MECÁNICA

DINÁMICA DE LOS SISTEMAS DE PARTÍCULAS

MECÁNICA

DINÁMICA DE LOS SISTEMAS DE PARTÍCULAS

Introducción

Un conjunto de partículas constituyen un sistema si entre ellas se ejercen interacciones mutuas. Para conocer el comportamiento del sistema en su conjunto, será necesario adicionar y generalizar los principios que rigen el comportamiento de las partículas en su interacción, llegando por este medio a formular las leyes de la dinámica que rigen el comportamiento de los sistemas.

.Fuerzas actuantes

Considérese un sistema de *n* partículas sobre las que pueden estar actuando fuerzas exteriores. E1 sistema de fuerzas puede estar en equilibrio (resultante y momento nulos) o bien puede reducirse a una resultante (fuerzas concurrentes), a una cupla o a una resultante y una cupla.

Las fuerzas exteriores pueden ser activas, es decir, verdaderas causa externas de cambios dinámicos, o pueden ser fuerzas reactivas, proporcionadas por los vínculos externos a los que esté sujeto el sistema. Se denominará $\vec{F}_i$ a la resultante de las fuerzas exteriores que actúa sobre la partícula *i*.

Las interacciones entre las partículas del sistema se manifiestan por fuerzas interiores al mismo, es decir fuerzas entre sus partículas.

En el estudio que se desarrollará en adelante se supondrá que la interrelación o acción mutua entre la partícula *i* y la partícula *j*, se expresa por dos fuerzas opuestas, a saber: la $\vec{f}_{ij}$ que es la fuerza que actúa sobre la partícula *i* debido a la acción de la partícula *j*, y la fuerza $\vec{f}_{ji}$ que es la fuerza que actúa sobre la partícula *j* debido a la acción de la partícula *i*. De modo tal que:

$$\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$$

Sobre la partícula *i* actuarán (*n-1*) fuerzas interiores debido a las (*n-1*) partículas restantes del sistema. Conviniendo que es nula la fuerza que la partícula *i* ejerce sobre si misma, o sea que $\vec{f}_{ii} = 0$, la resultante de todas las fuerzas interiores que actúan sobre dicha partícula *i* vale $\sum_{j=1}^{n} \vec{f}_{ij}$.

Así pues, la fuerza total que actúa sobre la partícula *i*, teniendo en cuenta las fuerzas exteriores e interiores, es:

$$\vec{F}_i + \sum_{j=1}^{n} \vec{f}_{ij} \qquad (1)$$

Para calcular la resultante de todas las fuerzas actuantes sobre las *n* partículas del sistema, deberá efectuarse la suma de 1a expresión (1) para $1 \le i \le n$, obteniéndose:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \vec{f}_{ij}$$

E1 primer sumando constituye la resultante del sistema de las fuerzas exteriores actuante sobre el sistema de partículas, a la cuál llamaremos $\vec{F}$. E1 segundo sumando es la resultante de las fuerzas internas. Según los supuestos hechos para ellas, resulta:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\vec{f}_{ij} = 0 \qquad (2)$$

Obsérvese además, que el momento de las fuerzas interiores respecto de un punto cualquiera del espacio es nulo, o sea:

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i \times \sum_{j=1}^{n}\vec{f}_{ij} = 0 \qquad (3)$$

en que $\vec{r}_i$ es el vector posición de la partícula *i* respecto del punto arbitrario según el cual se toman los momentos. Por lo tanto:

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\vec{f}_{ij} = \vec{F} \qquad (4)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i \times \left(\vec{F}_i + \sum_{j=1}^{n}\vec{f}_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{M} \qquad (5)$$

La segunda de estas expresiones dice que el momento de todas las fuerzas actuantes, respecto de un punto arbitrario, es igual a1 momento de las fuerzas exteriores respecto de dicho punto, equivalente al momento $\vec{M}$ de la resultante del sistema.

NOTA: Grados de libertad de un sistema

Los vínculos exteriores a que está sometido un sistema aportan a éste fuerzas reactivas. Si los vínculos son ideales, las fuerzas reactivas no incluyen fuerzas de rozamiento. En general, las fuerzas de vínculo no proporcionan trabajo en ese caso.

Una partícula en el espacio tiene tres grados de libertad, pero los vínculos imponen restricciones en su movimiento. Si la partícula está obligada a moverse por una guía en forma de curva en el espacio, definida por la intersección de dos superficies de ecuaciones:

$$f_1(x, y, z) = 0$$

$$f_2(x, y, z) = 0$$

las coordenadas de la partícula deben satisfacer en todo instante a estas ecuaciones. Así pues, supuesta una de las tres coordenadas de la posición de una partícula, las otras dos quedan determinadas por las ecuaciones de esta curva, con lo que la partícula tiene ahora un solo grado de libertad.

Dos partículas en el espacio totalizan seis grados de libertad. Si están unidas por una barra inextensible de longitud *l*, las seis coordenadas deben satisfacer la ecuación:

$$l^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

La cantidad de grados de libertad de este sistema de dos partículas queda reducido a. cinco; la sexta coordenada está determinada por la ecuación de vínculo.

Generalizando estas consideraciones se llega a las siguientes conclusiones:

- Un sistema de *n* partículas requiere *3n* números para dar la posición de cada partícula en el espacio, haciendo abstracción de la forma en que las partículas están vinculadas.
- Si una o varias partículas están vinculadas con vínculos tales que las restricciones que éstos imponen al movimiento están dados por expresiones de la forma

$$\Phi(x_1, y_1, z_1, x_2, ..., y_n, z_n) = 0$$

o bien $$\Phi(x_1, y_1, z_1, x_2, ..., y_n, z_n, t) = 0$$

los movimientos de las partículas quedan restringidos. La cantidad de movimientos o coordenadas independientes se denominan “grados de libertad” del sistema.

- La cantidad de grados de libertad del sistema es igual a la cantidad de coordenadas que deben darse para definir su configuración, haciendo abstracción de los vínculos, menos la cantidad de ecuaciones de vínculo. Siendo:

GL: cantidad de grados de libertad.
C: cantidad de coordenadas que definen la configuración del sistema.
V: cantidad de ecuaciones de vínculo.
se verifica:

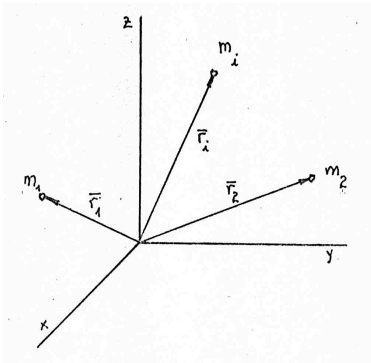
$$GL = C - V$$

2. Baricentro de un sistema

Sea un sistema de *n* partículas m_i. Se llama "masa equivalente m_e" a la suma de las masas m_i

$$m_e = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

Supóngase que las masas están referidas a un sistema coordenado.



Sea $\vec{r}_i$ el vector que posiciona a la masa m_i con respecto al origen O del sistema coordenado. Se define como Momento Estático o Momento de Primer Orden $\vec{S}_O$ a la suma de los productos de cada masa m_i por el vector r_i que la posiciona respecto del origen O

$$\vec{S}_O = \sum_{i=1}^{n} m_i.\vec{r}_i$$

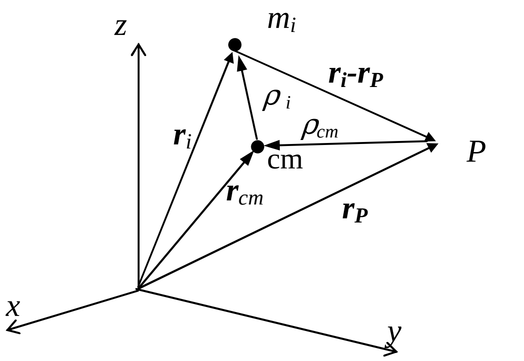
Obsérvese que ésta es una suma de términos vectoriales. La sumatoria también es un vector.

Se denomina "baricentro del sistema de partículas" al punto referenciado por e1 vector

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i.\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i.\vec{r}_i}{m_e}$$

o sea que, suponiendo concentrada la masa total del sistema en el baricentro, el momento estático del sistema respecto del origen O es igual al de la masa equivalente supuesta concentrada en el baricentro.

$$m_e.\vec{r}_c = \sum_{i=1}^{n} m_i.\vec{r}_i \qquad (6)$$



Si la referencia es un punto P cualquiera, posicionado por el vector $\vec{r}_P$, el momento estático del sistema respecto de P estará dado por:

$$\vec{S}_P = \sum_{i=1}^{n} m_i\left(\vec{r}_i - \vec{r}_P\right) = \sum_{i=1}^{n} m_i.\vec{r}_i - \sum_{i=1}^{n} m_i.\vec{r}_P =$$
$$= m_e.\vec{r}_c - m_e.\vec{r}_P = m_e\left(\vec{r}_c - \vec{r}_P\right)$$

Si el punto de referencia coincide con el baricentro, $\vec{r}_c = \vec{r}_P$ y por lo tanto <u>el momento estático de un sistema respecto de su baricentro es nulo</u>.

Otra forma de comprobar esta afirmación es recurriendo a un observador que no rota pero se traslada con el baricentro, en general en forma acelerada. Este recurso será utilizado frecuentemente en el estudio de sistemas de partículas y del cuerpo rígido. Este observador posicionará a la partícula m_i con el vector posición $\vec{\rho}_i = \vec{r}_i - \vec{r}_P$ resulta:

$\vec{S}_c = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\rho}_i = 0$ resultando también nulas sus derivadas temporales:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\vec{\rho}}_i = 0 \qquad\qquad \sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\vec{\rho}}_i = 0 \quad (7)$$

3. <u>Cantidad de movimiento de un sistema de partículas</u>

Para la partícula de masa m_i, la cantidad de movimiento respecto del observador inercial está dada por:

$$\vec{p}_i = m_i.\dot{\vec{r}}_i$$

La cantidad de movimiento del sistema será igual a la suma de las correspondientes a las *n* partículas que lo componen

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i.\dot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i.\left(\dot{\vec{r}}_c + \dot{\vec{\rho}}\right) = \sum_{i=1}^{n} m_i.\dot{\vec{\rho}} + \sum_{i=1}^{n} m_i.\dot{\vec{r}}_c$$

Pero $\sum_{i=1}^{n} m_i.\dot{\vec{\rho}}_i = 0$ por ser la derivada temporal del momento estático respecto del baricentro. Luego:

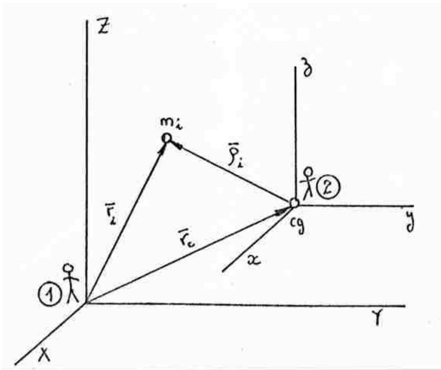
$$\vec{p} = m_e.\dot{\vec{r}}_c \qquad (3\text{-}1)$$

4. <u>Ecuación del movimiento de un sistema de partículas</u>

Sea un sistema de *n* partículas. Se aplicará a cada una de ellas la expresión de Newton $\vec{F} = m.\vec{a}$

$$\vec{F}_i + \sum_{j=1}^{n} \vec{f}_{ij} = m_i.\ddot{\vec{r}}_i$$

Recurriendo al observador que se traslada con el baricentro, éste posiciona a la partícula m_i mediante el vector $\vec{\rho}_i$, resultando:



$$\vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{\rho}_i$$

Por lo tanto:

$$\ddot{\vec{r}}_i = \ddot{\vec{r}}_c + \ddot{\vec{\rho}}_i$$

luego

$$\vec{F}_i + \sum_{j=1}^{n} \vec{f}_{ij} = m_i.\ddot{\vec{r}}_c + m_i.\ddot{\vec{\rho}}_i$$

Sumando las *n* expresiones así obtenidas:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \vec{f}_{ij} = \sum_{i=1}^{n} m_i.\ddot{\vec{r}}_c + \sum_{i=1}^{n} m_i.\ddot{\vec{\rho}}_i \qquad (4\text{-}1)$$

El segundo sumando del primer término es nulo (suma de las fuerzas interiores). En la sumatoria del primer término del segundo miembro puedo sacarse $\ddot{\vec{r}}_c$ como factor común, quedando:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i.\ddot{\vec{r}}_c = \ddot{\vec{r}}_c \sum_{i=1}^{n} m_i = m_e.\ddot{\vec{r}}_c$$

La sumatoria del segundo término de la (4-1) es la derivada segunda del momento estático del sistema respecto del baricentro, que, como se ha visto, resulta nula. Por lo tanto, y teniendo en cuenta la (3-4), la (4-1) resulta:

$$\vec{F} = m_e.\ddot{\vec{r}}_c \qquad (3\text{-}8)$$

O sea que el movimiento del sistema de partículas como un todo se describe por el movimiento de su baricentro. Este a su vez es el que resulta para la masa equivalente supuesta concentrada en el baricentro y actuando sobre ella la resultante de las fuerzas exteriores.
Obsérvese que, derivando la ecuación (3-1) que proporciona la cantidad de movimiento de un sistema se obtiene la (4-8)*, tal como en una partícula, verificándose:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

Por 1o tanto, si $F = 0$ entonces $p = cte$

Viceversa, si la cantidad de movimiento del sistema es constante, la resultante de las fuerzas exteriores es nula.

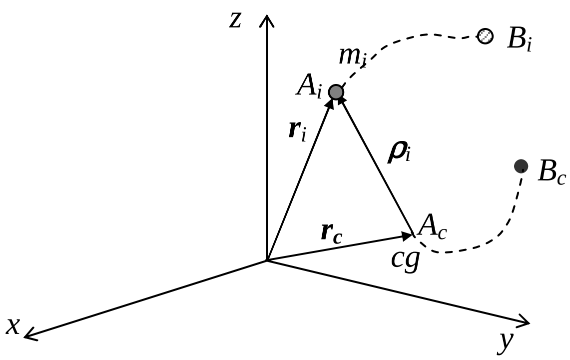
Ello no significa que el sistema de fuerzas exteriores esté en equilibrio, pues puede reducirse a una cupla. En ese caso, si bien no habrá aceleración del baricentro, existirá un movimiento rotatorio y/o de aproximación y alejamiento de las partículas respecto del baricentro.

4. <u>Trabajo total de un sistema</u>

Sea un sistema de *n* partículas. Supongamos que las mismas experimentan un corrimiento finito. Digamos que cada partícula *i* se ha movido desde una posición inicial A_i a una posición final B_i. Así mismo, el baricentro del sistema se habrá movido desde una posición inicial A_c hasta una posición final B_c.

Calcularemos el trabajo de todas las fuerzas actuantes en esos corrimientos. El trabajo W_i de las fuerzas actuantes sobre la partícula *i* vale:

$$W_i = \int_{A_i}^{B_i} \left(\vec{F}_i + \sum_{j=1}^{n} \vec{f}ij \right) \bullet d\vec{r}_i$$



Pero:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{\rho}_i$$

Luego:

$$d\vec{r}_i = d\vec{r}_c + d\vec{\rho}_i$$

Al cambiar las variables de integración deben cambiarse también los límites correspondientes. Estos son A_c y B_c para $\vec{r}_c$ y A_i y B_i para $\vec{\rho}_i$.

$$W_i = \int_{A_c}^{B_c} \vec{F}_i \bullet d\vec{r}_c + \int_{A_c}^{B_c} \sum_{j=1}^{n} \vec{f}ij \bullet d\vec{r}_c + \int_{A_i}^{B_i} \left(\vec{F}_i + \sum_{j=1}^{n} \vec{f}ij \right) \bullet d\vec{\rho}_i$$

E1 trabajo total será igual a la suma de los trabajos sobre cada partícula:

$$W = \sum_{i=1}^{n} W_i = \sum_{i=1}^{n} \int_{A_c}^{B_c} \vec{F}_i \bullet d\vec{r}_c + \sum_{i=1}^{n} \int_{A_c}^{B_c} \sum_{j=1}^{n} \vec{f}ij \bullet d\vec{r}_c + \sum_{i=1}^{n} \int_{A_i}^{B_i} \left(\vec{F}_i + \sum_{j=1}^{n} \vec{f}ij \right) \bullet d\vec{\rho}_i$$

Para los dos primeros términos en que la variable de integración $\vec{r}_c$ es independiente del índice *i* de la sumatoria, los signos $\sum$ e $\int$ son intercambiables (conmutativos).

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{A_c}^{B_c} \vec{F}_i \bullet d\vec{r}_c = \int_{A_c}^{B_c} \left(\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \right) \bullet d\vec{r}_c = \int_{A_c}^{B_c} \vec{F} \bullet d\vec{r}_c$$

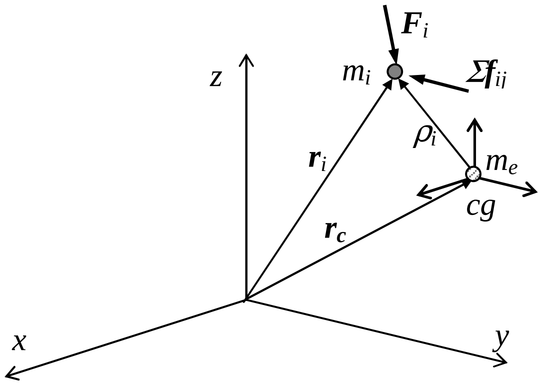
$$\sum_{i=1}^{n} \int_{A_c}^{B_c} \sum_{j=1}^{n} \vec{f}ij \bullet d\vec{r}_c = \int_{A_c}^{B_c} \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \vec{f}ij \right) \bullet d\vec{r}_c = 0$$

Por lo tanto:

$$W = \int_{A_c}^{B_c} \vec{F} \bullet d\vec{r}_c + \sum_{i=1}^{n} \int_{A_i}^{B_i} \left(\vec{F}_i + \sum_{j=1}^{n} \vec{f}ij \right) \bullet d\vec{\rho}_i \qquad (3\text{-}9)$$

El primer sumando es el trabajo de las fuerzas exteriores a lo largo del camino del baricentro.

E1 segundo sumando es el trabajo de las fuerzas actuantes sobre cada partícula en sus recorridos relativos al baricentro. Téngase en cuenta que $\vec{\rho}_i$ es el vector que posiciona a cada masa m_i respecto del baricentro.



Otra forma de interpretar esta expresión resulta de suponer un observador que se traslada con el baricentro, sin rotar.

Suponiendo que la masa equivalente está en el baricentro y que sobre ella actúa la resultante de las fuerzas exteriores, la (3-8) proporciona la ecuación diferencial del movimiento del baricentro y el primer término de la (3-9) da el trabajo de la resultante de fuerzas exteriores en dicho movimiento.

E1 segundo término de la (3-9) es el trabajo que el observador en el baricentro mide para las partículas, sujetas a las fuerzas exteriores e interiores, en su movimiento relativo a dicho observador.

3.5. Energía cinética y su relación con el trabajo

La energía cinética de una partícula está dada por

$$T_i = \frac{1}{2}.m_i \left(\dot{\vec{r}}_i \bullet \dot{\vec{r}}_i \right) \qquad (3.10)$$

siendo $\vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{\rho}_i$

resulta $\dot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{r}}_c + \dot{\vec{\rho}}_i$

Reemplazando en (3-10)

$$T_i = \frac{1}{2}.m_i.\left(\dot{\vec{r}}_c + \dot{\vec{\rho}}_i \right) \bullet \left(\dot{\vec{r}}_c + \dot{\vec{\rho}}_i \right) = \frac{1}{2}.m_i.\left(\dot{\vec{r}}_c \bullet \dot{\vec{r}}_c \right) + \frac{1}{2}.m_i.\left(\dot{\vec{\rho}}_i \bullet \dot{\vec{\rho}}_i \right) + m_i.\left(\dot{\vec{r}}_c \bullet \dot{\vec{\rho}}_i \right)$$

La energía del sistema se calcula como suma de las energías de cada partícula

$$T = \sum_{i=1}^{n} T_i = \frac{1}{2}.\sum_{i=1}^{n} m_i.\left(\dot{\vec{r}}_c \bullet \dot{\vec{r}}_c \right) + \frac{1}{2}.\sum_{i=1}^{n} m_i.\left(\dot{\vec{\rho}}_i \bullet \dot{\vec{\rho}}_i \right) + \sum_{i=1}^{n} m_i.\left(\dot{\vec{r}}_c \bullet \dot{\vec{\rho}}_i \right)$$

En el primer término, $\dot{\vec{r}}_c \bullet \dot{\vec{r}}_c$ es factor común de la sumatoria:

$$\frac{1}{2}.\sum_{i=1}^{n} m_i.\left(\dot{\vec{r}}_c \bullet \dot{\vec{r}}_c \right) = \frac{1}{2}.\left(\dot{\vec{r}}_c \bullet \dot{\vec{r}}_c \right).\sum_{i=1}^{n} m_i = \frac{1}{2}.m_e.\left(\dot{\vec{r}}_c \bullet \dot{\vec{r}}_c \right)$$

En el tercer sumando $\dot{\vec{r}}_c$ es factor común:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i.\left(\dot{\vec{r}}_c \bullet \dot{\vec{\rho}}_i \right) = \dot{\vec{r}}_c \bullet \sum_{i=1}^{n} m_i. \bullet \dot{\vec{\rho}}_i = 0$$

La sumatoria es nula por ser la derivada del momento estático respecto del baricentro. Por lo tanto:

$$T = \frac{1}{2}.m_e.\left(\dot{\vec{r}}_c \bullet \dot{\vec{r}}_c \right) + \frac{1}{2}.\sum_{i=1}^{n} m_i.\left(\dot{\vec{\rho}}_i \bullet \dot{\vec{\rho}}_i \right) \qquad (3\text{-}11)$$

El primer sumando expresa la energía del sistema en su conjunto, debido a su traslación en el espacio. Esta fracción de la energía total del sistema, denominada <u>energía cinética traslacional</u> es igual a la que correspondería a la masa equivalente supuesta concentrada en el baricentro y moviéndose con su velocidad.

E1 segundo término es la suma de les energías de cada partícula en sus movimientos relativos al baricentro. Obsérvese que $\dot{\vec{\rho}}_i = \dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}_c$, es la velocidad relativa de la partícula *i* respecto del baricentro. En dichos movimientos, las partículas pueden girar alrededor del baricentro y aproximarse o alejarse de él. En el caso particular de un cuerpo rígido, las infinitas partículas que lo componen sólo pueden girar alrededor del baricentro, pues por definición de cuerpo rígido, no puede variar la distancia relativa entre dos de sus puntos.

Para cada partícula de un sistema se cumple la relación:

$$W_i\Big|_{A_i}^{B_i} = T_i\Big|_{B_i} - T_i\Big|_{A_i}$$

Para todo el sistema se verifica:

$$W = \Delta T$$

Calculando el trabajo y la variación de energía cinética entre las posiciones inicial y final

$$\int_{A_C}^{B_C} \vec{F} \bullet d\vec{r}_c + \sum_{i=1}^{n} \int_{A_I}^{B_i} \left(\vec{F}_i + \sum_{j=1}^{n} \vec{f}_{ij} \right) \bullet d\vec{\rho}_i = \frac{1}{2}.m_e.\left(\dot{\vec{r}}_c \bullet \dot{\vec{r}}_c\right)\Big|_{A_C}^{B_C} + \frac{1}{2}.\sum_{i=1}^{n} m_i.\left(\dot{\vec{\rho}}_i \bullet \dot{\vec{\rho}}_i\right)\Big|_{A_i}^{B_i} \qquad (3\text{-}12)$$

Desarrollando $\int_{A_c}^{B_c} \vec{F} \bullet d\vec{r}_c$ teniendo en cuenta que $\vec{F} = m_e.\ddot{\vec{r}}_c$

$$\int_{A_C}^{B_C} \vec{F} \bullet d\vec{r}_c = \int_{A_C}^{B_C} m_e.\ddot{\vec{r}}_c \bullet d\vec{r}_c = \int_{A_C}^{B_C} m_e.\frac{d\dot{\vec{r}}_c}{dt} \bullet d\vec{r}_c = \int_{A_C}^{B_C} m_e.\dot{\vec{r}}_c \bullet d\dot{\vec{r}}_c$$

siendo $\dot{\vec{r}}_c \bullet d\dot{\vec{r}}_c = \frac{1}{2} d\left(\dot{\vec{r}}_c \bullet \dot{\vec{r}}_c\right)$

$$\int_{A_C}^{B_C} \vec{F} \bullet d\vec{r}_c = \int_{A_C}^{B_C} m_e.\dot{\vec{r}}_c \bullet d\dot{\vec{r}}_c = \frac{1}{2}.\int_{A_C}^{B_C} m_e.d\left(\dot{\vec{r}}_c \bullet \dot{\vec{r}}_c\right) = \frac{1}{2}.m_e.\left(\dot{\vec{r}}_c \bullet \dot{\vec{r}}_c\right)\Big|_{A_C}^{B_C} \qquad (3\text{-}13)$$

Siendo iguales los primeros términos de ambos miembros de la igualdad (3-12) los segundos también lo son.

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{A_i}^{B_i} \left(\vec{F}_i + \sum_{j=1}^{n} \vec{f}_{ij} \right) \bullet d\vec{\rho}_i = \frac{1}{2}.\sum_{i=1}^{n} m_i.\left(\dot{\vec{\rho}}_i \bullet \dot{\vec{\rho}}_i\right)\Big|_{A_i}^{B_i} \qquad (3\text{-}14)$$

La 3-13 expresa que *el trabajo de la resultante de las fuerzas exteriores a lo largo del recorrido del baricentro entre dos posiciones extremas es igual a la variación entre dichas posiciones de la energía cinética de la masa equivalente, supuesta concentrada en el baricentro y moviéndose con su velocidad.*

La 3-14 expresa que *la suma de los trabajos de las fuerzas exteriores e interiores que actúan sobre cada partícula en .sus movimientos relativos al baricentro entre posiciones extremas, es igual a la suma de las variaciones de energía cinética de cada partícula en sus velocidades relativas al baricentro*. Estos términos son los que mediría un observador tipo 2 ubicado en el baricentro y moviéndose con él.

3.6. <u>Energía cinética referida a un punto cualquiera</u>

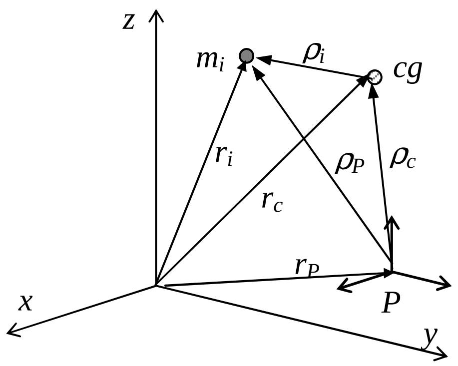
Sea un sistema de *n* partículas m_i y sea P un punto cualquiera referenciado respecto del origen inercial mediante el vector $\vec{r}_P$ y que se mueve con velocidad $\dot{\vec{r}}_P$ y aceleración $\ddot{\vec{r}}_P$.

Supondremos que el punto P es origen de una terna móvil que se traslada con *P* pero no rota. Este observador referencia a la partícula m_i mediante el vector $\vec{\rho}_{Pi}$ y al baricentro del sistema mediante el vector $\vec{\rho}_c$.

Siendo $\vec{r}_i = \vec{r}_P + \vec{\rho}_{Pi}$ la energía del sistema de partículas puede expresarse por:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{1=1}^{n} m_i \dot{\vec{r}}_i \bullet \dot{\vec{r}}_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\dot{\vec{r}}_P + \dot{\vec{\rho}}_{Pi}\right)\bullet\left(\dot{\vec{r}}_P + \dot{\vec{\rho}}_{Pi}\right)$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\dot{\vec{r}}_P \bullet \dot{\vec{r}}_P\right) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\dot{\vec{\rho}}_{Pi} \bullet \dot{\vec{\rho}}_{Pi}\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(\dot{\vec{r}}_P \bullet \dot{\vec{\rho}}_{Pi}\right)$$



En el primer término $\dot{\vec{r}}_P \bullet \dot{\vec{r}}_P$ es factor común de la sumatoria y en cl tercero lo es $\dot{\vec{r}}_P$. Este último puede escribirse:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\left(\dot{\vec{r}}_P \bullet \dot{\vec{\rho}}_{Pi}\right) = \dot{\vec{r}}_P \bullet \sum_{i=1}^{n} m_i . \dot{\vec{\rho}}_{Pi}$$

y siendo el momento estático respecto de P:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i . \vec{\rho}_{Pi} = m_e . \vec{\rho}_c$$

puede escribirse:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\left(\dot{\vec{r}}_P \bullet \dot{\vec{\rho}}_{Pi}\right) = \dot{\vec{r}}_P \bullet m_e \vec{\rho}_c = m_e \dot{\vec{r}}_P \bullet \vec{\rho}_c$$

Por lo tanto, la expresión de la energía cinética referida a un punto cualquiera P resulta:

$$T = \frac{1}{2}.\sum_{i=1}^{n} m_i\left(\dot{\vec{r}}_P \bullet \dot{\vec{r}}_P\right) + \frac{1}{2}.\sum_{i=1}^{n} m_i\left(\dot{\vec{\rho}}_{Pi} \bullet \dot{\vec{\rho}}_{Pi}\right) + m_e \dot{\vec{r}}_P \bullet \vec{\rho}_c \qquad (3\text{-}15)$$

E1 significado de los términos de esta expresión es el siguiente:

1er sumando: Energía de la masa equivalente, supuesta concentrada en el punto P y moviéndose con su velocidad.

2er sumando: Energía de cada masa en su movimiento relativo al punto P.

3er sumando: Producto escalar de la cantidad de movimiento de la masa equivalente supuesta concentrada en el punto P y moviéndose con él, por la velocidad relativa del baricentro respecto del punto P. Si P coincide con el baricentro, este tercer sumando se anula y se obtiene la expresión 3-11 ya vista.

3.7. <u>Conservación de la energía mecánica total</u>

Supóngase que en un sistema de partículas la fuerza total que actúa sobre la partícula *i* depende de las posiciones de las *n* partículas restantes que lo integran.

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i\left(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_n\right)$$

Tal el caso en que la fuerza exterior $\vec{F}_i$ dependa de la posición de m_i y las fuerzas interiores de las posiciones relativas de las restantes masas m_j respecto de m_i.

Existirá entonces una función potencial de la cual derivan las distintas fuerzas totales (exteriores más interiores) que actúan sobre cada partícula m_i. La función potencial dependerá de las coordenadas del sistema. Si la referencia utilizada son coordenadas cartesianas, se tendrá:

$$V = V\left(x_1; y_1; z_1; x_2; ...; x_n; y_n; z_n\right)$$

De este modo, las componentes de la fuerza total (exterior más interior) sobre la partícula m_i son:

$$F_{iX} = -\frac{\partial V}{\partial x_i}; \qquad F_{iY} = -\frac{\partial V}{\partial y_i}; \qquad F_{iZ} = -\frac{\partial V}{\partial z_i}$$

La ecuación de Newton $\vec{F} = m.\vec{a}$ planteada sobre cada partícula puede escribirse entonces: en sus componentes escalares:

$$-\frac{\partial V}{\partial x_i} = m_i \frac{d\dot{x}_i}{dt}; \qquad -\frac{\partial V}{\partial y_i} = m_i \frac{d\dot{y}_i}{dt}; \qquad -\frac{\partial V}{\partial z_i} = m_i \frac{d\dot{z}_i}{dt}$$

Multiplicando cada una de las expresiones por $\dot{x}_i; \dot{y}_i; \dot{z}_i$; respectivamente y sumando:

$$m_i\left(\dot{x}_i \frac{d\dot{x}_i}{dt} + \dot{y}_i \frac{d\dot{y}_i}{dt} + \dot{z}_i \frac{d\dot{z}_i}{dt}\right) = m_i \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{x}_i^2 + \frac{1}{2}\dot{y}_i^2 + \frac{1}{2}\dot{z}_i^2\right) =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m_i.v_i^2\right) = -\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}.\frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y_i}.\frac{dy_i}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z_i}.\frac{dz_i}{dt}\right)$$

O sea que para cada partícula *i* existe una expresión de la forma:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m_i.v_i^2\right) + \frac{\partial V}{\partial x_i}.\frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y_i}.\frac{dy_i}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z_i}.\frac{dz_i}{dt} = 0$$

Sumando las *n* expresiones de este tipo correspondientes a las *n* partículas:

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}m_i.v_i^2\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}.\frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y_i}.\frac{dy_i}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z_i}.\frac{dz_i}{dt}\right) = 0$$

Puede observarse que el segundo término de esta expresión vale:

$$\frac{1}{dt}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}.dx_i + \frac{\partial V}{\partial y_i}.dy_i + \frac{\partial V}{\partial z_i}.dz_i\right) = \frac{dV}{dt}$$

E1 primer término es la derivada respecto del tiempo de la energía cinética del sistema. Por lo tanto puede escribirse:

$$\frac{d}{dt}(T+V) = 0$$

Como consecuencia

$$T + V = E = cte$$

O sea que si todas las fuerzas presentes en un sistema de partículas derivan de una función potencial, siendo el campo conservativo, la suma de la energía cinética total del sistema más la potencial es constante. Este enunciado constituye el teorema de conservación de energía mecánica.

Si solamente la resultante de las fuerzas exteriores deriva de una función potencial V_c que es función de las coordenadas del baricentro (o sea que es sólo función de la posición del baricentro), dado que en este caso

$$\vec{F} = m_e.\ddot{\vec{r}}_c$$

resultará:

$$T_c + V_c = E_c$$

en que T es la energía cinética de la masa equivalente supuesta concentrada en el baricentro y moviéndose con él (energía cinética traslacional).

Se considerará ahora el caso de las fuerzas interiores solamente. Supóngase que la fuerza interior que actúa cobre la partícula *i* debido a la partícula *j* sólo depende de la. posición relativa de *j* respecto de *i*, o sea del vector $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$.

En tal caso, la resultante de las fuerzas interiores sobre la partícula *i* vale:

6

$$\sum_{j=1}^{n} \vec{f}_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \vec{f}_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

Si la función vectorial $\vec{f}_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$ es tal que puede definirse una función de energía potencial

$$V_{ij}(\vec{r}_{ij}) = -\int_{\vec{r}_s}^{\vec{r}_{ij}} \vec{f}_{ij}(\vec{r}_{ij}) \bullet d\vec{r}_{ij}$$

debe cumplirse que $\mathbf{rot}.\vec{f}_{ij} = 0$, tomándose en esta expresión a las derivadas respecto de las variables

$$x_{ij} = x_i - x_j \,; \qquad y_{ij} = y_i - y_j \,; \qquad z_{ij} = z_i - z_j$$

Las fuerzas interiores podrán obtenerse entonces de la función potencial, de la siguiente manera:

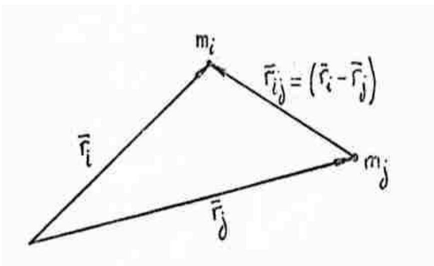
$$\vec{f}_{ij} = -\frac{\partial V_{ij}}{\partial\left(x_i - x_j\right)}.\breve{i} - \frac{\partial V_{ij}}{\partial\left(y_i - y_j\right)}.\breve{j} - \frac{\partial V_{ij}}{\partial\left(z_i - z_j\right)}.\breve{k}$$

Obsérvese que siendo

$$V_{ij} = V_{ij}(x_i - x_j; y_i - y_j; z_i - z_j)$$

resultará

$$\frac{\partial V_{ij}}{\partial\left(x_i - x_j\right)} = \frac{\partial V_{ij}}{\partial x_i} - \frac{\partial V_{ij}}{\partial x_j}$$



Por lo tanto:

$$\vec{f}_{ij} = -\frac{\partial V_{ij}}{\partial .x_i}.\breve{i} - \frac{\partial V_{ij}}{\partial .y_i}.\breve{j} - \frac{\partial V_{ij}}{\partial .z_i}.\breve{k}$$

y de la misma manera:

$$\vec{f}_{ji} = -\frac{\partial V_{ij}}{\partial .x_j}.\breve{i} - \frac{\partial V_{ij}}{\partial .y_j}.\breve{j} - \frac{\partial V_{ij}}{\partial .z_j}.\breve{k}$$

comprobándose por lo tanto que

$$\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$$

la energía potencial total del sistema de partículas será la suma de todos los V_{ij}, extendida a todos los pares de partículas:

$$V^i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} V_{ij}(\vec{r}_{ij})$$

Ejemplo de fuerzas internas conservativas son las gravitacionales, las electromagnéticas y las elásticas.

Si en un sistema hay fuerzas disipativas, la energía mecánica total ya no será constante. Su variación equivaldrá al trabajo de las fuerzas disipativas:

$$E_B - E_A = W_n$$

3.8. Cantidad de movimiento de un sistema de partículas

Para la partícula de masa m_i, la cantidad de movimiento respecto del observador inercial está dada por:

$$\vec{p}_i = m_i.\dot{\vec{r}}_i$$

La cantidad de movimiento del sistema será igual a la suma de las correspondientes a las *n* partículas que lo componen

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i.\dot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i.\left(\dot{\vec{r}}_c + \dot{\vec{\rho}}\right) = \sum_{i=1}^{n} m_i.\dot{\vec{\rho}} + \sum_{i=1}^{n} m_i.\dot{\vec{r}}_c$$

Pero $\sum_{i=1}^{n} m_i.\dot{\vec{\rho}}_i = 0$ por ser la derivada temporal del momento estático respecto del baricentro.

Luego:

$$\vec{p} = m_e.\dot{\vec{r}}_c \qquad (3\text{-}16)$$

Obsérvese que

Por 1o tanto, si $F = 0$ entonces $p = cte$

Viceversa, si la cantidad de movimiento del sistema es constante, la resultante de las fuerzas exteriores es nula.

Ello no significa que el sistema de fuerzas exteriores esté en equilibrio, pues puede reducirse a una cupla. En ese caso, si bien no habrá aceleración del baricentro, existirá un movimiento rotatorio y/o de aproximación y alejamiento de las partículas respecto del baricentro.

3.9. Momento angular de un sistema de partículas

3.9.1. Momento angular respecto del origen inercial

Para la partícula de masa m_i, animada de la velocidad $\dot{\vec{r}}$ según la mide el observador inercial, el momento angular respecto de éste vale:

$$\vec{H}_{Oi} = \vec{r}_i \times m_i.\dot{\vec{r}}_i \qquad (3\text{-}17)$$

Para todo el sistema, habrá que efectuar la suma vectorial de las expresiones (3-17)

$$\vec{H}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{H}_{Oi} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i.\dot{\vec{r}}_i \quad (3.18.)$$

Se analizará la relación entre la variación temporal de $\vec{H}_O$ y el momento de las fuerzas exteriores:

$$\frac{d\vec{H}_O}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \dot{\vec{r}}_i \times m_i.\dot{\vec{r}}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i.\ddot{\vec{r}}_i$$

El primero de los sumandos es nulo por ser paralelos los vectores $\dot{\vec{r}}$ y $m_i.\dot{\vec{r}}$ en todos los términos de la sumatoria.

En el segundo sumando puede reemplazarse a $m_i.\ddot{\vec{r}}_i$ por la resultante de las fuerzas exteriores que actúan sobre m_i:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i.\ddot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \left(\vec{F}_i + \sum_{j=1}^{n} \vec{f}_{ij} \right) = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{r}_i \times \sum_{j=1}^{n} \vec{f}_{ij} \right)$$

En esta última expresión el primer sumando es el momento de las fuerzas exteriores respecto del origen inercial y el segundo es nulo, según las hipótesis hechas para las fuerzas interiores.

Por lo tanto:

$$\frac{d\vec{H}_O}{dt} = \vec{M}_O \qquad (3\text{-}19)$$

Si $\vec{M}_O = 0$ entonces $\vec{H}_O = cte$

Viceversa, si $\vec{H}_O$ se mantiene constante en el movimiento del sistema, el momento de las fuerzas exteriores respecto del origen inercial es nulo (principio de conservación del momento angular).

3.9.2. Momento angular respecto del baricentro

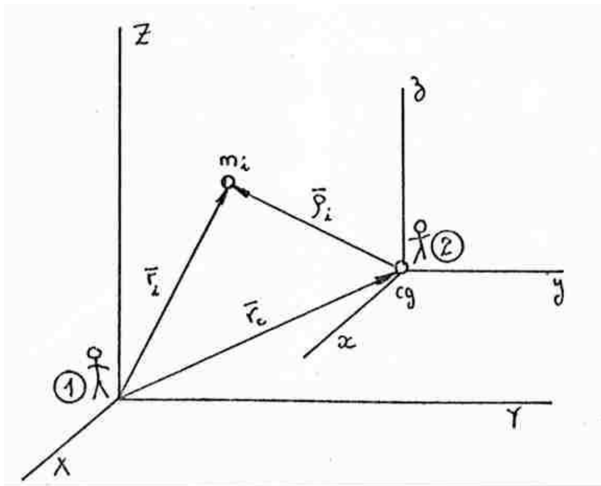
Supóngase un observador tipo 2, que se traslada con movimiento acelerado pero que no rota, moviéndose con el baricentro del sistema.

Dicho observador dirá que una partícula se mueve respecto del baricentro con una velocidad (relativa) $\dot{\vec{\rho}}$ y que su momento angular será

$$\vec{\rho}_i \times m_i . \dot{\vec{\rho}}_i$$

Para todo el sistema, el momento angular referido al baricentro será:

$$\vec{H}_C = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{\rho}_i \times m_i . \dot{\vec{\rho}}_i \right) \qquad (3\text{-}20)$$



3.9.3 Relación entre $\vec{H}_O$ y $\vec{H}_C$

Si en la expresión (3-18) de $\vec{H}_O$ se reemplaza a $\vec{r}$ por su equivalente $\vec{r}_c + \vec{\rho}_i$ se tiene

$$\vec{H}_O = \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_c + \vec{\rho}_i) \times m_i . (\dot{\vec{r}}_c + \dot{\vec{\rho}}_i) = \vec{r}_c \times \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \right) . \dot{\vec{r}}_c + \sum_{i=1}^{n} \vec{\rho}_i \times m_i . \dot{\vec{\rho}}_i + \vec{r}_c \times \sum_{i=1}^{n} m_i . \dot{\vec{\rho}}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{\rho}_i \times m_i . \dot{\vec{r}}_c$$

E1 último sumando puede escribirse también

$$\sum_{i=1}^{n} m_i . \vec{\rho}_i \times \dot{\vec{r}}_c$$

que resulta nulo por incluir como factor al momento estático respecto del baricentro. Por lo tanto:

$$\vec{H}_O = \vec{H}_C + \vec{r}_c \times m_e . \dot{\vec{r}}_c \qquad (3\text{-}21)$$

Esta expresión nos dice que el momento angular respecto de un origen inercial es igual al momento angular referido al baricentro más el momento de la cantidad de movimiento del sistema (3-16) respecto del origen inercial.

3.9.4. Relación entre $\vec{H}_C$ y el momento de las fuerzas exteriores

Derivando la expresión (3-20) respecto del tiempo

$$\frac{d\vec{H}_C}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \left(\dot{\vec{\rho}}_i \times m_i . \dot{\vec{\rho}}_i \right) + \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{\rho}_i \times m_i . \ddot{\vec{\rho}}_i \right)$$

La primera sumatoria es nula por ser paralelos los vectores en todos sus términos.

En la segunda sumatoria, $\ddot{\vec{\rho}}_i$ es la aceleración de la masa m_i respecto del baricentro. Como la aceleración del baricentro respecto del origen inercial es $\ddot{\vec{r}}_c$, puede escribirse:

$$\ddot{\vec{\rho}}_i = \ddot{\vec{r}}_i - \ddot{\vec{r}}_c$$

Por lo tanto:

$$\frac{d\vec{H}_C}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\vec{\rho}_i\times m_i.\left(\ddot{\vec{r}}_i-\ddot{\vec{r}}_c\right)=\sum_{i=1}^{n}\vec{\rho}_i\times m_i.\ddot{\vec{r}}_i-\sum_{i=1}^{n}\vec{\rho}_i\times m_i.\ddot{\vec{r}}_c$$

El segundo sumando puede escribirse $\left(\sum_{i=1}^{n}m_i.\vec{\rho}_i\right)\wedge\ddot{\vec{r}}_c$ resultando nulo por incluir al momento estático baricéntrico.

En el primero, puede reemplazarse a $m_i.\ddot{\vec{r}}_i$ por la fuerza actuante sobre la masa m_i.

$$\frac{d\vec{H}_C}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\vec{\rho}_i\times\left(\vec{F}_i+\sum_{j=1}^{n}\vec{f}_{ij}\right)=\sum_{i=1}^{n}\vec{\rho}_i\times\vec{F}_i+\sum_{i=1}^{n}\left(\times\sum_{j=1}^{n}\vec{f}_{ij}\right)$$

Pero por la naturaleza de las fuerzas internas, el segundo sumando es nulo. El primero es el momento de las fuerzas exteriores respecto del baricentro. Por lo tanto:

$$\frac{d\vec{H}_C}{dt}=\vec{M}_C \qquad (3.22)$$

Es decir que cuando se adopta al baricentro como punto de referencia, la relación entre el momento de las fuerzas exteriores y la variación temporal del momento angular adopta una forma similar a cuando se toma como referencia el origen inercial. Esta relación se cumple siempre, aún cuando el baricentro se traslade respecto del origen inercial en forma acelerada.

3.9.5. Momento angular respecto de un punto P arbitrario

Supóngase que un punto cualquiera P se mueve en forma acelerada respecto del origen inercial y que en P ubicamos un observador tipo 2. Dicho observador posicionará a la masa m_i y al baricentro mediante los vectores $\vec{\rho}_{Pi}$ y $\vec{\rho}_c$ respectivamente, y medirá para m_i la velocidad $\dot{\vec{\rho}}_{Pi}$; por lo tanto dirá que la cantidad de movimiento del sistema respecto de P vale

$$\vec{H}_P=\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{\rho}_{Pi}\times m_i.\dot{\vec{\rho}}_{Pi}\right) \qquad (3\text{-}23)$$

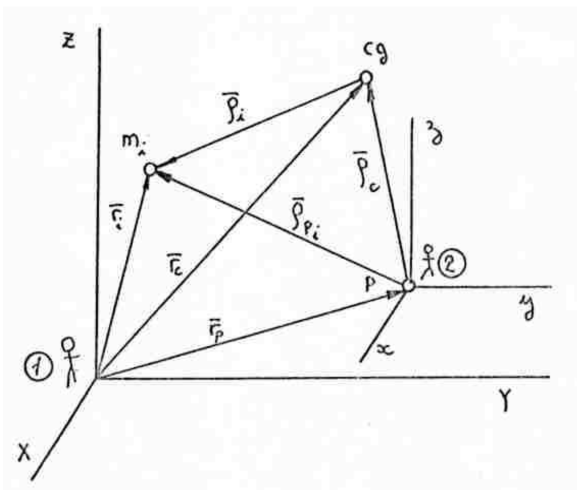
3.9.6. Relaciones entre $\vec{H}_C$ y $\vec{H}_O$

Observando que $\vec{\rho}_{Pi}=\vec{\rho}_c+\vec{\rho}_i$ la expresión de $\vec{H}_P$ puede escribirse:

$$\vec{H}_P=\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{\rho}_c+\vec{\rho}_i\right)\times m_i\left(\dot{\vec{\rho}}_c+\dot{\vec{\rho}}_i\right)=\vec{\rho}_c\times\left(\sum_{i=1}^{n}m_i\right).\dot{\vec{\rho}}_c+\sum_{i=1}^{n}\vec{\rho}_i\times m_i.\dot{\vec{\rho}}_i+\vec{\rho}_c\times\sum_{i=1}^{n}m_i.\dot{\vec{\rho}}_i+\sum_{i=1}^{n}\vec{\rho}_i\times m_i.\dot{\vec{\rho}}_c$$

Los dos últimos términos incluyen la expresión del momento estático respecto del baricentro o su derivada temporal; por lo tanto son nulos. Luego:

$$\vec{H}_P=\vec{H}_C+\vec{\rho}_c\times m_e.\dot{\vec{\rho}}_c \qquad (3\text{-}24)$$



Esta expresión es formalmente similar a la (3-21) que vincula $\vec{H}_O$ con $\vec{H}_C$, ya vista:

$$\vec{H}_O=\vec{H}_C+\vec{r}_c\times m_e.\dot{\vec{r}}_c$$

Si en ésta reemplazamos $\vec{H}_C$ en función de $\vec{H}_P$ se obtiene:

$$\vec{H}_O=\vec{H}_P-\vec{\rho}_c\times m_e.\dot{\vec{\rho}}_c+\vec{r}_c\times m_e.\dot{\vec{r}}_c \qquad (3\text{-}25)$$

Expresión que vincula $\vec{H}_O$ con $\vec{H}_P$. Recuérdese que $\vec{H}_O$ es el momento angular del origen inercial, en cambio $\vec{H}_P$ lo es respecto de un punto arbitrario que puede moverse en forma acelerada.

3.9.7. Relación entre $\vec{H}_P$ y el momento de las fuerzas exteriores

Derivando respecto del tiempo la expresión de $\vec{H}_O$ en función de $\vec{H}_P$:

$$\frac{d\vec{H}_O}{dt} = \frac{d\vec{H}_P}{dt} - \vec{\rho}_c \times m_e.\ddot{\vec{\rho}}_c + \vec{r}_c \times m_e.\ddot{\vec{r}}_c \qquad (3\text{-}26)$$

Pero la aceleración del baricentro respecto de P es igual a la diferencia de las aceleraciones absolutas de estos dos puntos:

$$\ddot{\vec{\rho}}_c = \ddot{\vec{r}}_c - \ddot{\vec{r}}_P$$

Por otra parte $\vec{r}_c = \vec{r}_P + \vec{\rho}_c$

Reemplazando en (3-26) a $\ddot{\vec{\rho}}_c$ y $\vec{r}_c$ por estas expresiones:

$$\frac{d\vec{H}_O}{dt} = \frac{d\vec{H}_P}{dt} - \vec{\rho}_c \times m_e.\left(\ddot{\vec{r}}_c - \ddot{\vec{r}}_P\right) + \left(\vec{r}_P + \vec{\rho}_c\right) \times m_e.\ddot{\vec{r}}_c = \frac{d\vec{H}_P}{dt} + \vec{\rho}_c \times m_e.\ddot{\vec{r}}_P + \vec{r}_P \times m_e.\ddot{\vec{r}}_c$$

Por otra parte, el producto de 1a masa equivalente por la aceleración del baricentro es igual a la resultante de las fuerzas exteriores. Luego:

$$\frac{d\vec{H}_O}{dt} = \frac{d\vec{H}_P}{dt} + \vec{\rho}_c \times m_e.\ddot{\vec{r}}_P + \vec{r}_P \times \vec{F} \qquad (3\text{-}27)$$

La variación temporal de $\vec{H}_O$ es igual al momento de las fuerzas exteriores respecto del origen inercial.

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \left(\vec{F}_i + \sum_{j=1}^{n} \vec{f}_{ij} \right) = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{r}_P + \vec{\rho}_{Pi}\right) \times \vec{F}_i$$

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_P \times \vec{F}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{\rho}_{Pi} \times \vec{F}_i = \vec{r}_P \times \left(\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \right) + \vec{M}_P$$

$$\vec{M}_O = \vec{M}_P + \vec{r}_P \times \vec{F} \qquad (3\text{-}28)$$

en donde $\vec{M}_P$ es el momento de las fuerzas exteriores respecto de P.

Por tanto, siendo $\dfrac{d\vec{H}_O}{dt} = \vec{M}_O$ resulta, teniendo en cuenta las expresiones 3-27 y 3-28.

$$\vec{M}_P = \frac{d\vec{H}_P}{dt} + \vec{\rho}_c \times m_e.\ddot{\vec{r}}_P \qquad (3.29.)$$

Obsérvese que, a diferencia de los casos anteriores, la relación entre $\vec{M}_P$ y $\vec{H}_P$ contiene un término adicional. En este término, $\vec{\rho}_c$ es el vector que posiciona al baricentro respecto del punto de referencia P y $\ddot{\vec{r}}_c$ es la aceleración con que se mueve dicho punto P respecto del origen inercial.

Puede obtenerse una interpretación física de este término adicional escribiendo:

$$\frac{d\vec{H}_P}{dt} = \vec{M}_P - \vec{\rho}_c \times m_e.\ddot{\vec{r}}_P = \vec{M}_P + \vec{\rho}_c \times \left(-m_e.\ddot{\vec{r}}_P\right)$$

Desde el punto de vista del observador 2 que se mueve con el punto P, la masa equivalente concentrada en el baricentro se mueve con una aceleración $-\ddot{\vec{r}}_P$. Por lo tanto, deduce que sobre la misma actúa una fuerza $-m_e.\ddot{\vec{r}}_P$ y al computar el momento de todas las fuerzas respecto de su origen (punto P) también tomará el momento de ésta, escribiendo:

$$\vec{M}_P + \vec{\rho}_c \times \left(-m_e.\ddot{\vec{r}}_P\right) = \frac{d\vec{H}_P}{dt}$$

Así pues, puede tenerse nuevamente la forma

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \vec{M}$$

si en el cálculo del momento se incluye las fuerzas de inercia debidas a la aceleración del punto de referencia. De igual manera, la expresión $\vec{F} = m_e.\ddot{\vec{r}}_c$ también puede aplicarse en el caso de una terna de referencia no inercial (pero no rotacional), siempre que en $\vec{F}$ se incluyan las correspondientes fuerzas de inercia.

Puede observarse que el término adicional $\vec{\rho}_c \times m_e.\ddot{\vec{r}}_P$ se anula en los casos en que:

- El punto de referencia P es fijo o se mueve con movimiento rectilíneo y uniforme $\left(\ddot{\vec{r}}_P = 0\right)$.
- El punto de referencia coincide con el baricentro $\left(\vec{\rho}_c = 0\right)$.
- E1 vector aceleración $\ddot{\vec{r}}_P$ es paralelo al vector $\vec{\rho}_c$.

En general, es conveniente elegir al baricentro como punto de referencia. En este caso, las dos expresiones que definen la dinámica del movimiento son:

$$\vec{M}_C = \frac{d\vec{H}_C}{dt}$$

$$\vec{F} = m_e.\ddot{\vec{r}}_c = \frac{d.\vec{p}}{dt}$$

La primera no contiene términos que incluyan a $\vec{r}_c$ o sus derivadas. O sea, es independiente de la posición o movimiento del baricentro.

La segunda no contiene términos en $\vec{\rho}_i$ o sus derivadas. O sea, es independiente de las posiciones relativas de las partículas respecto del baricentro.

Por tanto, si $\vec{M}_C$ no depende del movimiento del baricentro y $\vec{F}$ no depende de las posiciones de las masas respecto del baricentro, las dos expresiones son independientes y pueden ser trabajadas por separado.

3.10. <u>Impulso y cantidad de movimiento</u>

Dada la definición de las fuerzas interiores $\vec{f}_{ij}$, estas no contribuyen al impulso. .

La ecuación de Newton para el sistema en su conjunto es:

$$\vec{F} = m_e.\ddot{\vec{r}}_c$$

Multiplicando ambos miembros por *dt* e integrando:

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}.dt = m_e.\left(\vec{v}_{C2} - \vec{v}_{C1}\right) = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 \qquad \text{(3-30)}$$

El impulso de las fuerzas exteriores es igual a la variación de la cantidad de movimiento del sistema.

La relación impulso-cantidad de movimiento es vectorial y proporciona tres ecuaciones escalares.

<u>Impulso angular y momento angular.</u>

Multiplicando la relación $\vec{M} = \dot{\vec{H}}$ por *dt* e integrando:

$$\vec{Q} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}.dt = \vec{H}_2 - \vec{H}_1 \qquad (3\text{-}31)$$

En este caso tampoco contribuyen al impulso angular las fuerzas interiores.

con una misma velocidad