MECANICA TEORÍA

Momento

$$M_p^a = \ A_1 - P \ \ x\, a$$

$$M_p^a = \ A_2 - P \ \ x\, a$$

$$A_1 - P \ \ = \ A_2 - P \ \ + \ A_1 - A_2$$

$$M_p^a = \ A_1 - P \ \ x\, a = [\ A_2 - P \ \ + \ A_1 - A_2 \ ]x\, a$$

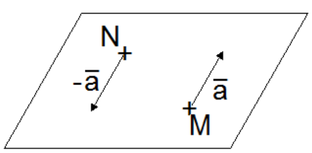
$$= \ A_2 - P \ \ x\, a + \ A_1 - A_2 \ \ x\, a = \ A_2 - P \ \ x\, a$$

Entonces

$$M_p^a = \ A_i - P \ \ x\, a \qquad \forall A_i \ \in \boldsymbol{recta\ sost\acute{e}n\ de\ a}$$

Sistema Par o Cupla de Vectores

Es un sistema de dos vectores deslizables de la misma magnitud que están en distintas rectas sostén con la misma dirección pero sentido contrario



Por principio de superposición:

$$M_p^{cupla} = M_p^{a(M)} + M_p^{a(N)} =$$

$$= \ M - P \ \ x\, a + \ N - P \ \ x \ \ -a \ \ = \ M - P \ \ x\, a + \ P - N \ \ x\, a =$$

$$M_p^{cupla} = \ \ M - P \ + \ P - N \ \ \ x\, a = \ M - N \ \ x\, a \quad \rightarrow \ \boldsymbol{es\ un\ vector\ libre}$$

El momento de la cupla es independiente del punto P elegido.

Teorema de Varignon

Para un sistema de vectores concurrentes deslizantes, el momento resultante es igual a la suma de los momentos de cada uno de los vectores que integran el sistema, cualquiera fuera el punto elegido como centro de momento.

$$R = \qquad a_i$$

$$M_p^R = M_p^{a_1} + M_p^{a_1} + \cdots + M_p^{a_n}$$

El vector momento no se conserva en general.

Sistema equivalente

Invariante vectorial:

El vector R asociado a un punto no cambia en relación con sus componentes.

$$R_o = R_{o_1} = \cdots = R_{o_n}$$

Invariante escalar:

Si tengo dos centros de reducción:

$$M_{o_1} = M_o + \Delta M = M_o + \; O - O_1 \; x\, R_o$$

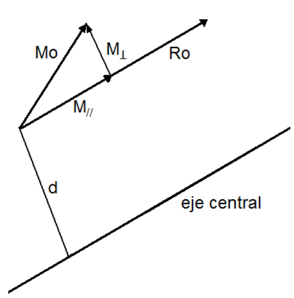
$$R_{o_1} \,.\, M_{o_1} = R_{o_1} \,.\, M_o + R_{o_1} \,.\, [\; O - O_1 \; x\, R_o]$$

El producto escalar entre R y M debe ser constante no importa el punto elegido:

$$R_o \,.\, M_o = R_{o_1} \,.\, M_{o_1}$$

Eje central

Se define eje central de un sistema de vectores deslizantes a aquella línea recta del espacio en la cual cualquier punto de ella elegido como centro de reducción produce un vector momento paralelo al invariante vectorial. Ese vector momento es de mínimo módulo respecto de cualquier otro punto del espacio.



$$M_{\perp} \; = d \,. \;\; R_0$$

$$d = \frac{M_{\perp}}{R_0}$$

$$R_0 \, x\, M_0 \;\; = \;\; R_0 \;\;\; M_0 \;\; \sin\theta$$

$$\boldsymbol{M_{\perp} \; = \; M_0 \;\; \sin\theta = \frac{M_0 \quad R_0 \; x \; M_0}{R_0 \quad M_0}}$$

$$\boldsymbol{M_{\perp} \; = \frac{R_0 \; x \; M_0}{R_0}}$$

$$\boldsymbol{d = \frac{R_0 \; x \; M_0}{R_0 \;{}^2}}$$

El versor normal

$$\boldsymbol{n = \frac{R_0 \; x \; M_0}{R_0 \; x \; M_0}}$$

$$\boldsymbol{n \, . \, d = \frac{R_0 \; x \; M_0}{R_0 \;{}^2} = \;\; x_E - x_0 \;\; + \;\; y_E - y_0 \;\; + \;\; z_E - z_0}$$

$$\boldsymbol{r_{ec} = r_0 + n \, . \, d}$$

$$\boldsymbol{r_{ec} = r_0 + \frac{R_0 \; x \; M_0}{R_0 \;{}^2}}$$

Cosenos directores del eje central

$$\boldsymbol{\frac{x_E - x_0}{\cos\alpha} = \frac{y_E - y_0}{\cos\beta} = \frac{z_E - z_0}{\cos\gamma}}$$

Cinemática de la partícula

$$\boldsymbol{r = \;\; P - O \;\; = x \;\; t \;\; \imath + y \;\; t \;\; \jmath + z \;\; t \;\; k}$$

Velocidad

$$\boldsymbol{v_m = \frac{r \;\; t_2 \;\; - r(t_1)}{t_2 - t_1}}$$

$$\boldsymbol{v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r \;\; t + \Delta t \;\; - r(t)}{\Delta t} = r \; (t)}$$

$$\boldsymbol{v = x \;\; t \;\; \imath + y \;\; t \;\; \jmath + z \;\; t \;\; k}$$

Aceleración

$$\boldsymbol{a_m = \frac{v \;\; t_2 \;\; - v(t_1)}{t_2 - t_1}}$$

$$\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{v}\ \ \boldsymbol{t} + \boldsymbol{\Delta t}\ \ - \boldsymbol{v}(\boldsymbol{t})}{\boldsymbol{\Delta t}} = \boldsymbol{v}\ \ \boldsymbol{t}\ \ = \boldsymbol{r}\ (\boldsymbol{t})$$

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{x}\ \ \boldsymbol{t}\ \ \boldsymbol{\imath} + \boldsymbol{y}\ \ \boldsymbol{t}\ \ \boldsymbol{\jmath} + \boldsymbol{z}\ \ \boldsymbol{t}\ \ \boldsymbol{k}$$

El recorrido:

$${}_{t_1}^{t_2}|\boldsymbol{dr}| = {}_{t_1}^{t_2}\ \ \overline{\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 + \boldsymbol{z}^2}\ \boldsymbol{dt}$$

Coordenadas intrínsecas (Triedro de Frenet)

Versor tangente

$$\boldsymbol{e_t} = \frac{\boldsymbol{P_2} - \boldsymbol{P_1}}{|\boldsymbol{P_2} - \boldsymbol{P_1}|}$$

Versor normal

$$\boldsymbol{e_n} = \frac{\boldsymbol{C} - \boldsymbol{P_1}}{|\boldsymbol{C} - \boldsymbol{P_1}|}$$

Donde C es el centro de la circunferencia osculatriz

Versor binormal

$$\boldsymbol{e_b} = \boldsymbol{e_t}\ \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{e_n}$$

No se habla de posición pero sí del vector velocidad

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(\boldsymbol{P_2} - \boldsymbol{P_1})}{\boldsymbol{\Delta t}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(\boldsymbol{P_2} - \boldsymbol{P_1})}{|\boldsymbol{P_2} - \boldsymbol{P_1}|} \frac{|\boldsymbol{P_2} - \boldsymbol{P_1}|}{\boldsymbol{\Delta t}} =$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{s}\boldsymbol{e_t}$$

S es la longitud del camino y $S = \frac{d\ \ longitud\ de\ camino}{dt}$

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{s}\boldsymbol{e_t} + \boldsymbol{s}\ \frac{\boldsymbol{de_t}}{\boldsymbol{dt}}$$

$$\frac{\boldsymbol{de_t}}{\boldsymbol{dt}} = \boldsymbol{\theta}\boldsymbol{e_n}$$

$$\boldsymbol{\theta} = \frac{\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{\rho}} = \frac{\boldsymbol{s}}{\boldsymbol{\rho}} \qquad \boldsymbol{donde\ \rho\ es\ el\ radio\ de\ la\ circunferencia\ osculatriz}$$

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{s}\boldsymbol{e_t} + \boldsymbol{s}\ \boldsymbol{\theta}\boldsymbol{e_n}$$

$$\boldsymbol{a = se_t + \frac{s^2}{\rho} e_n}$$

Coordenadas polares

Versor radial

$$\boldsymbol{e_r = \frac{P - O}{|P - O|}}$$

Versor transversal

$$\boldsymbol{e_\theta \perp e_r \; y \; girado \; \pi/2}$$

Las derivadas de los versores son:

$$\boldsymbol{\frac{de_r}{dt} = \theta e_\theta}$$

$$\boldsymbol{\frac{de_\theta}{dt} = -\theta e_r}$$

$$\boldsymbol{r = re_r}$$

$$\boldsymbol{v = r \; = r\, e_r + r\frac{de_r}{dt} = r\, e_r + r\theta e_\theta}$$

$$\boldsymbol{a = v \; = r\, e_r + r\theta e_\theta + r\theta e_\theta + r\theta e_\theta + r\theta \; -\theta e_r}$$

$$\boldsymbol{a = \; r \; - r\theta^2 \; e_r + \; r\theta + 2r\theta \; e_\theta}$$

Coordenadas cilíndricas

Se mantienen el versor radial (ahora e_ρ) y el transversal, los cuales son siempre paralelos al plano xy, y aparece el versor z que no cambia de dirección. P es la distancia al eje z. Entonces:

$$\boldsymbol{\frac{de_z}{dt} = 0}$$

$$\boldsymbol{r = \rho e_\rho + ze_z}$$

$$\boldsymbol{v = r \; = \rho\, e_\rho + \rho\theta e_\theta + ze_z}$$

$$\boldsymbol{a = v \; = \; \rho \; - \rho\theta^2 \; e_\rho + \; \rho\theta + 2\rho\theta \; e_\theta + ze_z}$$

Cinemática relativa

Moverse sin girar

$$\boldsymbol{r = r_{o'} + r'}$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{o'} + \boldsymbol{v}'$$

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_{o'} + \boldsymbol{a}'$$

Para ternas en traslación y rotación

Regla de derivación de Coriolis o teorema de Coriolis

$$\left.\frac{d\boldsymbol{M}'}{dt}\right|_{OBS\,I} = \left.\frac{d\boldsymbol{M}'}{dt}\right|_{OBS\,II} + \boldsymbol{\omega}\ x\ \boldsymbol{M}'$$

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_{o'} + \boldsymbol{r}'$$

$$\left.\frac{d\boldsymbol{r}'}{dt}\right|_{OBS\,I} = \left.\frac{d\boldsymbol{r}'}{dt}\right|_{OBS\,II} + \boldsymbol{\omega}\ x\ \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega}\ x\ \boldsymbol{r}'$$

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{v}_{o'} + \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega}\ x\ \boldsymbol{r}'$$

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{a}_{o'} + \left.\frac{d\boldsymbol{v}'}{dt}\right|_{OBS\,II} + \boldsymbol{\omega}\ x\ \boldsymbol{v}' + \dot{\boldsymbol{\omega}}\ x\ \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{\omega}\ x\ \left(\left.\frac{d\boldsymbol{r}'}{dt}\right|_{OBS\,II} + \boldsymbol{\omega}\ x\ \boldsymbol{r}'\right)$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{a}_{o'} + \boldsymbol{a}' + \dot{\boldsymbol{\omega}}\ x\ \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{\omega}\ x\ (\boldsymbol{\omega}\ x\ \boldsymbol{r}') + 2\boldsymbol{\omega}\ x\ \boldsymbol{v}'$$

Cantidad de movimiento

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{m}\,\boldsymbol{v}$$

Impulso

$$\boldsymbol{I} = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} m\,\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\,dt = m\int_{v(t_1)}^{v(t_2)} d\boldsymbol{v} = m\boldsymbol{v}(t_2) - m\boldsymbol{v}(t_1) =$$

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{p}(t_2) - \boldsymbol{p}(t_1) = \Delta\boldsymbol{p}$$

Primera ecuación cardinal de la dinámica:

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d(m\boldsymbol{v})}{dt} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}$$

Teorema del trabajo y la energía cinética

$$W_{1\to2}^{F} = \int_{1\to2} dW^{F} = \int_{1\to2} (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

$$= \int_{1\to2} \left(m\frac{dv_x}{dt}dx + m\frac{dv_y}{dt}dy + m\frac{dv_z}{dt}dz\right) = \int_{1\to2} \left(mv_x dv_x + mv_y dv_y + mv_z dv_z\right)$$

$$=\frac{1}{2}m\quad v_x^2\ 2\ +v_y^2\ 2\ +v_z^2\ 2\quad -\quad v_x^2\ 2\ +v_y^2\ 2\ +v_z^2\ 2$$

$$=\frac{1}{2}m\quad v^2\ 2\ -v^2\ 1$$

Definimos

$$T=\frac{1}{2}m\,v^2$$

Entonces

$$W_{1\to 2}^{F}=\Delta T$$

El trabajo de las fuerzas no conservativas es igual a la variación de la energía mecánica.

Si el trabajo de las fuerzas no conservativas es 0, entonces la energía mecánica del sistema se mantiene constante.

$$W_{1\to 2}^{F\epsilon}=\Delta T+\Delta U_g+\Delta U_e$$

$$Si\ W_{1\to 2}^{F\epsilon}=0\ \rightarrow\ E_{mec}^{sist}=ctte$$

Momento cinético

$$H_0=r\ x\ p$$

Segunda ecuación cardinal de la dinámica

$$\frac{dH_0}{dt}=\frac{dr}{dt}\ x\ p+r\ x\frac{dp}{dt}=v\ x\ mv+r\ x\ F=r\ x\ F=M_0^F$$

Fuerza conservativa

Es aquella fuerza que circulándola por un camino cerrado cualquiera da trabajo 0.

$$F\ .\ dr=0$$

Energía potencial gravitatoria

$$U_g\ \ \infty\ \ =0$$

$$U_g\ \ r\ \ =\ \ {}_{\infty\to r}\ F_{ext}\ .\ dr=\ \ {}_{\infty\to r}\ G\frac{Mm}{r^2}\ e_r(e_r dr+r d\theta e_\theta)=$$

$$U_g(r) = G\,Mm\int_{\infty}^{r}\frac{dr}{r^2} = -G\frac{Mm}{r}$$

Resorte

$$F_{ext} = k\,(r - r_0)\,e_r$$

$$W_{A\to B}^{F} = \int_{A\to B} F\,.\,dr = \int_{A\to B} -k\,(r - r_0)\,e_r\,.\,\left(e_r dr + r d\theta e_\theta\right) =$$

$$W_{A\to B}^{F} = -k\int_{r_A}^{r_B}(r - r_0)\,dr = -\frac{k}{2}\left[(r_B - r_0)^2 - (r_A - r_0)^2\right]$$

Masa Total

$$m_T = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

Centro de masa

$$r_c = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2 + \cdots + m_n r_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i r_i}{m_T}$$

$$v_c = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 + \cdots + m_n v_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i v_i}{m_T} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i}{m_T}$$

$$a_c = \frac{m_1 a_1 + m_2 a_2 + \cdots + m_n a_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i a_i}{m_T} = \frac{\sum_{i=1}^{n} R_i}{m_T}$$

$$R_i = F_i + \sum_{j=1\, j\neq i}^{n} F_{ji} = m_i a_i$$

La sumatoria de las n ecuaciones:

$$R_i = \sum_{i=1}^{n} R_i = \sum_{i=1}^{n} F_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1\, j\neq i}^{n} F_{ji} = \sum_{i=1}^{n} m_i a_i$$

Primera ecuación cardinal de los sistemas de partículas

$$R_i = \sum_{i=1}^{n} R_i = \sum_{i=1}^{n} F_i = \sum_{i=1}^{n} m_i a_i = m_T a_c$$

El impulso de la resultante

$$\boldsymbol{I_{R\,sist}} = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F_i\,dt} = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{m_T\,a_c\,dt} = \int_{v_c(t_1)}^{v_c(t_2)} \boldsymbol{m_T\,\frac{dv_c}{dt}dt} = \boldsymbol{m_T v_c(t_2) - m_T v_c(t_1)}$$

$$\boldsymbol{I_{R\,sist}} = \boldsymbol{p_{sist}(t_2) - p_{sist}(t_1) = \Delta p_{sist}}$$

Vector momento cinético

$$\boldsymbol{H_o^{sist}} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r_i\,x\,p_i}$$

Segunda ecuación cardinal de los sistemas de partículas

$$\frac{\boldsymbol{dH_o^{sist}}}{\boldsymbol{dt}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\boldsymbol{dr_i}}{\boldsymbol{dt}}\,\boldsymbol{x\,p_i} + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r_i x}\frac{\boldsymbol{dp_i}}{\boldsymbol{dt}} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r_i\,x\,R_i}$$

$$\frac{\boldsymbol{dH_o^{sist}}}{\boldsymbol{dt}} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r_i\,x}\left(\boldsymbol{F_i} + \sum_{j=1\,j\neq i}^{n} \boldsymbol{F_{ji}}\right) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r_i\,x\,F_i} + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r_i\,x} \sum_{j=1\,j\neq i}^{n} \boldsymbol{F_{ji}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{M_o^{F_i}} = \frac{\boldsymbol{dH_o^{sist}}}{\boldsymbol{dt}}$$

Choque entre partículas

$$\boldsymbol{I = 0}$$

$$\boldsymbol{p_1 + p_2 = p_1' + p_2'}$$

La cantidad de movimiento total se conserva siempre y cuando durante la colisión no existan impulsos de fuerzas exteriores.

Coeficiente de restitución

$$\boldsymbol{e} = -\frac{\boldsymbol{v_1' - v_2'}}{\boldsymbol{v_1 - v_2}}$$

Cuando e=1 el choque es elástico perfecto; cuando 0 < e < 1 el choque es semi-elástico; si e=0 el choque es plástico.

En todos los choques la energía cinética disminuye salvo que sea elástico perfecto.

Teorema de Momento Cinético Total

El vector momento cinético total de un sistema de partículas para un observador fijo es igual al vector momento cinético que tendría una partícula de masa igual a la masa del sistema y velocidad v_c posicionado en el centro de masa del sistema, más el vector momento cinético del sistema respecto de un observador móvil posicionado en $r=r_c$ en traslación respecto al primero.

$$\boldsymbol{r_i = r_c + r_i'} \qquad \boldsymbol{v_i = v_c + v_i'} \qquad \boldsymbol{a_i = a_c + a_i'}$$

$$\boldsymbol{H_o^{sist} = \sum_{i=1}^{n} r_i \, x \, m_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \left(r_c + r_i'\right) x \, m_i (v_c + v_i')}$$

$$\boldsymbol{= \sum_{i=1}^{n} r_c \, x \, m_i v_c + \sum_{i=1}^{n} r_c \, x \, m_i v_i' + \sum_{i=1}^{n} r_i' \, x \, m_i v_c + \sum_{i=1}^{n} r_i' \, x \, m_i v_i'}$$

$$\boldsymbol{= r_c \, x \left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right) v_c + r_c \, x \left(\sum_{i=1}^{n} m_i v_i'\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} r_i' m_i\right) x \, v_c + \sum_{i=1}^{n} r_i' \, x \, m_i v_i'}$$

$$\boldsymbol{H_o^{sist} = r_c \, x \, m_T v_c + H_c^{sist}}$$

Teorema de König o de la Energía Cinética

La energía cinética de un sistema de partículas según un observador fijo es igual a la energía cinética de una partícula de masa equivalente a la del sistema moviéndose con velocidad v_c más la energía cinética resultante según un observador en traslación respecto del primero y ubicado en el **centro de masa del sistema.**

$$\boldsymbol{T^{sist} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2} \qquad \rightarrow \qquad \boldsymbol{v_i^2 = v_i \, . \, v_i} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{v_i = v_c + v_i'}$$

$$\boldsymbol{T^{sist} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \left(v_c + v_i'\right) . \left(v_c + v_i'\right)}$$

$$\boldsymbol{= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_c^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_c \, . \, v_i' + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i' \, . \, v_c + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i' \, . v_i'}$$

$$\boldsymbol{= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right) v_c^2 + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{n} m_i v_i'\right) . \, v_c + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{n} m_i v_i'\right) . \, v_c + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \left(v_i'\right)^2}$$

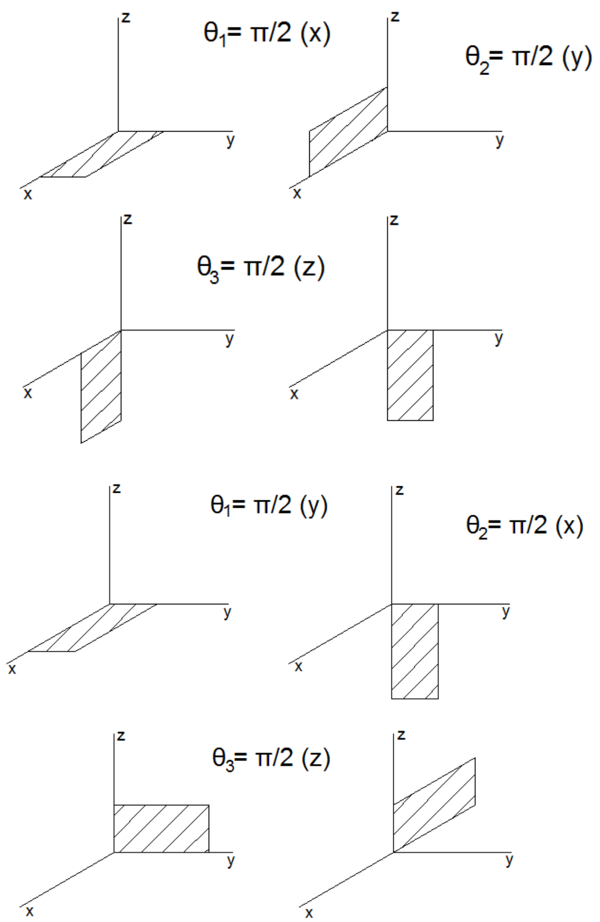
$$\boldsymbol{T^{sist} = \frac{1}{2} m_T v_c^2 + T_c'^{sist}}$$

Cinemática del Rígido

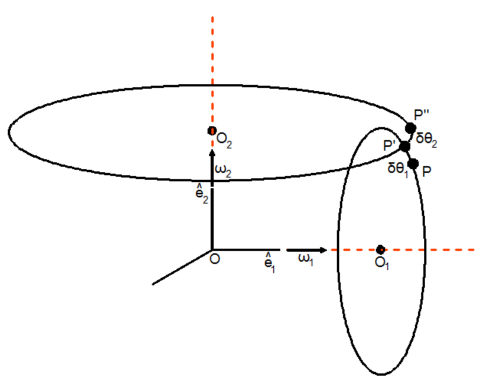
$$\boldsymbol{v}_{(p)} = \boldsymbol{\omega}\ \boldsymbol{x}\ (\boldsymbol{P} - \boldsymbol{A})$$

$$\boldsymbol{a}_{(p)} = \boldsymbol{\omega}\ \boldsymbol{x}\ \ \boldsymbol{P} - \boldsymbol{A}\ \ + \boldsymbol{\omega}\ \ \boldsymbol{x}\ \ \boldsymbol{\omega}\ \boldsymbol{x}\ \ \boldsymbol{P} - \boldsymbol{A}$$

Los giros finitos sobre ejes concurrentes no son conmutativos



Los giros infinitesimales sobre ejes concurrentes sí son conmutativos



Damos dos giros:

$$1^{\underline{o}}) \rightarrow \ \boldsymbol{\delta\theta_1 \ e_1} \ \ \rightarrow \boldsymbol{\delta\theta_2(e_2)}$$

$$2^{\underline{o}}) \rightarrow \boldsymbol{\delta\theta_2 \ e_2} \ \ \rightarrow \boldsymbol{\delta\theta_1(e_1)}$$

1º)

$$\boldsymbol{P' - P \ = \delta\theta_1 e_1 \, x \ \ P - O_1 \ \ = \delta\theta_1 e_1 \, x \, (P - O)}$$

$$\boldsymbol{P'' - P' \ = \delta\theta_2 e_2 \, x \ \ P' - O \ \ = \delta\theta_2 e_2 \, x \ \ \ P' - P \ + \ P - O}$$

$$\boldsymbol{= \delta\theta_2 e_2 \, x \ \ \delta\theta_1 e_1 \, x \, (P - O) + \ \ P - O \ \ \ = \delta\theta_2 e_2 \, x \, \delta\theta_1 e_1 \, x \, (P - O) + \delta\theta_2 e_2 \, x \ \ P - O}$$

$$\boldsymbol{P'' - P \ = \ P'' - P' \ + \ P' - P}$$

$$\boldsymbol{= \delta\theta_2 e_2 \, x \, \delta\theta_1 e_1 \, x \ \ P - O \ \ + \delta\theta_2 e_2 \, x \ \ P - O \ \ + \delta\theta_1 e_1 \, x \, (P - O)}$$

Se desprecia el diferencial de orden superior:

$$\boldsymbol{P'' - P \ = \ \ \delta\theta_1 e_1 + \delta\theta_2 e_2 \ \ x \, (P - O)}$$

2º)

$$\boldsymbol{P' - P \ = \delta\theta_2 e_2 \, x \ \ P - O_1 \ \ = \delta\theta_2 e_2 \, x \, (P - O)}$$

$$\boldsymbol{P'' - P' \ = \delta\theta_1 e_1 \, x \ \ P' - O \ \ = \delta\theta_1 e_1 \, x \ \ \ P' - P \ + \ P - O}$$

$$\boldsymbol{= \delta\theta_1 e_1 \, x \ \ \delta\theta_2 e_2 \, x \, (P - O) + \ \ P - O \ \ \ = \delta\theta_1 e_1 \, x \, \delta\theta_2 e_2 \, x \, (P - O) + \delta\theta_1 e_1 \, x \ \ P - O}$$

$$\boldsymbol{P'' - P \ = \ P'' - P' \ + \ P' - P}$$

$$\boldsymbol{= \delta\theta_1 e_1 \, x \, \delta\theta_2 e_2 \, x \ \ P - O \ \ + \delta\theta_1 e_1 \, x \ \ P - O \ \ + \delta\theta_2 e_2 \, x \, (P - O)}$$

Se desprecia el diferencial de orden superior

$$\boldsymbol{P'' - P \ = \ \ \delta\theta_1 e_1 + \delta\theta_2 e_2 \ \ x \, (P - O)}$$

Velocidad para giros infinitesimales ejes concurrentes:

$$\boldsymbol{v_{(p)} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P'' - P}{\Delta t} = \ \ \frac{\delta\theta_1 e_1}{dt} + \frac{\delta\theta_2 e_2}{dt} \ \ \ x \, (P - O)}$$

Definimos:

$$\boldsymbol{\omega_1 = \frac{\delta\theta_1 e_1}{dt} \qquad \qquad \omega_2 = \frac{\delta\theta_2 e_2}{dt}}$$

$$\boldsymbol{v_{(p)} = \ \ \omega_1 + \omega_2 \ \ x \ \ P - O \ \ = \omega \, x \ \ P - O}$$

Cuplas de rotaciones

Son dos vectores ω de igual magnitud y dirección pero de sentido contrario.

$$\boldsymbol{v_p = -\omega\, x\ \ P - M\ \ + \omega\, x\, (P - N) = \omega\, x\ \ M - P\ \ + \omega\, x\, (P - N)}$$

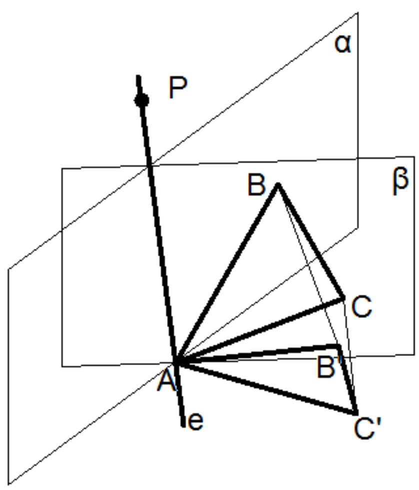
$$\boldsymbol{v_p = \omega\, x\ \ \ M - P\ \ +\ \ P - N\ \ \ = \omega\, x\, (M - N)}$$

- El vector velocidad es independiente de la posición P
- Todos los vectores tienen la misma velocidad
- Resulta una traslacion con velocidad igual al momento de la cupla

$$\boldsymbol{v_p = \omega\, x\ \ M - N\ \ =\ \ N - M\ \ x\, \omega = M^{cupla}}$$

Teorema de Euler (de las rotaciones)

El movimiento más general de un cuerpo rígido con un punto fijo es equivalente a un solo movimiento de rotación en torno a un eje pasante por ese punto fijo. Es decir, se puede pasar de la posición inicial a la final por un solo giro a través de un eje pasante por el punto fijo.



$\overset{\triangle}{ABB'}$ es isóceles

$\overline{AB} = \overline{AB'}$

Se traza el plano mediatriz α del triángulo.
Todo punto perteneciente al plano equidista de B y B'

$\overset{\triangle}{ACC'}$

$\overline{AC} = \overline{AC'}$

Se traza el plano mediatriz β de este otro triángulo.
Todo punto perteneciente a este plano equidista de C y C'

Existe la recta e que es la intersección de los dos planos. Cualquier punto en la recta e equidista de C y C' y de B y B'

El giro hay que darlo sobre la recta e, que es la intersección de α y β

Teorema de Charles

El movimiento más general de un cuerpo rígido es equivalente a la traslación de uno cualquiera de sus puntos (llamado punto base) más un giro en torno del punto base ya ubicado en la posición final. La traslación a aplicar dependerá del punto base elegido pero el giro será único en todos los casos.

La magnitud de la rotación no depende del punto base elegido.

Movimiento plano

Todos los puntos del rígido realizan trayectorias planas, es decir mantienen sus distancias respecto a un plano director.

$$\boldsymbol{v}_{(\boldsymbol{p})} = \boldsymbol{\omega}\ \boldsymbol{x}\ (\boldsymbol{P} - \boldsymbol{CIR})$$

$$\boldsymbol{a}_{(\boldsymbol{p})} = \boldsymbol{\omega}\ \boldsymbol{x}\ \ \boldsymbol{P} - \boldsymbol{CIR}\ \ + \boldsymbol{\omega}\ \boldsymbol{x} \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dt}}\ \ \boldsymbol{P} - \boldsymbol{CIR}$$

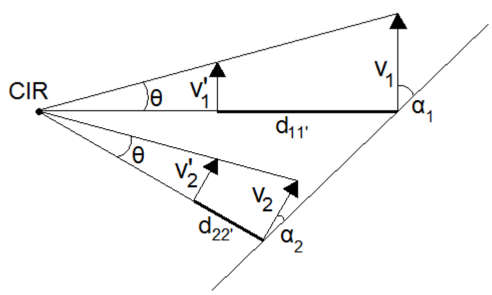
$$= \boldsymbol{\omega}\ \boldsymbol{x}\ \ \ \boldsymbol{C} - \boldsymbol{CIR}) + (\boldsymbol{P} - \boldsymbol{C}\ \ \ + \boldsymbol{\omega}\ \boldsymbol{x} \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dt}}\ \ \ \boldsymbol{C} - \boldsymbol{CIR}) + (\boldsymbol{P} - \boldsymbol{C}$$

$$\boldsymbol{a}_{(\boldsymbol{p})} = \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{c}} + \boldsymbol{a'}_{\boldsymbol{p/c}} = \boldsymbol{\omega}\ \boldsymbol{x}\ \ \boldsymbol{C} - \boldsymbol{CIR}) + \boldsymbol{\omega}\ \boldsymbol{x}\ (\boldsymbol{P} - \boldsymbol{C}\ \ + \boldsymbol{\omega}\ \boldsymbol{x}\ \ \boldsymbol{\omega}\ \boldsymbol{x}\ \ \boldsymbol{P} - \boldsymbol{C}$$

$$\boldsymbol{a}_{(\boldsymbol{p})} = \boldsymbol{\omega}\ \boldsymbol{x}\ \ \boldsymbol{P} - \boldsymbol{CIR}\ \ + \boldsymbol{\omega}\ \boldsymbol{x}\ \ \boldsymbol{\omega}\ \boldsymbol{x}\ \ \boldsymbol{P} - \boldsymbol{C}$$

Perfil de velocidades

Para encontrar el CIR se traza una perpendicular a la velocidad de dos puntos y donde se intersecan es el CIR.



El CIR se determina:

$$\boldsymbol{\omega}\ \ = \tan\boldsymbol{\theta} = \frac{\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{1}}\ \ - |\boldsymbol{v}'_{\boldsymbol{1}}|}{\boldsymbol{d}_{\boldsymbol{11'}}} = \frac{\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{2}}\ \ - |\boldsymbol{v}'_{\boldsymbol{2}}|}{\boldsymbol{d}_{\boldsymbol{22'}}}$$

Se debe cumplir que:

$$\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{1}} \cos\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{1}} = \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{2}} \cos\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{2}}$$

Si el cuerpo se encuentra en traslación sin rotación, el CIR se encuentra en el infinito.

Teorema del seno

$$\frac{\sin\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{a}} = \frac{\sin\boldsymbol{\beta}}{\boldsymbol{b}} = \frac{\sin\boldsymbol{\gamma}}{\boldsymbol{c}}$$

Matriz de Inercia

Para un cuerpo rígido, la expresión de la cantidad de movimiento $\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i$ es reemplazada por

$\vec{p} = \int_m v dm$.

De la misma manera, la primera ecuación canónica resulta: $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

La expresión de la segunda ecuación canónica en los sistemas de partículas dependerá del punto respecto del cual se tome el momento de las fuerzas exteriores y de la cantidad de movimiento, a saber:

respecto del origen inercial: $\vec{M}_O^e = \frac{d\vec{H}_O}{dt}$; respecto del baricentro: $\vec{M}_c^e = \frac{d\vec{H}_c}{dt}$;

respecto de un punto P acelerado: $\vec{M}_P^e = \frac{d\vec{H}_P}{dt} + \vec{\rho}_c \times m_e \vec{a}_P$

$$\frac{\boldsymbol{dH_o}}{\boldsymbol{dt}} = \boldsymbol{r\ x\ v\ dm} = \boldsymbol{r\ x\ (\omega\ x\ r)\ dm}$$

$$\boldsymbol{H_o} = \quad_{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{r\ x\ (\omega\ x\ r)\ dm}$$

Identidad algebraica:

$$\boldsymbol{r\ x\ \ \omega\ x\ r\ \ =\ \ r\ .\ r\ \ .\omega -\ \ r\ .\omega\ \ .\ r}$$

Desarrollando esta expresión y agrupando según los versores, las componentes del vector momento angular resultan:

$$H_{Ox} = \left[\int_m (y^2 + z^2) dm\right]\omega_x + \left[-\int_m xy dm\right]\omega_y + \left[-\int_m xz dm\right]\omega_z$$

$$H_{Oy} = \left[-\int_m yx dm\right]\omega_x + \left[\int_m (x^2 + z^2) dm\right]\omega_y + \left[-\int_m yz dm\right]\omega_z$$

$$H_{Oz} = \left[-\int_m zx dm\right]\omega_x + \left[-\int_m zy dm\right]\omega_y + \left[\int_m (x^2 + y^2) dm\right]\omega_z$$

Obsérvese que los nueve números que aparecen en estas tres expresiones dependen de las características geométricas y de la distribución de la masa en el cuerpo rígido. Asimismo, están relacionados con la posición del origen y la orientación de la terna, pero son independientes de la velocidad angular.

Se denominan Momentos de Inercia a los números

$$J_{xx} = \int_m (y^2 + z^2) dm \qquad J_{yy} = \int_m (x^2 + z^2) dm \qquad J_{zz} = \int_m (x^2 + y^2) dm$$

Obsérvese que las expresiones entre paréntesis son las distancias a los respectivos ejes x, y, z. Por su definición, los momentos de inercia nunca pueden asumir valores negativos.

Los otros seis números, denominados Productos de Inercia o Momentos Centrífugos, son iguales dos a dos:

$$\mathrm{J}_{\mathrm{xy}} = -\int_m \mathrm{xy}\,dm = -\int_m \mathrm{yx}\,dm = \mathrm{J}_{\mathrm{yx}}\,; \qquad \mathrm{J}_{\mathrm{xz}} = -\int_m \mathrm{xz}\,dm = -\int_m \mathrm{zx}\,dm = \mathrm{J}_{\mathrm{zx}}$$

$$\mathrm{J}_{\mathrm{yz}} = -\int_m \mathrm{yz}\,dm = -\int_m \mathrm{zy}\,dm = \mathrm{J}_{\mathrm{zy}}$$

Los productos de inercia pueden asumir valores positivos, negativos o nulos.

La unidad de medida de los momentos y productos de inercia es kg.m^2. Si la distribución de masa en el cuerpo es homogénea y δ es su densidad (masa por unidad de volumen), el diferencial de masa puede escribirse $dm = \delta.dV$, donde dV es el diferencial de volumen, con lo que las características de inercia en cuanto a distribución de masa coinciden con las geométricas.

En forma matricial:

$$\boldsymbol{H_0} = \int_m (\boldsymbol{r} \ x \ \boldsymbol{\omega} \ x \ \boldsymbol{r})\, \boldsymbol{dm} = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{ox} \\ H_{oy} \\ H_{oz} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \int_m (y^2+z^2)dm & -\int_m xydm & -\int_m xzdm \\ -\int_m yxdm & \int_m (x^2+z^2)dm & -\int_m yzdm \\ -\int_m zxdm & -\int_m zydm & \int_m (x^2+y^2)dm \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{ox} \\ H_{oy} \\ H_{oz} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{H_o} = \boldsymbol{H_{ox}} + \boldsymbol{H_{oy}} + \boldsymbol{H_{oz}} =$$

$$= (J_{xx}\omega_x + J_{xy}\omega_y + J_{xz}\omega_z)\,\imath + (J_{yx}\omega_x + J_{yy}\omega_y + J_{yz}\omega_z)\,\jmath + (J_{zx}\omega_x + J_{zy}\omega_y + J_{zz}\omega_z)\,k$$

Teorema de Steiner

El momento de inercia de un cuerpo rígido respecto de cualquier eje del espacio es igual a su momento de inercia respecto a un eje paralelo al anterior pero pasante por su baricentro más el producto de multiplicar la masa del cuerpo por el cuadrado de la distancia entre ambos ejes mencionados.

$$x = x_c + x' \qquad y = y_c + y' \qquad z = z_c + z'$$

$$J_{zz} = \int_m (x^2+y^2)dm = \int_m x^2 dm + \int_m y^2 dm$$

$$= \int_m x_c^2 dm + \int_m 2x_c x' dm + \int_m x'^2 dm + \int_m y_c^2 dm + \int_m 2y_c y' dm + \int_m y'^2 dm$$

$$x_c^2\, m + y_c^2\, m + \int_m (x'^2 + y'^2)\, dm = (x_c^2 + y_c^2)\, m + J_{z'z'}$$

$$J_{zz} = J_{z'z'} + m d_{zz'}^2$$

Corolario del teorema de Steiner

Sirve para calcular el momento de inercia de un eje conocido que no es por centro

$$J_{e_1e_1} = J_{cc} + md_{c-1}^2$$

$$J_{e_2e_2} = J_{cc} + md_{c-2}^2$$

Resto las dos ecuaciones:

$$J_{e_2e_2} - J_{e_1e_1} = m\ (d_{c-2}^2 - d_{c-1}^2)$$

$$J_{e_2e_2} = J_{e_1e_1} + m\ (d_{c-2}^2 - d_{c-1}^2)$$

Momento centrífugo

El momento centrífugo de cualquier cuerpo rígido de una terna no baricéntrica resulta ser igual al momento centrífugo paralelo a los ejes anteriores y que se cortan en su baricentro menos el producto de las coordenadas del centro de masa por la masa total del cuerpo.

$$J_{xy} = -\int_m (x_c + x') . (y_c + y')\ dm =$$

$$= -\int_m x_c y_c dm - \int_m x_c y' dm - \int_m x' y_c dm - \int_m x' y' dm =$$

$$J_{xy} = -x_c y_c m + J_{x'y'}$$

Energía Cinética

$$\sum_{i=1}^{n} F_i^{ext} = ma_c$$

$$I = \int_{t_1}^{t_2} F_i^{ext}\ dt = p(t_2) - p(t_1) = mv_c(t_2) - mv_c(t_1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_o^{F^{ext}} = \frac{dH_o}{dt}$$

$$\Delta H_o = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} M_o^{F^{ext}}\ dt = J$$

$$W^{F^{ext}} = \Delta T$$

Por teorema de König

$$T = \frac{1}{2} m v_c^2 + T_c'$$

$$T = \;_{m}\frac{1}{2} dm \; |\omega \; x \; r^2|^2 = \frac{1}{2} H_o \omega$$

Para el movimiento plano

$$T = \frac{1}{2} J_{cir} \omega^2 = \frac{1}{2} m v_c^2 + T_c' = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} J_c \omega^2$$

Ecuaciones de Euler

Elijo los ejes principales de inercia entonces la matriz de inercia me va a quedar matriz diagonal.

$$M_o = \begin{matrix} M_{ox} \\ M_{oy} \\ M_{oz} \end{matrix} = \frac{d}{dt} \begin{matrix} H_{ox} \\ H_{oy} \\ H_{oz} \end{matrix} = \frac{d}{dt} \begin{matrix} J_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz} \end{matrix} \begin{matrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{matrix}$$

Pongo una terna x_1 y_1 z_1 que gira con ω. No va a haber velocidad relativa del cuerpo respecto a la terna. Tenemos $J_{x_1x_1}$ $J_{y_1y_1}$ $J_{z_1z_1}$ constantes

$$M_o = \frac{d}{dt} (J_{x_1x_1} \omega_{x_1} \imath_1 + J_{y_1y_1} \omega_{y_1} \jmath_1 + J_{z_1z_1} \omega_{z_1} k_1$$

Por teorema de Coriolis:

$$M_o = \frac{dH_o'}{dt}_{rel} + \omega \; x \; H_o'$$

$$\frac{dH_o'}{dt}_{rel} = J_{x_1x_1} \omega_{x_1} \imath_1 + J_{y_1y_1} \omega_{y_1} \jmath_1 + J_{z_1z_1} \omega_{z_1} k_1$$

$$\omega \; x \; H_o' = \; J_{z_1z_1} \omega_{y_1} \omega_{z_1} - J_{y_1y_1} \omega_{y_1} \omega_{z_1} \;\; \imath + \;\; J_{x_1x_1} \omega_{x_1} \omega_{z_1} - J_{z_1z_1} \omega_{x_1} \omega_{z_1} \;\; \jmath$$
$$+ \;\; J_{y_1y_1} \omega_{y_1} \omega_{x_1} - J_{x_1x_1} \omega_{y_1} \omega_{x_1} \;\; k$$

$$M_{ox} = J_{x_1x_1} \omega_{x_1} - \omega_{y_1} \omega_{z_1} (J_{y_1y_1} - J_{z_1z_1})$$

$$M_{oy} = J_{y_1y_1} \omega_{y_1} - \omega_{x_1} \omega_{z_1} (J_{z_1z_1} - J_{x_1x_1})$$

$$M_{ox} = J_{z_1z_1} \omega_{z_1} - \omega_{y_1} \omega_{x_1} (J_{x_1x_1} - J_{y_1y_1})$$

Condiciones de validez

La terna principal de inercia debe tomarse sobre un punto fijo o sobre el baricentro

La terna principal de inercia girará con la misma velocidad instantánea que lo hace el cuerpo rígido