Véase A. E. Fitzgerald, D. E. Higginbotham, and A. Grabel, *Basic Electrical Engineering*, 5a. ed., McGraw-Hill, New York, 1981; o bien, J. W. Nilson, *Electric Circuits*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1983.

sustituyendo x_m de la ecuación (19.51) y cambiando las constantes del sistema mecánico por las expresiones eléctricas correspondientes, tenemos

$$i_m = \frac{\omega E_m}{\sqrt{\left(\frac{1}{C} - L\omega^2\right)^2 + (R\omega)^2}}$$

$$i_m = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \tag{19.56}$$

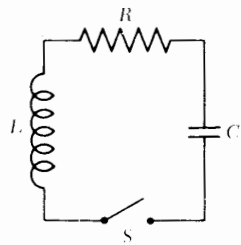


Fig. 19.14

El radicando en la expresión obtenida se conoce como *impedancia* del circuito eléctrico.

La analogía entre los sistemas mecánicos y circuitos eléctricos se cumple tanto para las oscilaciones transitorias como para las estacionarias. Por ejemplo, las oscilaciones del circuito mostrado en la figura 19.14, son análogas a las vibraciones amortiguadas libres del sistema de la figura 19.10. Por lo que respecta a las condiciones iniciales podemos notar que cerrando el interruptor S cuando la carga en el condensador es $q = q_0$ equivale a soltar la masa del sistema mecánico sin velocidad inicial desde la posición $x = x_0$. Debemos observar también que si se introduce una batería, de voltaje constante E, en el circuito eléctrico de la figura 19.14 cerrando el interruptor S, esto equivaldrá a aplicar repentinamente una fuerza de magnitud constante P a la masa del sistema mecánico de la figura 19.10.

El análisis anterior sería de valor cuestionable si su único resultado fuese hacer posible a los estudiantes de mecánica analizar los circuitos eléctricos sin aprender los elementos de la teoría de circuitos. Se espera que este análisis incite a los estudiantes a aplicar las técnicas matemáticas que pueden aprender en cursos de teoría de circuitos posteriores a la solución de problemas de vibraciones mecánicas. Sin embargo, el valor principal del concepto de la analogía eléctrica reside en su aplicación a los *métodos experimentales* para la determinación de las características de un sistema mecánico determinado. Además, un circuito eléctrico se construye mucho más fácilmente que un modelo mecánico y el hecho de que sus características pueden modificarse variando el coeficiente de autoinducción, la resistencia o la capacidad de sus componentes hace el empleo de la analogía eléctrica particularmente conveniente.

Para determinar el análogo eléctrico de un sistema mecánico determinado centraremos nuestra atención en cada masa en movimiento en el sistema y observaremos qué resortes, amortiguadores o fuerzas externas están aplicadas directamente sobre ella. Un circuito equivalente puede construirse emparejando cada una de las unidades mecánicas así definidas; los distintos circuitos obtenidos de esa manera formarán juntos el circuito deseado. Considérese, por ejemplo, el sistema mecánico de la figura 19.15. Observamos que la masa m_1 está accionada por resortes de constantes k_1 y k_2 y por dos amortiguadores caracterizados por los coeficientes de amortiguamiento viscoso c_1 y c_2.

El circuito eléctrico puede estar formado por una bobina de coeficiente de autoinducción L_1 proporcional a m_1, dos condensadores de capacidad C_1 y C_2 inversamente proporcionales a k_1 y k_2, respectivamente, y dos resistencias R_1 y R_2 proporcionales a c_1 y c_2, respectivamente. Como sobre la masa m_2 actúan el resorte k_2 y el amortiguador c_2, así como la fuerza $P = P_m$ sen ωt, el circuito debe incluir también una malla que incluya el condensador C_2, la resistencia R_2, la nueva bobina L_2 y la fuente de fuerza electromotriz $E = E_m$ sen ωt (Fig. 19.16).

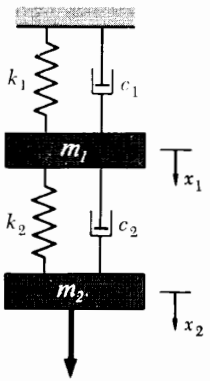


Fig. 19.15

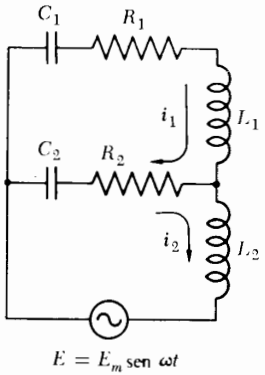


Fig. 19.16

Para comprobar que el sistema mecánico de la figura 19.15 y el circuito eléctrico de la figura 19.16 satisfacen verdaderamente las mismas ecuaciones diferenciales deduciremos primero las ecuaciones de movimiento para m_1 y m_2. Representando por x_1 y x_2 los desplazamientos de m_1 y m_2, respectivamente, desde sus posiciones de equilibrio, observamos que la elongación del resorte k_1 (medida desde la posición de equilibrio) es igual a x_1, mientras que la elongación del resorte k_2 es igual al desplazamiento relativo $x_2 - x_1$ de m_2 con respecto a m_1. Las ecuaciones de movimiento para m_1 y m_2, son, por lo tanto,

$$m_1\ddot{x}_1 + c_1\dot{x}_1 + c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1x_1 + k_2(x_1 - x_2) = 0 \qquad (19.57)$$

$$m_2\ddot{x}_2 + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2(x_2 - x_1) = P_m \operatorname{sen} \omega t \qquad (19.58)$$

Considerando ahora el circuito eléctrico de la figura 19.16, representamos, i_1 e i_2 respectivamente la corriente en la primera y segunda malla, y por q_1 y q_2 las integrales $\int i_1\,dt$ e $\int i_2\,dt$. Notando que la carga en el condensador C_1 es $\dot{q}_1$ mientras que la carga en C_2 es $q_1 - q_2$, expresamos que la suma de las diferencias de potencial en cada malla es cero:

$$L_1\ddot{q}_1 + R_1\dot{q}_1 + R_2(\dot{q}_1 - \dot{q}_2) + \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_1 - q_2}{C_2} = 0 \qquad (19.59)$$

$$L_2\ddot{q}_2 + R_2(\dot{q}_2 - \dot{q}_1) + \frac{q_2 - q_1}{C_2} = E_m \operatorname{sen} \omega t \qquad (19.60)$$

Comprobamos fácilmente que las ecuaciones (19.59) y (19.60) se reducen a (19.57) y (19.58), respectivamente, cuando se realizan las sustituciones indicadas en la Tabla 19.2.

Problemas

19.108 Demuéstrese que, en el caso de sobreamortiguamiento ($c > c_c$), un cuerpo nunca pasa por su posición de equilibrio O *a*) si se suelta sin velocidad inicial desde una posición arbitraria o *b*) si el movimiento se inicia a partir de O con una velocidad inicial arbitraria.

19.109 Demuéstrese que en el caso de sobreamortiguamiento ($c > c_c$) un cuerpo que se suelta desde una posición arbitraria, con una velocidad inicial arbitraria, no puede pasar más de una vez por su posición de equilibrio.

19.110 En el caso de subamortiguamiento los desplazamientos x_1, x_2, x_3 y así sucesivamente, mostrados en la figura 19.11 pueden suponerse iguales a los desplazamientos máximos. Demuéstrese que el cociente entre dos desplazamientos máximos sucesivos x_n y x_{n+1} cualesquiera es una constante y que el logaritmo natural de este cociente, llamado *decremento logarítmico*, es

$$\ln \frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{2\pi(c/c_c)}{\sqrt{1-(c/c_c)^2}}$$

19.111 En la práctica es difícil determinar el decremento logarítmico de un sistema con subamortiguamiento, definido en el problema 19.110 mediante el cociente de dos desplazamientos máximos sucesivos. Demuéstrese que el decremento logarítmico puede expresarse también como $(1/k)\ \ln\ (x_n/x_{n+k})$, donde k es el número de ciclos entre lecturas de los dos desplazamientos máximos.

19.112 En un sistema con subamortiguamiento ($c < c_c$), el periodo de vibración se define comúnmente como el intervalo de tiempo $\tau = 2\pi/q$, correspondiente a dos puntos sucesivos donde la curva de desplazamiento-tiempo toca una de las curvas límites mostradas en la figura 19.11. Demuéstrese que el intervalo de tiempo *a*) entre un desplazamiento máximo positivo y el siguiente desplazamiento máximo negativo es $\frac{1}{2}\tau$, *b*) entre dos desplazamientos sucesivos cero es $\frac{1}{2}\tau$, y *c*) entre un desplazamiento máximo positivo y el siguiente desplazamiento de cero es mayor que $\frac{1}{4}\tau$.

19.113 Los desplazamientos máximos sucesivos del sistema resorte-amortiguador, semejante al mostrado en la figura 19.10, son 64, 48, 36 y 27 mm. Si se sabe que $m = 15$ kg y $k = 1800$ N/m, determínense *a*) el factor de amortiguamiento c/c_c y *b*) el valor del coeficiente c de amortiguamiento viscoso. (*Sugerencia*. Véanse los problemas 19.110 y 19.111.)

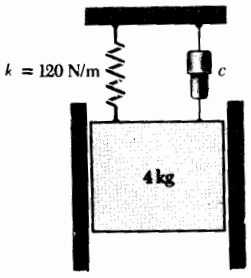


Fig. P19.114

19.114 El bloque que aquí se muestra se baja 30 mm de su posición de equilibrio y se suelta. Si después de 10 ciclos el desplazamiento máximo del bloque es 18 mm, determínense *a*) el factor de amortiguamiento c/c_c y *b*) el valor del coeficiente de amortiguamiento viscoso. (*Sugerencia*. Véanse los problemas 19.110 y 19.111.)

19.115 El cañón de una pieza de artillería pesa 1200 lb y es devuelto a su posición de tiro después del retroceso por un recuperador de constante $k = 8000$ lb/ft. Determínense *a*) el valor del coeficiente de amortiguamiento del recuperador que hace que el cañón regrese a la posición de disparo, en el tiempo más corto posible, sin oscilación y *b*) el tiempo necesario para que el cañón se mueva desde su posición de retroceso máxima a la mitad del camino de retorno a su posición de disparo.

19.116 Suponiendo que el cañón del arma del problema 19.115 se modifique con un aumento de peso de 300 lb, determínense *a*) la constante k que debe utilizarse para el recuperador de modo que el cañón permanezca con amortiguamiento crítico y *b*) el tiempo necesario para que el cañón modificado se mueva desde su máxima posición de retroceso a la mitad del camino de regreso a la posición de tiro.

19.117 En el caso de la vibración forzada de un sistema con factor de amortiguamiento c/c_c, determínese la relación de frecuencias ω/p para la cual la amplitud de la vibración es máxima.

19.118 Demuéstrese que, para valores pequeños del factor de amortiguamiento c/c_c, *a*) la amplitud máxima de una vibración forzada ocurre cuando $\omega \simeq p$ y *b*) el valor correspondiente del factor de amplificación es aproximadamente $\frac{1}{2}(c_c/c)$.

19.119 Un motor de 35 lb está sostenido directamente por una viga ligera horizontal, cuya deformación estática es de 0.06 in, debida al peso del motor. Si se sabe que el desequilibrio del rotor es equivalente a un peso de 1 oz situado 5 in del eje del rotación, determínese la amplitud de la vibración del motor a una velocidad de 800 rpm, suponiendo *a*) que no hay amortiguamiento y *b*) que el factor de amortiguamiento $c/c_c = 0.065$.

19.120 Un motor que pesa 50 lb está sostenido por cuatro muelles helicoidales, cada uno con una constante de 1000 lb/in. El desequilibrio del rotor es equivalente al peso de 1 oz situada a 5 in del eje de rotación. Si se sabe que el motor está restringido a moverse verticalmente, determínese la amplitud de la vibración de estado estable del motor, a una velocidad de 1800 rpm, suponiendo *a*) que no hay amortiguamiento presente y *b*) que el factor de amortiguamiento c/c_c es igual a 0.125.

19.121 Resuélvase el problema 19.95 suponiendo que un amortiguador con un coeficiente de amortiguamiento $c = 350$ N · s/m se ha conectado al motor y al piso.

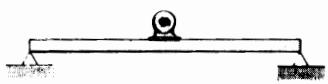


FIg. P19.122

19.122 Un motor de 50 kg se sostiene directamente mediante una viga ligera horizontal cuya deformación estática es de 6 mm, debida al peso del motor. El desequilibrio del rotor es equivalente a una masa de 100 g situada a 75 mm del eje de rotación. Si se sabe que la amplitud de la vibración del motor es de 0.8 mm a una velocidad de 400 rpm, determínense *a*) el factor de amortiguamiento c/c_c y *b*) el coeficiente de amortiguamiento c.

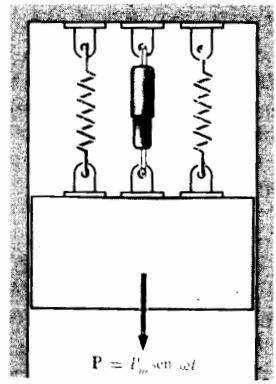


Fig. P19.123

19.123 Un elemento de maquinaria, que tiene una masa de 500 kg, se sostiene mediante dos resortes, cada uno de constante 48 kN/m. Una fuerza periódica de módulo máximo igual a 150 N se aplica al elemento con una frecuencia de 2.4 Hz. Si se sabe que el coeficiente de amortiguamiento es de 1600 N · s/m, determínese la amplitud de la vibración de estado estable del elemento.

19.124 En el problema 19.123 determínese el valor necesario del coeficiente de amortiguamiento para que la amplitud del régimen estacionario de la vibración, del elemento sea 4 mm.

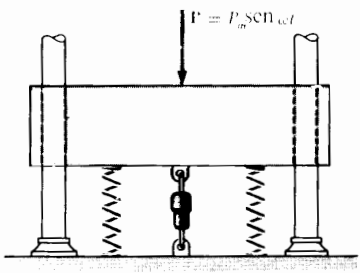


Fig. P19.125

19.125 Una plataforma de 200 lb de peso, sostenida mediante dos resortes ambos de constante $k = 250$ lb/in, está sujeta a una fuerza periódica de magnitud máxima de 125 lb. Si se sabe que el coeficiente de amortiguamiento es de 9 lb · s/in, determínense *a*) la frecuencia natural en rpm de la plataforma si no existe amortiguamiento, *b*) la frecuencia en rpm de la fuerza periódica que corresponde al valor máximo del factor de amplificación suponiendo amortiguamiento y *c*) la amplitud del movimiento de la plataforma para cada una de las frecuencias encontradas en las partes *a* y *b*.

19.126 Resuélvase el problema 19.125, suponiendo que el coeficiente de amortiguamiento se aumenta a 12 lb · s/in.

*19.127 La suspensión de un automóvil se asemeja al sistema simplificado de resorte y amortiguador que se indica. *a*) Escríbase la ecuación diferencial que define al movimiento absoluto de la masa *m*, cuando el sistema se mueve a una velocidad *v* sobre un camino de sección transversal senoidal, como la indicada en la figura. *b*) Dedúzcase una expresión para la amplitud del movimiento absoluto de *m*.

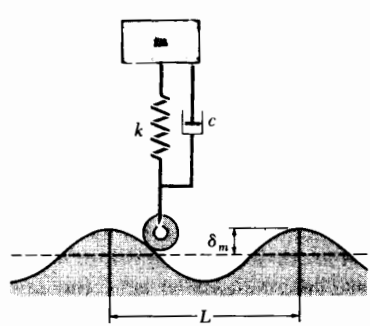


Fig. P19.127

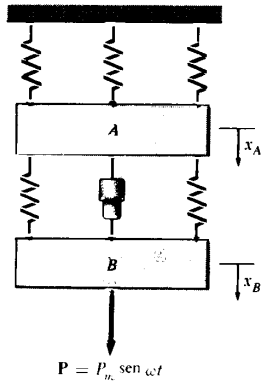


Fig. P19.128

*19.128 Dos bloques A y B de masa m se cuelgan como se indica en la figura mediante cinco resortes de la misma constante k y se conectan mediante un amortiguador de coeficiente de amortiguamiento c. El bloque B está sujeto a una fuerza de módulo $P = P_m \operatorname{sen} \omega t$. Escríbanse las ecuaciones diferenciales que definen los desplazamientos x_A y x_B de los dos bloques desde sus posiciones de equilibrio.

19.129 Determínese el intervalo de valores de la resistencia R para el cual se producirán oscilaciones en el circuito indicado en la figura, cuando se cierra el interruptor S.

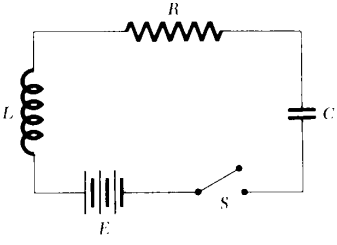


Fig. P19.129

19.130 Considérese el circuito del problema 19.129 cuando se elimina el condensador C. Si se cierra el interruptor S en el tiempo $t = 0$, determínense *a*) el valor final de la intensidad de la corriente en el circuito y *b*) el tiempo t al cual la intensidad de la corriente habrá alcanzado $(1 - 1/e)$ veces su valor final. El valor deseado de t se llama *constante de tiempo* del circuito.

19.131 y 19.132 Dibújese el circuito eléctrico análogo al sistema mecánico que se indica (*Sugerencia*. Dibújense los circuitos correspondientes a los cuerpos libres m y A.)

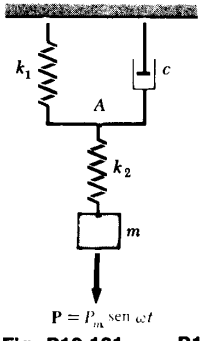


Fig. P19.131 y P19.133

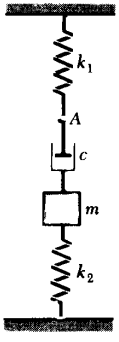


Fig. P19.132 y P19.134

19.133 y 19.134 Escríbanse las ecuaciones diferenciales que definen *a*) los desplazamientos de la masa m y el punto A y *b*) las intensidades de las corrientes en los circuitos eléctricos análogos correspondientes.

Repaso y Resumen

Este capítulo se dedicó al estudio de *vibraciones mecánicas*, es decir, al análisis de movimiento de partículas y sólidos rígidos que oscilan respecto a una posición de equilibrio. En la primera parte del capítulo (secciones 19.2 a 19.7) se consideraron *vibraciones sin amortiguamiento*, mientras que la segunda parte se dedicó a las *vibraciones amortiguadas* (secciones 19.8 a 19.10).

Vibraciones libres de una partícula

En la sección 19.2 se consideraron las *vibraciones libres de una partícula*, es decir, el movimiento de una partícula P sujeta a una fuerza restauradora proporcional al desplazamiento de la partícula (una fuerza tal como la que ejerce un resorte). Si el desplazamiento x de la partícula P se mide desde su posición de equilibrio O (Fig. 19.17), la resultante $\mathbf{F}$ de las fuerzas que actúan sobre P (incluyendo su peso) tiene un módulo kx y se dirige hacia O. Al aplicar la segunda ley de Newton $F = ma$ y recordando que $a = \ddot{x}$, se escribió la ecuación diferencial

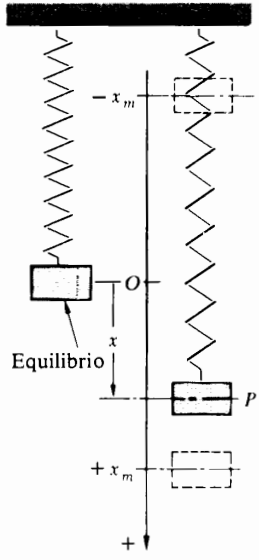


Fig. 19.17

$$m\ddot{x} + kx = 0 \tag{19.3}$$

o, estableciendo $p^2 = k/m$,

$$\ddot{x} + p^2x = 0 \tag{19.5}$$

El movimiento definido por esta ecuación se conoce como *movimiento armónico simple*.

La solución de la ecuación (19.5) que representa el desplazamiento, de la partícula P, se expresó así:

$$x = x_m \operatorname{sen}(pt + \phi) \tag{19.10}$$

donde x_m = amplitud de la vibración
$p = \sqrt{k/m}$ = frecuencia circular
ϕ = ángulo de fase.

El *periodo de la vibración* (es decir, el tiempo necesario para completar un ciclo) y su *frecuencia* (es decir, el número de ciclos por segundo) se expresaron como

$$\text{Periodo} = \tau = \frac{2\pi}{p} \tag{19.13}$$

$$\text{Frecuencia} = f = \frac{1}{\tau} = \frac{p}{2\pi} \tag{19.14}$$

La velocidad y la aceleración de la partícula se obtuvieron al derivar la ecuación 19.10 y se encontró que sus máximos valores eran

$$v_m = x_m p \qquad a_m = x_m p^2 \tag{19.15}$$

Puesto que todos los parámetros anteriores dependen directamente de la frecuencia circular p y, por tanto, de la razón k/m, en cualquier problema es indispensable calcular el valor de la constante k; esto se

puede hacer al determinar la relación entre la fuerza restauradora y el desplazamiento correspondiente de la partícula (problema resuelto 19.1).

También se demostró que el movimiento oscilatorio de la partícula P se podrá representar con la proyección, sobre x, del movimiento de un punto Q que describía un círculo auxiliar de radio x_m, con una velocidad angular constante p (Fig. 19.18).

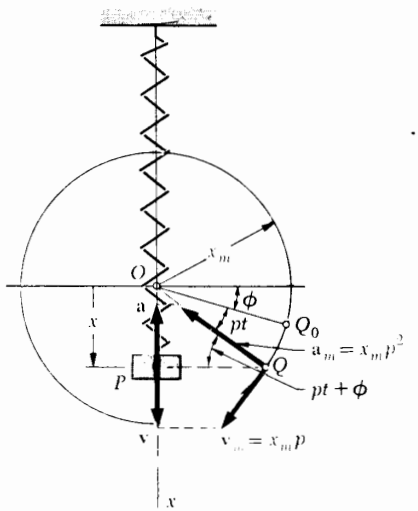


Fig. 19.18

Los valores instantáneos de la velocidad y la aceleración de P se pueden obtener entonces al proyectar sobre el eje x los vectores $\mathbf{v}_m$ y $\mathbf{a}_m$ que representan, respectivamente, la velocidad y la aceleración de Q

Péndulo simple

Aunque el movimiento de un *péndulo simple* no es en realidad movimiento armónico simple, las fórmulas proporcionadas anteriormente se pueden usar con $p^2 = (g/l)$ para calcular el periodo y la frecuencia de *oscilaciones pequeñas* de un péndulo simple (sección 19.3). Las oscilaciones de gran amplitud de un péndulo simple se explicaron en la sección 19.4.

Vibraciones libres de un cuerpo rígido

Las *vibraciones libres de un sólido rígido* pueden ser analizadas escogiendo una variable apropiada, como la distancia x o el ángulo θ, al definir la posición del sólido, dibujando un diagrama que expresa la equivalencia de las fuerzas externas y de las efectivas, y al escribir las ecuaciones relacionando la variable seleccionada con su segunda derivada (sección 19.5). Si la ecuación obtenida es de la forma

$$\ddot{x} + p^2 x = 0 \qquad \text{o} \qquad \ddot{\theta} + p^2 \theta = 0 \tag{19.21}$$

la vibración considerada es un movimiento armónico simple y su periodo y frecuencia se pueden obtener *al identificar* p y sustituyéndola en la (19.13) y (19.14) (problemas resueltos 19.2 y 19.3).

Empleo del principio de conservación de la energía

El *principio de conservación de la energía* se puede utilizar como un método alternativo para la determinación del periodo y la frecuencia del movimiento de una partícula o sólido rígido (sección 19.6). Escogiendo nuevamente una variable apropiada, como θ, para

definir la posición del sistema, se conserva la energía total del sistema y se expresa que $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$, entre la posición de desplazamiento máximo ($\theta_1 = \theta_m$) y la posición de velocidad máxima ($\theta_2 = \dot{\theta}_m$). Si el movimiento considerado es armónico simple, los dos miembros de la ecuación obtenida consisten en expresiones cuadráticas homogéneas en θ_m y $\dot{\theta}_m$, respectivamente.[†] Sustituyendo $\dot{\theta}_m = \theta_m p$ en esta ecuación se puede eliminar el factor $\theta^2{}_m$ y resolver para la frecuencia circular p (problema resuelto 19.4).

Vibraciones forzadas

En la sección 19.7 se estudiaron las *vibraciones forzadas* de un sistema mecánico. Estas vibraciones ocurren cuando el sistema está sujeto a una fuerza periódica (Fig. 19.19) o cuando está conectado elásticamente a un soporte que tiene un movimiento alternante (Fig. 19.20). En el primer caso el movimiento del sistema se define por la ecuación diferencial

$$m\ddot{x} + kx = P_m \operatorname{sen} \omega t \tag{19.30}$$

y en el segundo caso por la ecuación diferencial

$$m\ddot{x} + kx = k\delta_m \operatorname{sen} \omega t \tag{19.31}$$

La solución general de estas ecuaciones se obtiene al sumar una solución particular de la forma

$$x_{\text{part}} = x_m \operatorname{sen} \omega t \tag{19.32}$$

a la solución general de la ecuación homogénea correspondiente. La solución particular (19.32) representa una *vibración de estado estable* del sistema, mientras que la solución de la ecuación homogénea

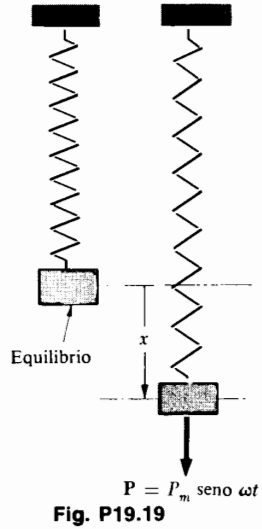


Fig. P19.19

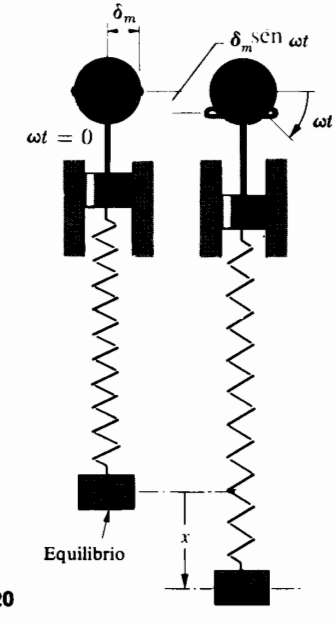


Fig. 19.20

[†] Si el movimiento considerado solamente puede ser representado por un movimiento armónico simple, como en las oscilaciones pequeñas de un cuerpo bajo la acción de la gravedad, la energía potencial se puede sustituir por una expresión cuadrática en θ_m.

representa una *vibración libre transitoria* que en general puede despreciarse.

Dividiendo la amplitud x_m de la vibración de estado estable entre P_m/k en el caso de una fuerza periódica, o entre δ_m en el caso de un soporte oscilatorio, se definió el *factor de amplificación* y se encontró que

$$\text{Factor magnífico} = \frac{x_m}{P_m/k} = \frac{x_m}{\delta_m} = \frac{1}{1 - (\omega/p)^2} \tag{19.36}$$

De acuerdo con la ecuación (19.36) la amplitud x_m de la vibración forzada *se vuelve infinita cuando* $\omega = p$, es decir, *cuando la frecuencia forzada es igual a la frecuencia natural del sistema*. Se dice entonces que el sistema entra en resonancia (problema resuelto 19.5). En realidad, la amplitud de la vibración permanece finita debido a fuerzas de amortiguamiento.

Vibraciones libres amortiguadas

En la última parte del capítulo se consideraron *las vibraciones amortiguadas* de un sistema mecánico. Primero se analizaron las *vibraciones libres amortiguadas* de un sistema con *amortiguamiento viscoso* (sección 19.8). Se encontró que el movimiento de un sistema se definía mediante la ecuación diferencial

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \tag{19.37}$$

donde c es una constante llamada *coeficiente de amortiguamiento viscoso*. Definiendo el *coeficiente de amortiguamiento crítico* como c_c

$$c_c = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2mp \tag{19.40}$$

donde p es la frecuencia circular del sistema en ausencia de amortiguamiento, se distinguieron tres casos de amortiguamiento, que son 1) *sobreamortiguamiento*, cuando $c > c_c$; 2) *amortiguamiento crítico*, *cuando* $c = c_c$ y 3) *amortiguamiento subcrítico*, cuando $c < c_c$. En los dos primeros casos el sistema tiende a retornar a su posición de equilibrio cuando es perturbado, sin oscilaciones. En el tercer caso el movimiento es vibratorio con una amplitud en disminución.

Vibraciones amortiguadas forzadas

En la sección 19.9 se consideraron las *vibraciones amortiguadas forzadas* de un sistema mecánico. Estas vibraciones suceden cuando un sistema con amortiguamiento viscoso está sujeto a una fuerza periódica de módulo $P = P_m \operatorname{sen} \omega t$ o cuando está conectado elásticamente a un soporte con un movimiento alternante $\delta = \delta_m \operatorname{sen} \omega t$. En el primer caso el movimiento del sistema se definió con la ecuación diferencial

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P_m \operatorname{sen} \omega t \tag{19.46}$$

y en el segundo caso mediante una ecuación similar a la que se obtuvo al reemplazar P_m por $k\delta_m$ en la ecuación (19.46).

La *vibración en régimen estacionario* del sistema se representa con una solución particular de la ecuación (19.46) de la forma

$$x_{\text{part}} = x_m \operatorname{sen} (\omega t - \varphi) \tag{19.47}$$

al dividir la amplitud x_m de la vibración de estado estable entre P_m/k, en el caso de una fuerza periódica, o entre δ_m, en el caso de un soporte oscilante, se obtuvo la siguiente expresión para el factor de amplificación:

$$\frac{x_m}{P_m/k} = \frac{x_m}{\delta_m} = \frac{1}{\sqrt{[1 - (\omega/p)^2]^2 + [2(c/c_c)(\omega/p)]^2}} \tag{19.52}$$

donde $p = \sqrt{k/m}$ = frecuencia natural circular del sistema sin amortiguamiento
$c_c = 2mp$ = coeficiente de amortiguamiento crítico
c/c_c = factor de amortiguamiento

También se descubrió que el *desfase* ϕ entre la fuerza ejercida por el movimiento del soporte y la vibración resultante en régimen estacionario del sistema amortiguado se definió por la relación

$$\tan \varphi = \frac{2(c/c_c)(\omega/p)}{1 - (\omega/p)^2} \tag{19.53}$$

Analogía eléctrica

El capítulo terminó con un comentario de la *analogía eléctrica* (sección 19.10) en el cual se demostró que las vibraciones de los sistemas mecánicos y las oscilaciones de circuitos eléctricos se definían mediante las mismas ecuaciones diferenciales. Por tanto, se pueden utilizar circuitos eléctricos análogos de sistemas mecánicos para estudiar o predecir el comportamiento de esos últimos.

Problemas de Repaso

19.135 Los discos A y B tienen una masa de 5 kg y 14 kg, respectivamente, y se une un bloque pequeño C de masa 1.5 kg al borde del disco B. Suponiendo que no haya deslizamiento entre los discos, determínese el periodo de oscilaciones pequeñas del sistema.

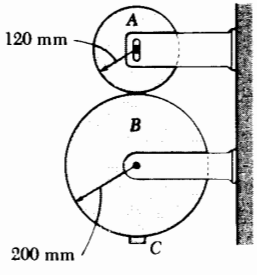


Fig. P19.135

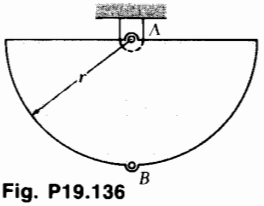


Fig. P19.136

19.136 Se cuelga un disco semicircular uniforme de radio r de una articulación. Determínese el periodo de oscilaciones pequeñas del disco *a)* si cuelga desde el punto A como se muestra y *b)* si cuelga del punto B.

19.137 Una varilla de longitud l se une mediante un pasador A a un collarín de masa despreciable. Determínese el periodo de oscilaciones pequeñas de la varilla, suponiendo que el coeficiente de rozamiento entre en el collarín y la barra horizontal *a*) sea suficiente para evitar cualquier movimiento del collarín y *b*) es cero.

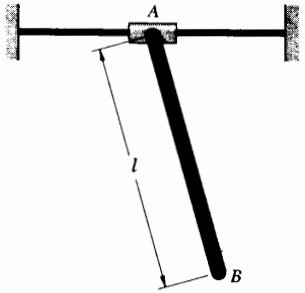


Fig. P19.137

19.138 Un electroimán de 150 kg está en reposo y sostiene 100 kg de chatarra de acero cuando se interrumpe la corriente y cae el acero. Si se sabe que el cable y la grúa de soporte que lo sostienen tienen una rigidez total equivalente a un resorte de constante 200 kN/m, determínense *a*) la frecuencia, la amplitud y la velocidad máxima del movimiento resultante, *b*) la mínima tensión que tendrá el cable durante el movimiento y *c*) la velocidad 0.03 s después de quitar la corriente.

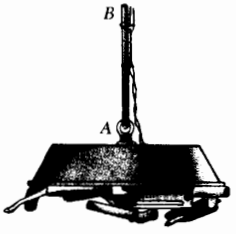


Fig. P19.138

19.139 Un bloque de 6 lb está montado sobre resortes en la armazón de un motor que gira a 1800 rpm. El rotor está desequilibrado y la amplitud del movimiento resultante del bloque se mide y se descubre que es de 0.35 in. Si se sabe que la constante del soporte de resortes es $k = 450$ lb/in, determínese la amplitud del movimiento del motor.

19.140 Una barra de masa m y longitud L descansa sobre dos poleas A y B, que giran en las direcciones que se indican. Representando por μ_k el coeficiente de rozamiento dinámico entre las barras y las poleas, determínese la frecuencia de la vibración si se le imprime a la barra un pequeño desplazamiento a la derecha y se suelta.

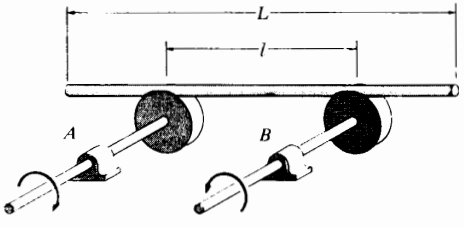


Fig. P19.140

19.141 Se coloca una partícula sin velocidad inicial sobre un plano, sin rozamiento, tangente a la superficie de la Tierra. *a*) Demuéstrese que la partícula ejecutará teóricamente un movimiento armónico simple con un periodo de oscilación igual al de un péndulo simple de longitud igual al radio de la Tierra. *b*) Calcúlese el periodo teórico de oscilación y demuéstrese que es igual al tiempo periódico de un satélite de la Tierra que describa una órbita circular de baja altitud. [*Sugerencia*. Véase ecuación (12.44).]

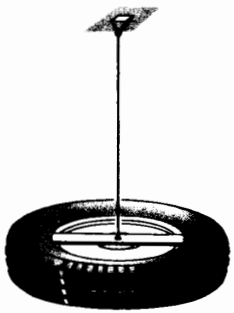


Fig. P19.142

19.142 Una rueda de un automóvil, con un peso total de 47 lb, se une a una placa de montaje, de peso despreciable, que cuelga de un alambre de acero. Se sabe que la constante de resorte torsional del cable es $k = 0.40$ lb · in/rad. La rueda se gira 90° respecto a la vertical y luego se suelta. Si se sabe que el período de oscilación observado es 30 s, determínese el momento de inercia central de masa y el radio de giro central del montaje.

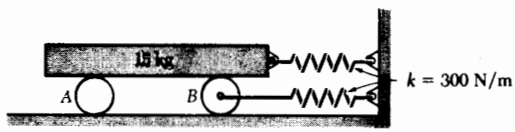


Fig. P19.143

19.143 Una viga de 15 kg se sostiene, como aquí se indica, mediante dos discos uniformes ambos con masa de 8 kg y radio de 80 mm. Si se sabe que los discos ruedan sin deslizar, determínese el periodo de vibración del sistema si a la viga se le proporciona un pequeño desplazamiento hacia la derecha y se suelta.

19.144 Resuélvase el problema 19.143 suponiendo que el resorte unido a la viga se elimina.

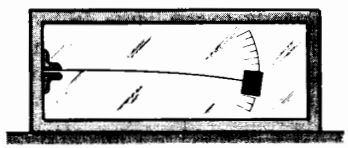


Fig. P19.145

19.145 Cierto tipo de vibrometro, utilizado para medir la amplitud de las vibraciones, consta esencialmente de una caja que contiene una varilla a la cual se une una masa m; se sabe que la frecuencia natural del sistema masa-varilla es de 5 Hz. Cuando la caja se une rígidamente al armazón de un motor que gira a 600 rpm se observa que la masa vibra con una amplitud de 0.06 in relativa a la caja. Determínese la amplitud del movimiento vertical del motor.

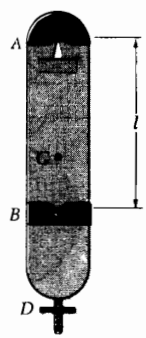


Fig. P19.146

19.146 Si se utilizan péndulos simples o compuestos para determinar experimentalmente la aceleración g de la gravedad, no faltarán dificultades. En el péndulo simple la cuerda no tiene verdaderamente peso despreciable, mientras que en el péndulo compuesto el lugar exacto del centro de masa es difícil de establecer. En el caso del péndulo compuesto se puede eliminar la dificultad al usar un péndulo reversible o de kater. Se colocan dos posibles apoyos A y B, de manera que obviamente no estén a la misma distancia del centro de masa G y se mide la distancia l con gran precisión. La posición del contrapeso D se ajusta entonces de manera que el periodo de oscilación τ sea el mismo cuando se utilice cualquiera de los dos apoyos. Demuéstrese que el periodo τ obtenido es igual al de un verdadero péndulo simple de longitud l y que $g = (4\pi^2 l/\tau^2)$.

Los siguientes problemas están diseñados para resolverse con ayuda de una computadora.

19.C1 Al desarrollar el integrando en la ecuación (19.19), en una serie de potencias pares del sen ϕ e integrarlo, se puede demostrar que el periodo de un péndulo simple de longitud l se puede obtener por la expresión

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 c^2 + \left(\frac{1 \times 3}{2 \times 4}\right)^2 c^4 + \left(\frac{1 \times 3 \times 5}{2 \times 4 \times 6}\right)^2 c^6 + \cdots\right]$$

donde $c = \text{sen } \frac{1}{2}\theta_m$ y θ_m (es la amplitud de las oscilaciones. Elabórese un programa de computadora y utilícese para calcular la sumatoria de la serie (utilizando sucesivamente 1, 2, 4, 8 y 16 términos) para valores de la amplitud θ_m de 30 a 120°, en intervalos de 30°. Exprésense los resultados con 5 dígitos significativos.

19.C2 Una barra uniforme AB de 3 kg está unida, como se indica en la figura, a un resorte de constante $k = 900$ N/m. Se coloca un pequeño bloque C de masa m_C sobre la barra en el extremo A, la cual entonces se mueve hacia abajo a lo largo de una pequeña distancia δ_0 y se suelta. Elabórese un programa de computadora y utilícese para calcular el periodo de vibración y el máximo valor posible de δ_0 para el cual el bloque C permanecerá todo el tiempo en contacto con la barra para valores de m_C de 0 a 2 kg, en intervalos de 0.5 kg, cuando *a*) $b = 0.5$ m, *b*) $b = 0.75$ m y *c*) $b = 1$ m.

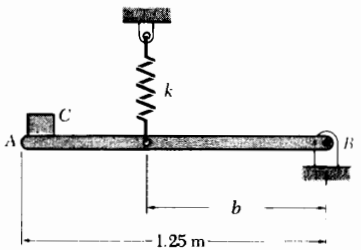


Fig. P19.C2

19.C3 Elabórese un programa de computadora para el motor del problema resuelto 19.5 y utilícese en la determinación de amplitud de la vibración y la máxima aceleración de la base del motor, para valores de la velocidad del motor de 300 a 1200 rpm en intervalos de 50 rpm.

19.C4 Resuélvase el problema 19.C3 suponiendo que se ha conectado a la base del motor y al piso un amortiguador que tiene un coeficiente de amortiguamiento $c = 75$ lb · s/ft. También determínese el desfase entre el movimiento de la base del motor y el del rotor para los distintos valores de las velocidades consideradas.

APENDICE A

Algunas definiciones y propiedades útiles del álgebra vectorial

Las siguientes definiciones y propiedades del álgebra vectorial se analizarán completamente en los capítulos 2 y 3 de *Mecánica vectorial para ingenieros: estática*. Se resumen aquí para comodidad del lector, con referencia a las secciones adecuadas del volumen de *Estática*. Las ecuaciones y los números de ilustración son los empleados en la presentación inicial.

A.1. Suma de vectores (Secc. 2.3 y 2.4). Los vectores se definen como *expresiones matemáticas que poseen módulo, dirección y sentido que se suman de acuerdo con la regla del paralelogramo* de manera que la suma de los vectores **P** y **Q** se obtiene uniendo los dos vectores al mismo punto A y construyendo un paralelogramo utilizando **P** y **Q** como los dos lados del paralelogramo (Fig. 2.6). La diagonal que pasa por A representa la suma de los vectores **P** y **Q** y esta suma se representa por $\mathbf{P} + \mathbf{Q}$. La suma vectorial es *asociativa* y *conmutativa*.

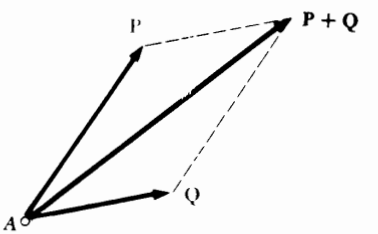


Fig. 2.6

El *Vector opuesto* de un vector **P** dado se define como un vector que tiene el mismo módulo P y la misma dirección pero sentido contrario al de **P** (Fig. 2.5); el opuesto del vector **P** se representa por $-\mathbf{P}$. Claramente tenemos

$$\mathbf{P} + (-\mathbf{P}) = 0$$

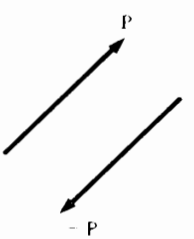


Fig. 2.5

A.2 Producto de un escalar y un vector (Secc. 2.4). El producto $k\mathbf{P}$ de un escalar k y un vector $\mathbf{P}$ se define como un vector que tiene la misma dirección que $\mathbf{P}$ (si k es positiva) o la misma dirección pero sentido contrario al de $\mathbf{P}$ (si k es negativa), y un módulo igual al producto del módulo P y el valor absoluto de k (Fig. 2.13).

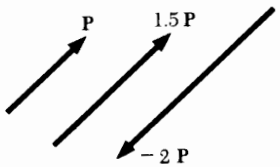


Fig. 2.13

A.3. Vectores unitarios. Descomposición de un vector en sus componentes rectangulares (Secc. 2.7 y 2.12). Los vectores **i, j** y **k**, llamados *vectores unitarios*, están definidos como vectores de módulo 1, dirigidos a lo largo de los ejes x, y y z (Fig. 2.32), respectivamente.

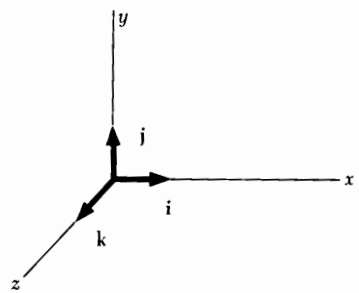


Fig. 2.32

Representando por F_x, F_y y F_z las componentes escalares del vector $\mathbf{F}$, tenemos (Fig. 2.33)

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k} \tag{2.20}$$

En el caso particular de un vector unitario $\boldsymbol{\lambda}$ dirigido a lo largo de una línea que forma ángulo θ_x, θ_y y θ_z con los ejes coordenados, tenemos

$$\boldsymbol{\lambda} = \cos\theta_x\mathbf{i} + \cos\theta_y\mathbf{j} + \cos\theta_z\mathbf{k} \tag{2.22}$$

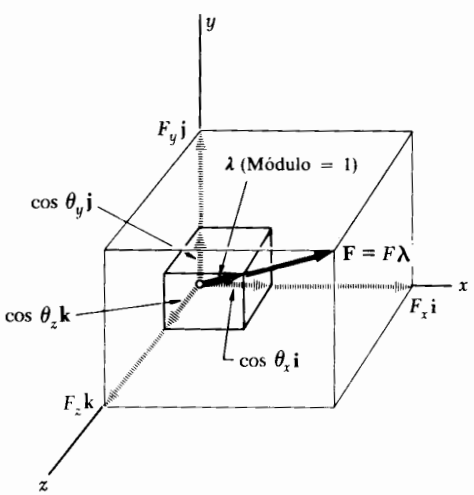


Fig. 2.33

A.4. Producto vectorial de dos vectores (Secc. 3.4 y 3.5). El producto vectorial de dos vectores **P** y **Q** se define como el vector

$$\mathbf{V} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q}$$

que satisface las condiciones siguientes:

1. La línea de acción de **V** es perpendicular al plano que contiene a **P** y **Q** (Fig. 3.6).
2. El módulo de **V** es el producto de los módulos de **P** y **Q** y del seno del ángulo θ formado por **P** y **Q** (la medida del cual será siempre 180° o menor); tenemos entonces

$$V = PQ \operatorname{sen} \theta \tag{3.1}$$

3. El sentido de **V** es tal que una persona colocada en la punta de **V** observará una rotación θ en el sentido opuesto al movimiento de las manecillas del reloj, la cual lleva al vector **P** a alinearse con el vector **Q**. Nótese que si **P** y **Q** no tienen un punto común de aplicación deben volver a trazarse primero con un punto común. Los tres vectores **P**, **Q** y **V** —tomados en ese orden— forman un *triedro directo*.

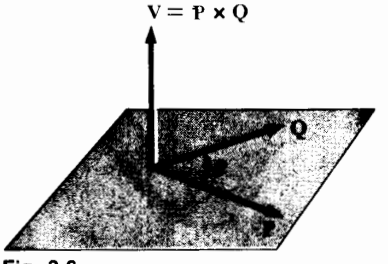


Fig. 3.6

El producto vectorial es *distributivo* pero *no conmutativo*. Tenemos

$$\mathbf{Q} \times \mathbf{P} = -(\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \tag{3.4}$$

Productos vectoriales de vectores unitarios. De la definición del producto vectorial de dos vectores se sigue que

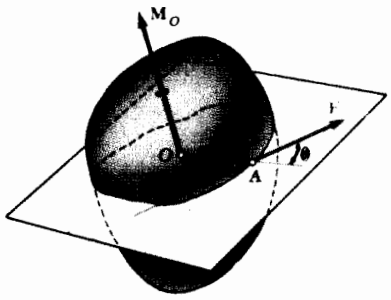
$$\begin{array}{lll} \mathbf{i} \times \mathbf{i} = 0 & \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k} & \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \\ \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} & \mathbf{j} \times \mathbf{j} = 0 & \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i} \\ \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j} & \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} & \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0 \end{array} \tag{3.7}$$

Componentes rectangulares del producto vectorial. Descomponiendo los vectores **P** y **Q** en sus componentes rectangulares obtenemos las siguientes expresiones para las componentes de su producto vectorial **V**:

$$\begin{aligned} V_x &= P_y Q_z - P_z Q_y \\ V_y &= P_z Q_x - P_x Q_z \\ V_z &= P_x Q_y - P_y Q_x \end{aligned} \tag{3.9}$$

En forma de determinante tenemos

$$\mathbf{V} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \tag{3.10}$$



a)



b)

Fig. 3.12

A.5. Momento de una fuerza respecto a un punto (Secc. 3.6 y 3.8). El momento de una fuerza **F** (o en forma más general, de un vector **F**) con respecto a un punto O se define como el producto vectorial

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \tag{3.11}$$

donde **r** representa el *vector de posición* del punto de aplicación A de **F** (Fig. 3.12*a*).

De acuerdo con la definición del producto vectorial de dos vectores dada en la sección A.4, el momento $\mathbf{M}_O$ debe ser perpendicular al plano que contiene a O y a la fuerza **F**. Su módulo es igual a

$$M_O = rF \operatorname{sen} \theta = Fd \tag{3.12}$$

donde d es la distancia perpendicular de O a la línea de acción **F** y su sentido está definido por el sentido de rotación que traería al vector **r** en línea con el vector **F**; esta rotación debe verse en sentido *contrario al movimiento de las manecillas del reloj* por un observador localizado en la punta de $\mathbf{M}_O$. Otra forma de definir el sentido de $\mathbf{M}_O$ es utilizando la *regla de la mano derecha:* cerrando la mano derecha y manteniéndola de manera que los dedos se mueven en el sentido de la rotación que **F** impartirá al sólido rígido con respecto a un eje fijo dirigido a lo largo de la línea de acción de $\mathbf{M}_O$; el dedo pulgar indicará el sentido del momento $\mathbf{M}_O$ (Fig. 3.12*b*).

Componentes rectangulares del momento de una fuerza. Representando por x, y y z las coordenadas del punto de aplicación A de **F**, obtenemos las siguientes expresiones para las componentes del momento $\mathbf{M}_O$ de **F**

$$\begin{aligned} M_x &= yF_z - zF_y \\ M_y &= zF_x - xF_z \\ M_z &= xF_y - yF_x \end{aligned} \tag{3.18}$$

En forma de determinante tenemos

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \tag{3.19}$$

Para calcular el momento $\mathbf{M}_B$ con respecto a un punto arbitrario B de una fuerza **F** aplicada en A debemos utilizar el vector $\mathbf{r}_{AB} = \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B$ trazado de B a A en lugar del vector **r**. Escribimos

$$\mathbf{M}_B = \mathbf{r}_{A/B} \times \mathbf{F} = (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F} \tag{3.20}$$

o utilizando la forma de determinante

$$\mathbf{M}_B = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_{A/B} & y_{A/B} & z_{A/B} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \tag{3.21}$$

donde $x_{A/B}$, $y_{A/B}$, $z_{A/B}$ son las componentes del vector $\mathbf{r}_{A/B}$:

$$x_{A/B} = x_A - x_B \qquad y_{A/B} = y_A - y_B \qquad z_{A/B} = z_A - z_B$$

A.6. Producto escalar de dos vectores (Secc. 3.9). El producto escalar de dos vectores **P** y **Q** está definido como el producto de los módulos de **P** y **Q** y del coseno del ángulo θ formado por **P** y **Q** (Fig. 3.19). El producto escalar de **P** y **Q** se representa por $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$. Escribimos

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = PQ \cos\theta \tag{3.24}$$

El producto escalar es *conmutativo* y *distributivo.*

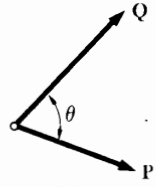


Fig. 3.19

Productos escalares de vectores unitarios. De la definición de producto escalar de dos vectores se sigue que

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} &= 1 \qquad \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1 \qquad \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1 \\ \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} &= 0 \qquad \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0 \qquad \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0 \end{aligned} \tag{3.29}$$

Producto escalar expresado en términos de componentes rectangulares. Descomponiendo los vectores **P** y **Q** en componentes rectangulares obtenemos

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z \tag{3.30}$$

Ángulo formado por dos vectores. De (3.24) y (3.29) se sigue que

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}}{PQ} = \frac{P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z}{PQ} \tag{3.32}$$

Proyección de un vector sobre un eje dado. La proyección de un vector **P** sobre el eje *OL* definida por el vector unitario $\boldsymbol{\lambda}$ (Fig. 3.23) es

$$P_{OL} = OA = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\lambda} \tag{3.36}$$

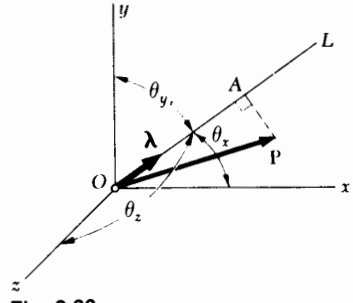


Fig. 3.23

A.7. Producto mixto de tres vectores (Secc. 3.10). El producto mixto de tres vectores **S**, **P** y **Q** se define como la expresión escalar

$$\mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \tag{3.38}$$

obtenida formando el producto escalar **S** con el producto vectorial de **P** y **Q**. Los triples productos mixtos son invariantes bajo *permutaciones circulares,* pero cambian de signo bajo cualquier otra permutación:

$$\begin{aligned} &\mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) = \mathbf{P} \cdot (\mathbf{Q} \times \mathbf{S}) = \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{S} \times \mathbf{P}) \\ &= -\mathbf{S} \cdot (\mathbf{Q} \times \mathbf{P}) = -\mathbf{P} \cdot (\mathbf{S} \times \mathbf{Q}) = -\mathbf{Q} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{S}) \end{aligned} \tag{3.39}$$

Producto mixto expresado en términos de componentes rectangulares. El producto mixto de **S**, **P** y **Q** puede expresarse en forma de determinante

$$\mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) = \begin{vmatrix} S_x & S_y & S_z \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \tag{3.41}$$

El producto mixto $\mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q})$ mide el volumen del paralelepípedo que tiene por lados los vectores **S**, **P** y **Q** (Fig. 3.25).

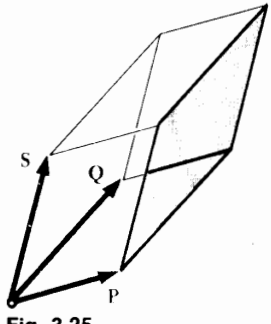


Fig. 3.25

A.8 Momento de una fuerza con respecto a un eje dado (Secc. 3.11). El momento M_{OL} de una fuerza **F** (o en forma más general, de un vector **F**) con respecto a un eje *OL* está definido como la proyección *OC* sobre el eje *OL* del momento $\mathbf{M}_O$ de **F** con respecto *O* (Fig. 3.27). Representando por λ el vector unitario a lo largo de *OL*, tenemos

$$M_{OL} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{M}_O = \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \tag{3.42}$$

o, en forma de determinante,

$$M_{OL} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \tag{3.43}$$

donde $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ = cosenos directores del eje *OL*
x, y, z = coordenadas del punto de aplicación de **F**
F_x, F_y, F_z = componentes de la fuerza **F**

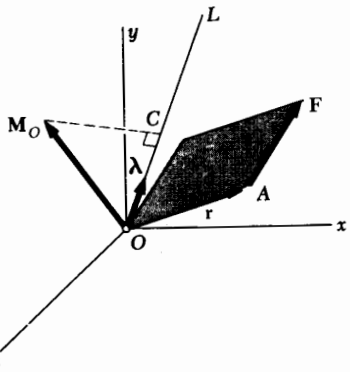


Fig. 3.27

Los momentos de la fuerza **F** con respecto a los tres ejes coordenados están dados por las expresiones (3.18) obtenidas anteriormente para las componentes rectangulares del momento $\mathbf{M}_O$ de **F** con respecto a *O:*

$$\begin{aligned} M_x &= yF_z - zF_y \\ M_y &= zF_x - xF_z \\ M_z &= xF_y - yF_x \end{aligned} \tag{3.18}$$

En forma más general, el momento de una fuerza **F** aplicado en *A* con respecto a un eje que no pasa por el origen se obtiene escogiendo un punto arbitrario *B* sobre el eje (Fig. 3.29) y determinando la proyección sobre el eje *BL* del momento $\mathbf{M}_B$ de **F** con respecto a *B*. Escribimos

$$M_{BL} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{M}_B = \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r}_{A/B} \times \mathbf{F}) \tag{3.45}$$

donde $\mathbf{r}_{A/B} = \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B$ representa el vector trazado de *B* a *A*. Expresando M_{BL} en la forma de un determinante, tenemos

$$M_{BL} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x_{A/B} & y_{A/B} & z_{A/B} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \tag{3.46}$$

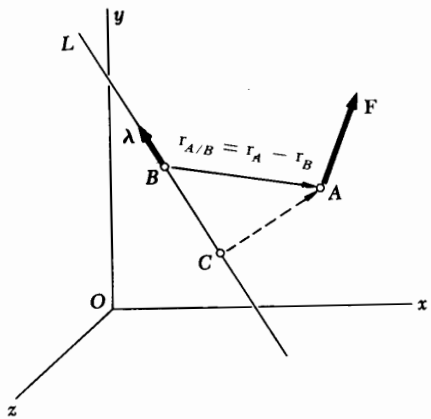


Fig. 3.29

donde $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ = cosenos directores del eje *BL*

$$x_{A/B} = x_A - x_B,\ y_{A/B} = y_A - y_B,\ z_{A/B} = z_A - z_B$$

F_x, F_y, F_z = componentes de la fuerza **F**

Debe notarse que el resultado obtenido es independiente de la elección del punto *B* sobre el eje dado; el mismo resultado se obtendría si se escogiera el punto *C* en vez del punto *B*.

APÉNDICE **B**

Momentos de inercia de masas

MOMENTOS DE INERCIA DE MASAS

9.11. Momento de inercia de masas Consideremos una masa pequeña Δm sobre una barra de masa despreciable que puede girar libremente respecto a un eje AA' (Fig. 9.20*a*). Al aplicar un momento al sistema, la masa y la barra, inicialmente en reposo, empezará a rotar respecto a AA'. Los detalles de este movimiento serán estudiados posteriormente en dinámica. Por el momento, solamente deseamos indicar que el tiempo necesario para que el sistema alcance una velocidad de rotación es proporcional a la masa Δm y al cuadrado de la distancia r. Por lo tanto, el producto $r^2\,\Delta m$ es una medida de la *inercia* del sistema, es decir, de la resistencia que el sistema opone cuando tratamos de ponerlo en movimiento. Por esta razón, al producto $r^2\,\Delta m$ se le llama *momento de inercia* de la masa Δm respecto al eje AA'.

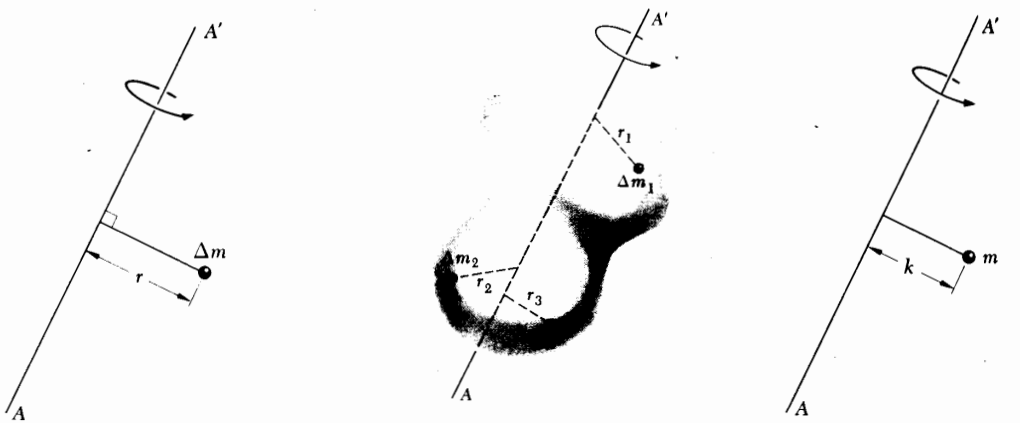


Fig. 9.20

Consideremos ahora un cuerpo de masa m que gira respecto al eje AA' (Fig. 9.20*b*). Si dividimos al cuerpo en elementos de masa Δm_1, Δm_2, etc., encontramos que la resistencia que el cuerpo opone se mide por la suma $r_1^2\,\Delta m_1 + r_2^2\,\Delta m_2 + \ldots$ Por lo tanto, la suma define el momento de inercia del cuerpo respecto al eje AA'. Si incrementamos el número de elementos, encontramos que en el límite el momento de inercia es igual a la integral.

$$I = \int r^2\,dm \tag{9.28}$$

El *radio de giro* k del cuerpo respecto al eje AA' se define por la relación

$$I = k^2 m \qquad \text{o} \qquad k = \sqrt{\frac{I}{m}} \tag{9.29}$$

El radio de giro k representa la distancia a la que se pondría toda la masa del cuerpo, de manera que su momento de inercia fuera del mismo (Fig. 9.20*c*). Si la masa m conserva su forma original (Fig. 9.20*b*) o se concentra como se muestra en la figura 9.20*c*, su forma de reaccionar a las rotaciones respecto al eje AA' es la misma. Ya sea que man-

tenga su forma original (Fig. 9.20*b*) o que se concentre como indica la figura 9.20*c*, la masa *m* responderá de la misma manera a una rotación, o *giro*, sobre AA'.

Si se utilizan unidades del SI, el radio de giro k se expresa en metros y la masa m en kilogramos. Por tanto, el momento de inercia de una masa se expresará en kg•m^2. Si se emplean unidades del sistema inglés el radio de giro se expresa en pies y la masa en slugs, es decir, en lb•s^2/ft. El momento de inercia de una masa se expresará entonces en lb•ft•s^2.†

El momento de inercia de un cuerpo respecto a un eje coordenado se puede expresar fácilmente en términos de las coordenadas x, y, z del elemento de masa dm (Fig. 9.21). Notando, por ejemplo, que el cuadrado

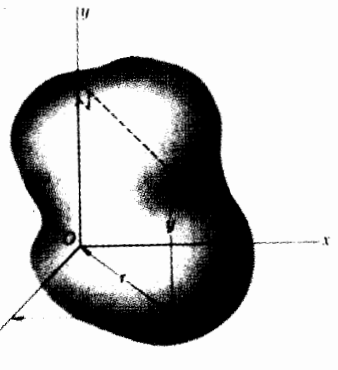


Fig. 9.21

de la distancia r desde el elemento dm al eje y es $z^2 + x^2$, expresamos el momento de inercia del cuerpo respecto al eje y como

$$I_y = \int r^2\, dm = \int (z^2 + x^2)\, dm$$

Pueden obtenerse expresiones similares para los momentos de inercia respecto a los ejes x y z. Escribimos



(9.30)

† Debe tenerse en cuenta, al convertir el momento de inercia de una masa de unidades del sistema inglés en unidades del SI, que la libra base unitaria utilizada en la unidad derivada lb•ft•s^2 es una unidad de fuerza (*no* de masa) y por lo tanto, deberá convertirse en newtons. Tenemos

$$1\ \text{lb}\cdot\text{ft}\cdot\text{s}^2 = (4.45\ \text{N})(0.3048\ \text{m})(1\ \text{s})^2 = 1.356\ \text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^2$$

o bien, puesto que N = kg•m/s^2,

$$1\ \text{lb}\cdot\text{ft}\cdot\text{s}^2 = 1.356\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

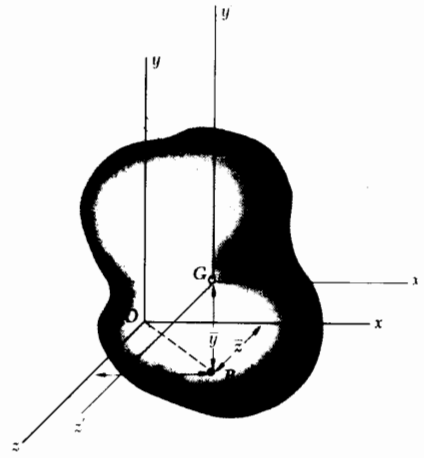


Fig. 9.22

9.12. Teorema de Steiner. Consideremos un cuerpo de masa m. Sea $Oxyz$ un sistema de coordenadas rectangulares con origen en un punto arbitrario O, y $Gx'y'z'$ un sistema paralelo de *ejes centrales*, es decir, un sistema con origen en el centro de gravedad G del cuerpo† y ejes x', y' y z' paralelos, respectivamente, a los ejes x, y y z (Fig. 9.22). Denotando con $\bar{x}$, $\bar{y}$ y $\bar{z}$ las coordenadas de G respecto a $Oxyz$, escribimos las siguientes relaciones entre las coordenadas x, y, z del elemento dm respecto al sistema $Oxyz$ y sus coordenadas x', y', z' respecto a los ejes centrales $Gx'y'z'$:

$$x = x' + \bar{x} \qquad y = y' + \bar{y} \qquad z = z' + \bar{z} \tag{9.31}$$

Refiriéndonos a las ecuaciones (9.30), podemos expresar el momento de inercia del cuerpo respecto al eje x como sigue:

$$\begin{aligned} I_x &= \int (y^2 + z^2)\, dm = \int [(y' + \bar{y})^2 + (z' + \bar{z})^2]\, dm \\ &= \int (y'^2 + z'^2)\, dm + 2\bar{y} \int y'\, dm + 2\bar{z} \int z'\, dm + (\bar{y}^2 + \bar{z}^2) \int dm \end{aligned}$$

La primera integral en la expresión representa el momento de inercia $\bar{I}_{x'}$ del cuerpo con respecto al eje central x'; la segunda y la tercera representan los momentos de primer orden del cuerpo respecto a los planos $z'x'$ y $x'y'$, respectivamente; pero como ambos planos contienen a G, las dos integrales son cero y la última integral es la masa total del cuerpo. Por lo tanto, tenemos

$$I_x = \bar{I}_{x'} + m(\bar{y}^2 + \bar{z}^2) \tag{9.32}$$

y análogamente,

$$I_y = \bar{I}_{y'} + m(\bar{z}^2 + \bar{x}^2) \qquad I_z = \bar{I}_{z'} + m(\bar{x}^2 + \bar{y}^2) \tag{9.32'}$$

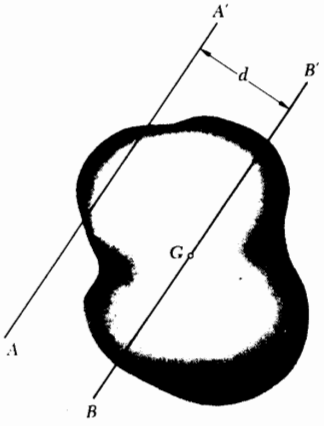


Fig. 9.23

Podemos verificar a partir de la figura 9.22 que la suma $\bar{z}^2 + \bar{x}^2$ representa el cuadrado de la distancia OB entre los ejes y y y'. En forma análoga, $\bar{y}^2 + \bar{z}^2$ y $x^2 + \bar{y}^2$ representan los cuadrados de las distancias entre los ejes x y x' y z y z', respectivamente. Denotando por d a la distancia entre un eje arbitrario AA' y un eje paralelo central BB' (Fig. 9.23), podemos escribir la siguiente relación general entre el momento de inercia I de un cuerpo respecto a AA' y su momento de inercia $\bar{I}$ respecto a BB':

$$I = \bar{I} + md^2 \tag{9.33}$$

Si expresamos los momentos de inercia en términos de sus correspondientes radios de giro, podemos escribir

$$k^2 = \bar{k}^2 + d^2 \tag{9.34}$$

donde k y $\bar{k}$ representan los radios de giro respecto a AA' y BB', respectivamente.

† Nótese que el adjetivo central sirve para definir un eje que pasa por el centro de gravedad G del cuerpo, coincida o no dicho centro con el centro de gravedad del volumen del cuerpo.

9.13. Momentos de inercia de placas delgadas. Consideremos una placa delgada de espesor uniforme t hecha de un material homogéneo de densidad ρ (densidad = masa por unidad de volumen). El momento de inercia de la placa respecto a un eje *AA' contenido en el plano de la placa* (Fig. 9.24*a*), es

$$I_{AA',\text{ masa}} = \int r^2\, dm$$

como $dm = \rho t\, dA$, tenemos

$$I_{AA',\text{ masa}} = \rho t \int r^2\, dA$$

Pero r es la distancia del elemento de área dA al eje AA'; por lo tanto

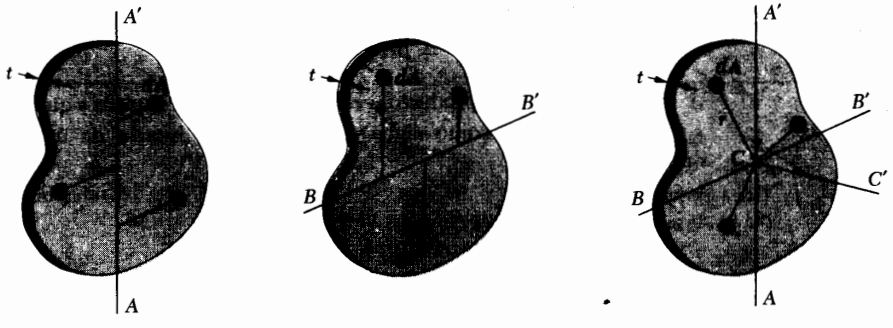


Fig. 9.24

la integral es igual al momento de inercia del área de la placa respecto al eje AA'. Tenemos

$$I_{AA',\text{ masa}} = \rho t I_{AA',\text{ área}} \tag{9.35}$$

Análogamente, respecto a un eje BB' perpendicular a AA' tenemos (Fig. 9.24*b*)

$$I_{BB',\text{ masa}} = \rho t I_{BB',\text{ área}} \tag{9.36}$$

Considerando el eje CC' *perpendicular* a la placa y que pasa por el punto C de intersección de AA' y BB' (Fig. 9.24*c*), tenemos

$$I_{CC',\text{ masa}} = \rho t J_{C,\text{ área}} \tag{9.37}$$

donde J_C es el momento polar de inercia del área de la placa respecto al punto C.

Al recordar la relación $J_C = I_{AA'} + I_{BB'}$ que existe entre los momentos polar de inercia y rectangulares de un área, tenemos la siguiente relación entre los momentos de inercia de una placa delgada:

$$I_{CC'} = I_{AA'} + I_{BB'} \tag{9.38}$$

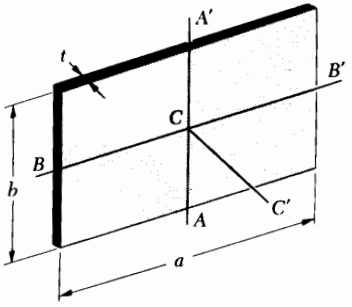


Fig. 9.25

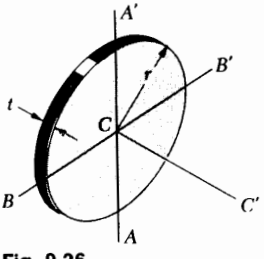
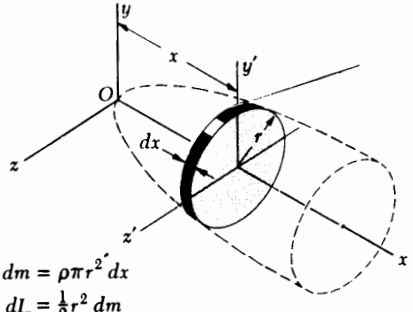


Fig. 9.26



$dm = \rho\pi r^2 dx$

$dI_x = \frac{1}{2}r^2\, dm$

$dI_y = dI_{y'} + x^2\, dm = (\frac{1}{4}r^2 + x^2)\, dm$

$dI_z = dI_{z'} + x^2\, dm = (\frac{1}{4}r^2 + x^2)\, dm$

Fig. 9.27 Determinación del momento de inercia de un cuerpo de revolución.

Placa rectangular. En el caso de una placa rectangular de lados a y b (Fig. 9.25), obtenemos el siguiente momento de inercia respecto a los ejes que pasan por el centro de gravedad de la placa:

$$I_{AA',\text{masa}} = \rho t I_{AA',\text{área}} = \rho t(\tfrac{1}{12}a^3 b)$$
$$I_{BB',\text{masa}} = \rho t I_{BB',\text{área}} = \rho t(\tfrac{1}{12}ab^3)$$

Observando que el producto ρabt es la masa m de la placa, escribimos los momentos de inercia de una placa rectangular delgada como sigue:

$$I_{AA'} = \tfrac{1}{12}ma^2 \qquad I_{BB'} = \tfrac{1}{12}mb^2 \tag{9.39}$$
$$I_{CC'} = I_{AA'} + I_{BB'} = \tfrac{1}{12}m(a^2 + b^2) \tag{9.40}$$

Placa circular. En el caso de una placa circular o disco de radio r (Fig. 9.26), tenemos

$$I_{AA',\text{masa}} = \rho t I_{AA',\text{área}} = \rho t(\tfrac{1}{4}\pi r^4)$$

Al observar que el producto $\rho\pi r^2 t$ es la masa m de la placa y que $I_{AA} = I_{BB}$, escribimos como sigue el momento de inercia de una placa circular:

$$I_{AA'} = I_{BB'} = \tfrac{1}{4}mr^2 \tag{9.41}$$
$$I_{CC'} = I_{AA'} + I_{BB'} = \tfrac{1}{2}mr^2 \tag{9.42}$$

9.14. Determinación por integración del momento de inercia de un cuerpo tridimensional. El momento de inercia de un cuerpo tridimensional se obtiene calculando la integral $I = \int r^2\, dm$. Si el cuerpo es de material homogéneo de densidad ρ, tenemos $dm = \rho\, dV$, y escribimos $I = \rho \int r^2\, dV$. Esta integral depende sólo de la forma del cuerpo. Para obtener el momento de inercia de un cuerpo tridimensional es necesario calcular una integral triple o al menos una integral doble.

Sin embargo, si el cuerpo tiene dos planos de simetría, es posible obtener su momento de inercia mediante una sola integración escogiendo como elemento de masa dm la masa de una placa delgada perpendicular a los planos de simetría. Por ejemplo, en el caso de cuerpos de revolución, el elemento de masa debe ser un disco delgado (Fig. 9.27). Al aplicar la fórmula (9.42), el momento de inercia del disco respecto al eje de revolución puede expresarse como se indica en la figura 9.27. Su momento de inercia respecto a los otros dos ejes coordenados puede obtenerse usando la fórmula (9.41) y el teorema de Steiner. La integración de las expresiones obtenidas nos llevará al momento de inercia del cuerpo de revolución.

9.15. Momentos de inercia de cuerpos compuestos. En la figura 9.28 se muestran los momentos de inercia de algunas formas comunes. El momento de inercia respecto a un eje de un cuerpo formado por varias de estas formas simples puede obtenerse calculando el momento de inercia de cada parte respecto al eje dado y sumándolos. Debemos notar, como lo hicimos en el caso de las áreas, que el radio de giro de un cuerpo compuesto *no* puede obtenerse sumando los radios de giro de las partes componentes.

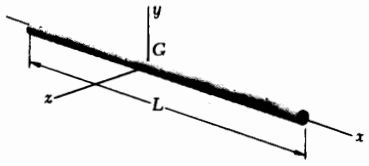
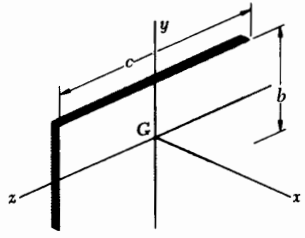
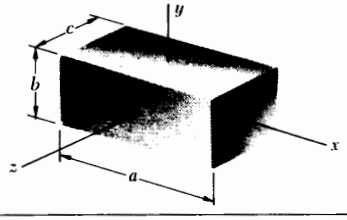
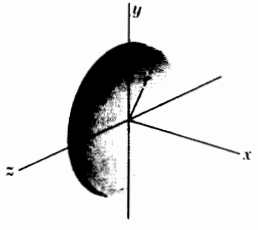
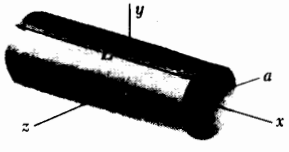
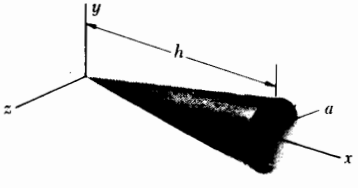
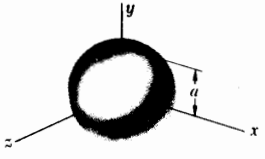
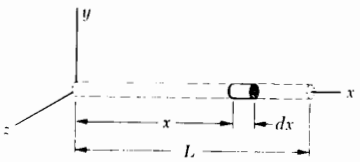
Barra delgada		$I_y = I_z = \frac{1}{12}mL^2$
Placa rectangular delgada		$I_x = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2)$ $I_y = \frac{1}{12}mc^2$ $I_z = \frac{1}{12}mb^2$
Prisma rectangular		$I_x = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2)$ $I_y = \frac{1}{12}m(c^2 + a^2)$ $I_z = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$
Disco delgado		$I_x = \frac{1}{2}mr^2$ $I_y = I_z = \frac{1}{4}mr^2$
Cilindro circular		$I_x = \frac{1}{2}ma^2$ $I_y = I_z = \frac{1}{12}m(3a^2 + L^2)$
Cono circular		$I_x = \frac{3}{10}ma^2$ $I_y = I_z = \frac{3}{5}m(\frac{1}{4}a^2 + h^2)$
Esfera		$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5}ma^2$

Fig. 9.28 Momentos de in
cia de las masas de form
geométricas usuales.



PROBLEMA RESUELTO 9.9

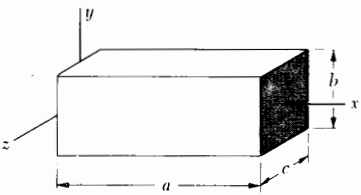
Determínese el momento de inercia de una barra delgada de longitud L y masa m respecto a un eje perpendicular a la barra y que pasa por uno de sus extremos.



Solución. Si escogemos el elemento de masa diferencial que muestra, tenemos

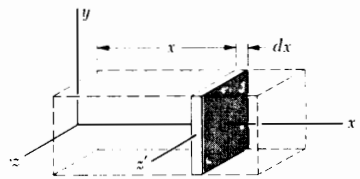
$$dm = \frac{m}{L}\,dx$$

$$I_y = \int x^2\,dm = \int_0^L x^2 \frac{m}{L}\,dx = \left[\frac{m}{L}\frac{x^3}{3}\right]_0^L \qquad I_y = \tfrac{1}{3}mL^2 \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESUELTO 9.10

Determínese el momento de inercia del prisma rectangular homogéneo, que aquí se observa, respecto al eje z.



Solución. Escogemos como elemento de masa diferencial la placa delgada que se muestra, para la cual

$$dm = \rho bc\,dx$$

Encontramos en la sección 9.13 que el momento de inercia de este elemento de masa respecto al eje z' es

$$dI_{z'} = \tfrac{1}{12}b^2\,dm$$

Aplicando el teorema de Steiner, encontramos el momento de inercia de la masa del elemento de volumen con respecto al eje z.

$$dI_z = dI_{z'} + x^2\,dm = \tfrac{1}{12}b^2\,dm + x^2\,dm = (\tfrac{1}{12}b^2 + x^2)\,\rho bc\,dx$$

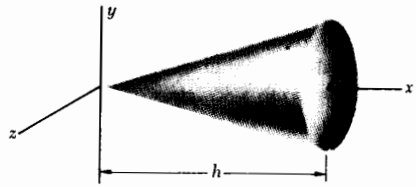
Integrando desde $x = 0$ hasta $x = a$, obtenemos

$$I_z = \int dI_z = \int_0^a (\tfrac{1}{12}b^2 + x^2)\,\rho bc\,dx = \rho abc\,(\tfrac{1}{12}b^2 + \tfrac{1}{3}a^2)$$

Como la masa total del prisma es $m = \rho abc$, podemos escribir

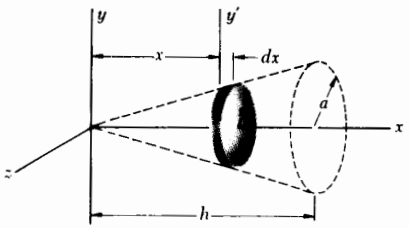
$$I_z = m(\tfrac{1}{12}b^2 + \tfrac{1}{3}a^2) \qquad I_z = \tfrac{1}{12}m(4a^2 + b^2) \blacktriangleleft$$

Observamos que si el prisma es delgado, b es pequeña comparada con a y la expresión para I_z se reduce a $\frac{1}{3}ma^2$ que es el resultado obtenido en el problema resuelto 9.9 para $L = a$.



PROBLEMA RESUELTO 9.11

Determínese el momento de inercia de un cono circular recto respecto a: *a*) su eje longitudinal, *b*) un eje que pasa por el vértice del cono y es perpendicular a su eje longitudinal, *c*) un eje que pasa por el centro de gravedad del cono y es perpendicular a su eje longitudinal.



Solución. Escogemos el elemento diferencial de masa que se muestra.

$$r = a\frac{x}{h} \qquad dm = \rho\pi r^2\,dx = \rho\pi\frac{a^2}{h^2}x^2\,dx$$

a) Momento de inercia I_x. Si aplicamos la expresión obtenida en la sección 9.13 para un disco plano, calculamos el momento de inercia del elemento diferencial respecto al eje x.

$$dI_x = \tfrac{1}{2}r^2\,dm = \tfrac{1}{2}\left(a\frac{x}{h}\right)^2\left(\rho\pi\frac{a^2}{h^2}x^2\,dx\right) = \tfrac{1}{2}\rho\pi\frac{a^4}{h^4}x^4\,dx$$

Integrando desde $x = 0$ hasta $x = h$, obtenemos

$$I_x = \int dI_x = \int_0^h \tfrac{1}{2}\rho\pi\frac{a^4}{h^4}x^4\,dx = \tfrac{1}{2}\rho\pi\frac{a^4}{h^4}\frac{h^5}{5} = \tfrac{1}{10}\rho\pi a^4 h$$

Como la masa total del cono es $m = \frac{1}{3}\rho\pi a^2 h$, podemos anotar

$$I_x = \tfrac{1}{10}\rho\pi a^4 h = \tfrac{3}{10}a^2(\tfrac{1}{3}\rho\pi a^2 h) = \tfrac{3}{10}ma^2 \qquad I_x = \tfrac{3}{10}ma^2 \blacktriangleleft$$

b) Momento de inercia I_y. Nos valdremos del mismo elemento diferencial. Utilizando la expresión obtenida en la sección 9.13 para un disco delgado y el teorema de Steiner, tenemos

$$dI_y = dI_{y'} + x^2\,dm = \tfrac{1}{4}r^2\,dm + x^2\,dm = (\tfrac{1}{4}r^2 + x^2)\,dm$$

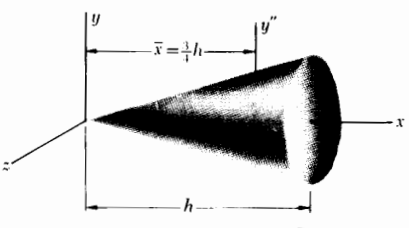
Al sustituir las expresiones para r y dm, tenemos

$$dI_y = \left(\frac{1}{4}\frac{a^2}{h^2}x^2 + x^2\right)\left(\rho\pi\frac{a^2}{h^2}x^2\,dx\right) = \rho\pi\frac{a^2}{h^2}\left(\frac{a^2}{4h^2} + 1\right)x^4\,dx$$

$$I_y = \int dI_y = \int_0^h \rho\pi\frac{a^2}{h^2}\left(\frac{a^2}{4h^2} + 1\right)x^4\,dx = \rho\pi\frac{a^2}{h^2}\left(\frac{a^2}{4h^2} + 1\right)\frac{h^5}{5}$$

Introduciendo la masa total del cono m podemos reescribir I_y de la siguiente manera:

$$I_y = \tfrac{3}{5}(\tfrac{1}{4}a^2 + h^2)\tfrac{1}{3}\rho\pi a^2 h \qquad I_y = \tfrac{3}{5}m(\tfrac{1}{4}a^2 + h^2) \blacktriangleleft$$



c) Momento de inercia $\bar{I}_{y''}$. Aplicamos el teorema de Steiner y escribimos

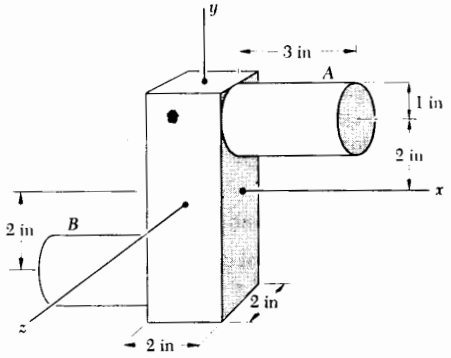
$$I_y = \bar{I}_{y''} + m\bar{x}^2$$

Despejando $I_{y''}$ y recordando que $\bar{x} = \frac{3}{4}h$, tenemos

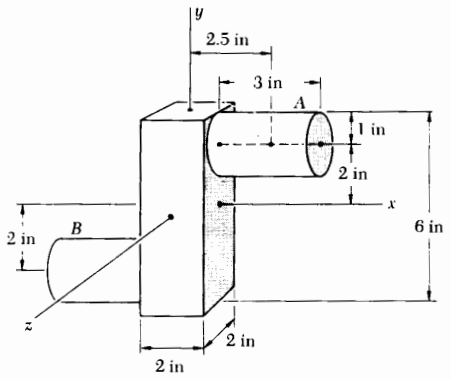
$$\bar{I}_{y''} = I_y - m\bar{x}^2 = \tfrac{3}{5}m(\tfrac{1}{4}a^2 + h^2) - m(\tfrac{3}{4}h)^2$$

$$I_{y''} = \tfrac{3}{20}m(a^2 + \tfrac{1}{4}h^2) \blacktriangleleft$$

PROBLEMA RESUELTO 9.12



Una pieza de acero forjado consiste en un prisma rectangular de 6 × 2 × 2 in y dos cilindros de 2 in de diámetro y 3 in de longitud unidos como se muestra. Determínense los momentos de inercia respecto a los ejes coordenados. (El peso específico del acero es 490 lb/ft³.)



Cálculo de las masas

Prisma

$$V = (2\text{ in})(2\text{ in})(6\text{ in}) = 24\text{ in}^3$$

$$W = \frac{(24\text{ in}^3)(490\text{ lb/ft}^3)}{1728\text{ in}^3/\text{ft}^3} = 6.81\text{ lb}$$

$$m = \frac{6.81\text{ lb}}{32.2\text{ ft/s}^2} = 0.211\text{ lb}\cdot\text{s}^2/\text{ft}$$

Cada cilindro

$$V = \pi(1\text{ in})^2(3\text{ in}) = 9.42\text{ in}^3$$

$$W = \frac{(9.42\text{ in}^3)(490\text{ lb/ft}^3)}{1728\text{ in}^3/\text{ft}^3} = 2.67\text{ lb}$$

$$m = \frac{2.67\text{ lb}}{32.2\text{ ft/s}^2} = 0.0829\text{ lb}\cdot\text{s}^2/\text{ft}$$

Momentos de inercia de las masas. El momento de inercia de la masa de cada componente se calcula a partir de la figura 9.28, usando para ello si es necesario el teorema de Steiner. Nótese que todas las longitudes deben expresarse en pies.

Prisma

$$I_x = I_z = \tfrac{1}{12}(0.211\text{ lb}\cdot\text{s}^2/\text{ft})[(\tfrac{6}{12}\text{ ft})^2 + (\tfrac{2}{12}\text{ ft})^2] = 4.88 \times 10^{-3}\text{ lb}\cdot\text{ft}\cdot\text{s}^2$$

$$I_y = \tfrac{1}{12}(0.211\text{ lb}\cdot\text{s}^2/\text{ft})[(\tfrac{2}{12}\text{ ft})^2 + (\tfrac{2}{12}\text{ ft})^2] = 0.977 \times 10^{-3}\text{ lb}\cdot\text{ft}\cdot\text{s}^2$$

Cada cilindro

$$I_x = \tfrac{1}{2}ma^2 + m\bar{y}^2 = \tfrac{1}{2}(0.0829\text{ lb}\cdot\text{s}^2/\text{ft})(\tfrac{1}{12}\text{ ft})^2 + (0.0829\text{ lb}\cdot\text{s}^2/\text{ft})(\tfrac{2}{12}\text{ ft})^2 = 2.59 \times 10^{-3}\text{ lb}\cdot\text{ft}\cdot\text{s}^2$$

$$I_y = \tfrac{1}{12}m(3a^2 + L^2) + m\bar{x}^2 = \tfrac{1}{12}(0.0829\text{ lb}\cdot\text{s}^2/\text{ft})[3(\tfrac{1}{12}\text{ ft})^2 + (\tfrac{3}{12}\text{ ft})^2] + (0.0829\text{ lb}\cdot\text{s}^2/\text{ft})(\tfrac{2.5}{12}\text{ ft})^2 = 4.17 \times 10^{-3}\text{ lb}\cdot\text{ft}\cdot\text{s}^2$$

$$I_z = \tfrac{1}{12}m(3a^2 + L^2) + m(\bar{x}^2 + \bar{y}^2) = \tfrac{1}{12}(0.0829)[3(\tfrac{1}{12})^2 + (\tfrac{3}{12})^2] + (0.0829)[(\tfrac{2.5}{12})^2 + (\tfrac{2}{12})^2] = 6.48 \times 10^{-3}\text{ lb}\cdot\text{ft}\cdot\text{s}^2$$

Cuerpo completo. Sumando los valores obtenidos, se obtiene

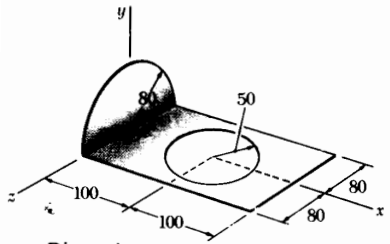
$$I_x = 4.88 \times 10^{-3} + 2(2.59 \times 10^{-3}) \qquad I_x = 10.06 \times 10^{-3}\text{ lb}\cdot\text{ft}\cdot\text{s}^2 \blacktriangleleft$$

$$I_y = 0.977 \times 10^{-3} + 2(4.17 \times 10^{-3}) \qquad I_y = 9.32 \times 10^{-3}\text{ lb}\cdot\text{ft}\cdot\text{s}^2 \blacktriangleleft$$

$$I_z = 4.88 \times 10^{-3} + 2(6.48 \times 10^{-3}) \qquad I_z = 17.84 \times 10^{-3}\text{ lb}\cdot\text{ft}\cdot\text{s}^2 \blacktriangleleft$$

PROBLEMA RESUELTO 9.13

Una placa delgada de acero de 4 mm de espesor se corta y se dobla para formar la pieza que se indica. Sabiendo que la densidad del acero es 7 850 kg/m^3, determínese el momento de inercia de la pieza respecto a los ejes de coordenadas.

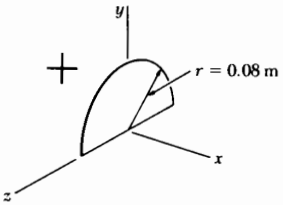


Dimensiones en mm

Solución. Observamos que la pieza consiste en una placa semicircular más una placa rectangular menos una placa circular.

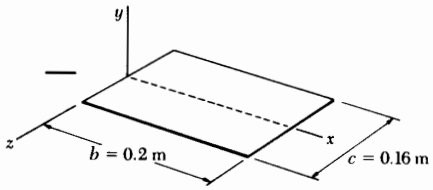
Cálculo de las masas. *Placa semicircular.*

$$V_1 = \tfrac{1}{2}\pi r^2 t = \tfrac{1}{2}\pi(0.08\text{ m})^2(0.004\text{ m}) = 40.21 \times 10^{-6}\text{ m}^3$$
$$m_1 = \rho V_1 = (7.85 \times 10^3\text{ kg/m}^3)(40.21 \times 10^{-6}\text{ m}^3) = 0.3156\text{ kg}$$



Placa rectangular

$$V_2 = (0.200\text{ m})(0.160\text{ m})(0.004\text{ m}) = 128 \times 10^{-6}\text{ m}^3$$
$$m_2 = \rho V_2 = (7.85 \times 10^3\text{ kg/m}^3)(128 \times 10^{-6}\text{ m}^3) = 1.005\text{ kg}$$



Placa circular

$$V_3 = \pi a^2 t = \pi(0.050\text{ m})^2(0.004\text{ m}) = 31.42 \times 10^{-6}\text{ m}^3$$
$$m_3 = \rho V_3 = (7.85 \times 10^3\text{ kg/m}^3)(31.42 \times 10^{-6}\text{ m}^3) = 0.2466\text{ kg}$$

Momentos de inercia. Con los métodos presentados en la sección 9.13 calculamos los momentos de inercia de las partes componentes.

Placa semicircular. En la figura 9.28 observamos que para una placa circular de radio r y masa m

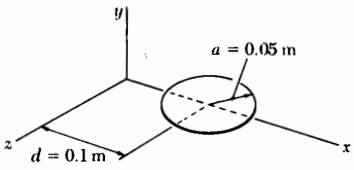
$$I_x = \tfrac{1}{2}mr^2 \qquad I_y = I_z = \tfrac{1}{4}mr^2$$

Por simetría tenemos que para una placa semicircular

$$I_x = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}mr^2) \qquad I_y = I_z = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{4}mr^2)$$

Como la masa de la placa semicircular es $m_1 = \frac{1}{2}m$, tenemos

$$I_x = \tfrac{1}{2}m_1r^2 = \tfrac{1}{2}(0.3156\text{ kg})(0.08\text{ m})^2 = 1.010 \times 10^{-3}\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$
$$I_y = I_z = \tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{2}mr^2) = \tfrac{1}{4}m_1r^2 = \tfrac{1}{4}(0.3156\text{ kg})(0.08\text{ m})^2 = 0.505 \times 10^{-3}\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$



Placa rectangular

$$I_x = \tfrac{1}{12}m_2c^2 = \tfrac{1}{12}(1.005\text{ kg})(0.16\text{ m})^2 = 2.144 \times 10^{-3}\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$
$$I_z = \tfrac{1}{3}m_2b^2 = \tfrac{1}{3}(1.005\text{ kg})(0.2\text{ m})^2 = 13.400 \times 10^{-3}\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$
$$I_y = I_x + I_z = (2.144 + 13.400)(10^{-3}) = 15.544 \times 10^{-3}\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

Placa circular

$$I_x = \tfrac{1}{4}m_3a^2 = \tfrac{1}{4}(0.2466\text{ kg})(0.05\text{ m})^2 = 0.154 \times 10^{-3}\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$
$$I_y = \tfrac{1}{2}m_3a^2 + m_3d^2$$
$$= \tfrac{1}{2}(0.2466\text{ kg})(0.05\text{ m})^2 + (0.2466\text{ kg})(0.1\text{ m})^2 = 2.774 \times 10^{-3}\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$
$$I_z = \tfrac{1}{4}m_3a^2 + m_3d^2 = \tfrac{1}{4}(0.2466\text{ kg})(0.05\text{ m})^2 + (0.2466\text{ kg})(0.1\text{ m})^2$$
$$= 2.620 \times 10^{-3}\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

Pieza completa

$$I_x = (1.010 + 2.144 - 0.154)(10^{-3})\text{ kg}\cdot\text{m}^2 \qquad I_x = 3.00 \times 10^{-3}\text{ kg}\cdot\text{m}^2 \blacktriangleleft$$
$$I_y = (0.505 + 15.544 - 2.774)(10^{-3})\text{ kg}\cdot\text{m}^2 \qquad I_y = 13.28 \times 10^{-3}\text{ kg}\cdot\text{m}^2 \blacktriangleleft$$
$$I_z = (0.505 + 13.400 - 2.620)(10^{-3})\text{ kg}\cdot\text{m}^2 \qquad I_z = 11.29 \times 10^{-3}\text{ kg}\cdot\text{m}^2 \blacktriangleleft$$

Problemas

9.88 Una placa semicircular delgada tiene un radio a y una masa m. Determínese el momento de inercia de la placa con respecto a a) el eje central BB' y b) el eje central CC'.

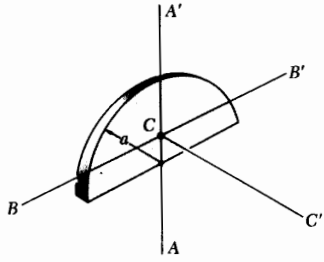


Fig. P9.88

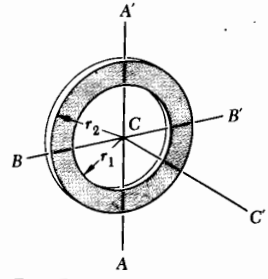


Fig. P9.89

9.89 Determínese el momento de inercia del anillo de masa m hecho a partir de una placa uniforme respecto a) al diámetro AA' del anillo y b) al eje CC' perpendicular al plano del anillo.

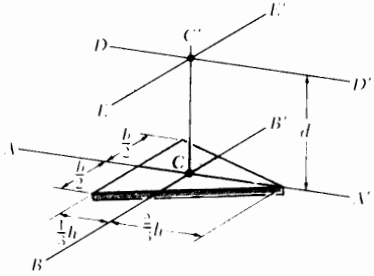


Fig. P9.90

9.90 Una placa delgada de masa m se corta en forma de triángulo isósceles de base b y altura h. Determínese el momento de inercia de la placa respecto a) los ejes centrales AA' y BB' en el plano de la placa y b) el eje central CC' perpendicular a la placa.

9.91 Determínense los momentos de inercia de la placa del problema 9.90 respecto a los ejes DD' y EE' paralelos a los ejes centrales AA' y BB' localizados a una distancia d respecto al plano de la placa.

9.92 Una placa delgada de masa m se corta en forma de paralelogramo como en la figura. Determínese el momento de inercia de la placa respecto a) al eje x y b) al eje BB' perpendicular a la placa.

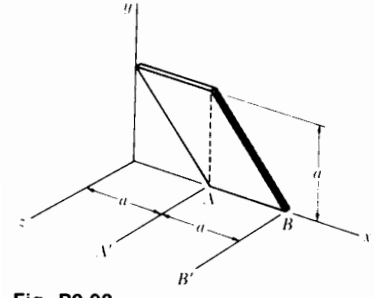


Fig. P9.92

9.93 Determínese el momento de inercia de la placa del problema 9.92 respecto a) al eje y y b) al eje AA' perpendicular a la placa.

9.94 El área mostrada gira alrededor del eje x y genera un sólido de revolución homogéneo de masa m. Exprésese el momento de inercia del sólido respecto al eje x en términos de m, a y n.

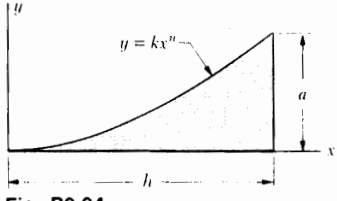


Fig. P9.94

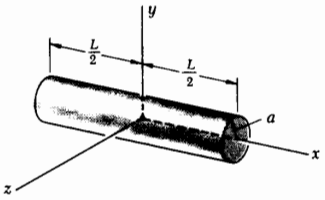


Fig. P9.95

9.95 Determínese por integración directa el momento de inercia del cilindro circular recto que se muestra, respecto al eje y, suponiendo una densidad uniforme y una masa m.

9.96 Determínense por integración directa el momento de inercia y el radio de giro del cono circular recto respecto al eje z, suponiendo una densidad uniforme y una masa m.

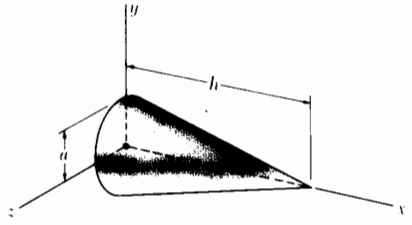


Fig. P9.96

9.97 Determínese por integración directa el momento de inercia y el radio de giro del paraboloide que aparece en la figura, respecto al eje y, suponiendo densidad uniforme y masa m.

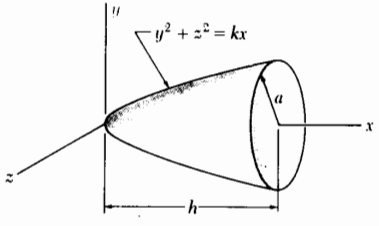


Fig. P9.97

9.98 Determínese por integración directa el momento de inercia de la pirámide, que aquí se muestra, respecto al eje x, suponiendo densidad uniforme y masa m.

9.99 Determínese por integración directa el momento de inercia de la pirámide, que se muestra a continuación, respecto al eje y, suponiendo densidad uniforme y masa m.

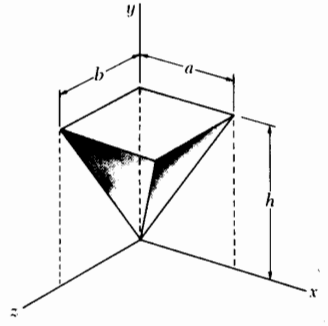


Fig. P9.98 y P9.99

9.100 Un plato esférico delgado de masa m se forma al intersecar un plano horizontal a una chapa esférica de radio R y espesor t. Determínese por integración directa el momento de inercia del plato respecto a su eje vertical de simetría. Verifíquese que el resultado obtenido para $\phi = 90°$ (chapa hemisférica) es la misma que la respuesta al problema 9.104.

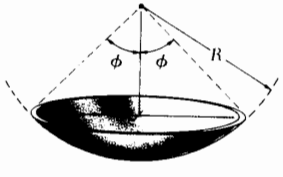


Fig. P9.100

9.101 Un alambre delgado de acero se curva en forma de arco circular como se indica. Representando con m' la masa por unidad de longitud del alambre, determínese los momentos de inercia del alambre respecto a los ejes coordenados.

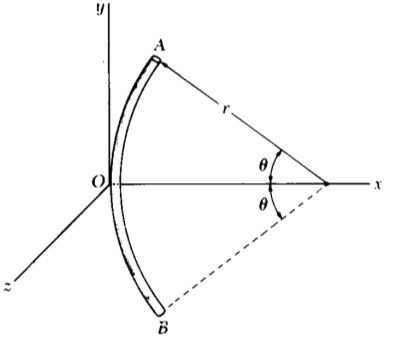


Fig. P9.101

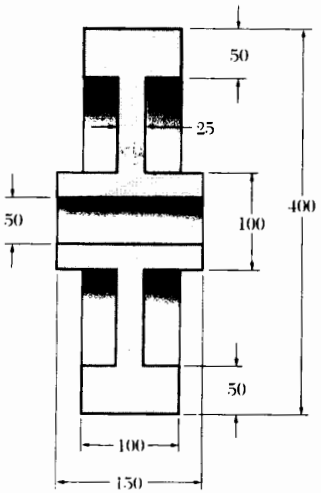


Fig. P9.102 Dimensiones en mm

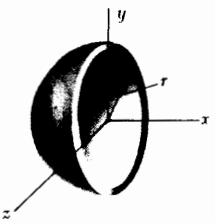


Fig. P9.104

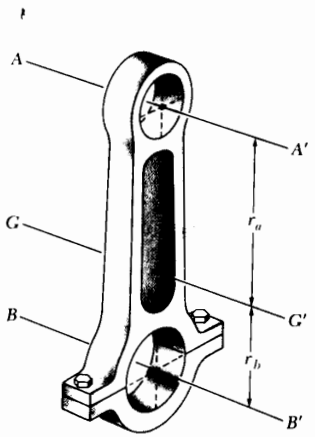


Fig. P9.106 y P9.107

9.102 y 9.103 Determínese el momento de inercia y el radio de giro del volante de acero mostrado respecto a su eje de rotación. (Densidad del acero = 7850 kg/m^3, peso específico del acero = 490 lb/ft^3.)

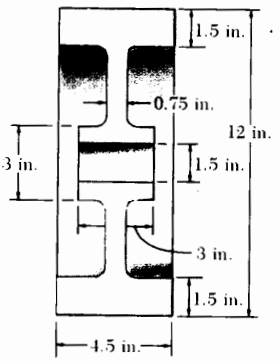


Fig. P9.103

9.104 Sabiendo que el cascarón hemisférico que se muestra tiene una masa m y espesor t, determínense su momento de inercia y su radio de giro respecto al eje x. (*Sugerencia.* Considérese que el cascarón se genera quitando una semiesfera de radio r de otra semiesfera de radio $r + t$; despréciense los términos que contienen t^2 y t^3, conservando sólo los términos que contienen t.)

9.105 La pieza, que a continuación se muestra, se forma ajustando una superficie cónica a un cilindro circular. Si $b = \frac{1}{2}h$, determínense el momento de inercia y el radio de giro de la pieza respecto al eje y.

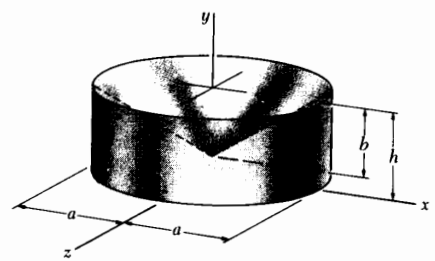


Fig. P9.105

9.106 Se ha demostrado experimentalmente que los momentos de inercia de la biela de 2 kg que se muestra respecto a los ejes centrales de los cojinetes AA' y BB' son, respectivamente, $I_{AA'} = 78$ g · m^2 y $I_{BB'} = 41$ g · m^2. Sabiendo que $r_a + r_b = 290$ mm, determínense *a*) la localización del eje central GG' y *b*) el radio de giro respecto al eje GG'.

9.107 Si el momento de inercia de la biela de 3.25 kg de masa mostrada es de 205 g · m^2 respecto al eje AA', determínese el momento de inercia respecto al eje BB' si $r_a = 225$ mm y $r_b = 140$ mm.

9.108 Para el anillo homogéneo mostrado cuya densidad es P, determínense *a*) el momento de inercia respecto del eje BB', *b*) el valor de a_1 para el cual dados a_2 y h, $I_{BB'}$ es máximo y *c*) el valor correspondientes de $I_{BB'}$.

9.109 Determínense el momento de inercia y el radio de giro del anillo de acero que se muestra, respecto al eje BB con $a_1 = 3$ in, $a_2 = 5$ in y $h = 4$ in. (Peso específico del acero = 490 lb/ft^3.)

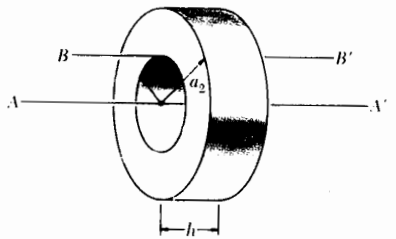


Fig. P9.108 y P9.109

9.110 y 9.111 Una hoja de acero de 2 mm se corta y se dobla para formar la pieza que aquí se muestra. Sabiendo que la densidad del acero es 7850 kg/m^3, determínense el momento de inercia de la pie. respecto a *a*) el eje x, *b*) el eje y y *c*) el eje z.

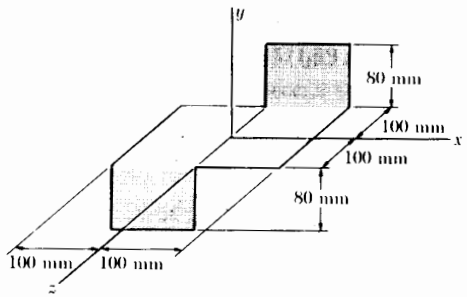


Fig. P9.110

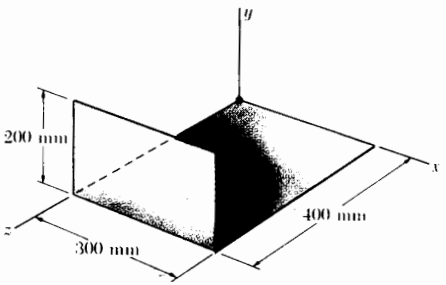


Fig. P9.111

9.112 Una antena para rastreo por radar tiene dos lados en forma de cuarto de círculo de radio 15 in y un lado en forma de triángulo. Todas las piezas de la antena están hechas de una placa uniforme de aluminio de 0.05 in de espesor. Si el peso específico del aluminio empleado es 170 lb/ft^3, determínese el momento de inercia de la antena respecto a cada uno de los ejes coordenados.

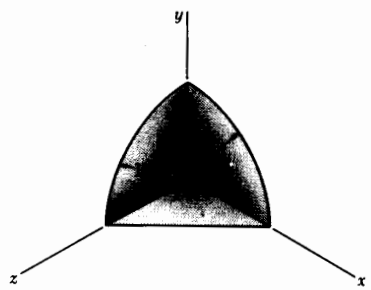


Fig. P9.112

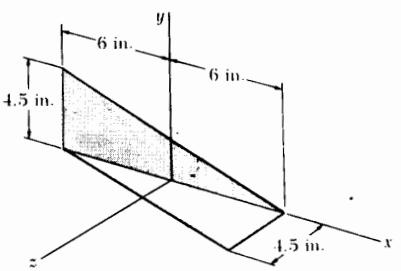


Fig. P9.113

9.113 Una hoja de acero de 0.03 in de espesor se corta y se dobla para formar la pieza que se muestra. Sabiendo que el peso específico del acero es 490 lb/ft^3, determínese el momento de inercia de la pieza respecto a cada uno de los ejes coordenados.

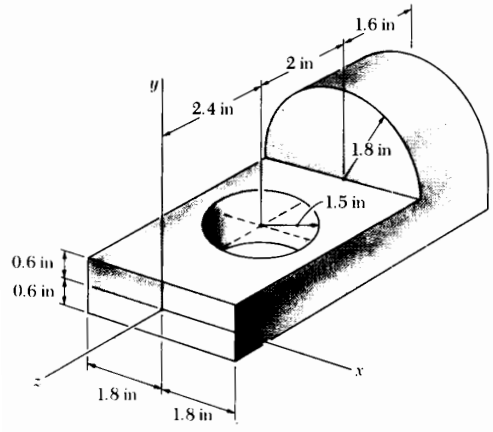


Fig. P9.115 y P9.116

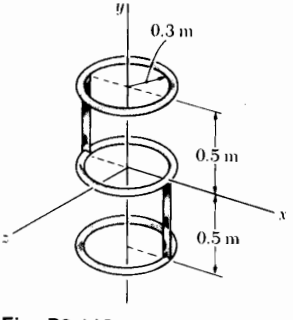


Fig. P9.118

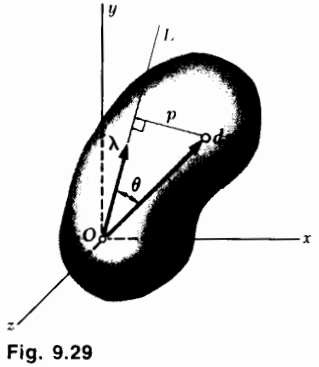


Fig. 9.29

9.114 y 9.115 Determínense el momento de inercia y el radio de giro de la pieza de acero que se muestra, respecto al eje x. (Peso específico del acero = 490 lb/ft^3; densidad del acero = 7850 kg/m^3.)

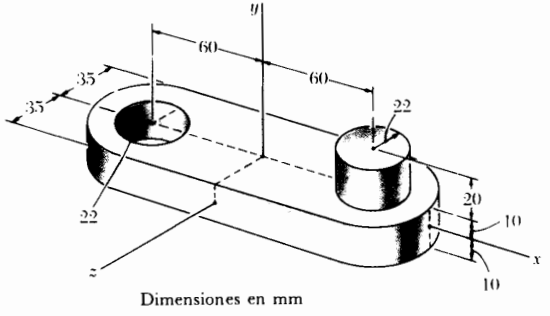


Fig. P9.114 y P9.117

9.116 y 9.117 Determínese el momento de inercia de la pieza de acero que se muestra, respecto al eje y. (Peso específico del acero = 490 lb/ft^3; densidad del acero = 7850 kg/m^3.)

9.118 Un alambre homogéneo con masa por unidad de longitud de 1.8 kg/m se usa para formar la figura que se muestra. Determínese el momento de inercia de la figura de alambre respecto *a*) el eje x y *b*) el eje y.

9.119 En el problema 9.118 determínese el momento de inercia de la figura de alambre respecto al eje z.

***9.16. Momento de inercia de un cuerpo con respecto a un eje arbitrario que pasa por O. Productos de inercia de masas** En esta sección veremos cómo puede determinarse el momento de inercia de un cuerpo respecto a un eje arbitrario OL que pase por el origen O (Fig. 9.29), si de antemano hemos calculado los momentos de inercia respecto a los tres ejes coordenados. Veremos también cómo se calculan otras cantidades que definiremos más adelante.

El momento de inercia de un cuerpo respecto a OL está representado por la integral $I_{OL} = \int p^2\, dm$, donde p es la distancia perpendicular del elemento de masa dm al eje OL. Pero si denotamos por $\boldsymbol{\lambda}$ al vector unitario a lo largo de OL y por $\mathbf{r}$ al vector posición del elemento dm, observamos que la distancia perpendicular p es igual a la magnitud r sen θ del producto vectorial $\boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{r}$. Por lo tanto, escribimos

$$I_{OL} = \int p^2\, dm = \int |\boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{r}|^2\, dm \tag{9.43}$$

Expresando el cuadrado en términos de las componentes rectangulares del producto vectorial, tenemos

$$I_{OL} = \int [(\lambda_x y - \lambda_y x)^2 + (\lambda_y z - \lambda_z y)^2 + (\lambda_z x - \lambda_x z)^2]\, dm$$

donde las componentes λ_x, λ_y y λ_z del vector unitario $\boldsymbol{\lambda}$, representan los cosenos directores del eje OL, y las componentes x, y, z de $\mathbf{r}$ representan las coordenadas del elemento de masa dm. Desarrollando los cuadrados en la expresión obtenida y rearreglando términos tenemos

$$I_{OL} = \lambda_x^2 \int (y^2 + z^2)\, dm + \lambda_y^2 \int (z^2 + x^2)\, dm + \lambda_z^2 \int (x^2 + y^2)\, dm$$
$$-2\lambda_x\lambda_y \int xy\, dm - 2\lambda_y\lambda_z \int yz\, dm - 2\lambda_z\lambda_x \int zx\, dm \qquad (9.44)$$

A partir de las ecuaciones (9.30), notamos que las primeras tres integrales en (9.44) representan respectivamente los momentos de inercia I_x, I_y e I_z del cuerpo respecto a los ejes coordenados. Las últimas tres integrales en (9.44), que contienen los productos de las coordenadas se les llaman *productos de inercia* del cuerpo respecto a los ejes x, y y z; y z, x respectivamente. Escribimos

$$I_{xy} = \int xy\, dm \qquad I_{yz} = \int yz\, dm \qquad I_{zx} = \int zx\, dm \qquad (9.45)$$

Sustituyendo en 9.44 el valor de las integrales de (30) y (9.45), se tiene

$$I_{OL} = I_x\lambda_x^2 + I_y\lambda_y^2 + I_z\lambda_z^2 - 2I_{xy}\lambda_x\lambda_y - 2I_{yz}\lambda_y\lambda_z - 2I_{zx}\lambda_z\lambda_x \qquad (9.46)$$

Observamos que la definición de los productos de inercia de una masa dada en las ecuaciones (9.45) es una extensión de la definición de productos de inercia de un área (Secc. 9.8). Los productos de inercia de masas se reducen a cero bajo las mismas condiciones de simetría que los productos de inercia de áreas, y el teorema de los ejes paralelos para productos de inercia de masas se expresa mediante relaciones similares a las correspondientes para los productos de inercia de un área. Sustituyendo los valores de x, y y z de las ecuaciones (9.31) en las ecuaciones (9.45), verificamos que

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \bar{I}_{x'y'} + m\bar{x}\bar{y} \\ I_{yz} &= \bar{I}_{y'z'} + m\bar{y}\bar{z} \\ I_{zx} &= \bar{I}_{z'x'} + m\bar{z}\bar{x} \end{aligned} \qquad (9.47)$$

donde $\bar{x}$, $\bar{y}$ y $\bar{z}$ son las coordenadas del centro de gravedad G del cuerpo e $\bar{I}_{x'y'}$, $\bar{I}_{y'z'}$, $\bar{I}_{z'x'}$ son los productos de inercia respecto a los ejes centrales x', y', z' (Fig. 9.22).

***9.17. Elipsoide de inercia. Ejes principales de inercia.** Supongamos que hemos determinado el momento de inercia del cuerpo considerado en la sección anterior, respecto a muchos ejes OL que pasan por el punto fijo O, y que hemos marcado un punto Q sobre cada eje OL a una distancia $OQ = 1/\sqrt{I_{OL}}$ de O. El lugar geométrico de los puntos Q así obtenidos forman una superficie (Fig. 9.30). Podemos obtener la ecuación de esta superficie sustituyendo I_{OL} por $1/(OQ)^2$ en la ecuación (9.46) y multiplicando ambos lados de la ecuación por $(OQ)^2$. Observando que

$$(OQ)\lambda_x = x \qquad (OQ)\lambda_y = y \qquad (OQ)\lambda_z = z$$

donde x, y y z son las coordenadas rectangulares del punto Q de la superficie, tenemos

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{xy}xy - 2I_{yz}yz - 2I_{zx}zx = 1 \qquad (9.48)$$

La ecuación obtenida es la de una *cuádrica*. Como el momento de inercia del cuerpo es diferente de cero para cualquier eje OL, ningún punto puede estar a una distancia infinita de O. Por lo tanto, la cuádrica obtenida es un *elipsoide*. Este elipsoide que define el mo-

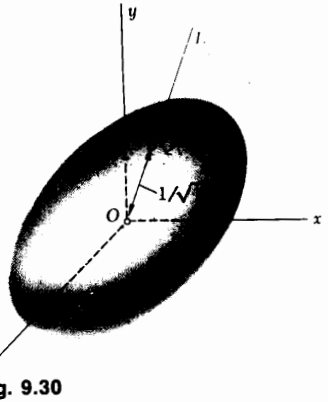


Fig. 9.30

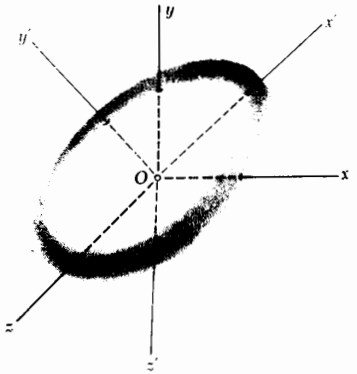


Fig. 9.31

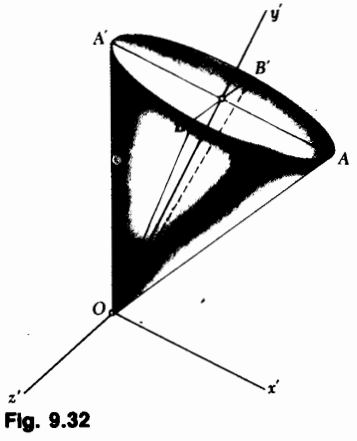


Fig. 9.32

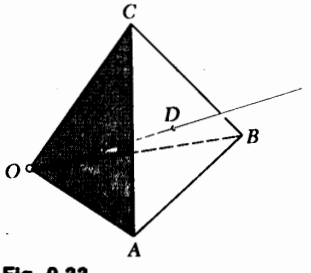


Fig. 9.33

mento de inercia del cuerpo respecto a cualquier eje que pasa por O se conoce como *elipsoide de inercia* del cuerpo en O.

Observamos que al girar los ejes en la figura 9.30, cambian los coeficientes de la ecuación que definen al elipsoide, ya que éstos son iguales a los momentos y productos de inercia del cuerpo respecto a los ejes de coordenadas rotados. Sin embargo, *el elipsoide en sí no se altera,* ya que su forma depende sólo de la distribución de masa del cuerpo considerado. Ahora, supongamos que escogemos como ejes coordenados los ejes principales x', y' y z' del elipsoide de inercia (Fig. 9.31). La ecuación del elipsoide respecto a estos ejes coordenados será de la forma

$$I_{x'}x'^2 + I_{y'}y'^2 + I_{z'}z'^2 = 1 \tag{9.49}$$

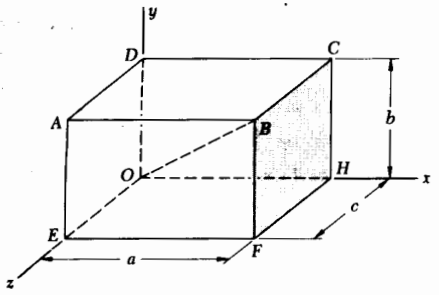
que no contiene ningún producto cruzado de coordenadas. Por lo tanto, los productos de inercia respecto a los ejes de coordenadas x', y' y z' son cero. Los ejes x', y' y z' se conocen como *ejes principales de inercia* del cuerpo en O, y los coeficientes I_x, I_y e I_z son los *momentos principales de inercia* del cuerpo en O. Obsérvese que dado un cuerpo de forma arbitraria y un punto O, siempre es posible encontrar ejes que sean los ejes principales de inercia del cuerpo en O, es decir, respecto a los cuales los productos de inercia del cuerpo son cero. Es más, sin importar cuán rara o irregular sea la forma del cuerpo, sus momentos de inercia respecto a ejes que pasan por O definirán un elipsoide, y éste tendrá ejes principales que por definición serán los ejes principales del cuerpo en O.

Si se usan como ejes coordenados los ejes principales de inercia x', y' y z' la expresión obtenida en la ecuación (9.46) para el momento de inercia de un cuerpo respecto a ejes arbitrarios que pasan por O, se reduce a

$$I_{OL} = I_{x'}\lambda_{x'}^2 + I_{y'}\lambda_{y'}^2 + I_{z'}\lambda_{z'}^2 \tag{9.50}$$

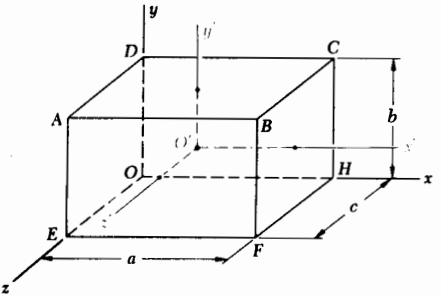
Mientras que determinar los ejes principales de inercia de un cuerpo de forma arbitraria puede ser bastante engorroso y requerir la solución de una ecuación cúbica, hay muchos casos en que estos ejes pueden obtenerse inmediatamente. Consideremos, por ejemplo, el cono homogéneo de base elíptica que se muestra en la figura 9.32; éste posee dos planos de simetría OAA' y OBB' perpendiculares entre sí. Comprobamos, según la definición (9.45), que si escogemos los planos $x'y'$ y $y'z'$ coincidentes con los dos planos de simetría, todos los productos de inercia son cero. Por lo tanto, los ejes x', y'y z' seleccionados de esta manera son los ejes principales de inercia del cono en O. En el caso del tetraedro regular homogéneo $OABC$, que se muestra en la figura 9.33, la línea que une el vértice O con el centro D de la cara opuesta es un eje principal de inercia en O y cualquier línea, que pase por O perpendicular a OD, es también un eje principal de inercia en O. Podemos reconocer esta propiedad observando que una rotación de 120° alrededor de OD no cambia la forma ni la distribución de masa del tetraedro. Por lo tanto, el elipsoide de inercia en O tampoco cambia al hacerse esta rotación. Así pues, el elipsoide es de revolución respecto a OD y la línea OD y cualquier línea perpendicular a ella que pase por O debe ser un eje principal del elipsoide.

PROBLEMA RESUELTO 9.14



Considérese un prisma rectangular de masa m y lados a, b y c. Determínense *a*) los momentos y productos de inercia del prisma respecto a los ejes coordenados que se muestran, *b*) su momento de inercia respecto a la diagonal OB.

a. **Momentos y productos de inercia respecto a los ejes coordenados.** *Momento de inercia.* Introduciendo los ejes centroidales x', y' y z' respecto a los cuales están dados los momentos de inercia en la figura 9.28, aplicamos el teorema de Steiner:



$$I_x = \bar{I}_{x'} + m(\bar{y}^2 + \bar{z}^2) = \tfrac{1}{12}m(b^2 + c^2) + m(\tfrac{1}{4}b^2 + \tfrac{1}{4}c^2)$$

$$I_x = \tfrac{1}{3}m(b^2 + c^2) \quad \blacktriangleleft$$

De igual manera, $I_y = \tfrac{1}{3}m(c^2 + a^2)$ $\quad I_z = \tfrac{1}{3}m(a^2 + b^2)$ $\blacktriangleleft$

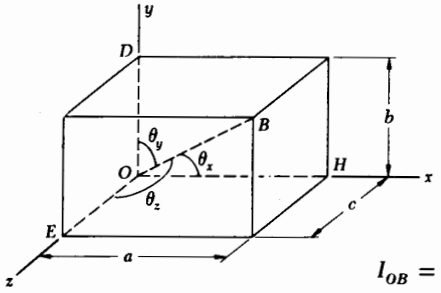
Productos de inercia. Por simetría, los productos de inercia respecto a los ejes centrales c', y' y z' son cero, por lo que éstos son ejes principales de inercia. Al aplicar el teorema de Steiner tenemos

$$I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + m\bar{x}\,\bar{y} = 0 + m(\tfrac{1}{2}a)(\tfrac{1}{2}b) \qquad I_{xy} = \tfrac{1}{4}mab \quad \blacktriangleleft$$

De igual manera, $I_{yz} = \tfrac{1}{4}mbc$ $\quad I_{zx} = \tfrac{1}{4}mca$ $\blacktriangleleft$

b. **Momentos de inercia respecto a OB.** Recordemos la ecuación (9.46):

$$I_{OB} = I_x\lambda_x^2 + I_y\lambda_y^2 + I_z\lambda_z^2 - 2I_{xy}\lambda_x\lambda_y - 2I_{yz}\lambda_y\lambda_z - 2I_{zx}\lambda_z\lambda_x$$



donde los cosenos directores de OB son

$$\lambda_x = \cos\theta_x = \frac{OH}{OB} = \frac{a}{(a^2 + b^2 + c^2)^{1/2}}$$

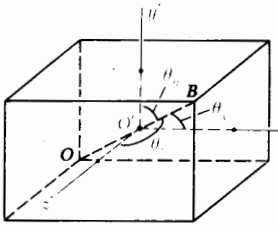
$$\lambda_y = \frac{b}{(a^2 + b^2 + c^2)^{1/2}} \qquad \lambda_z = \frac{c}{(a^2 + b^2 + c^2)^{1/2}}$$

Sustituyendo los valores obtenidos para los momentos y productos de inercia y para los cosenos directores:

$$I_{OB} = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2}\left[\tfrac{1}{3}m(b^2 + c^2)a^2 + \tfrac{1}{3}m(c^2 + a^2)b^2 + \tfrac{1}{3}m(a^2 + b^2)c^2 - \tfrac{1}{2}ma^2b^2 - \tfrac{1}{2}mb^2c^2 - \tfrac{1}{2}mc^2a^2\right]$$

$$I_{OB} = \frac{m}{6}\,\frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{a^2 + b^2 + c^2} \quad \blacktriangleleft$$

Solución opcional. El momento de inercia I_{OB} puede obtenerse directamente de los momentos principales de inercia $\bar{I}_{x'}$, $\bar{I}_{y'}$ e $\bar{I}_{z'}$, ya que la línea OB pasa por el centro de gravedad O'. Como x', y' y z' son ejes principales de inercia, usamos la ecuación (9.50) y tenemos



$$I_{OB} = \bar{I}_{x'}\lambda_x^2 + \bar{I}_{y'}\lambda_y^2 + \bar{I}_{z'}\lambda_z^2$$

$$= \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2}\left[\frac{m}{12}(b^2 + c^2)a^2 + \frac{m}{12}(c^2 + a^2)b^2 + \frac{m}{12}(a^2 + b^2)c^2\right]$$

$$I_{OB} = \frac{m}{6}\,\frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{a^2 + b^2 + c^2} \quad \blacktriangleleft$$

Problemas

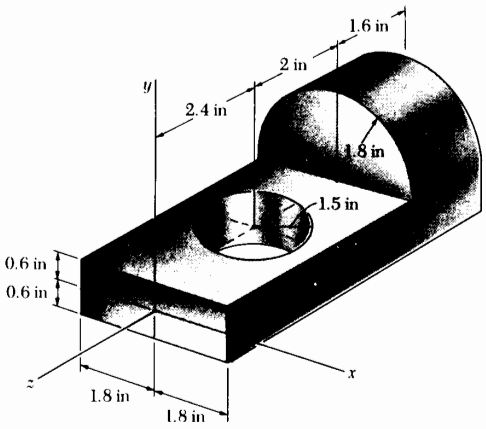


Fig. P9.120

9.120 y 9.121 Determínese los productos de inercia I_{xy}, I_{yz} e I_{zx} de la pieza de acero que se muestra. (Peso específico del acero = 490 lb/ft^3; densidad del acero = 7850 kg/m^3.)

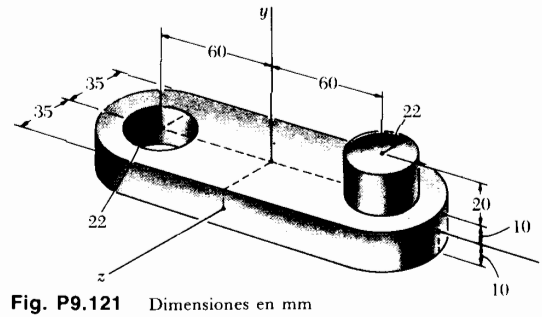


Fig. P9.121 Dimensiones en mm

9.122 Una hoja de acero de 2 mm de espesor se corta y se dobla para formar la pieza que se indica. Sabiendo que la densidad del acero es 7850 kg/m^3, determínense los productos de inercia I_{xy}, I_{zx} e I_{yz} del componente.

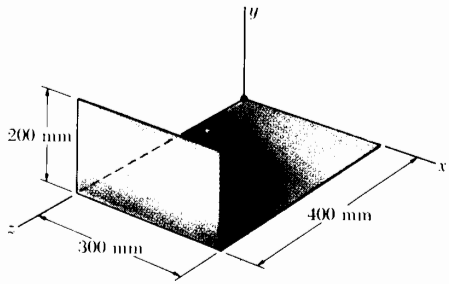


Fig. P9.122

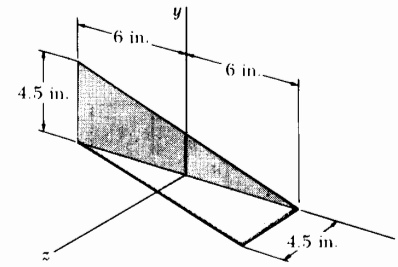


Fig. P9.123

9.123 Una hoja de acero de 0.03 in de espesor se corta y se dobla para formar la pieza que se muestra. Si el peso específico del acero es 490 lb/ft^3, determínense los productos de inercia I_{xy}, I_{yz} e I_{zx} de la pieza (*Sugerencia.* Véanse los resultados del problema resuelto 9.6.)

9.124 Para la antena del problema 9.112, determínense los productos de inercia I_{yy}, I_{zy} e I_{zx}. (*Sugerencia.* Véanse los resultados del problema resuelto 9.6 y el problema 9.56.)

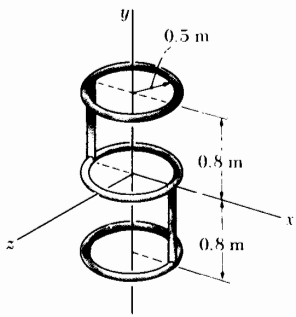


Fig. P9.125

9.125 Un alambre homogéneo con una masa por unidad de longitud de 1.8 kg/m se utiliza para formar la figura que aquí se muestra. Determínense los productos de inercia I_{xy}, I_{yz} e I_{zx} de la figura de alambre.

9.126 Complétese la deducción de las ecuaciones (9.47) que expresan el teorema de Steiner para productos de inercia de masas.

9.127 Para el tetraedro homogéneo de masa m que aquí se indica *a*) determínese por integración directa el producto de inercia I_{zx} y *b*) dedúzcanse I_{yz} e J_{xy} del resultado obtenido en la parte *a*.

9.128 Determínese el momento de inercia del cono circular del problema resuelto 9.11 respecto a una generatriz del cono.

9.129 Determínese el momento de inercia del prisma rectangular del problema resuelto 9.14 respecto a la diagonal OF de su base.

9.130 Determínese el momento de inercia de la antena de los problemas 9.112 y 9.124 respecto a un eje que pase a través del origen y que forme ángulos iguales con los ejes x, y y z.

9.131 Determínese el momento de inercia de la pieza del problema resuelto 9.13 respecto a un eje que pase por el origen caracterizado por el vector unitario $\boldsymbol{\lambda} = {}^2/_3\mathbf{i} + {}^1/_3\mathbf{j} + {}^2/_3\mathbf{k}$.

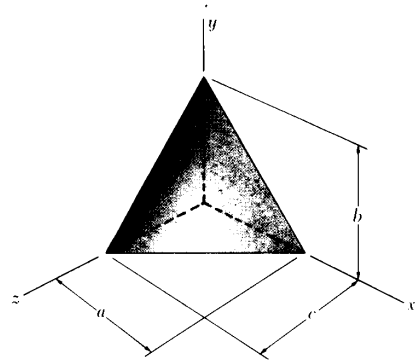


Fig. P9.127

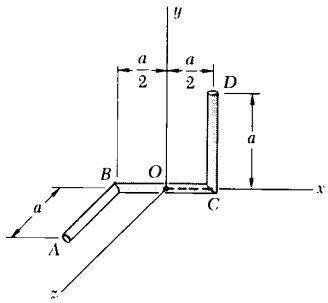


Fig. P9.132

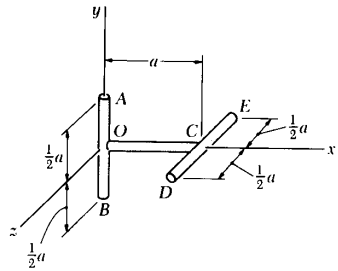


Fig. P9.133

9.132 y 9.133 Se sueldan tres barras uniformes cada una de masa m como se indica. Determínense *a*) los momentos de inercia y los productos de inercia respecto de los ejes coordenados y *b*) el momento de inercia respecto a la línea que une el punto O y el punto D.

9.134 La placa delgada doblada que aquí se muestra tiene densidad uniforme y masa m. Determínese su momento de inercia respecto a una línea que una los puntos B y C.

9.135 La placa delgada doblada que se señala tiene densidad uniforme y masa m. Determínese su momento de inercia respecto a una línea que una el origen O y el punto A.

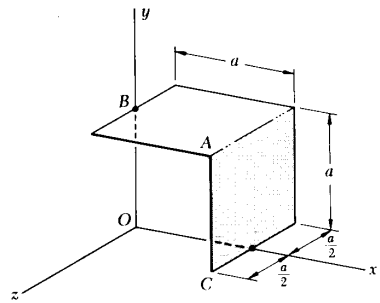


Fig. P9.134 y P9.135

9.136 Determínese el valor de la relación a/h para el cual el elipsoide de inercia correspondiente al cono circular recto del problema resuelto 9.11 se transforma en una esfera, cuando se determina *a*) en el vértice del cono y *b*) en el centroide del cono.

9.137 Considérese un cilindro circular homogéneo de radio a y longitud L. Determínese el valor de la relación a/L para el cual el elipsoide de inercia correspondiente al cilindro se transforma en una esfera, *a*) en el centro de gravedad del cilindro y *b*) en el centro de una de sus bases.

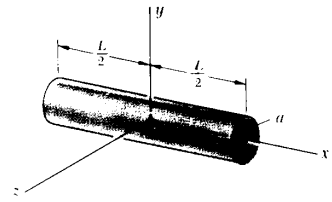


Fig. P9.137

9.138 Dados un sólido arbitrario y tres ejes rectangulares x, y y z, demuéstrese que el momento de inercia de la masa del sólido respecto a cualquiera de los tres ejes no puede ser mayor que la suma de los momentos de inercia del sólido respecto a los otros dos ejes; es decir, demuéstrese que la desigualdad $\mathbf{I}_x \leq \mathbf{I}_y + \mathbf{I}_z$ se satisface, así como dos desigualdades similares. Además demuéstrese que, si el sólido es homogéneo y dé revolución x es el eje de revolución y y un eje transversal, entonces $\mathbf{I}_y \geq \frac{1}{2}\mathbf{I}_x$.

9.139 Considérese un cubo de masa m y lado a. *a*) Demuéstrese que el elipsoide de inercia en el centro del cubo es una esfera y úsese esta propiedad para determinar el momento de inercia de la masa del cubo respecto a una de sus diagonales. *b*) Demuéstrese que el elipsoide de revolución y determínense los momentos de inercia principales del cubo en ese punto.

9.140 Dados un sólido homogéneo de masa m y forma arbitraria y tres ejes rectangulares x, y y z de origen O, demuéstrese que la suma $\mathbf{I}_x + \mathbf{I}_y + \mathbf{I}_z$, de los momentos de inercia de la masa del sólido no puede ser menor que la suma similar calculada para una esfera de la misma masa y el mismo material con centro en O. Además demuéstrese, utilizando los resultados del problema 9.138, que si el sólido es de revolución y x es el eje de revolución, entonces su momento de inercia $\mathbf{I}_y$ respecto a un eje transversal y no puede ser menor que $\frac{3}{10}ma^2$, donde a es el radio de la esfera de la misma masa y mismo material.

Repaso y Resumen

Momentos de inercia de masas

Se dedicó el apéndice B a la determinación de *momentos de inercia de masas*, que en dinámica intervienen en problemas relacionados con la rotación de un sólido rígido respecto a un eje. El momento de inercia de un cuerpo respecto a un eje AA' (Fig. 9.39) se definió como

$$I = \int r^2\, dm \tag{9.28}$$

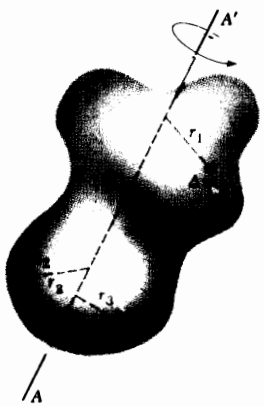


Fig. 9.39

donde r es la distancia de AA' elemento de masa (sección 9.11) y su *radio de giro* como

$$k = \sqrt{\frac{I}{m}} \tag{9.29}$$

Los momentos de inercia de un cuerpo respecto a los ejes coordenados se expresaron así:

$$\begin{aligned} I_x &= \int (y^2 + z^2)\, dm \\ I_y &= \int (z^2 + x^2)\, dm \\ I_z &= \int (x^2 + y^2)\, dm \end{aligned} \tag{9.30}$$

Se vio que el *teorema de Steiner* también se aplica a momentos de inercia de la masa (sec. 9.12). Entonces, el momento de inercia I de un cuerpo respecto a un eje arbitrario AA' (Fig. 9.40) se puede expresar como

$$I = \bar{I} + md^2 \tag{9.33}$$

Teorema de Steiner

donde $\bar{I}$ es el momento de inercia del cuerpo respecto a un eje central BB' paralelo al eje AA', m la masa del cuerpo y d la distancia entre los dos ejes.

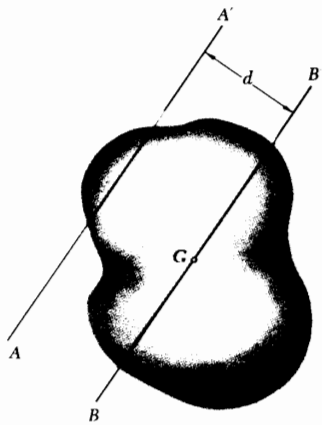


Fig. 9.40

Los momentos de inercia de *placas delgadas* se pueden obtener fácilmente de los momentos de inercia de sus áreas (sec. 9.13) se encontró que para una *placa rectangular* los momentos de inercia respecto a los ejes indicados (Fig. 9.41) son

Momentos de inercia de placas delgadas

$$I_{AA'} = \tfrac{1}{12}ma^2 \qquad I_{BB'} = \tfrac{1}{12}mb^2 \tag{9.39}$$

$$I_{CC'} = I_{AA'} + I_{BB'} = \tfrac{1}{12}m(a^2 + b^2) \tag{9.40}$$

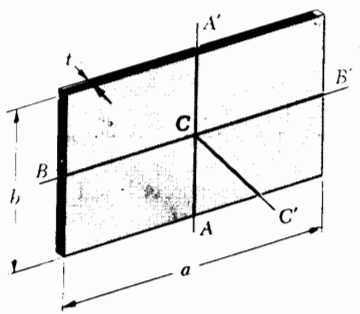


Fig. 9.41

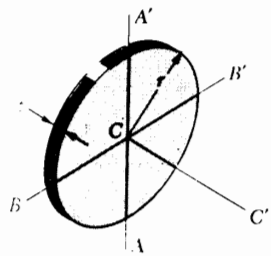


Fig. 9.42

mientras que para una *placa circular* (Fig. 9.42) son

$$I_{AA'} = I_{BB'} = \tfrac{1}{4}mr^2 \tag{9.41}$$

$$I_{CC'} = I_{AA'} + I_{BB'} = \tfrac{1}{2}mr^2 \tag{9.42}$$

Cuerpos compuestos

Cuando un cuerpo posee *dos planos de simetría*, normalmente es posible determinar sus momentos de inercia respecto a un eje mediante *integración simple* al considerar un elemento de masa *dm* en forma de una placa delgada (problemas resueltos 9.10 y 9.11). Por otra parte, cuando un cuerpo se compone de *varias figuras geométricas comunes*, su momento de inercia respecto a un eje dado se puede obtener de los valores proporcionados en la figura 9.28 y de la aplicación del teorema de Steiner (problemas resueltos 9.12 y 9.13).

Momento de inercia respecto a un eje arbitrario

En la segunda parte del apéndice se mostró cómo determinar el momento de inercia de un cuerpo *respecto a un eje arbitrario OL*, dibujado a través del origen *O* (sec. 9.16). Representando con λ_x, λ_y y λ_z los componentes del vector unitario λ a lo largo de *OL* (Fig. 9.43) y considerando los *productos de inercia*.

$$I_{xy} = \int xy\, dm \qquad I_{yz} = \int yz\, dm \qquad I_{zx} = \int zx\, dm \tag{9.45}$$

se comprobó que el momento de inercia del cuerpo respecto a *OL* se podría expresar así:

$$I_{OL} = I_x\lambda_x^2 + I_y\lambda_y^2 + I_z\lambda_z^2 - 2I_{xy}\lambda_x\lambda_y - 2I_{yz}\lambda_y\lambda_z - 2I_{zx}\lambda_z\lambda_x \tag{9.46}$$

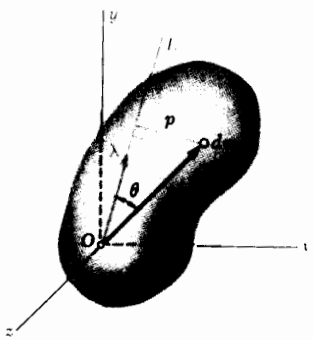


Fig. 9.43

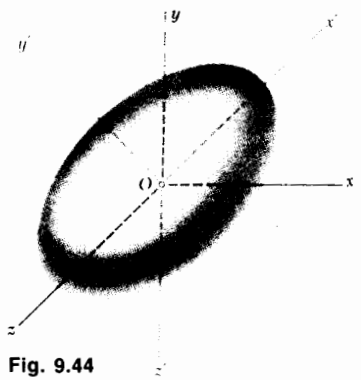


Fig. 9.44

Elipsoide de inercia

Al graficar un punto *Q* a lo largo de cada eje *OL* a una distancia $OQ = (1/\sqrt{I_{OL}}$ a partir de *O* (sec. 9.17), se obtuvo la superficie de un elipsoide conocido como *elipsoide de inercia* del cuerpo en el punto *O*. Sus ejes principales *x'*, *y'* y *z'* (Fig. 9.44) son los *ejes principales de inercia* del cuerpo o sea los productos de inercia $\mathbf{I}_{x'y'}$, $\mathbf{I}_{y'z'}$, $\mathbf{I}_{z'x'}$ del cuerpo respecto a estos ejes son todos cero. Existen muchos casos en que los ejes principales de inercia de un cuerpo pueden obtenerse a partir de las propiedades de simetría del cuerpo. Al escoger estos ejes como los ejes coordenados, se puede expresar $\mathbf{I}_{OL}$ como

$$I_{OL} = I_{x'}\lambda_{x'}^2 + I_{y'}\lambda_{y'}^2 + I_{z'}\lambda_{z'}^2 \tag{9.50}$$

donde $\mathbf{I}_{x'}$, $\mathbf{I}_{y'}$ y $\mathbf{I}_{z'}$ son los *momentos principales de inercia* del cuerpo en *O*.

principal o cualquier otra tecla para continuar. De este modo se evitará terminar accidentalmente un ejercicio.

A la portada de cada tutorial sigue la formulación del problema, y se pedirá al lector que seleccione una parte de los datos en cuestión. Esto se hace capturando cada elemento y tecleando [F10] luego de introducir todos los datos.

Varias veces, y después de dar una respuesta se pedirá al lector que presione la tecla [F2] para obtener un comentario explicativo, antes de intentar otra vez la solución o de continuar con ella.

Si desea evaluar su progreso, puede hacerlo en cualquier momento con sólo presionar la tecla [Home] y luego [F10]. De este modo retornará al inicio del tutorial. Teclear varias veces [F10] le permitirá evaluar rápidamente su solución hasta el punto a que ha llegado.

A lo largo de un ejercicio se encontrará a veces con cálculos que requieren una calculadora. Se le pedirá entonces si desea efectuarlos usted mismo, adquiriendo así más práctica, o si quiere que las realice su "tutor" (o sea la computadora) para que le ahorre tiempo y esfuerzo.

Al final de cada ejercicio, se le preguntará si desea realizarlo de nuevo con otros datos. Al teclear "Y" (sí), el usuario pasa el inicio del ejercicio; en cambio, volverá al menú principal si teclea "N" (no).

Algunas veces conviene tener una copia en papel de las pantallas de los tutoriales. Para ello, hay que contar con una impresora capaz de manejar texto e información gráfica. Además hay que correr el programa DOS Graphics antes de iniciar los tutoriales. Si se desea obtener una copia en papel basta presionar las teclas [Shift] [Prt Sc].

A.5. Cómo llevar una puntuación de las respuestas correctas. La computadora llevará una puntuación de las respuestas correctas del usuario en el ángulo superior derecho de la pantalla. El empleo de la tecla [F9] para obtener la respuesta correcta disminuirá la puntuación, mientras que el uso de la tecla [F10] para evaluar su progreso no influirá para nada en la puntuación. Ésta no se verá afectada si el usuario decide que su tutor efectúe los cálculos por él cuando se le da esa opción. Pero si prefiere realizar personalmente los cálculos, la puntuación reflejará la precisión de sus operaciones.

A.6. Cómo abandonar los tutoriales. Para abandonar los tutoriales basta retornar al menú principal, seleccionar la opción "Exit Dynamics Tutorial" (salir del tutorial de dinámica, presionar las teclas con flechas o la tecla [Esc] y luego oprimir [F10]. Siempre hay que abandonar los tutoriales antes de apagar la computadora.

Índice

Aceleración, 457, 504, 505
  absoluta, 748-750
  angular, 722-723, 769
  complementaria, 761
  Componentes de la:
    normal, 520-522
    radial, 523-524
    rectangulares, 508-509
    tangencial, 520-522
    transversal, 523-524
  de Coriolis:
    en el movimiento plano, 760-762
    en el movimiento tridimensional, 780, 781
  de la gravedad, 480, 487, 489, 566
  en el movimiento de un sólido rígido
    con un punto fijo, 769
  en el movimiento general de un sólido rígido, 771
  en el movimiento plano, 748-750
  en la rotación, 722-723, 780-781
  relativa de una partícula:
    en el movimiento general, 771
    en el movimiento plano, 748-750
    con respecto a un sistema de referencia con movimiento general (arbitrario), 781-782
    con respecto a un sistema de referencia en rotación, 760-762, 780-781
    con respecto a un sistema de referencia en traslación, 510
    de dos partículas, 490, 509-510
Amortiguamiento:
  coeficiente de, 990
  crítico, 991
  factor de, 992
  sobreamortiguamiento, 991
  subcrítico, 991
  viscoso, 990
Amplitud, 958, 960
Analogías eléctricas, 994-997
Ángulo de fase, 961
Apogeo, 576
Árboles o ejes en rotación, 926
Axioma de la mecánica, 806
Axoide:
  fijo, 769-940
  móvil, 769, 940

Base, 742
Binormal, 522

Caballo de potencia, 594
Centro:
  de masas
    de un sistema de partículas, 673-674
    de un sólido rígido, 804
  de oscilación, 970
  de percusión, 834, 881
  instantáneo de rotación, 740-742
Choque, 640, 646
  central:
    directo, 640-643, 646
    oblicuo, 643-646
  elástico, 642-643
  excéntrico, 886-888
  línea de, 640
  plástico, 642
Cinemática:
  de partículas, 475-535
    en el movimiento curvilíneo, 504-532
    en el movimiento rectilíneo, 476-503
    en el movimiento relativo, 489-490, 509-510, 760-762, 780-782
  de sólidos rígidos en movimiento
    con un punto fijo, 768-769
    en movimiento general, 771
    en movimiento plano, 730-750
    en rotación alrededor de un eje fijo, 721-723
    en traslación, 720-721
Cinética, 475
  de partículas, 541-667
  de sistemas de partículas, 668-717
  de sólidos rígidos, 800-957
Círculo:
  auxiliar, 960

Coeficiente:
  de amortiguamiento, 990
    crítico, 991
    viscoso, 990
  de restitución, 640-643, 886, 888
Cohete, 698
Componente(s)
  de aceleración (*véase* Aceleración, componentes de la)
  del momento angular:
    de un sólido rígido, 909-957
    de una partícula, 565-566
  de la derivada de una función vectorial, 507
  de la velocidad (*véase* Velocidad)
  radial
    de la aceleración, 523-524
    de la velocidad, 523-524
  rectangulares:
    de la aceleración, 508-509
    de la velocidad, 508-509
  tangencial de la aceleración, 520-522
  transversal:
    de la aceleración, 523-524
    de la velocidad, 523-524
Composición de fuerzas (*véase* Adición de fuerzas concurrentes)
Condiciones iniciales, 480
Conservación:
  de la energía:
    de partículas, 614-615
    de sólidos rígidos, 856-857, 907
    de un sistema de partículas, 683-684
    en vibraciones, 977-978
  del momento angular, 565-566, 677, 678, 875
  del momento lineal, 544, 630, 677-678
Constante del resorte, 592
Coordenada(s):
  angular, 721-722
  cilíndricas, 524
  de posición, 475, 476
  polares, 523
  relativa, 489

Corriente de partículas, 694-697
Curva(s):
  aceleración-tiempo, 477-479, 496
  cónica, 574
  del movimiento, 479, 496-497
  velocidad-desplazamiento, 497
  velocidad-tiempo, 479, 496, 497

Decremento logarítmico, 998
Derivada, 504-505
  de un producto vectorial, 507
  de un producto de funciones escalares y vectoriales, 507
  de un vector, 507-508
  de una función vectorial, 506-508
    respecto a un sistema en rotación, 758-760
  del momento lineal, 544, 672-673
  del producto escalar, 507
  temporal del momento angular, 563-564, 677, 801, 922-923
Deceleración, 478
Desplazamiento, 590
Diagrama:
  velocidad-desplazamiento, 499
  velocidad-tiempo, 496-498
Diferencia de fase, 994
Dinámica, definición de, 475
Disco desequilibrado, 828
Distancia, 476

Ecuación(es):
  del diagrama de sólido libre, 806
  del movimiento:
    para un sólido de revolución, 939-940
    para un sólido bidimensional:
      en movimiento plano, 803
      en rotación no baricéntrica, 826-827
    para un giróscopo, 936-937
    para un sistema de partículas, 673-674, 676, 679
    para un sólido tridimensional:
      alrededor de su centro de masas, 922-923
      con un punto fijo, 924-925
      en movimiento general, 906-922
      en rotación alrededor de un eje fijo, 925-926
    para una partícula, 547-548, 564-566
Eje(s):
  de rotación, 718, 938
  de precesión 939-941
  equilibrado, 926
  inclinado, momentos de inercia respecto al, 1032, 1034
  instantáneo, 740, 780
  principales de inercia: de masas, 1033-1034
Elemento(s):
  diferenciales:
    para momentos de inercia: de masas, 1022
Elipsoide:
  de inercia, 1033-1034
  de Poinsot, 948
Empuje, 696, 698
Energía:
  cinética: de un sólido rígido:
    en movimiento plano, 854
    en rotación, 855
    en tres dimensiones, 912-913
    en un sistema de partículas, 683
  conservación de la (*véase* Conservación de la energía)
  de una partícula, 594-595
  mecánica total, 614
  potencial gravitacional, 422-424, 611-615, 856
Engranajes:
  análisis de los, 734, 751
  móviles, 738
Equilibrio:
  dinámico, 926
    de un sólido rígido:
      en movimiento plano, 807
      en rotación no baricéntrica, 826
Equinoccios, precesión de los, 943
Equivalencia de fuerzas exteriores y fuerzas inerciales, 668
Equivalencia de fuerzas externas y fuerzas reales netas para un sólido rígido, 804, 923-924
Euler:
  ecuaciones del movimiento de, 923
  teorema de, 768
Euler, Leonhard, 923
Excentricidad, 574, 989
Expresión como determinante del momento angular, 563

Factor de amplificación, 985, 994
Fase:
  ángulo de, 961
  diferencia de, 994
Flujo de fluidos, 694-699
Foco de una curva cónica, 574
Frecuencia, 958, 967
  circular, 961
  forzada, 985
  natural, 985
Fricción:
  en fluidos, 990
  (*véase* también Rozamiento)

Fuerza(s):
  central, 567-566, 619
  centrífuga, 549, 827
  conservativa, 613-614, 616, 645
  exteriores, 669
  gravitacional, 566-567, 593, 611, 616
  inerciales o de inercia, 549
  internas, 669
  no conservativa, 615
  no percutoras, 633
  para un sólido rígido:
    en movimiento plano, 804, 805
    en tres dimensiones, 924
  percutoras, 632-633
Función:
  complementaria, 985
  potencial, 613
  vectorial, 506-508
    devidada de una, 506-508

Giróscopo, 936-939
Gradiente, 730
Gramo, 545
Gravedad:
  aceleración de la, 567
Gravitación:
  constante de, 567
  ley de Newton de, 566-567

Hélice, 697
Helicóptero, 705, 885
Hertcio (unidad), 962
Hodógrafa, 505

Impulso:
  angular, 684-685
  lineal, 630, 684
  y momento, principio del, (*véase* Principio del impulso y del momento)
Inercia:
  de una masa, 1018-1019
  elipsoide de, 1033-1034
  fuerza de, 549
  momentos de (*véase* Momentos de inercia)
par de, 806-807
productos:
  de masas, 1032, 1033
  teorema de los ejes paralelos para los, 1033
  tensor de, 908

Julio (unidad), 591

Kepler, Johann, 577
Kepler, leyes de, 577
Kilogramo, 545
Kilómetro, 545

Kilonewton, 545
Kilowatio, 598

Ley(es):
de Kepler, 597
de Newton (*véase* Newton, ley de)
Libra fuerza, 546
Libra masa, 547

Masa, 543
Maza de hinca de pilotes, 656
Mecánica:
energía, 614
espacial o celeste, 573-577, 616, 620
principios de la, 806
Mecanismo de Cruz de Malta, 763-764
Megagramo, 545
Método(s):
del momento-área, 497
gráficos de solución de problemas de movimiento rectilíneo, 496-497
Metro, 545
Milímetro, 545
Momento(s):
de cuerpos compuestos, 1022
de formas geométricas usuales, 1023
de inercia, 1018-1034
de masas, 1018-1034
de placas delgadas, 1021-1022
principal, 1033-1034
rectangular, 1019
teorema, 1019
teorema de Steiner para los, 1020
determinación de, por integración, 1022
ejes arbitrarios, 1032, 1034
principales de masas, 1034
Momento angular:
conservación del, 565-566, 677-678, 875
de un sistema de partículas, 673-674, 675-677
de un sólido rígido, 801-803, 873-875, 907-911
de una partícula, 563-566
derivada temporal, 563-564, 674, 676, 801, 922-923
Momento lineal:
conservación del, 544, 630, 637
de un sistema de partículas, 672-673
de un sólido rígido, 873-874, 911
de una partícula, 564
derivada temporal del, 544, 673-674
Motor a reacción, 696
Movimiento(s):
absoluto, 510
alrededor del centro de masas, 675-677, 806, 922-924
armónico simple, 959-962
bajo percusiones, 632-633, 886
bajo una fuerza central, 572-573
con un punto fijo, 768-772, 924-925
curvilíneo, 504-526, 582-585
cinemática del, 504-532
cinética del, 547-582
de rodadura, 827-828
de un sistema de partículas, 668-710
de un sólido de revolución en ausencia de fuerzas, 939-940
de un sólido rígido, 718-957
de una partícula, 475-667
del centro de masas, 673-674, 803-805, 923
ecuaciones del (*véase* Ecuaciones del movimiento)
general, 771
interdependientes, 490
leyes de Newton del (*véase* Newton, ley del movimiento)
planetario, 577
plano, 718-768
aceleración de Coriolis en el, 760-762
cinemática del, 730-750
con vínculos, 825-828
ecuaciones del movimiento en el, 803
energía cinética en el, 854
equilibrio dinámico en el, 807
fuerzas reales en el, 804-805
momento lineal en el, 872-874
rectilíneo, 476-503
de una partícula, 476-503
uniforme, 487
uniformemente acelerado, 488-489
solución de problemas de:
analítico, 479-4812
gráfico, 496-497
relativo:
de dos partículas, 489-490, 509-510
de una partícula:
con respecto a un sistema de referencia en movimiento general (o con movimiento arbitrario), 781-782
con respecto a un sistema de referencia en rotación, 760-762, 780-781
con respecto a un sistema de referencia en traslación, 509-510
Muelle (*véase* Resorte)

Newton, ley
de la gravitación, 566-567
del movimiento, segunda, 542
Newton (unidad), 545
Normal principal, 522
Nutación, 936

Órbita, 576
circular, 576
elíptica, 575, 576
geosincrónica, 570
Oscilaciones:
de un péndulo simple, 962-963
de un sólido rígido, 969, 983

Par(es):
de inercia, 807-808
del momento lineal y angular, 873, 874, 910, 911
en el giróscopo, 938
Partículas:
cinemática de (*véase* Cinemática de partículas)
cinética de, 541-667
movimiento relativo de, 489-490, 509-510, 760-764, 771
sistema de (*véase* Sistemas de partículas)
vibraciones de (*véase* Vibraciones)
Péndulo:
compuesto, 974
simple, 962-964
Peralte de curvas, 553
Perigeo, 576
Periodo
de deformación, 640, 641, 886
de restitución, 640, 641, 886
de vibración, 958, 961
amortiguada, 992
no amortiguada, 961
orbital, 576-577, 585
Peso, 545, 567
Pie, 546, 547
Plano:
invariable, 948
osculador, 522
Poleas, 811
Polodía, 948
Posición relativa, 489, 510
Potencia, 598, 857
absorbida, 598
producida, 598
Precesión, 936, 938-941
de los equinoccios, 957
directa, 940
inversa, 940

libre, 940, 941, 943
uniforme, 938-941
del giróscopo, 938-939
del trompo, 942
Principio(s):
de D'Alembert, 803, 804, 924
del impulso y del momento
para un sólido rígido, 872-874, 911
de la mecánica, 806
para un sistema de partículas, 684-685
para una partícula, 630-632
Producto:
de inercia, 1032-1033
triple vectorial, 723
vectorial, derivada del, 507
Proyectil(es), 509, 548
balísticos, 576

Radio:
de curvatura, 521, 522
de giro, 1018
Razón de frecuencias, 985
Rendimiento mecánico, 598
Resonancia, 985
Resorte:
energía potencial de un, 612-613
fuerza ejercida por un, 592-593
Restitución:
coeficiente de, 641-643, 886, 888
periodo de, 640, 641, 886
Retroceso de un cañón, 999
Revolución:
sólido de, 937, 1022
Rotación:
baricéntrica:
energía cinética en la, 854
fuerzas inerciales en la, 805
momento lineal en la, 873, 874
no baricéntrica:
centro instantáneo de, 740-742
cinemática de, 721-723
ecuaciones de movimiento en la, 826-827, 925-926
eje instantáneo de, 740, 780
energía cinética en la, 854-855
equilibrio dinámico en la, 826
fuerzas inerciales en la, 827
momento lineal en la, 874
uniforme, 724
uniformemente acelerada, 724
Rozamiento en fluidos, 990
Ruleta, 742

Salto hidráulico, 706
Satélites, 567, 573, 576, 578, 620
de la Tierra, 564, 573, 611
Segundo, 545, 546
Semieje:
mayor, 577
menor, 577
Sistemas:
de partículas:
ecuaciones del movimiento para los, 670-671, 673-677
energía cinética de los, 683
momento angular de, 672-673, 675-677
principio del impulso y del momento para los, 683-685
teorema de las fuerzas vivas para los, 683-684
de masa variable, 694
de referencia, 548
baricéntrico, 676, 677, 801, 907, 912
en el movimiento general, 781-782
en rotación, 759-762, 780-781
en traslación, 507, 509-510
newtoniano, 543
de unidades, 544-547
inercial (de referencia), 543
inglés de unidades, 546
internacional de unidades, 545
Sólido(s):
compuestos:
axoide de un, 940
cinemática de un (*véase* Cinemática de sólidos rígidos)
cinética de un, 600-957
momentos de inercia de, 1022
vibraciones de un, 969-970, 978
en caída libre, 489
Suspensión Cardan, 936

Tensor de inercia, 908
Teorema de las fuerzas vivas
para un sólido rígido, 852, 912
para una partícula, 954-597
para un sistema de partículas, 683
Teorema de los ejes paralelos para productos de inercia de masa, 1033
Teorema de Steiner para momentos de inercia de masa, 1020
Tonelada métrica, 545*n*
Torbellino o corriente retrógrada, 697
Trabajo:
de la fuerza ejercida por un resorte, 592-593
de la fuerza gravitacional, 593
de las fuerzas sobre un sólido rígido, 853
de un par, 853
de un peso, 592
de una fuerza, 590-593
Traslación, 718, 720
momento lineal en la, 873
cinemática de la, 720
curvilínea, 718
energía cinética en la, 856
rectilínea, 718
Transmisibilidad, principio de, 806
Transporte espacial, 581, 625, 627, 708
Trayectoria:
de un proyectil, 509, 576
de un vehículo espacial, 575
hiperbólica, 575
parabólica, 509, 575
Triple producto vectorial, 723
Trompo:
movimiento general del, 957
precesión uniforme del, 942
Tubo de rayos catódicos, 562

Unidades, 544-547
del sistema inglés, 546-547
métricas, 545
SI, 545
Uniones universales, 779

Vector(es):
de inercia, 549, 801
de un sólido rígido en movimiento plano, 805
de una partícula, 549
de posición, 504, 510
relativa, 510
derivada temporal de, 507-508, 758-760
momento lineal, 873, 874, 910-911
Vehículos espaciales, 573, 576, 627
Velocidad, 504-505
absoluta, 732-734, 740-742
angular, 722-723, 769, 770
aerolar, 566
componentes de la:
radial, 523-524
rectangulares, 508-509
transversales, 523-524
de escape, 487, 575
en el movimiento de un sólido rígido con un punto fijo, 769
en el movimiento general de un sólido rígido, 771
en movimiento plano, 732-734, 740-742
relativa:
de dos partículas, 489, 509-510
de una partícula:
en movimiento general, 771
en movimiento plano, 732-734

con respecto a un sistema de referencia en movimiento general, 781-782
con respecto a un sistema de referencia en rotación, 760-761, 780
Ventilador, 696-697
Vibracion(es), 958-994
amortiguadas:
forzadas, 993-994
libres, 990-992
de sólidos rígidos, 969-970, 978
estacionarias, 985, 993-994, 1000
forzadas, 983-985, 993-994
frecuencia de, 961-962
libres, 959-978, 990-992
no amortiguadas:
forzadas, 983-985
libres, 959-978
período de las (*véase* Período de vibración)
torsionales, 972
transitorias, 985, 993, 996
Vibrómetro, 1008

Watio (unidad), 598

Respuestas a los problemas pares †

CAPÍTULO 11

11.2 $x = 14$ m, $v = 9$ m/s, $a = 12$ m/s^2.

11.4 $t = 0$, $x = 10$ ft, $a = -12$ ft/s^2;
$t = 2$ s, $x = 2$ ft, $a = 12$ ft/s^2.

11.6 (*a*) 1 s, 3 s. (*b*) $x = 25$ m, $a = 18$ m/s^2, 28 m.

11.8 $v = -8$ ft/s, $x = 64$ ft, 80 ft.

11.10 (*a*) 3 s. (*b*) 13 m, -28 m/s. (*c*) 32.5 m.

11.12 (*a*) 24 m^3/s^2. (*b*) 11.49 m/s.

11.14 (*a*) 25 s^{-2}. (*b*) 11.18 in./s.

11.16 (*a*) 15 m/s. (*b*) 14.74 m/s. (*c*) 15.25 m/s.

11.18 (*a*) 75 in. (*b*) Infinito. (*c*) 11.51 s.

11.20 (*a*) 240 ft. (*b*) Infinita.

11.22 (*a*) 6.73 m. (*b*) 4.64 m/s.

11.24 (*a*) 400 m. (*b*) -0.160 m/s^2. (*c*) 14.38 s.

11.26 (*a*) 2.04 km. (*b*) 211 km. (*c*) Infinita.

11.28 (*a*) $v = k\dfrac{T}{\pi}\left(1 - \cos\dfrac{\pi t}{T}\right)$,

$x = k\dfrac{T^2}{\pi^2}\left(\dfrac{\pi t}{T} - \operatorname{sen}\dfrac{\pi t}{T}\right)$.

(*b*) $2kT/\pi$. (*c*) $2kT^2/\pi$. (*d*) kT/π.

11.30 (*a*) 9.62 m/s ↑. (*b*) 29.6 m/s ↓.

11.32 (*a*) 13 ft/s. (*b*) 67 ft/s. (*c*) 220 ft.

11.34 (*a*) 12.36 s. (*b*) 60.4 km/h.

11.36 11.60 s, 50.4 m.

11.38 (*a*) 15.05 s, 734 ft.
(*b*) $\mathbf{v}_A = 42.5$ mi/h →, $\mathbf{v}_B = 23.7$ mi/h →.

11.40 (*a*) 10 m/s ↑. (*b*) 5 m/s ↑. (*c*) 15 m/s ↑.
(*d*) 10 m/s ↑.

11.42 (*a*) 27 in./s →. (*b*) 36 in./s →. (*c*) 9 in./s →.
(*d*) 18 in./s ←.

11.44 (*a*) $\mathbf{a}_A = 50$ mm/s^2 ←, $\mathbf{a}_B = 25$ mm/s^2 →.
(*b*) 800 mm →, 200 mm/s →.

11.46 (*a*) 5 mm/s^2 ↓, 10 mm/s ↑. (*b*) 90 mm ↑.

11.48 (*a*) 2.5 s. (*b*) 7.5 in. ↓.

11.50 $\mathbf{v}_A = 150$ mm/s ↑. $\mathbf{v}_B = 50$ mm/s ↓,
$\mathbf{v}_C = 250$ mm/s ↓.

11.52 (*b*) 20 ft/s, 74 ft, 176 ft.

11.54 (*a*) 54 m. (*b*) 18 s, 30 s.

11.56 36 s.

11.58 (*a*) 1125 ft/s^2, -81.5 ft/s^2. (*b*) 2.70 in. (*c*) 0.296 s.

11.60 (*a*) $\pm$ 0.714 m/s^2. (*b*) 18 km/h.

11.62 (*a*) 12.5 s, 187.5 m. (*b*) 20 s, 300m.

11.64 8.54 s, 58.3 mi/h.

11.66 104.4 km/h.

11.68 (*a*) 50 m/s, 1194 m. (*b*) 59.25 m/s.

11.70 (*a*) 10 s. (*b*) 5 ft/s.

11.72 (*a*) 45 mi/h. (*b*) 239 ft.

11.74 (*a*) 9.71 s. (*b*) 130.2 m.

11.78 (*a*) 46 m. (*b*) 54 m.

11.80 (*a*) 11.66 in./s ◸ 31.0°; 7.21 in./s^2 ◺ 56.3°.
(*b*) 8 in./s ←; 10 in./s^2 ◿ 36.9°.
(*c*) 8.49 in./s ◿ 45.0°; 20.9 in./s^2 ◿ 17.7°.

11.82 (*a*) 5.37 m/s. (*b*) 2.80 s; $x = -7.56$ m,
$y = 5.52$ m; ◺ 63.4°.

11.86 $v = \sqrt{c^2 + R^2p^2}$; $a = \sqrt{Rp^2}$.

11.88 (*a*) 16.17 m/s. (*b*) 32.7 m.

11.90 (*a*) 57.9 ft/s. (*b*) 55.6 ft/s $\le v_0 \le$ 70.9 ft/s.

11.92 16.83 ft/s $\le v_0 \le$ 28.4 ft/s.

11.94 $d_B = 5.47$ m, $d_C = 7.38$ m.

11.96 11.52 m/s $\le v_0 \le$ 13.29 m/s.

11.98 23.8 ft/s.

11.100 47.4°.

11.102 (*a*) 14.61 m. (*b*) 65.6°.

11.104 29.5°.

11.106 (*a*) 9.54 ft/s ◹ 27.0°. (*b*) 11.14 ft/s ◺ 6.5°.
(*c*) 111.4 ft ◹ 6.5°.

11.108 48.7° sudoeste.

11.110 (*a*) 7.01 in./s ◸ 60.6°. (*b*) 11.69 in./s^2 ◸ 60.6°.

11.112 (*a*) 52.5 mm/s^2 ◿ 51.4°. (*b*) 157.6 mm/s ◿ 51.4°.

11.114 20.1 ft/s ◹ 85.1°.

11.116 17.49 km/s ◿ 59.0°.

11.118 21.0 ft/s ◹ 82.8°.

11.120 1815 ft.

† Se proporcionan respuestas parciales o referencias para *todos* los problemas que han de ser resueltos por computador.

11.122 89.7 ft/s.
11.124 (*a*) 1.694 m/s². (*b*) 1.406 m/s².
11.126 13.80 ft/s².
11.128 (*a*) 45.0 km/h ∠ 26.4°. (*b*) 2.70 m/s² ∠ 5.6°.
11.130 (*a*) 23.7 ft. (*b*) 13.03 ft.
11.132 (*a*) 3810 m. (*b*) 2480 m.
11.134 $\rho = R + c^2/Rp^2$.
11.136 881 mi.
11.138 84.4 minutos.
11.140 (*a*) $(60 \text{ in./s})\mathbf{e}_r + (160 \text{ in./s})\mathbf{e}_\theta$.
(*b*) $-(640 \text{ in./s}^2)\mathbf{e}_r + (640 \text{ in./s}^2)\mathbf{e}_\theta$. (*c*) 0.
11.142 (*a*) $v = 2b\omega$; $a = 4b\omega^2$.
(*b*) $\rho = b$; la trayectoria de la partícula es un círculo
11.144 (*a*) $\mathbf{v} = 2\pi b\mathbf{e}_r$; $\mathbf{a} = -\frac{3}{2}\pi^2 b\mathbf{e}_\theta$. [de radio *b*.
(*b*) $\mathbf{v} = -\pi b\mathbf{e}_r + \pi b\mathbf{e}_\theta$; $\mathbf{a} = -\frac{1}{2}\pi^2 b\mathbf{e}_r - \pi^2 b\mathbf{e}_\theta$.
11.146 $v = b \sec^2\theta\, \dot{\theta}$.
11.148 $a = b \sec^2\theta\, [\ddot{\theta} + 2\dot{\theta}^2 \tan\theta]$.
11.150 306 m/s ↑.
11.152 $v = (b/\theta^2)\sqrt{1 + \theta^2}\,\dot{\theta}$.
11.154 $a = (b\omega^2/\theta^3)\sqrt{4 + \theta^4}$.
11.156 (*a*) $\mathbf{v} = bk\mathbf{e}_\theta$; $\mathbf{a} = -\frac{1}{2}bk^2\mathbf{e}_r$.
(*b*) $\mathbf{v} = 2bk\mathbf{e}_r + 2bk\mathbf{e}_\theta$; $\mathbf{a} = 2bk^2\mathbf{e}_r + 4bk^2\mathbf{e}_\theta$.
11.158 $v = 2\pi\sqrt{A^2 + n^2B^2\cos^2 2\pi nt}$;
$a = 4\pi^2\sqrt{A^2 + n^4B^2\text{sen}^2\, 2\pi nt}$.
11.160 $v = h\tan\beta\sqrt{(1 + 4\pi^2t^2) + \cot^2\beta}$;
$a = 4\pi h\tan\beta\sqrt{1 + \pi^2t^2}$.
11.162 $v = \pi A\sqrt{4 + \text{sen}^2\, 2\pi t}$;
$a = 2\pi^2 A\sqrt{4 + \cos^2 2\pi t}$.
11.164 $\tan^{-1}(Rp/c)$.
11.166 2.44 m/s².
11.168 (*a*) $\mathbf{v} = -(8\pi \text{ in./s})\mathbf{i}$; $\mathbf{a} = (8\pi^2 \text{ in./s}^2)\mathbf{j}$.
11.170 60.3 km ⩤ 17.0°.
11.172 13.59 m.
11.174 (*a*) $\mathbf{v} = (18.85 \text{ in./s})\mathbf{e}_\theta$; $\mathbf{a} = -(296 \text{ in./s}^2)\mathbf{e}_r$.
(*b*) $\mathbf{v} = -(37.7 \text{ in./s})\mathbf{e}_r$; $\mathbf{a} = -(237 \text{ in./s}^2)\mathbf{e}_\theta$.
11.176 (*a*) 40 mm/s ⩥ 70°. (*b*) 358 mm ⩤ 46.6°.
11.C1 $v_0 = 250$ *m/s:* $h = 1432$ m, $v_f = 122.2$ m/s.
11.C2 $v_o = 6$ *m/s:* El chorro golpea el suelo a 3.76 m de la manguera; $v_o = 10$ *m/s:* golpea el edificio a 5.02 m del suelo; $v_o = 13$ *m/s:* golpea el techo a 6.74 m de *B*; $v_o = 15$ *m/s:* golpea el suelo a 20.5 m de la manguera.
11.C3 (*a*) Alcance = 44,000 ft; $t = 30$ *s*: $x = 27{,}600$ ft, $y = 8650$ ft.
(*b*) Alcance = 41,300 ft; $t = 30$ *s*: $x = 26{,}700$ ft, $y = 8220$ ft.
(*c*) Alcance = 33,500 ft; $t = 30$ *s*: $x = 24{,}000$ ft, $y = 6750$ ft.
(*d*) Alcance = 27,400 ft; $t = 30$ *s*: $x = 21{,}300$ ft, $y = 5340$ ft.
11.C4 38.4 s.

CAPÍTULO 12

12.2 (*a*) 3.24 N. (*b*) 2 kg.
12.4 3.63×10^6 kg·m/s.
12.6 (*a*) 5.00 s. (*b*) 0.612.
12.8 217 ft.
12.10 (*a*) $\mathbf{a}_A = 2.89 \text{ ft/s}^2$ ↗; $\mathbf{a}_B = 1.446 \text{ ft/s}^2$ ↘.
(*b*) 124.0 lb.
12.12 (*a*) 469 m. (*b*) 13.33 kN *C*.
12.14 (*a*) 2.21 m/s² ↗. (*b*) 192.3 N.
12.16 $\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B = 4.65 \text{ ft/s}^2$ →. (*b*) 3.33 lb →.
12.18 169.1 ft.
12.20 $\mathbf{a}_1 = 12.25 \text{ m/s}^2$ ↗; $\mathbf{a}_2 = 3.87 \text{ m/s}^2$ ↙.
12.22 $(mv_0/T_0)\ln 2$.
12.24 45.8 s.
12.26 (*a*) 25.8 ft/s ↓. (*b*) 0.
12.28 (*a*) 33.6 N. (*b*) $\mathbf{a}_A = 4.76 \text{ m/s}^2$ →;
$\mathbf{a}_B = 3.08 \text{ m/s}^2$ ↓; $\mathbf{a}_C = 1.401 \text{ m/s}^2$ ←.
12.30 (*a*) 22.4 ft/s² ⩤ 30°. (*b*) 19.40 ft/s² →.
12.32 (*a*) 2.49 m/s² ←. (*b*) 117.6 N.
12.34 (*a*) 14.24 ft/s. (*b*) 66.4°.
12.36 3.47 m/s.
12.38 $3.01 \text{ m/s} \le v \le 3.96 \text{ m/s}$.
12.40 $9.64 \text{ ft/s} \le v \le 15.85 \text{ ft/s}$.
12.42 (*a*) 0.742*W*. (*b*) 0.940*W*.
12.44 (*a*) 1148 m. (*b*) 282 N; 1189 N.
12.46 $v_A = 86.5$ mi/h; $v_B = 135.1$ mi/h.
12.48 $24.1° \le \theta \le 155.9°$.
12.50 $v_{\min} = \sqrt{gr\tan(\theta - \phi_s)}$; $v_{\max} = \sqrt{gr\tan(\theta + \phi_s)}$
12.52 92.2 mi/h.
12.54 0°; 69.6°; 180°.
12.56 (*a*) No deslizará; 0.611 N ⩤ 75°.
(*b*) Deslizará hacia arriba; 0.957 N ⩤ 40°.
12.58 0.512 s.
12.60 10.1°; 146.5°.
12.62 $\sqrt{eV/mv_0^2}$.
12.64 (*a*) $F_r = 0.745$ lb, $F_\theta = 0$.
(*b*) $F_r = -3.98$ lb, $F_\theta = 3.98$ lb.
12.66 (*a*) $F_r = -118.4$ N, $F_\theta = 0$.
(*b*) $F_r = -39.5$ N, $F_\theta = 79.0$ N.
12.68 (*a*) 64.0 N. (*b*) 15.36 N.
12.70 (*a*) $v_r = -2.40$ m/s, $v_\theta = 3.60$ m/s.
(*b*) $a_r = -54.0 \text{ m/s}^2$, $a_\theta = -57.6 \text{ m/s}^2$.
(*c*) $F_\theta = -11.52$ N.
12.74 (*b*) $2mv_0^2/r_0$.
12.78 (*a*) 35.77×10^3 km, 22,230 mi.
(*b*) 3070 m/s, 10,090 ft/s.
12.80 (*a*) 3880 mi/h. (*b*) 317 mi/h.
12.82 5400 m/s.
12.84 (*a*) 0, 0. (*b*) +300 in./s². (*c*) +6.00 in./s.
12.86 (*a*) 0.450 m/s. (*b*) $a_r = +2.50 \text{ m/s}^2$, $a_\theta = 0$.
(*c*) $+2.84 \text{ m/s}^2$.

12.92 1.90×10^{27} kg.
12.94 18.82 km/s.
12.98 (*a*) 17,120 mi/h. (*b*) 12,720 mi.
12.100 (*a*) 159 m/s. (*b*) 70.1 m/s. (*c*) 2370 m/s.
12.102 3 días 23 h 29 min.
12.104 (*a*) 1 h 32 min 10 s. (*b*) 44 min 27 s.
12.106 19 h 17 min.
12.110 78.6°.
12.116 0.491 m/s^2.
12.118 (*a*) $F_r = -(6.71 \text{ lb}) \cos\theta$, $F_\theta = -(6.71 \text{ lb}) \operatorname{sen}\theta$.
(*b*) $\mathbf{P} = 0$; $\mathbf{Q} = 6.71 \text{ lb} \measuredangle 2\theta$.
12.120 (*a*) $\mathbf{a}_A = 0$; $\mathbf{a}_B = 1.591 \text{ m/s}^2 \swarrow$.
(*b*) $\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B = 0.644 \text{ m/s}^2 \swarrow$.
12.122 (*a*) $a_t = g \cos\theta$; $v = \sqrt{2gl \operatorname{sen}\theta}$. (*b*) 41.8°.
12.124 (*a*) $\mathbf{a}_A = 6.90 \text{ ft/s}^2 \nearrow$; $\mathbf{a}_B = 3.45 \text{ ft/s}^2 \downarrow$.
(*b*) 178.6 lb.
12.126 (*a*) 15,260 mi. (*b*) 7000 ft/s.
12.C1 $\mu = 0.05$: $\mathbf{a}_A = 2.76 \text{ ft/s}^2 \rightarrow$,
$\mathbf{a}_{B/A} = 17.16 \text{ ft/s}^2 \measuredangle 30°$;
$\mu = 0.20$: $\mathbf{a}_A = 0$, $\mathbf{a}_{B/A} = 10.52 \text{ ft/s}^2 \measuredangle 30°$;
$\mu = 0.60$: $\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_{B/A} = 0$.
12.C2 $0 \le \theta \le 8.2°$; $52.1° \le \theta \le 84.7°$;
$176.3° \le \theta \le 180.0°$.
12.C3 33.8°.
12.C4 (*a*) $\theta = 60°$: 2.49×10^3 km, 13.98 min.;
$\theta = 110°$: 10.89×10^3 km, 45.3 min.;
tiempo orbital = 1172 min.
(*b*) $\theta = 60°$: 2.79×10^3 km, 13.64 min.;
$\theta = 110°$: 14.51×10^3 km, 51.0 min.
(*c*) $\theta = 60°$: 3.94×10^3 km, 12.12 min.;
$\theta = 110°$: 59.3×10^3 km, 119.8 min.

CAPÍTULO 13

13.2 (*a*) 1350 J; 45.9 m. (*b*) 1350 J; 278 m.
13.4 2.84 m.
13.6 20.3 ft.
13.8 (*a*) 57.8 m. (*b*) 154 N $\rightarrow$.
13.10 (*a*) 279 ft. (*b*) $F_{AB} = 19.38$ kips C;
$F_{BC} = 8.62$ kips C.
13.12 (*a*) 10.10 ft/s $\nearrow$. (*b*) 121.2 lb.
13.14 (*a*) 5.89 ft/s $\nearrow$. (*b*) 123.9 lb.
13.16 (*a*) 913 mm/s $\rightarrow$. (*b*) 456 mm/s $\leftarrow$. (*c*) 9.38 N.
13.18 (*a*) 17.68 J. (*b*) $\mathbf{F}_A = 125.6 \text{ N} \uparrow$; $\mathbf{F}_B = 137.4 \text{ N} \uparrow$.
13.20 (*a*) 1.098 m/s $\uparrow$. (*b*) $\mathbf{F}_A = 218 \text{ N} \uparrow$; $\mathbf{F}_D = 479 \text{ N} \uparrow$.
(*c*) 391 J.
13.22 $v_1 = 3.43$ m/s; $v_2 = 4.72$ m/s.
13.24 $v_1 = 1.5$ m/s; $v_2 = 2.29$ m/s.
13.26 2.51 lb.
13.28 509 mm.
13.30 (*a*) 2.67 ft/s. (*b*) 20 lb.
13.32 (*a*) 88.5 ft. (*b*) 230 ft/s^2.
13.34 36.6 mm $\downarrow$; 86.3 N $\uparrow$.
13.36 451 mm.
13.38 (*a*) 11.18 km/s. (*b*) 2.37 km/s.
13.40 15,141 ft/s.
13.42 41.8°.
13.44 $\mathbf{a}_n = 64.4 \text{ ft/s}^2 \uparrow$; $\mathbf{a}_t = 24.2 \text{ ft/s}^2 \leftarrow$.
13.46 (*a*) 2.80 m/s; 331 mm. (*b*) $h = 533$ mm;
$d = 98.9$ mm.
13.48 (*a*) 572 W. (*b*) 4.71 s.
13.50 (*a*) 72.7 hp. (*b*) 342 hp.
13.52 Para $t \le 50$ s: $P = (169.3 \text{ kW/s})t$.
Cuando $t = 50$ s: $P = 8.46$ MW.
Para $t > 50$ s: $P = 2.21$ MW.
13.54 3.02 ft/s^2 $\uparrow$.
13.56 (*a*) 375 kW. (*b*) 5.79 km/h.
13.58 3.19 m/s $\leftrightarrow$.
13.60 (*a*) 11.04 ft/s. (*b*) 13.04 ft/s.
13.62 (*a*) 5.12 m/s. (*b*) 4.20 m/s.
13.64 (*a*) 1.981 m/s. (*b*) 221 mm.
13.66 14.45 in.
13.68 (*a*) 2.99 m/s. (*b*) 2.83 m/s.
13.70 $\mu_s = 0.364$; $\mu_k = 0.251$.
13.72 (*a*) 5.21 lb $\measuredangle 30°$. (*b*) 7.08 lb $\uparrow$.
13.74 (*b*) 3.74 m/s $\leftarrow$.
13.76 (*a*) $\cot\phi = 0.243(12 - y)$.
(*b*) 60.0 lb; $\theta_x = 85.7°$, $\theta_y = 71.6°$, $\theta_z = 161.1°$
13.78 (*b*) $V = -(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$.
13.80 (*b*) $V = -\frac{1}{4}(x^2 + y^2)^2$.
13.82 (*a*) $V = mgR[1 - (R/r)]$. (*b*) $T = \frac{1}{2}mgR^2/r$.
(*c*) $E = mgR[1 - (R/2r)]$.
13.84 (*a*) 2.81 MJ/kg. (*b*) 1.330 MJ/kg.
13.88 (*a*) 8.59 m/s. (*b*) 262 mm.
13.90 15.10 m/s.
13.92 (*a*) 25.3 in. (*b*) 7.58 ft/s.
13.96 (*a*) 252 m/s. (*b*) 8.39 km/s.
13.98 (*a*) 7960 ft/s. (*b*) 4820 ft/s.
13.100 3450 m/s.
13.102 21.3×10^3 ft/s.
13.104 63.8°.
13.108 $r_{\max} = (1 + \operatorname{sen}\alpha)r_0$; $r_{\min} = (1 - \operatorname{sen}\alpha)r_0$.
13.112 4 min 20 s.
13.114 6.37 s.
13.116 (*a*) 11.42 s. (*b*) $\mathbf{v} = -(125.5 \text{ m/s})\mathbf{j} - (194.5 \text{ m/}$
13.118 (*a*) 5.64 s. (*b*) $F_{AB} = 19{,}380$ lb T;
$F_{BC} = 8610$ lb T.
13.120 (*a*) 0.549 s. (*b*) 56.8 N.
13.122 (*a*) $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B = 4.81 \text{ m/s} \swarrow$. (*b*) 3.32 N $\nearrow$.
13.124 (*a*) 3.55 m/s $\leftarrow$; 1.686 s. (*b*) 3.40 s.
13.126 (*a*) 7 s. (*b*) 10.99 ft/s $\rightarrow$. (*c*) 13.49 s.
13.128 4550 lb.
13.130 5.21W.
13.132 (*a*) 1.929 km/h $\rightarrow$. (*b*) 44.6 kN.

13.134 (*a*) $\mathbf{v}_{max} = 0.438$ m/s →. (*b*) 1.607 m →. (*c*) 11.25 m ←.
13.136 (*a*) 7.79 ft/s →. (*b*) 83.6 kips ↑.
13.138 (*a*) 223 lb·s. (*b*) 159.2 lb·s.
13.140 (*a*) $\mathbf{v}_A = 3.3$ ft/s →; $\mathbf{v}_B = 6.5$ ft/s →. (*b*) 0.1677 ft·lb.
13.142 0.875.
13.144 $\mathbf{v}_A = 0.0938$ m/s →; $\mathbf{v}_B = 0.281$ m/s →; $\mathbf{v}_C = 1.125$ m/s →.
13.146 (*a*) $\mathbf{v}_A = 0.507\, v_0 \measuredangle 50.2°$; $\mathbf{v}_B = 0.779\, v_0 \measuredangle 30°$.
13.148 (*a*) $\cos\theta = 2r/d$. (*b*) $ABC > \cos^{-1}(2r/d)$; $ACB > \text{sen}^{-1}(2r/d)$.
13.150 $0.728 \le e \le 0.762$.
13.152 (*a*) 22.5°; $2h$. (*b*) 15.7°; $0.610h$.
13.154 (*a*) 0.80. (*b*) 8 in.
13.156 2.80 s.
13.158 $\mathbf{v}_B = 0.795$ ft/s →; $\mathbf{v}_A = 4.58$ ft/s $\measuredangle$ 48.8°.
13.160 $\mathbf{v}_A = 2.68$ m/s $\measuredangle$ 45.7°; $\mathbf{v}_B = 0.624$ m/s ←.
13.162 $\theta_A = 7.3°$; $\theta_B = 25.8°$.
13.164 $d_A = 245$ mm ←; $d_B = 1280$ mm ←.
13.166 (*a*) 898 mm. (*b*) 0.442%.
13.168 1.868 in.
13.170 (*a*) 0.728. (*b*) 1.095 m.
13.172 96.0 mm.
13.174 (*a*) 2088 ft·lb. (*b*) 10 mi/h.
13.176 $v_r = 2.03$ m/s; $v_\theta = 0.225$ m/s.
13.178 (*a*) 7.5 J. (*b*) 13.5 J. (*c*) La parte *b* incluye tanto el trabajo hecho por el niño como el efectuado por el motor del ascensor (elevador) para mantener constante la velocidad.
13.180 95.7 kips.
13.182 155.7 s.
13.184 (*a*) $\frac{1}{2}L$. (*b*) $\frac{1}{4}L$.
13.186 (*a*) 18.75 s. (*b*) 3.33 kN *T*.
13.C1 (*a*) *200 mm* desde *B*: 1.530 m/s; *300 mm* desde *B*: 1.655 m/s. (*b*) 0.335 s.
13.C2 $v_0^2 = 3gr$: $x = -0.649r$; $v_0^2 = 4gr$: $x = 0.296r$.
13.C3 $\phi_0 = 75°$ y $105°$: $h_{min} = 1504$ km, $h_{max} = 17\,390$ km; $\phi_0 = 90°$: $h_{min} = 2400$ km, $h_{max} = 16\,490$ km.
13.C4 $\theta_0 = 0.15°$: (*a*) $v'_A = 0.1448$ m/s, $\theta'_A = 45.0° \measuredangle$; (*b*) $v'_A = 0.226$ m/s, $\theta'_A = 26.3° \measuredangle$; (*c*) $v'_A = 0.609$ m/s, $\theta'_A = 8.6° \measuredangle$. $\theta_0 = 4°$: (*a*) $v'_A = 2.791$ m/s, $\theta'_A = 48.3° \measuredangle$; (*b*) $v'_A = 2.794$ m/s, $\theta'_A = 46.8° \measuredangle$; (*c*) $v'_A = 2.82$ m/s, $\theta'_A = 41.0° \measuredangle$.

CAPÍTULO 14

14.2 (*a*) 6.02 ft/s →. (*b*) 1286 ft/s →.
14.4 (*a*) 12.00 km/h →. (*b*) 3.43 km/h →.
14.6 (*a*) $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B = \mathbf{v}_C = 0.50$ km/h →. (*b*) $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B = 0.25$ km/h →; $\mathbf{v}_C = 1.00$ km/h →.
14.8 (*a*) $v_x = 8.33$ ft/s, $v_z = 7.25$ ft/s. (*b*) $-(4.51$ ft·lb·s)**k**.
14.10 (*a*) (3 m)**i** + (1.5 m)**j** + (1.5 m)**k**. (*b*) (17 kg·m/s)**i** + (19 kg·m/s)**j** − (5 kg·m/s)**k**. (*c*) (2 kg·m²/s)**i** + (24.5 kg·m²/s)**j** + (25.5 kg·m²/s)**k**.
14.12 (*a*) 75.0 mi/h. (*b*) 1.300 s.
14.14 $x = 255$ m, $y = 7.93$ m, $z = -7.00$ m.
14.16 116.7 ft/s $\measuredangle$ 38.2°.
14.18 $v_A = 919$ m/s; $v_B = 717$ m/s; $v_C = 619$ m/s.
14.20 185.6 km/h este, 70.9 km/h sur, 49.2 km/h hacia abajo.
14.26 (*a*) 1293 ft·lb. (*b*) 832 ft·lb.
14.28 (*a*) 39.1 kJ. (*b*) 88.0 kJ.
14.30 (*b*) $E_A = 125.2 \times 10^3$ ft·lb; $E_B = 219.1 \times 10^3$ ft·lb.
14.32 $\mathbf{v}_A = 33.4$ ft/s $\measuredangle$ 32.2°; $\mathbf{v}_B = 18.71$ ft/s $\measuredangle$ 39.4°.
14.34 (*a*) y (*c*) $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B = \frac{1}{2}\mathbf{v}_0$ →. (*b*) $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_0$ →; $\mathbf{v}_B = 0$.
14.36 $v_A = 1.710$ m/s; $v_B = 1.607$ m/s; $v_C = 4.42$ m/s.
14.38 $\mathbf{v}_A = 0.533\, v_0 \measuredangle 30°$; $\mathbf{v}_B = 0.814\, v_0 \measuredangle 19.1°$; $\mathbf{v}_C = 0.231\, v_0$ ←.
14.40 (*a*) $\frac{1}{2}v_0$. (*b*) $\frac{3}{4}v_0$. (*c*) $\frac{1}{8}$.
14.42 $x = 181.7$ mm, $z = 139.4$ mm.
14.44 (*a*) 0.400 m/s →. (*b*) 120.0 mm. (*c*) 6.86 rad/s.
14.46 $\mathbf{v}_A = 2.56$ m/s ↑; $\mathbf{v}_B = 4.24$ m/s $\measuredangle$ 31.9°. (*c*) 2.34 m.
14.48 (*a*) $\mathbf{v}_B = 4.47$ ft/s $\measuredangle$ 63.4°; $\mathbf{v}_C = 8.00$ ft/s →. (*c*) $c = 3.00$ ft.
14.50 7.00 kN $\measuredangle$ 30°.
14.52 16.14 lb →.
14.54 4.18 m/s.
14.56 $Q_1 = 55.3$ gal/min; $Q_2 = 136.3$ gal/min.
14.58 $\mathbf{C}_x = 234$ N ←, $\mathbf{C}_y = 643$ N ↑, $\mathbf{M}_C = 114.9$ N·m↰.
14.60 $\mathbf{C} = 388$ lb ↑; $\mathbf{D} = 512$ lb ↑.
14.62 $\mathbf{C}_x = 112.5$ N ←, $\mathbf{C}_y = 2680$ N ↑; $\mathbf{D} = 3470$ N ↑.
14.64 5.63 kips.
14.66 (*a*) 55.0 kN, 0.909 m debajo de *B*. (*b*) 42.5 kN, 2.35 m debajo de *B*.
14.68 10.32 Mg.
14.70 (*a*) 8.33 ft/s². (*b*) 558 mi/h.
14.72 (*a*) 50.0 kJ/s. (*b*) 41.8 km/h.
14.74 (*a*) 15,450 hp. (*b*) 28,060 hp. (*c*) 0.551.
14.76 19.53 m³/s.
14.78 412 rpm.
14.80 $v = \sqrt{gh}\,\dfrac{e^{(2\sqrt{gh}/L)t} - 1}{e^{(2\sqrt{gh}/L)t} + 1}$
14.82 Caso *1*: (*a*) $g/3$. (*b*) $\sqrt{2gl/3}$. Caso *2*: (*a*) gy/l. (*b*) $\sqrt{gl}$.

14.84 47.4 ft/s^2.
14.86 (*a*) qv_0. (*b*) $m_0a + q(v_0 + 2at)$.
14.88 1030 lb/s.
14.90 (*a*) 31.9 m/s^2 ↑. (*b*) 240 m/s^2 ↑.
14.92 1498 m/s.
14.94 (*a*) 6030 ft/s. (*b*) 31,100 ft/s.
14.96 (*a*) 105,800 ft. (*b*) 669,500 ft.
14.98 (*a*) 173.9 km. (*b*) 6.38 km/s.
14.102 (*a*) 5.54 ft/s. (*b*) 0.641 ft from *B*.
14.104 $\mathbf{C}_x = 103.6$ lb ←, $\mathbf{C}_y = 74.6$ lb ↓;
$\mathbf{D} = 134.5$ lb ↑.
14.106 (*a*) 900 kg. (*b*) 3580 m/s.
14.108 (*a*) $\frac{1}{2}mg$. (*b*) $\frac{1}{2}mg + (mv^2/l)$.
14.110 (*a*) $P = qv$.
14.112 (*a*) $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B = 3.00$ mi/h →; $\mathbf{v}_C = 0$.
(*b*) $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B = \mathbf{v}_C = 2.00$ mi/h →.
14.C1 $\theta_A = 50°$: $\mathbf{v}_A = 81.2$ m/s ∠ 50°,
$\mathbf{v}_B = 41.5$ m/s ∠ 30°;
$\theta_A = 105°$: $\mathbf{v}_A = 113.1$ m/s ∠ 75°,
$\mathbf{v}_B = 72.9$ m/s ∠ 30°.
14.C2 $W_B = 8$ *lb*: $\mathbf{v}_{B/A} = 10.87$ ft/s ∠ 30°,
$\mathbf{v}_A = 2.28$ ft/s →.
$W_B = 16$ *lb*: $\mathbf{v}_{B/A} = 11.69$ ft/s ∠ 30°.
$\mathbf{v}_A = 3.95$ ft/s →.
14.C3 $\alpha = 6°$: $a = 4.97$ ft/s^2, $v = 528$ mi/h;
$\alpha = 12°$: $a = 1.639$ ft/s^2, $v = 496$ mi/h;
$\alpha = 18°$: $a = -1.616$ ft/s^2, $v = 464$ mi/h.
14.C4 $\theta = 30°$: $\mathbf{C} = 1540$ N ∠ 35.8°, $\mathbf{D} = 1622$ N ↑;
$\theta = 60°$: $\mathbf{C} = 1922$ N ∠ 36.0°, $\mathbf{D} = 1546$ N ↑.

CAPÍTULO 15

15.2 (*a*) 1.2 rad; 0.40 rad/s; −0.1333 rad/s^2.
(*b*) 0.759 rad; 1.472 rad/s; −0.0491 rad/s^2.
(*c*) 1.20 rad; 0; 0.
15.4 (*a*) 349 rad/s^2. (*b*) 1000 rpm.
15.6 $\mathbf{v}_B = (5.4 \text{ m/s})\mathbf{j} - (7.2 \text{ m/s})\mathbf{k}$;
$\mathbf{a}_B = -(405 \text{ m/s}^2)\mathbf{i} - (432 \text{ m/s}^2)\mathbf{j} - (324 \text{ m/s}^2)\mathbf{k}$.
15.8 $\mathbf{v}_E = (156 \text{ in./s})\mathbf{i} + (144 \text{ in./s})\mathbf{j} + (60 \text{ in./s})\mathbf{k}$;
$\mathbf{a}_E = -(338 \text{ ft/s}^2)\mathbf{i} + (312 \text{ ft/s}^2)\mathbf{j} + (130 \text{ ft/s}^2)\mathbf{k}$.
15.10 $\mathbf{v}_H = -(0.4 \text{ m/s})\mathbf{i} + (0.7 \text{ m/s})\mathbf{k}$;
$\mathbf{a}_H = -(2 \text{ m/s}^2)\mathbf{i} - (6.5 \text{ m/s}^2)\mathbf{j} - (3 \text{ m/s}^2)\mathbf{k}$.
15.12 66,700 mi/h; 0.01947 ft/s^2.
15.14 (*a*) Polea *A*: 5 rad/s ↰, 7.5 rad/s^2 ↲;
Polea *B*: 8 rad/s ↰, 12 rad/s^2 ↲.
(*b*) 2.09 m/s^2 ∠ 73.3°. (*c*) 3.26 m/s^2 ∠ 79.4°.
15.16 0.780 s; 3.90 rad/s.
15.18 (*a*) 30 ft/s^2 ←. (*b*) 24,300 ft/s^2.
15.20 (*a*) $\omega_C = 120$ rpm; $\omega_B = 275$ rpm.
(*b*) $\mathbf{a}_A = 23.7$ m/s^2 ↑; $\mathbf{a}_B = 19.90$ m/s^2 ↓.
15.22 (*a*) 13.33 rad/s^2 ↰. (*b*) 34.0 rev ↰.
15.24 (*a*) 2.75 rev. (*b*) 1.710 m/s ↓; 3.11 m ↓.
(*c*) 849 mm/s^2 ∠ 32.0°.
15.26 $\boldsymbol{\alpha}_A = 1.309$ rad/s^2 ↰; $\boldsymbol{\alpha}_B = 4.58$ rad/s^2 ↰.
15.28 (*a*) 15.52 s. (*b*) $\boldsymbol{\omega}_A = 445$ rpm ↰; $\boldsymbol{\omega}_B = 371$ rpm ↲.
15.30 $\boldsymbol{\alpha} = bv^2/(2\pi r^3)$ ↲.
15.32 (*a*) 1.173 rad/s ↰. (*b*) 3.33 ft/s ∠ 25°
15.34 (*a*) 3.68 rad/s ↲. (*b*) 1.017 m/s ∠ 70°.
15.36 (*a*) 4 rad/s ↲. (*b*) −(4 in./s)**i**.
15.38 (*a*) (250 mm/s)**i** − (450 mm/s)**j**.
(*b*) $x = 60$ mm, $y = 100$ mm.
15.40 (*a*) 150 rpm ↲. (*b*) 195 rpm ↲.
15.42 (*a*) 236 in./s. (*b*) 9000 rpm. (*c*) 1502.
15.44 $\boldsymbol{\omega}_A = 50$ rpm ↲; $\boldsymbol{\omega}_B = 140$ rpm ↲.
15.46 (*a*) $\mathbf{v}_P = 0$; $\boldsymbol{\omega}_{BD} = 750$ rpm ↰.
(*b*) $\mathbf{v}_P = 52.4$ ft/s →; $\boldsymbol{\omega}_{BD} = 0$.
(*c*) $\mathbf{v}_P = 0$; $\boldsymbol{\omega}_{BD} = 750$ rpm ↲.
15.48 $\boldsymbol{\omega}_{BD} = 5.79$ rad/s ↰; $\mathbf{v}_D = 2.88$ m/s ↓.
15.50 $\boldsymbol{\omega}_{BD} = 1.5$ rad/s ↲; $\boldsymbol{\omega}_{DE} = 4$ rad/s ↰.
15.52 $\boldsymbol{\omega}_{BD} = 4.85$ rad/s ↰; $\boldsymbol{\omega}_{DE} = 6$ rad/s ↰.
15.54 $\mathbf{v}_A = 2.34$ m/s →; $\boldsymbol{\omega} = 0.974$ rad/s ↲.
15.56 Una línea vertical cortando al plano *zx* cuando $x = 0$, $z = 9.34$ ft.
15.58 (*a*) 6 rad/s ↰. (*b*) 600 mm/s ←.
(*c*) 480 mm/s, se enrolla.
15.60 (*a*) 4.27 rad/s ↲. (*b*) 1.330 m/s ↓.
(*c*) 1.557 m/s ∠ 34.7°.
15.62 (*a*) 4 in. debajo de *D*. (*b*) $\boldsymbol{\omega}_{AB} = 2.7$ rad/s ↰;
$\boldsymbol{\omega}_{BE} = 1.2$ rad/s ↰. (*c*) 9.58 in./s ∠ 38.8°.
15.64 (*a*) 2.84 rad/s ↰. (*b*) 1.817 m/s ∠ 82.4°.
15.66 (*a*) $\boldsymbol{\omega}_{AB} = 2.4$ rad/s ↲; $\boldsymbol{\omega}_{BD} = 1.5$ rad/s ↲.
(*c*) 0.75 m/s ∠ 73.7°.
15.68 (*a*) 22.0 in./s ∠ 79.6°. (*b*) 20.6 in./s ∠ 20.5°.
15.70 (*a*) 1260 mm/s ↑. (*b*) 1.25 rad/s ↰.
15.72 (*a*) $\boldsymbol{\omega}_{AB} = 0.9$ rad/s ↲; $\boldsymbol{\omega}_{BD} = 0.338$ rad/s ↲.
(*b*) 78.8 mm/s ←.
15.74 Base: Círculo de 30 in. de radio centrado en la intersección de las tuberías en que se mueven *A* y *B*.
Ruleta: Círculo de 15 in. de radio con centro en la barra *AB* en un punto equidistante de *A* y *B*.
15.80 (*a*) 0.9 rad/s^2 ↲. (*b*) 0.96 m/s^2 ↑.
15.82 (*a*) 6.67 rad/s^2 ↰. (*b*) 180 mm/s^2 ←.
15.84 (*a*) 2.00 m/s^2 ←. (*b*) 1.194 m/s^2 ∠ 70.4°.
(*c*) 1.406 m/s^2 ↑.
15.86 (*a*) 2270 m/s^2 ↑. (*b*) 2270 m/s^2 ∠ 60°.
15.88 37.1 in./s^2 ∠ 46.0°.
15.90 (*a*) 59.8 m/s^2 ↑. (*b*) 190.6 m/s^2 ↑.
15.92 $\mathbf{a}_D = 2930$ ft/s^2 ∠ 45°; $\mathbf{a}_E = 2930$ ft/s^2 ∠ 45°.
15.94 (*a*) 4 rad/s ↰. (*b*) 24 rad/s^2 ↰. (*c*) 10 m/s^2 ↑.
15.96 (*a*) 11.10 rad/s^2 ↲ (*b*) 4.53 rad/s^2 ↲.
15.98 (*a*) 1.232 rad/s^2 ↲. (*b*) 1.848 m/s^2 ∠ 60°.
15.100 (*a*) 1.011 rad/s^2 ↰. (*b*) 5.96 ft/s^2 ∠ 57.0°.

15.104 $\alpha = (v_B \operatorname{sen} \beta)^2 \operatorname{sen} \theta/(l^2 \cos^3 \theta)$

15.106 (*a*) $v_A = b\omega \cos \theta$. (*b*) $a_A = b\alpha \cos \theta - b\omega^2 \operatorname{sen} \theta$.

15.108 $v_C = -2l\omega \operatorname{sen} \theta$. (*b*) $a_C = -2l\alpha \operatorname{sen} \theta - 2l\omega^2 \cos \theta$.

15.110 (*a*) $\omega = (v_0/b) \operatorname{sen}^2 \theta$.
(*b*) $(v_A)_x = (v_0 l/b) \operatorname{sen}^2 \theta \cos \theta$.
$(v_A)_y = (v_0 l/b) \operatorname{sen}^3 \theta$.

15.112 $v_x = v[1 - \cos(vt/r)]$, $v_y = v \operatorname{sen}(vt/r)$.

15.114 $\alpha = (v_0/r)^2 (1 + \cos^2 \theta) \tan^3 \theta$.

15.116 (*a*) 5.16 rad/s ↓. (*b*) 1.339 m/s ◺ 60°.

15.118 $\omega_A = 2.52$ rad/s ↓; $\omega_B = 1.299$ rad/s ↓.

15.120 1893 mm/s ◹ 67.6°.

15.122 $\mathbf{a}_1 = r\omega^2\mathbf{i} + 2u\omega\mathbf{j}$; $\mathbf{a}_2 = -2u\omega\mathbf{i} - r\omega^2\mathbf{j}$;
$\mathbf{a}_3 = (-r\omega^2 - u^2/r + 2u\omega)\mathbf{i}$; $\mathbf{a}_4 = (r\omega^2 - 2u\omega)\mathbf{j}$.

15.124 (*a*) 18.97 in./s ◹ 41.6°. (*b*) 1.622 in./s^2 ◸ 63.7°.

15.126 (*a*) 1006 mm/s ◿ 72.6°.
(*b*) 1811 mm/s^2 ◺ 32.0°.

15.128 (*a*) 809 mm/s ◸ 35.5°. (*b*) 1.723 m/s^2 ◺ 67.6°.

15.130 (*a*) 24.2 in./s ◸ 82.9°. (*b*) 64.4 in./s^2 ◸ 26.6°.

15.132 1.907 rad/s ↓; 90.0 rad/s^2 ↓.

15.134 1.891 rad/s^2 ↰.

15.136 614 in./s^2 ◹ 55.6°.

15.138 (*a*) 0.354 rad/s ↰. (*b*) 0.125 rad/s^2 ↰.

15.140 29.7 m/s^2 ◹ 53.9°.

15.142 (*a*) 3.61 rad/s ↓. (*b*) 86.6 in./s ◸ 30°.
(*c*) 563 in./s^2 ◺ 41.6°.

15.144 (*a*) $-(1.5 \text{ rad/s})\mathbf{i} - (0.75 \text{ rad/s})\mathbf{j} - (1 \text{ rad/s})\mathbf{k}$.
(*b*) $(9 \text{ in./s})\mathbf{i} - (14 \text{ in./s})\mathbf{j} - (3 \text{ in./s})\mathbf{k}$.

15.146 (*a*) $(1.2 \text{ rad/s})\mathbf{i} + (2 \text{ rad/s})\mathbf{j} + (3 \text{ rad/s})\mathbf{k}$.
(*b*) $\mathbf{v}_A = -(1350 \text{ mm/s})\mathbf{i} + (60 \text{ mm/s})\mathbf{j} + (500 \text{ mm/s})\mathbf{k}$; $\mathbf{v}_B = -(1350 \text{ mm/s})\mathbf{i} + (660 \text{ mm/s})\mathbf{j} + (100 \text{ mm/s})\mathbf{k}$.

15.148 (*a*) $-(2260 \text{ rad/s}^2)\mathbf{k}$. (*b*) $(2260 \text{ rad/s}^2)\mathbf{j}$.

15.150 (*a*) $(R\omega_1/r)\mathbf{i} + \omega_1\mathbf{j}$. (*b*) $-(R\omega_1^2/r)\mathbf{k}$.

15.152 $-(12 \text{ rad/s}^2)\mathbf{j} + (5 \text{ rad/s}^2)\mathbf{k}$

15.154 (*a*) $\omega_1\omega_2\mathbf{i}$. (*b*) $-r(\omega_1^2 + \omega_2^2)\mathbf{i}$.
(*c*) $-r\omega_2^2\mathbf{j} + 2r\omega_1\omega_2\mathbf{k}$.

15.156 (*a*) $(0.0375 \text{ rad/s}^2)\mathbf{i}$.
(*b*) $-(5.74 \text{ in./s})\mathbf{i} + (8.19 \text{ in./s})\mathbf{j} - (4.91 \text{ in./s})\mathbf{k}$.
(*c*) $-(2.79 \text{ in./s}^2)\mathbf{i} - (1.434 \text{ in./s}^2)\mathbf{j} + (1.721 \text{ in./s}^2)\mathbf{k}$.

15.158 (*a*) $(0.0375 \text{ rad/s}^2)\mathbf{i} - (0.02 \text{ rad/s}^2)\mathbf{j} - (0.02 \text{ rad/s}^2)\mathbf{k}$.
(*b*) $-(5.74 \text{ in./s})\mathbf{i} + (8.19 \text{ in./s})\mathbf{j} - (4.91 \text{ in./s})\mathbf{k}$.
(*c*) $-(2.33 \text{ in./s}^2)\mathbf{i} - (2.09 \text{ in./s}^2)\mathbf{j} + (2.38 \text{ in./s}^2)\mathbf{k}$.

15.160 (*a*) $(0.75 \text{ rad/s})\mathbf{i} + (1.5 \text{ rad/s})\mathbf{j}$.
(*b*) $(300 \text{ mm/s})\mathbf{i} - (150 \text{ mm/s})\mathbf{j}$.
(*c*) $(60 \text{ mm/s})\mathbf{i} - (30 \text{ mm/s})\mathbf{j} - (90 \text{ mm/s})\mathbf{k}$.

15.162 (*a*) $(28.4 \text{ rad/s})\mathbf{i} + (5.24 \text{ rad/s})\mathbf{j}$. (*b*) $(25.8 \text{ rad/s})\mathbf{i}$.

15.164 (*a*) $\dfrac{\operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} \beta}\omega_1$. (*b*) $\dfrac{\operatorname{sen} (\gamma - \beta)}{\operatorname{sen} \beta}\omega_1$ ◭ γ.
(*c*) $\dfrac{\operatorname{sen} (\gamma - \beta) \operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} \beta}\omega_1^2\,\mathbf{k}$.

15.166 $(54 \text{ in./s})\mathbf{k}$.

15.168 $-(34.5 \text{ mm/s})\mathbf{i}$.

15.170 $-(360 \text{ mm/s})\mathbf{i} - (240 \text{ mm/s})\mathbf{j}$.

15.172 $\omega_1/\cos 20°$.

15.174 (*a*) $-(2.77 \text{ rad/s})\mathbf{i} + (0.615 \text{ rad/s})\mathbf{j} - (4.15 \text{ rad/s})\mathbf{k}$.
(*b*) $(12 \text{ in./s})\mathbf{k}$.

15.176 $-(1148 \text{ in./s}^2)\mathbf{k}$.

15.178 $-(191.6 \text{ mm/s}^2)\mathbf{i}$.

15.180 (*a*) $(72 \text{ in./s})\mathbf{i} + (30 \text{ in./s})\mathbf{j} - (48 \text{ in./s})\mathbf{k}$.
(*b*) $-(288 \text{ in./s}^2)\mathbf{i} - (864 \text{ in./s}^2)\mathbf{k}$.

15.182 (*a*) $(0.75 \text{ m/s})\mathbf{i} + (1.299 \text{ m/s})\mathbf{j} - (1.732 \text{ m/s})\mathbf{k}$.
(*b*) $-(27.1 \text{ m/s}^2)\mathbf{i} + (5.63 \text{ m/s}^2)\mathbf{j} - (15.00 \text{ m/s}^2)\mathbf{k}$.

15.184 (*a*) $(72 \text{ in./s})\mathbf{i} + (30 \text{ in./s})\mathbf{j} - (48 \text{ in./s})\mathbf{k}$.
(*b*) $-(480 \text{ in./s}^2)\mathbf{i} - (80 \text{ in./s}^2)\mathbf{j} - (784 \text{ in./s}^2)\mathbf{k}$.

15.186 (*a*) $-(1.200 \text{ m/s})\mathbf{i} + (2.078 \text{ m/s})\mathbf{j} + (0.900 \text{ m/s})\mathbf{k}$.
(*b*) $-(9.81 \text{ m/s}^2)\mathbf{i} - (4.90 \text{ m/s}^2)\mathbf{j} + (12.47 \text{ m/s}^2)\mathbf{k}$.

15.190 (*a*) $-(0.27 \text{ rad/s}^2)\mathbf{i}$.
(*b*) $(6.24 \text{ in./s})\mathbf{i} - (3.6 \text{ in./s})\mathbf{j} - (16.8 \text{ in./s})\mathbf{k}$.
(*c*) $-(11.70 \text{ in./s}^2)\mathbf{i} - (2.81 \text{ in./s}^2)\mathbf{j} - (7.48 \text{ in./s}^2)\mathbf{k}$.

15.192 $\mathbf{v}_D = -(1.08 \text{ m/s})\mathbf{j} - (1.44 \text{ m/s})\mathbf{k}$;
$\mathbf{a}_D = -(11.52 \text{ m/s}^2)\mathbf{i} + (17.28 \text{ m/s}^2)\mathbf{j} - (6.48 \text{ m/s}^2)\mathbf{k}$.

15.194 (*a*) $-(1.2 \times 10^{-3} \text{ rad/s}^2)\mathbf{k}$.
(*b*) $-(168.9 \text{ mm/s})\mathbf{i} + (225 \text{ mm/s})\mathbf{j} + (230 \text{ mm/s})\mathbf{k}$.
(*c*) $(13.80 \text{ mm/s}^2)\mathbf{i} - (9.20 \text{ mm/s}^2)\mathbf{j} + (14.07 \text{ mm/s}^2)\mathbf{k}$.

15.196 (*a*) $(12 \text{ rad/s}^2)\mathbf{i}$.
(*b*) $-(135 \text{ in./s}^2)\mathbf{i} - (96 \text{ in./s}^2)\mathbf{j} + (225 \text{ in./s}^2)\mathbf{k}$.

15.198 (*a*) $(640 \text{ mm/s})\mathbf{i} - (768 \text{ mm/s})\mathbf{j} + (32 \text{ mm/s})\mathbf{k}$.
(*b*) $-(0.512 \text{ m/s}^2)\mathbf{i} + (0.691 \text{ m/s}^2)\mathbf{j} - (3.12 \text{ m/s}^2)\mathbf{k}$.

15.200 (*a*) $\mathbf{v}_G = (51 \text{ in./s})\mathbf{k}$; $\mathbf{a}_G = (264 \text{ in./s}^2)\mathbf{i} - (45 \text{ in./s}^2)\mathbf{j}$.
(*b*) $\mathbf{v}_H = (20 \text{ in./s})\mathbf{i} - (15 \text{ in./s})\mathbf{j} + (36 \text{ in./s})\mathbf{k}$.
$\mathbf{a}_H = (144 \text{ in./s}^2)\mathbf{i} - (125 \text{ in./s}^2)\mathbf{k}$.

15.202 (*a*) $(0.24 \text{ m/s}^2)\mathbf{j} - (1.856 \text{ m/s}^2)\mathbf{k}$.
(*b*) $-(2.81 \text{ m/s}^2)\mathbf{i} + (0.935 \text{ m/s}^2)\mathbf{k}$.
(*c*) $-(0.24 \text{ m/s}^2)\mathbf{j} + (3.73 \text{ m/s}^2)\mathbf{k}$.

15.204 (*a*) 15 in./s^2 ←.
(*b*) En *AB* 7.5 in. de *A*.

15.206 (*a*) $(b/a)\omega_1$.
(*b*) $(b/a)\omega_1^2 \operatorname{sen} \beta\,\mathbf{k}$.
(*c*) $(b/a)\omega_1^2[(a + b \cos \beta)\mathbf{i} + (b \operatorname{sen} \beta)\mathbf{j}]$.

15.208 (*a*) $\omega = 2.8$ rad/s ↰; $\alpha = 3.2$ rad/s^2 ↓.
(*b*) 1.058 m/s^2 ◹ 67.8°.

15.210 (*a*) 18 rad/s^2 ↓. (*b*) 50 rad/s^2 ↰.

15.212 $-(271 \text{ mm/s}^2)\mathbf{i} - (86.6 \text{ mm/s}^2)\mathbf{k}$.

15.214 (*a*) 3 rad/s ↰. (*b*) 144.6 mm/s ←.
(*c*) 378 mm/s ◹ 52.5°.

15.C1 $\theta = 50°$: $\omega = 2.34$ rad/s ↓, $\mathbf{v}_A = 0.938 \text{ m/s} \rightarrow$;
$\theta = 130°$: $\omega = 4.03$ rad/s ↓,
$\mathbf{v}_A = 0.552 \text{ m/s} \rightarrow$.

15.C2 $\theta = 60°$: (*a*) 41.5 rad/s ↰, 14,470 rad/s² ↓; (*b*) 54.3 ft/s →, 3440 ft/s² →.
$\theta = 120°$: (*a*) 41.5 rad/s ↓, 14,470 rad/s² ↓; (*b*) 36.4 ft/s →, 7530 ft/s² ←.

15.C3 $\theta = 30°$: $\mathbf{v}_B = -(11.38 \text{ in./s})\mathbf{i}$, $\boldsymbol{\omega} = +(4.42 \text{ rad/s})\mathbf{i} + (1.038 \text{ rad/s})\mathbf{j} + (2.40 \text{ rad/s})\mathbf{k}$.
$\theta = 240°$: $\mathbf{v}_B = (5.29 \text{ in./s})\mathbf{i}$, $\boldsymbol{\omega} = -(5.50 \text{ rad/s})\mathbf{i} + (2.03 \text{ rad/s})\mathbf{j} - (2.57 \text{ rad/s})\mathbf{k}$.

15.C4 $\theta = 50°$: $\mathbf{v}_D = (114.9 \text{ mm/s})\mathbf{i} + (96.4 \text{ mm/s})\mathbf{j} + (76.6 \text{ mm/s})\mathbf{k}$, $\mathbf{a}_D = (57.9 \text{ mm/s}^2)\mathbf{i} - (99.6 \text{ mm/s}^2)\mathbf{j} + (77.1 \text{ mm/s}^2)\mathbf{k}$;
$\theta = 120°$: $\mathbf{v}_D = (129.9 \text{ mm/s})\mathbf{i} - (75.0 \text{ mm/s})\mathbf{j} + 86.6 \text{ mm/s})\mathbf{k}$, $\mathbf{a}_D = -(45.0 \text{ mm/s}^2)\mathbf{i} - (112.6 \text{ mm/s}^2)\mathbf{j} - (60.0 \text{ mm/s}^2)\mathbf{k}$.

CAPÍTULO 16

16.2 26.2 ft/s².
16.4 (*a*) 4.09 m/s² →. (*b*) 42.5 N.
16.6 (*a*) 36.8 ft. (*b*) 42.3 ft.
16.8 (*a*) 0.222. (*b*) 2.17 m/s² ◹ 25°.
16.10 (*a*) $\theta = 60.0°$; $P = 107.2$ lb. (*b*) 1.726 ft/s². (*c*) 3.41 lb.
16.12 4.83 m/s² →.
16.14 (*a*) 12.08 ft/s² →. (*b*) 5.00 in. $\le h \le$ 37.0 in.
16.16 $m_C \le 213$ kg.
16.18 $F_{AB} = 2.28$ N C; $F_{CD} = 31.7$ N C.
16.20 (*a*) 27.9 ft/s² ◹ 60°. (*b*) $T_{BF} = 5.73$ lb; $T_{CH} = 2.27$ lb.
16.22 $\mathbf{B}_y = 40.3$ lb ↓; $\mathbf{C}_y = 40.3$ lb ↓.
16.24 72.1 lb.
16.26 $(\mathbf{a}_b)_x = 6.61$ ft/s² →, $(\mathbf{a}_b)_y = 15.67$ ft/s² ↓; $\mathbf{a}_p = 31.3$ ft/s² ◹ 30°.
16.28 $V_B = -40.3$ lb; $|M|_{\max} = 25.2$ lb·ft.
16.32 89.6 N·m.
16.34 (*a*) 39.2 rad/s² ↰. (*b*) 36.5 rad/s² ↰.
16.36 74.5 s.
16.38 128.2 lb.
16.40 49.8 lb.
16.42 $\boldsymbol{\alpha}_A = 15.00$ rad/s² ↰; $\boldsymbol{\alpha}_B = 10.00$ rad/s² ↰.
16.44 (*a*) 10.59 rad/s² ↰. (*b*) 3.18 m/s ↓.
16.46 (1) (*a*) 7.50 rad/s² ↰; (*b*) 22.5 rad/s ↰; (*c*) 14.14 rad/s ↰.
(2) (*a*) 6.38 rad/s² ↰; (*b*) 19.15 rad/s ↰; (*c*) 13.05 rad/s ↰.
(3) (*a*) 4.41 rad/s² ↰; (*b*) 13.24 rad/s ↰; (*c*) 10.85 rad/s ↰.
(4) (*a*) 5.56 rad/s² ↰; (*b*) 16.67 rad/s ↰; (*c*) 8.61 rad/s ↰.
16.48 (*a*) 19.08 rad/s² ↰. (*b*) 5.56 lb ↗.
16.50 (*b*) $\boldsymbol{\omega}_A = \omega_0/(1 + m_B/m_A)$ ↓.
16.52 (*a*) No hay deslizamiento.
(*b*) $\boldsymbol{\alpha}_A = 15.46$ rad/s² ↰; $\boldsymbol{\alpha}_B = 7.73$ rad/s² ↓.
16.54 $\boldsymbol{\alpha} = (2g/r) \operatorname{sen} \phi$ ↰.
16.58 (*a*) 300 mm desde A.
(*b*) $\boldsymbol{\alpha} = 4.00$ rad/s² ↰; $\bar{\mathbf{a}} = 1.800$ m/s² →.
16.60 (*a*) 7.73 rad/s² ↰. (*b*) 1.610 ft/s² →. (*c*) 77.3 in.
16.62 $\boldsymbol{\alpha} = -(0.300 \text{ rad/s}^2)\mathbf{j}$; $\bar{\mathbf{a}} = (0.1350 \text{ m/s}^2)\mathbf{k}$.
16.64 $\mathbf{a}_A = 7.97$ m/s² ↑; $\mathbf{a}_B = 1.578$ m/s² ↑.
16.66 (*a*) $T = W$. (*b*) $\boldsymbol{\alpha} = rg/\bar{k}^2$ ↰.
16.68 (*a*) 698 lb. (*b*) 0.315 rad/s² ↰.
16.70 (*a*) $3g/L$ ↓. (*b*) $1.323g$ ◿ 49.1°. (*c*) $2.18g$ ◹ 66.6°.
16.72 (*a*) g/L ↓. (*b*) $0.866g$ ←. (*c*) $1.323g$ ◸ 49.1°.
16.74 (*a*) $t_1 = \omega_0 r/3\mu_k g$.
(*b*) $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{3}\omega_0 r$ →; $\boldsymbol{\omega}_1 = \frac{1}{3}\omega_0$ ↓.
16.76 (*a*) $t_1 = \dfrac{v_1}{\mu_k g}\dfrac{\bar{k}^2}{r^2 + \bar{k}^2}$.
(*b*) $v_1 \dfrac{\bar{k}^2}{r^2 + \bar{k}^2}$ →; $\dfrac{v_1 r}{r^2 + \bar{k}^2}$ ↰.
16.78 (*a*) 24.0 rad/s² ↓.
(*b*) $\mathbf{A}_x = 6.00$ N ←; $\mathbf{A}_y = 19.62$ N ↑.
16.80 (*a*) 5.00 in. (*b*) 32.2 rad/s² ↓.
16.82 (*a*) 80 mm. (*b*) 41.7 rad/s² ↓.
16.84 $T = \dfrac{1}{2}\dfrac{m}{l}\omega^2(l^2 - x^2)$.
16.86 505 N →.
16.88 41.9 N·mm ↰.
16.90 (*a*) $\frac{9}{7}g$ ↓. (*b*) $\frac{4}{7}W$ ↑.
16.92 (*a*) $1.061g/b$ ↓. (*b*) $\frac{3}{2}g$ ↓. (*c*) $\frac{1}{4}W$ ↑.
16.94 (*a*) 21.1 rad/s² ↓.
(*b*) $\mathbf{A}_x = 32.8$ lb ←, $\mathbf{A}_y = 3.18$ lb ↑.
16.96 (*a*) 86.0 N ↓. (*b*) $\mathbf{A}_x = 69.1$ N ←, $\mathbf{A}_y = 172.0$ N ↑.
16.98 (*a*) 13.50 rad/s² ↰. (*b*) 6.79 N·m ↰.
16.100 (*a*) $1.8g$ ↓. (*b*) $0.2mg$ ↑.
16.102 (*a*) $0.634g/L$ ↓. (*b*) $\mathbf{N} = 0.866mg$ ↑, $\mathbf{F} = 0.287mg$ →. (*c*) 0.332.
16.106 $\bar{a} = \dfrac{r^2}{r^2 + \bar{k}^2} g \operatorname{sen} \beta$.
16.108 3.86 m.
16.110 (*a*) $\boldsymbol{\alpha} = 9.27$ rad/s² ↓; $\bar{\mathbf{a}} = 7.73$ ft/s² →. (*b*) 0.135.
16.112 (*a*) $\boldsymbol{\alpha} = 13.91$ rad/s² ↓; $\bar{\mathbf{a}} = 11.59$ ft/s² →. (*b*) 0.015.
16.114 (*a*) No desliza (*b*) $\boldsymbol{\alpha} = 14.40$ rad/s² ↓; $\bar{\mathbf{a}} = 2.30$ m/s² →.
16.116 (*a*) No desliza (*b*) $\boldsymbol{\alpha} = 21.6$ rad/s² ↓; $\bar{\mathbf{a}} = 3.46$ m/s² →.
16.118 (*a*) 72.4 rad/s² ↓. (*b*) 7.24 m/s² ↓.
16.120 (*a*) $5g/9$ ↓. (*b*) g ↓. (*c*) 0.
16.122 (*a*) $13g/17$ ↓. (*b*) g ↓. (*c*) $2g/3$ ↓.

16.124 $\mathbf{a}_A = 3.01\ \text{ft/s}^2 \rightarrow$; $\mathbf{a}_B = 2.26\ \text{ft/s}^2 \rightarrow$.
16.126 (*a*) $3g/8r \downarrow$. (*b*) $0.395g \measuredangle 71.6°$.
16.128 (*a*) 0.298. (*b*) $0.536g \rightarrow$.
16.130 (*a*) $8.05\ \text{rad/s}^2 \downarrow$. (*b*) 2.60 lb ←. (*c*) 6.50 lb ↑.
16.132 (*a*) 130.4 N ←. (*b*) 64.2 N ↑.
16.134 (*a*) $6.26\ \text{rad/s}^2 \downarrow$. (*b*) 13.22 N ←.
16.136 (*a*) 3.94 lb ←. (*b*) 3.05 lb $\measuredangle 20°$.
16.138 171.7 N →.
16.140 7.10 lb →.
16.142 2.37 rad/s.
16.144 $\mathbf{B} = 3895\ \text{lb} \rightarrow$; $\mathbf{D} = 1873\ \text{lb} \leftarrow$.
16.146 $\mathbf{A}_x = 3m'r^2\omega_0^2 \leftarrow$, $\mathbf{A}_y = m'gr \uparrow$;
$\mathbf{B}_x = \frac{1}{2}m'r^2\omega_0^2 \rightarrow$, $\mathbf{B}_y = m'gr \uparrow$.
16.148 (*a*) $1.950\ \text{m/s}^2 \rightarrow$. (*b*) $34.6\ \text{rad/s}^2 \curvearrowleft$.
16.150 (*a*) $18.49\ \text{ft/s}^2 \measuredangle 25°$. (*b*) $8.38\ \text{rad/s}^2 \downarrow$.
16.152 (*a*) $9.34\ \text{rad/s}^2 \downarrow$. (*b*) $9.93\ \text{m/s}^2 \measuredangle 20°$.
(*c*) 27.3 N $\measuredangle 70°$.
16.154 $\boldsymbol{\alpha}_{AB} = 19.32\ \text{rad/s}^2 \downarrow$; $\boldsymbol{\alpha}_{BC} = 96.6\ \text{rad/s}^2 \curvearrowleft$.
16.156 (*a*) 1.732 N·m, 433 mm debajo de *A*.
16.158 $\mathbf{a}_A = 2.99\ \text{m/s}^2 \uparrow$; $\mathbf{a}_B = 4.91\ \text{m/s}^2 \uparrow$.
16.160 (1) (*a*) $1.2g/c \downarrow$. (*b*) $\bar{\mathbf{a}}_x = 0.3g \leftarrow$, $\bar{\mathbf{a}}_y = 0.6g \downarrow$.
(2) (*a*) $24g/17c \downarrow$. (*b*) $12g/17 \downarrow$.
(3) (*a*) $2.4g/c \downarrow$. (*b*) $0.5g \downarrow$.
16.162 (*a*) 1.550 lb →. (*b*) 1.416 lb $\measuredangle 50°$.
16.164 (*a*) $8.27\ \text{m/s}^2 \downarrow$. (*b*) $9.81\ \text{m/s}^2 \downarrow$.
16.166 (*a*) $6.40\ \text{ft/s}^2 \uparrow$. (*b*) $0.302\ \text{rad/s}^2 \curvearrowleft$.
16.168 (*a*) 25.2 N ←. (*b*) 32.2 N ↓.
16.C1 $m = 40\ kg$: $\mathbf{a} = 0$, $h \leq 937$ mm;
$m = 200\ kg$: $\mathbf{a} = 4.91\ \text{m/s}^2 \rightarrow$, $h \leq 656$ mm;
$m = 400\ kg$: $\mathbf{a} = 6.77\ \text{m/s}^2 \rightarrow$,
10.8 mm $\leq h \leq$ 617 mm.
16.C2 $\theta = 40°$: $\bar{\mathbf{a}} = 0.778g \measuredangle 40°$,
$\mathbf{a}_C = 1.856g \measuredangle 15.6°$;
$\theta = 70°$: $\bar{\mathbf{a}} = 0.532g \measuredangle 70°$,
$\mathbf{a}_C = 0.740g \measuredangle 42.5°$.
16.C3 $\theta = 30°$: $\mathbf{A} = 29.1$ N ↑; $\theta = 60°$: $\mathbf{A} = 23.7$ N ↑.
16.C4 $\theta = 60°$: $\mathbf{B}_x = 1120$ lb →, $\mathbf{B}_y = 235$ lb ↓;
$\mathbf{D}_x = 427$ lb ←, $\mathbf{D}_y = 502$ lb ↓.
$\theta = 120°$: $\mathbf{B}_x = 1946$ lb ←, $\mathbf{B}_y = 995$ lb ↓;
$\mathbf{D}_x = 935$ lb →, $\mathbf{D}_y = 258$ lb ↑.

CAPÍTULO 17

17.2 0.760.
17.4 (*a*) 194.7 rpm. (*b*) 12.73 rev.
17.6 70.1 rev.
17.8 83.6 lb →.
17.10 (*a*) 55.6 rev. (*b*) 5.56 lb ↗.
17.12 $\dfrac{2n}{n^2+1}\sqrt{\dfrac{\pi M_0}{I_n}}$.
17.14 1.417 m/s ↓.
17.16 (*a*) $\sqrt{3g/L} \downarrow$; $2.5W \uparrow$. (*b*) $6.22\ \text{rad/s} \downarrow$; 15 lb ↑.
17.18 (*a*) $6.10\ \text{rad/s} \downarrow$. (*b*) $4\ \text{rad/s} \downarrow$.
17.20 (*a*) 54.0°. (*b*) $0.767\sqrt{gr} \measuredangle 54.0°$.
17.22 $6.98\ \text{rad/s} \downarrow$.
17.24 $7.18\ \text{rad/s} \curvearrowleft$.
17.26 $7.21\ \text{in./s} \measuredangle 15°$.
17.28 (*a*) $5.00\ \text{rad/s} \downarrow$. (*b*) 24.9 N ↑.
17.30 (*a*) 6.68 m/s. (*b*) 2.27 m.
17.32 $1.543\ \text{m/s} \leftarrow$.
17.34 (*a*) $7.32\ \text{rad/s} \curvearrowleft$. (*b*) 139.1 N ↑.
17.36 (*a*) $8.58\ \text{ft/s} \downarrow$. (*b*) 6 lb.
17.38 $\mathbf{v}_A = 11.02\ \text{ft/s} \downarrow$; $\mathbf{v}_B = 6.36\ \text{ft/s} \leftarrow$.
17.40 (*a*) $2.26\ \text{m/s} \downarrow$. (*b*) $1.271\ \text{m/s} \downarrow$.
17.42 $3.39\ \text{rad/s} \curvearrowleft$; $1.798\ \text{m/s} \measuredangle 45°$.
17.44 $3.48\ \text{m/s} \rightarrow$.
17.46 (*a*) $1.043\sqrt{gl} \downarrow$. (*b*) $1.732\sqrt{gl} \downarrow$.
17.48 (*a*) 78.8 lb·ft. (*b*) 32.8 lb·ft.
17.50 (*a*) 1.061 N·m. (*b*) 3.18 N·m.
17.52 0.335 lb·in.
17.54 234 mm.
17.56 $t = \dfrac{1+\mu_k^2}{\mu_k+\mu_k^2}\dfrac{2r}{5g}\omega_0$.
17.58 5.10 s.
17.60 (*a*) $2.86\ \text{m/s} \downarrow$. (*b*) 40.2 N.
17.62 (*a*) $\boldsymbol{\omega}_A = 200$ rpm $\curvearrowleft$; $\boldsymbol{\omega}_B = 300$ rpm $\downarrow$.
(*b*) 8.48 N·s →.
17.68 (*a*) $\dfrac{r^2}{r^2+\bar{k}^2} gt \sin\beta \measuredangle \beta$.
(*b*) $\dfrac{\bar{k}^2}{r^2+\bar{k}^2}\tan\beta$.
17.70 (*a*) $\frac{1}{2}gt \downarrow$. (*b*) $\frac{2}{3}gt \downarrow$.
17.72 2.78 m/s ←.
17.74 (*a*) El tubo se enrollará sin deslizar.
(*b*) Tubo: 0.857 m/s →, 10.71 rad/s ↶;
Placa: 1.714 m/s →.
17.76 (*a*) 23.0 ft/s ↓. (*b*) 6.00 lb.
17.78 (*a*) $(5\bar{v}_0)/(2r) \curvearrowleft$. (*b*) $\bar{v}_0/\mu_k g$.
17.80 $\Delta T = -(3.71 \times 10^{-3}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)\omega_{B/A}^2$.
17.82 (*a*) 2.54 rad/s. (*b*) 1.902 J.
17.84 $\boldsymbol{\omega}_A = \boldsymbol{\omega}_B = 159.1$ rpm $\downarrow$; $\boldsymbol{\omega}_P = 20.9$ rpm $\curvearrowleft$.
17.86 45.5 rpm.
17.88 (*a*) 100.2 mm. (*b*) 5.21 rad/s.
17.90 1.542 m/s.
17.92 $0.594L\omega_1$.
17.94 (*a*) $9.18\ \text{rad/s} \curvearrowleft$. (*b*) $591\ \text{mm/s} \rightarrow$.
17.96 (*a*) 500 mm. (*b*) $3.00\ \text{m/s} \leftarrow$.
17.98 (*a*) $49.6\ \text{ft/s} \leftarrow$. (*b*) 219 lb ←.
17.100 $302\ \text{mm/s} \leftarrow$.
17.102 $\omega_2 = \omega_1/3 \curvearrowleft$; $\bar{\mathbf{v}}_2 = r\omega_1/3$.
17.104 $\omega_2 = \frac{3}{4}(\bar{v}_1/b) \downarrow$; $\bar{\mathbf{v}}_2 = \dfrac{3\sqrt{2}}{8}\bar{v}_1 \measuredangle 45°$.
17.106 (*a*) $0.437\sqrt{g/L} \downarrow$. (*b*) 5.12°.

17.108 $\omega_2 = \frac{3}{2}(\bar{v}_1/b)\downarrow$; $\bar{v}_2 = 0.791\,\bar{v}_1 \measuredangle 71.6°$.

17.110 $\omega = \dfrac{\bar{v}_1}{L}\dfrac{12\,\text{sen}\,\beta}{3\,\text{sen}^2\,\beta + 1}\downarrow$.

17.112 (*a*) $\frac{1}{4}\omega_0\downarrow$. (*b*) $\frac{15}{16}$. (*c*) 1.5°.

17.114 (*a*) 1.918 N·s. (*b*) 2.35 N·s.

17.116 (*a*) $0.6\bar{v}_1\rightarrow$. (*b*) $2.4v_1/L\,\text{⟲}$. (*c*) $0.4\bar{v}_1\rightarrow$.

17.118 $\omega_{AB} = \omega_{CD} = \frac{3}{2}(\bar{v}_1/L)\,\text{⟲}$; $\bar{v}_{AB} = \frac{3}{4}\bar{v}_1\downarrow$; $\bar{v}_{CD} = \frac{1}{4}\bar{v}_1\downarrow$.

17.120 (*a*) 1.801 m/s↓; 7.20 rad/s⟓.
(*b*) 0.6 m/s↑; 14.41 rad/s⟓.

17.122 (*a*) $\omega_A = \omega_1\,\text{⟓}$, $\omega_B = 0$; $\bar{v}_A = 0$, $\bar{v}_B = \bar{v}_1\rightarrow$.
(*b*) $\bar{v}_A = 2\bar{v}_1/7\rightarrow$; $\bar{v}_B = 5\bar{v}_1/7\rightarrow$.
(*c*) El movimiento final es el movimiento del apartado *a*.

17.124 $y^2 = [(2\bar{v}_0^2\,\text{sen}^2\,\theta)/\mu_k g]x$.

17.126 $5v_0/4r$.

17.128 (*a*) 2.8 m/s→. (*b*) 1.727 m/s→.

17.130 $2\omega_0/5$.

17.132 $6\bar{v}_1/5L\downarrow$.

17.136 (*a*) 3.89 m/s ∠ 31.0°. (*b*) 8 rad/s ⟲.

17.138 $v_r = 3.84$ m/s; $v_\theta = 2.40$ m/s.

17.140 14.68 rad/s⟓; 8.95 rad/s⟓.

17.C1 $\theta = 30°$: $\omega_{AB} = 2.86$ rad/s⟓, $\mathbf{v}_D = 2.15$ m/s→;
$\theta = 10°$: $\omega_{AB} = 4.99$ rad/s⟓. $\mathbf{v}_D = 1.300$ m/s→.

17.C2 (*b*) $\theta = 30°$: $\omega = 4.75$ rad/s ⟲;
$\theta = 60°$: $\omega = 7.70$ rad/s ⟲.
(*c*) $t = 0.785$ s.

17.C3 $x = 120$ *mm*: (*a*) 3.20 rad/s, 1.052 m/s;

17.C4 $x = 150$ *mm*: 8.67 m/s↑, 8.89 rad/s⟲;
$x = 300$ *mm*: 3.33 m/s↑, 22.2 rad/s⟲.

CAPÍTULO 18

18.2 $\frac{1}{6}mb^2\omega(\text{sen}\,2\beta\,\mathbf{i} + 2\cos^2\beta\,\mathbf{j})$.

18.4 $\frac{1}{12}ma^2\omega(3\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k})$.

18.6 $(0.234\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s})\mathbf{j} + (1.250\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s})\mathbf{k}$.

18.8 $(0.600\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s})\mathbf{i} + (0.016\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s})\mathbf{j} + (861\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s})\mathbf{k}$.

18.10 $-(1.747\ \text{ft}\cdot\text{lb}\cdot\text{s})\mathbf{i} + (3.59\ \text{ft}\cdot\text{lb}\cdot\text{s})\mathbf{j} + (0.582\ \text{ft}\cdot\text{lb}\cdot\text{s})\mathbf{k}$.

18.14 (*a*) $\frac{2}{5}m'a^3\omega(5\mathbf{i} - 3\mathbf{k})$. (*b*) $\frac{2}{5}m'a^3\omega(5\mathbf{i} - 3\mathbf{k})$.

18.16 (*a*) $-(1.041\ \text{ft}\cdot\text{lb}\cdot\text{s})\mathbf{i} + (1.041\ \text{ft}\cdot\text{lb}\cdot\text{s})\mathbf{j} + (2.31\ \text{ft}\cdot\text{lb}\cdot\text{s})\mathbf{k}$.
(*b*) 147.5°.

18.18 (*a*) $(0.480\ \text{m/s})\mathbf{j}$.
(*b*) $-(3.99\ \text{rad/s})\mathbf{i} + (1.331\ \text{rad/s})\mathbf{j} + (1.504\ \text{rad/s})\mathbf{k}$.

18.20 (*a*) $-(F\,\Delta t/m)\mathbf{k}$. (*b*) $(12F\,\Delta t/7ma)(5\mathbf{i} + \mathbf{j})$.

18.22 (*a*) 0. (*b*) $(F\,\Delta t/ma)(2.5\mathbf{i} - 1.454\mathbf{j} + 2.194\mathbf{k})$.

18.24 (*a*) 0. (*b*) $(3F\,\Delta t/md)(\mathbf{i} - \frac{1}{4}\mathbf{k})$.

18.26 (*a*) $\frac{1}{6}\omega_0(-\mathbf{i} + \mathbf{j})$. (*b*) $\frac{1}{6}\omega_0 a\mathbf{k}$.

18.28 42.9°.

18.30 (*a*) 941 ms. (*b*) $(0.01693\ \text{rad/s})\mathbf{k}$.
(*c*) $-(39.2\ \text{mm/s})\mathbf{j}$.

18.32 (*a*) 22.1 in. (*b*) $\omega_y = 2.34$ rad/s, $\omega_z = 0.487$ rad/s.

18.36 $\frac{1}{8}ma^2\omega^2$.

18.38 10.98 J.

18.40 29.1 ft·lb.

18.42 $(5/48)ma^2\omega_0^2$.

18.44 +229 ft·lb.

18.46 $-\frac{1}{6}mb^2\omega^2\,\text{sen}\,2\beta\,\mathbf{k}$.

18.48 $\frac{1}{6}ma^2\omega^2\mathbf{i}$.

18.50 $(3.75\ \text{N}\cdot\text{m})\mathbf{i}$.

18.52 $\frac{1}{12}ma^2(2\omega^2\mathbf{i} + 3\alpha\mathbf{j} + 2\alpha\mathbf{k})$.

18.54 (*a*) 0.0453 in. debajo del eje;
$I_{xy} = -2.35 \times 10^{-3}\ \text{lb}\cdot\text{ft}\cdot\text{s}^2$, $I_{xz} = 0$.
(*b*) $\mathbf{F} = -(41.8\ \text{lb})\mathbf{j}$; $\mathbf{M}_C = (20.8\ \text{lb}\cdot\text{ft})\mathbf{k}$.

18.56 $\mathbf{A} = (2w/3g)r^2\omega^2\mathbf{k}$; $\mathbf{B} = -(2w/3g)r^2\omega^2\mathbf{k}$.

18.58 (*a*) $(20.0\ \text{rad/s}^2)\mathbf{j}$.
(*b*) $\mathbf{A} = -(3.75\ \text{N})\mathbf{k}$; $\mathbf{B} = -(1.250\ \text{N})\mathbf{k}$.

18.60 (*a*) $\pi(w/g)r^3\alpha\mathbf{i}$.
(*b*) $\mathbf{A} = (2w/3g)r^2\alpha\mathbf{j}$; $\mathbf{B} = -(2w/3g)r^2\alpha\mathbf{j}$.

18.62 (*a*) $(0.437\ \text{lb}\cdot\text{ft})\mathbf{i}$.
(*b*) $\mathbf{A} = -(1.210\ \text{lb})\mathbf{j} + (0.378\ \text{lb})\mathbf{k}$;
$\mathbf{B} = (1.210\ \text{lb})\mathbf{j} - (0.378\ \text{lb})\mathbf{k}$.

18.64 1.30°; *A* se moverá hacia arriba.

18.66 5630 lb·ft.

18.68 (*a*) $1.528\sqrt{g/a}$. (*b*) $0 \le \omega \le 1.225\sqrt{g/a}$.

18.70 $\omega = 2.70\sqrt{g/L}$.

18.72 $\mathbf{A} = -\frac{1}{4}ma\omega_1\omega_2\mathbf{k}$; $\mathbf{B} = \frac{1}{4}ma\omega_1\omega_2\mathbf{k}$.

18.74 $\mathbf{A} = -(11.65\ \text{lb})\mathbf{i}$; $\mathbf{M}_A = (2.91\ \text{lb}\cdot\text{ft})\mathbf{i} + (8.73\ \text{lb}\cdot\text{ft})\mathbf{k}$.

18.76 (*a*) $\mathbf{M}_1\mathbf{j} = 0$. (*b*) $\mathbf{A} = -(18.00\ \text{N})\mathbf{i} - (13.50\ \text{N})\mathbf{k}$;
$\mathbf{M}_A = (3.75\ \text{N}\cdot\text{m})\mathbf{i} - (0.281\ \text{N}\cdot\text{m})\mathbf{k}$.

18.78 (*a*) $-(5.39\ \text{lb}\cdot\text{ft})\mathbf{j}$.
(*b*) $\mathbf{A} = -(11.65\ \text{lb})\mathbf{i} + (3.49\ \text{lb})\mathbf{k}$;
$\mathbf{M}_A = (5.53\ \text{lb}\cdot\text{ft})\mathbf{i} + (8.73\ \text{lb}\cdot\text{ft})\mathbf{k}$.

18.80 (*a*) $\mathbf{M}_1 = -\frac{1}{12}mL^2\omega_1\omega_2\,\text{sen}\,2\theta\,\mathbf{j}$.
(*b*) $\mathbf{M}_2 = \frac{1}{24}mL^2\omega_1^2\,\text{sen}\,2\theta\,\mathbf{k}$.
(*c*) $\mathbf{C} = \frac{1}{6}mL\omega_1\omega_2\,\text{sen}^2\,\theta\,\mathbf{k}$; $\mathbf{D} = -\frac{1}{6}mL\omega_1\omega_2\,\text{sen}^2\,\theta\,\mathbf{k}$.

18.82 1326 rpm.

18.84 (*c*) −7.8%.

18.86 (*a*) 30.0°. (*b*) 24.9°. (*c*) 37.4°.

18.88 (*a*) 128.3 rad/s. (*b*) 2.17 in.

18.90 (*a*) 11.40 rpm. (*b*) 11.82 rpm y 322 rpm.

18.96 (*c*) 16.05°; $-2.13\dot{\psi}$.

18.98 14.01 rev/h.

18.100 Eje de precesión: $\theta_x = 125.0°$, $\theta_y = 36.6°$, $\theta_z = 80.7°$; velocidad de precesión, 0.946 rad/s (retrógrada); rotación, 0.1593 rad/s.

18.102 (*a*) 109.4 rpm;
$\gamma_x = 90°$, $\gamma_y = 100.05°$, $\gamma_z = 10.05°$.
(*b*) $\theta_x = 90°$, $\theta_y = 113.9°$, $\theta_z = 23.9°$.
(*c*) Velocidad de precesión, 47.1 rpm; rotación, 64.6 rpm

18.104 (*a*) $\beta = 27.5°$.
(*b*) Velocidad de precesión, 83.5 rpm; rotación, 112.8 rpm.
18.106 (*a*) $-\theta_0 \le \theta \le \theta_0$.
(*b*) $\dot{\phi}_0 \sin\theta_0[(1 + \cos^2\theta_0)/2]^{\frac{1}{2}}$.
(*c*) $\frac{1}{2}\dot{\phi}_0(1 + \cos^2\theta_0)$.
18.110 (*a*) 47.0 rad/s.
(*b*) Velocidad de precesión, 6.36 rad/s; rotación, 50.1 rad/s.
18.112 27.5°.
18.118 Cuando *B*: 6 $^1/_4$ in. debajo del árbol; cuando *C*:
18.120 (112.8 g·m²/s)**i** + (80 g·m²/s)**j**. [$3^1/_8$ in. encima.
18.122 (*a*) (0.825 kg·m²/s)**i** + (0.592 kg·m²/s)**j**.
(*b*) 1.510 J.
18.124 (*a*) (2.71 lb·ft)**j**.
(*b*) $\mathbf{F} = -(5.30\text{ lb})\mathbf{i} - (1.988\text{ lb})\mathbf{k}$;
$\mathbf{M}_O = (2.69\text{ lb·ft})\mathbf{i} - (4.42\text{ lb·ft})\mathbf{k}$.
18.126 (2.00 rad/s)**i** − (0.225 rad/s)**j** + (0.0675 rad/s)**k**.
18.128 $\sqrt{8g/11a}$.
18.C1 $\theta = 60°$: $\boldsymbol{\omega} = (3.75\text{ rad/s})\mathbf{i} - (10.83\text{ rad/s})\mathbf{j}$, ejes a través de *O* formando 70.9° ↘ con el eje *x*.
$\theta = 150°$: $\boldsymbol{\omega} = (0.335\text{ rad/s})\mathbf{i} - (6.25\text{ rad/s})\mathbf{j}$, ejes a través de *O* formando 86.9° ↘ con el eje *x*.
18.C2 $b = 8$ *in.*: $\omega_x = 0.1085$ rad/s, $\omega_y = 1.950$ rad/s, $\omega_z = 0.674$ rad/s, $\omega = 2.07$ rad/s, $\Delta T = +174.0$ ft·lb;
$b = 24$ *in.*: $\omega_x = 0.326$ rad/s, $\omega_y = 1.950$ rad/s, $\omega_z = 0.370$ rad/s, $\omega = 2.01$ rad/s, $\Delta T = +158.0$ ft·lb.
18.C3 $\dot{\psi} = 1200$ *rpm*, $\theta = 30°$: (*a*) 78.3 rpm, (*b*) 62.4 rpm, (*c*) −20.3%.
$\dot{\psi} = 2400$ *rpm*, $\theta = 30°$: (*a*) 32.59 rpm, (*b*) 31.21 rpm, (*c*) −4.2%.
18.C4 $\dot{\psi}_0 = 1835$ rpm; $\tau = 0.211$ s.

CAPÍTULO 19

19.2 10 mm; 3.18 Hz.
19.4 4.01 ft/s; 64.4 ft/s².
19.6 (*a*) 2.48 mm; 0.0979 in. (*b*) 0.621 mm; 0.0245 in.
19.8 (*a*) 327 N/m. (*b*) 14.78 mm debajo de la posición de equilibrio; 841 mm/s ↑; 1.933 m/s² ↑.
19.10 (*a*) 0.0569 s. (*b*) 4.91 ft/s ↑; 24.2 ft/s² ↑.
19.12 (*a*) 0.738 s; 1.355 Hz. (*b*) 0.887 ft/s; 7.55 ft/s².
19.14 (*a*) 0.517 s; 1.934 Hz. (*b*) 0.365 m/s; 4.43 m/s².
19.16 (*a*) 6.82 lb. (*b*) 33.4 lb/ft.
19.18 (*a*) 6.80 kg. (*b*) 0.583 s.
19.22 (*a*) 3.56 kg. (*b*) 43.7 kg.
19.26 (*a*) 1.794 s. (*b*) 1.825 s. (*c*) 2.12 s.
19.28 (*a*) 0.430 s. (*b*) 0.584 m/s.
19.30 (*a*) 0.491 s. (*b*) 9.60 in./s.
19.32 (*a*) 1.117 rad/s. (*b*) 400 mm.
19.34 (*a*) 20 in. (*b*) 0.309 s.
19.36 (*a*) $f = (1/2\pi)\sqrt{2k/m}$. (*b*) $f = (1/2\pi)\sqrt{6b^2k/l^2m}$. (*c*) $1/\sqrt{3}$.
19.42 (*a*) $l/\sqrt{12}$. (*b*) $4.77\sqrt{l/g}$.
19.44 (*a*) $\tau = 2\pi\sqrt{5b/6g}$. (*b*) $b/4$.
19.46 $f = (1/2\pi)\sqrt{18g/17l}$.
19.48 128.8 mm.
19.50 (*a*) $\tau = 2\pi\sqrt{3r/2g}$. (*b*) $r/2$.
19.52 11.17 mm.
19.54 (*a*) 0.952 s. (*b*) 1.099 s.
19.56 (*a*) 0.327 s. (*b*) 12.07 in./s.
19.62 75.5°.
19.64 (*a*) $\tau = 2\pi\sqrt{7l/6g}$. (*b*) $\tau = 2\pi\sqrt{5l/6g}$.
19.66 (*a*) $f = (1/2\pi)\sqrt{2g/3c}$. (*b*) $f = (1/2\pi)\sqrt{4g/5c}$.
19.70 4.56 Hz.
19.72 508 N/m.
19.74 $\tau = 2\pi\sqrt{10l/9g}$.
19.76 0.911 Hz.
19.78 (*a*) 0.291 l. (*b*) $f = 0.209\sqrt{g/l}$.
19.80 $\tau = 2\pi\sqrt{(\pi - 2)r/g}$.
19.82 1.135 s.
19.84 (*a*) y (*b*) 0.322 s.
19.86 (*a*) 83.3 mm. (*b*) 59.5 mm.
19.88 $\omega > \sqrt{2k/m}$.
19.90 $\sqrt{g/2l} < \omega < \sqrt{3g/2l}$.
19.92 (*a*) 203 rpm. (*b*) 43.0 μm.
19.94 274 rpm.
19.96 (*a*) 219 μm. (*b*) 960 μm. (*c*) Infinite.
19.98 1.286 mm o 1.800 mm.
19.100 0.686 in. o 4.80 in.
19.104 0.644 Hz; 0.455 Hz.
19.106 (*a*) 19.70 mi/h. (*b*) 0.481 in.
19.114 (*a*) 8.13×10^{-3}. (*b*) 0.356 N·s/m.
19.116 (*a*) 6400 lb/ft. (*b*) 0.1432 s.
19.120 (*a*) 0.0481 in. (*b*) 0.0234 in.
19.122 (*a*) 0.0905. (*b*) 366 N·s/m.
19.124 2.19 kN·s/m.
19.126 (*a*) 297 rpm. (*b*) 252 rpm. (*c*) 0.335 in.; 0.361 in.
19.128 $m\dfrac{d^2x_A}{dt^2} + 5kx_A - 2kx_B - c\dfrac{d}{dt}(x_B - x_A) = 0$

$m\dfrac{d^2x_B}{dt^2} - 2kx_A + 2kx_B + c\dfrac{d}{dt}(x_B - x_A) = P_m \operatorname{sen}\omega t$.
19.130 (*a*) E/R. (*b*) L/R.
19.134 (*a*) $m\dfrac{d^2x_m}{dt^2} + k_2x_m + c\dfrac{d}{dt}(x_m - x_A) = 0$;

$c\dfrac{d}{dt}(x_A - x_m) + k_1x_A = 0$.

(*b*) $L\dfrac{d^2q_m}{dt^2} + \dfrac{q_m}{C_2} + R\dfrac{d}{dt}(q_m - q_A) = 0$;

$R\dfrac{d}{dt}(q_A - q_m) + \dfrac{q_A}{C_1} = 0$.

19.136 (*a*) $\tau = 6.82\sqrt{r/g}$. (*b*) $\tau = 6.68\sqrt{r/g}$.

19.138 (*a*) 5.81 Hz; 4.91 mm; 179.1 mm/s. (*b*) 491 N. (*c*) 159.2 mm/s ↑.

19.140 $f = (1/2\pi)\sqrt{2\mu_k g/l}$.

19.142 0.760 lb·ft·s^2; 8.66 in.

19.144 3.32 s.

19.C1 $\theta = 60°$: 1 término, 1.0625; 2 términos, 1.0713; 4 términos, 1.0731; 8 términos, 1.0732; 16 términos, 1.0732.

19.C2 $m_C = 0.5$ *kg*: (*a*) 0.641 s, 102.2 mm; (*b*) 0.428 s, 45.4 mm; (*c*) 0.321 s, 25.6 mm.
$m_C = 1.5$ *kg*: (*a*) 0.828 s, 170.3 mm; (*b*) 0.552 s, 75.7 mm; (*c*) 0.414 s, 42.6 mm.

19.C3 $\omega = 500$ *rpm*: $x_m = 0.00515$ in. (en fase); $a_m = 1.176$ ft/s^2.
$\omega = 1000$ *rpm*: $x_m = 0.001535$ in. (fuera de fase); $a_m = 1.403$ ft/s^2.

19.C4 $\omega = 500$ *rpm*: $x_m = 0.00435$ in.; $a_m = 0.994$ ft/s^2; $\varphi = 32.3°$.
$\omega = 1000$ *rpm*: $x_m = 0.001528$ in.; $a_m = 1.397$ ft/s^2; $\varphi = -5.39°$.

APÉNDICE B

9.88 (*a*) $0.0699\,ma^2$. (*b*) $0.320\,ma^2$.

9.90 (*a*) $I_{AA'} = mb^2/24$; $I_{BB'} = mh^2/18$. (*b*) $m(3b^2 + 4h^2)/72$.

9.92 (*a*) $ma^2/3$. (*b*) $3ma^2/2$.

9.94 $\frac{1}{2}ma^2(2n + 1)/(4n + 1)$.

9.96 $m(3a^2 + 2h^2)/20$; $\sqrt{(3a^2 + 2h^2)/20}$.

9.98 $m(b^2 + 3h^2)/5$.

9.100 $\frac{1}{3}mR^2(1 - \cos\phi)(2 + \cos\phi)$

9.102 1.514 kg·m^2; 155.7 mm.

9.104 $2mr^2/3$; $0.816r$.

9.106 (*a*) $r_a = 176.9$ mm. (*b*) 87.8 mm.

9.108 (*a*) $\frac{1}{2}\rho\pi h(a_2^4 + 2a_2^2a_1^2 - 3a_1^4)$. (*b*) $a_2/\sqrt{3}$. (*c*) $\frac{2}{3}\rho\pi h a_2^4$.

9.110 (*a*) 5.14×10^{-3} kg·m^2. (*b*) 7.54×10^{-3} kg·m^2. (*c*) 3.47×10^{-3} kg·m^2.

9.112 $I_x = I_z = 36.1 \times 10^{-3}$ lb·ft·s^2; $I_y = 30.0 \times 10^{-3}$ lb·ft·s^2.

9.114 0.883 g·m^2.

9.116 31.1×10^{-3} lb·ft·s^2.

9.118 (*a*) 9.97 kg·m^2. (*b*) 4.96 kg·m^2.

9.120 $I_{xy} = I_{zx} = 0$; $I_{yz} = -3.53 \times 10^{-3}$ lb·ft·s^2.

9.122 $I_{xy} = 14.13$ g·m^2; $I_{yz} = 37.7$ g·m^2; $I_{zx} = 113.0$ g·m^2.

9.124 $I_{xy} = I_{yz} = 6.71 \times 10^{-3}$ lb·ft·s^2; $I_{zx} = 2.24 \times 10^{-3}$ lb·ft·s^2.

9.128 $(3ma^2/20)(a^2 + 6h^2)/(a^2 + h^2)$.

9.130 23.6×10^{-3} lb·ft·s^2.

9.132 (*a*) $I_{xy} = \frac{1}{4}ma^2$; $I_{yz} = 0$; $I_{zx} = -\frac{1}{4}ma^2$. (*b*) $2ma^2/3$.

9.134 $17ma^2/54$.

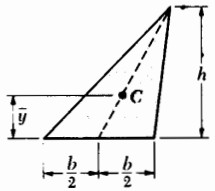
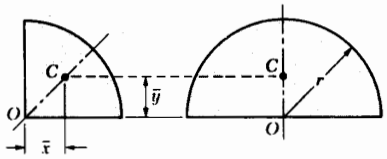
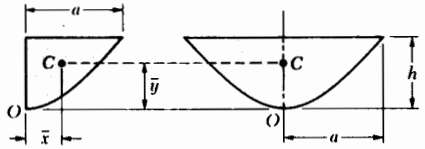
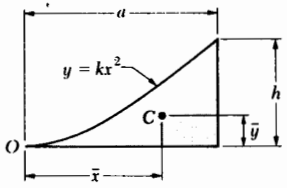
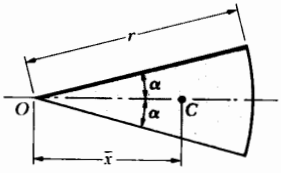
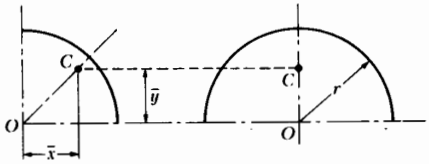
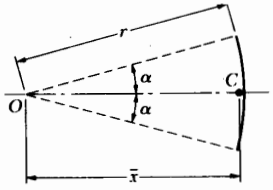
9.136 (*a*) 2. (*b*) $\frac{1}{2}$.

***Unidades del sistema anglosajón y sus equivalentes en el SI**

Magnitud	Unidad del sistema anglosajón	Equivalente del SI
Aceleración	ft/s^2	0.3048 m/s^2
	in/s^2	0.0254 m/s^2
Área	ft^2	0.0929 m^2
	in^2	645.2 mm^2
Energía	ft·lb	1.356 J
Fuerza	kip	4.448 kN
	lb	4.448 N
	oz	0.2780 N
Impulso	lb·s	4.448 N·s
Longitud	ft	0.3048 m
	in	25.40 mm
	mi	1.609 km
Masa	oz masa	28.35 g
	lb masa	0.4536 kg
	slug	14.59 kg
	ton	907.2 kg
Momento de una fuerza	lb·ft	1.356 N·m
	lb·in	0.1130 N·m
Momento de inercia		
De un área	in^4	0.4162 × 10^6 mm^4
De una masa	lb·ft·s^2	1.356 kg·m^2
Momento lineal	lb·s	4.448 kg·m/s
Potencia	ft·lb/s	1.356 W
	hp	745.7 W
Presión o tensión	lb/ft^2	47.88 Pa
	lb/in^2 (psi)	6.895 kPa
Velocidad	ft/s	0.3048 m/s
	in/s	0.0254 m/s
	mi/h (mph)	0.4470 m/s
	mi/h (mph)	1.609 km/h
Volumen	ft^3	0.02832 m^3
	in^3	16.39 cm^3
Líquidos	gal	3.785 L
	qt	0.9464 L
Trabajo	ft·lb	1.356 J

*Los símbolos de pie y de pulgada son ft e in, oficialmente aceptados en algunos países. También se aceptan pie y pulg.

Centros de gravedad de formas geométricas usuales

Forma		$\bar{x}$	$\bar{y}$	Área
Área triangular			$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
Área de un cuarto de círculo		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$
Semicírculo		0	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$
Areas parabólicas		$\frac{3a}{8}$	$\frac{3h}{5}$	$\frac{2ah}{3}$
		0	$\frac{3h}{5}$	$\frac{4ah}{3}$
		$\frac{3a}{4}$	$\frac{3h}{10}$	$\frac{ah}{3}$
Sector circular		$\frac{2r\,\text{sen}\alpha}{3\alpha}$	0	αr^2
Cuadrante de circunferencia		$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{\pi r}{2}$
Semicircunferencia		0	$\frac{2r}{\pi}$	πr
Arco de		$\frac{r\,\text{sen}\alpha}{\alpha}$	0	$2\alpha r$