Ejercicios autovalores y autovectores

Adriana Cabana y Patricia Palacios

Departamento de Matemática, Facultad de Ingeniería, UBA

Calcular los autovalores y los autoespacios de las siguientes matrices. Indicar las multiplicidades algebraicas y geométricas de cada autovalor. Analizar si las matrices son diagonalizables.

$$(1)\ A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 12 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad (2)\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (3)\ A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(4)\ A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5)\ A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (6)\ A_6 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Los autovalores de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ son las raíces de su polinomio característico

$$P_A(\lambda) = det(\lambda I - A)$$

Notemos que P_A es un polinomio de grado n, por lo tanto tendrá a lo sumo n raíces distintas (reales o complejas).

Calculemos el polinomio característico de la matriz $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 12 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$:

$$P_{A_1}(\lambda) = det(\lambda I - A_1) = det\begin{pmatrix} \lambda & -6 & 0 \\ -2 & \lambda & -12 \\ 0 & -2 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda det\begin{pmatrix} \lambda & -12 \\ -2 & \lambda \end{pmatrix} + 6det\begin{pmatrix} -2 & -12 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$P_{A_1}(\lambda) = \lambda(\lambda^2 - 24) + 6(-2\lambda) = \lambda^3 - 36\lambda = \lambda(\lambda^2 - 36)$$

Como los autovalores de A_1 son las raíces de P_{A_1}, los autovalores de A_1 son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 6$ y $\lambda_3 = -6$.

La multiplicidad algebraica de un autovalor es su multiplicidad como raíz del polinomio característico. Como en este caso todas las raíces son simples, los tres autovalores tienen multiplicidad algebraica 1.

Calculemos los autoespacios asociados a cada autovalor. Recordemos que $v \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ es un autovector de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ asociado al autovalor λ si $Av = \lambda v$. El autoespacio asociado a λ es

$$S_\lambda = \{v \in \mathbb{R}^n /\ Av = \lambda v\}$$

Para hallar los autovectores asociados a λ resolvemos el sistema $(\lambda I - A)v = 0$.

La multiplicidad geométrica del autovalor λ es la dimensión del autoespacio S_λ.

- Para $\lambda_1 = 0$ hay que resolver el sistema $-Av = 0$, o equivalentemente, $Av = 0$.
  Si $v = (x_1\ x_2\ x_3)^t$ queda

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 12 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolviendo obtenemos $x_2 = 0$, $x_1 = -6x_3$, por lo tanto los autovectores son de la forma $v = (-6x_3\ 0\ x_3)^t = x_3(-6\ 0\ 1)^t$, con $x_3 \neq 0$ y el autoespacio asociado a $\lambda_1 = 0$ es

$$S_0 = gen\{(-6\ 0\ 1)^t\}$$

La multiplicidad geométrica de $\lambda_1 = 0$ es 1.

- Para $\lambda_2 = 6$ hay que resolver el sistema $(6I - A)v = 0$. Si $v = (x_1\ x_2\ x_3)^t$ queda

$$\begin{pmatrix} 6 & -6 & 0 \\ -2 & 6 & -12 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolviendo obtenemos $x_2 = 3x_3$, $x_1 = x_2 = 3x_3$, por lo tanto los autovectores son de la forma $v = (3x_3\ 3x_3\ x_3)^t = x_3(3\ 3\ 1)^t$, con $x_3 \neq 0$ y el autoespacio asociado a $\lambda_2 = 6$ es

$$S_6 = gen\{(3\ 3\ 1)^t\}$$

La multiplicidad geométrica de $\lambda_2 = 6$ es 1.

- Para $\lambda_3 = -6$ hay que resolver el sistema $(-6I - A)v = 0$. Si $v = (x_1\ x_2\ x_3)^t$ queda

$$\begin{pmatrix} -6 & -6 & 0 \\ -2 & -6 & -12 \\ 0 & -2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolviendo obtenemos $x_2 = -3x_3$, $x_1 = -x_2 = 3x_3$, por lo tanto los autovectores son de la forma $v = (3x_3\ -3x_3\ x_3)^t = x_3(3\ -3\ 1)^t$, con $x_3 \neq 0$ y el autoespacio asociado a $\lambda_3 = -6$ es

$$S_{-6} = gen\{(3\ -3\ 1)^t\}$$

La multiplicidad geométrica de $\lambda_3 = -6$ es 1.

Si tenemos autovectores de A asociados a autovalores distintos, estos autovectores son LI. En este caso, el conjunto $\{(-6\ 0\ 1), (3\ 3\ 1)^t, (3\ -3\ 1)^t\}$ es LI y por lo tanto una base de $\mathbb{R}^3$.

Entonces la matriz A es diagonalizable. Esto es, existen matrices $Q \in \mathbb{R}^{3\times3}$ inversible y $D \in \mathbb{R}^{3\times3}$ diagonal tales que $A = QDQ^{-1}$. En este caso,

$$Q = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Algunas observaciones con respecto a este ejemplo:

- Se verifica que $det(A) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$ y $tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ (son propiedades válidas para todas las matrices).
- Si bien $v = 0_{\mathbb{R}^n}$ no puede ser autovector de A, $\lambda = 0$ sí puede ser autovalor de A. Esto sucede cuando la matriz A no es inversible.
- En el caso que $\lambda = 0$ sea autovalor de A, el autoespacio asociado es $S_0 = Nul(A)$.
- Cuando la multiplicidad algebraica de un autovalor es 1, su multiplicidad geométrica también es 1.
- Las matrices Q y D no son únicas.

2. Calculemos el polinomio característico de la matriz $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$:

$$P_{A_2}(\lambda) = det(\lambda I - A_2) = det\begin{pmatrix} \lambda-1 & -3 & 0 \\ -1 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{pmatrix} = (\lambda-2)det\begin{pmatrix} \lambda-1 & -3 \\ -1 & \lambda+1 \end{pmatrix}$$

$P_{A_2}(\lambda) = (\lambda-2)[(\lambda-1)(\lambda+1)-3] = (\lambda-2)(\lambda^2-4)$

Como los autovalores de A_2 son las raíces de P_{A_2}, los autovalores de A_2 son $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = -2$.

La multiplicidad algebraica del autovalor 2 es 2 (porque es una raíz doble del polinomio característico) y la multiplicidad algebraica de -2 es 1.

Calculemos los autoespacios:

- Para $\lambda = 2$ hay que resolver el sistema $(2I - A)v = 0$. Si $v = (x_1\ x_2\ x_3)^t$ queda

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  Resolviendo obtenemos $x_1 = 3x_2$, $x_3 \in \mathbb{R}$, por lo tanto los autovectores son de la forma $v = (3x_2\ x_2\ x_3)^t = x_2(3\ 1\ 0)^t + x_3(0\ 0\ 1)^t$, $v \neq 0$, y el autoespacio asociado a $\lambda = 2$ es

$$S_2 = gen\{(3\ 1\ 0)^t, (0\ 0\ 1)^t\}$$

  La multiplicidad geométrica de $\lambda = 2$ es 2.

- Para $\lambda_3 = -2$ hay que resolver el sistema $(-2I - A)v = 0$. Si $v = (x_1\ x_2\ x_3)^t$ queda

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  Resolviendo obtenemos $x_2 = -x_1$, $x_3 = 0$, por lo tanto los autovectores son de la forma $v = (x_1\ -x_1\ 0)^t = x_1(1\ -1\ 0)^t$, con $x_1 \neq 0$ y el autoespacio asociado a $\lambda = -2$ es

$$S_{-2} = gen\{(1\ -1\ 0)^t\}$$

  La multiplicidad geométrica de $\lambda = -2$ es 1.

Observemos que en este caso las multiplicidades algebraicas y geométricas de ambos autovalores coinciden. Además $\{(3\ 1\ 0)^t, (0\ 0\ 1)^t, (1\ -1\ 0)^t\}$ es un conjunto LI (y por lo tanto, es una base de $\mathbb{R}^3$).

Entonces la matriz A es diagonalizable. Esto es, existen matrices $Q \in \mathbb{R}^{3\times3}$ inversible y $D \in \mathbb{R}^{3\times3}$ diagonal tales que $A = QDQ^{-1}$. En este caso,

$$Q = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

3. Calculemos el polinomio característico de la matriz $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$:

$$P_{A_3}(\lambda) = det(\lambda I - A_3) = det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -3 & 0 \\ -1 & \lambda + 1 & 0 \\ -1 & -1 & \lambda - 2 \end{pmatrix} = (\lambda - 2) det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -3 \\ -1 & \lambda + 1 \end{pmatrix}$$

$P_{A_3}(\lambda) = (\lambda - 2)[(\lambda - 1)(\lambda + 1) - 3] = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 4)$

Como los autovalores de A_3 son las raíces de P_{A_3}, los autovalores de A_3 son $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = -2$.

La multiplicidad algebraica del autovalor 2 es 2 (porque es una raíz doble del polinomio característico) y la multiplicidad algebraica de -2 es 1.

Calculemos los autoespacios:

- Para $\lambda = 2$ hay que resolver el sistema $(2I - A)v = 0$. Si $v = (x_1\ x_2\ x_3)^t$ queda

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  Resolviendo obtenemos $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 \in \mathbb{R}$, por lo tanto los autovectores son de la forma $v = (0\ 0\ x_3)^t = x_3(0\ 0\ 1)^t$, $x_3 \neq 0$, y el autoespacio asociado a $\lambda = 2$ es

$$S_2 = gen\{(0\ 0\ 1)^t\}$$

  La multiplicidad geométrica de $\lambda = 2$ es 1.

- Para $\lambda_3 = -2$ hay que resolver el sistema $(-2I - A)v = 0$. Si $v = (x_1\ x_2\ x_3)^t$ queda

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  Resolviendo obtenemos $x_2 = -x_1$, $x_3 = 0$, por lo tanto los autovectores son de la forma $v = (x_1\ \ -x_1\ 0)^t = x_1(1\ \ -1\ 0)^t$, con $x_1 \neq 0$ y el autoespacio asociado a $\lambda = -2$ es

$$S_{-2} = gen\{(1\ \ -1\ 0)^t\}$$

  La multiplicidad geométrica de $\lambda = -2$ es 1.

Observemos que en este caso la multiplicidad algebraica de $\lambda = 2$ es mayor estricta que la multiplicidad geométrica de este autovalor. Además $\{(0\ 0\ 1)^t, (1\ \ -1\ 0)^t\}$ es un conjunto LI pero no es una base de $\mathbb{R}^3$.

En este caso la matriz A no es diagonalizable. Sin embargo, la matriz A es semejante a la matriz

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Es decir, existe una matriz $Q \in \mathbb{R}^3$ inversible tal que $A = QJQ^{-1}$ (o equivalentemente, $AQ = QJ$).

Si las columnas de Q son v_1, v_2 y v_3, es decir $Q = (v_1|v_2|v_3)$, se debe verificar que

$$A(v_1|v_2|v_3) = (v_1|v_2|v_3) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Obtenemos que:

- $Av_1 = 2v_1$, es decir, v_1 es autovector de A asociado al autovalor 2. Por ejemplo, $v_1 = (0\ 0\ 1)^t$.
- $Av_2 = v_1 + 2v_2$, o sea, $(A - 2I)v_2 = v_1$.
  Si $v_2 = (x_1\ x_2\ x_3)^t$ hay que resolver el sistema:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  La solución del sistema es $x_1 = \dfrac{3}{4}$, $x_2 = \dfrac{1}{4}$, $x_3 \in \mathbb{R}$.
  Podemos elegir $v_2 = \left(\dfrac{3}{4}\ \dfrac{1}{4}\ 0\right)^t$.
- $Av_3 = -2v_3$, es decir, v_3 es autovector de A asociado al autovalor -2. Por ejemplo, $v_3 = (1\ -1\ 0)^t$.

Luego, $A = QJQ^{-1}$ si $Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{4} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad y \quad J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

4. Calculamos el polinomio característico de la matriz $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$:

$$P_{A_4}(\lambda) = det(\lambda I - A_4) = det \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1$$

Los autovalores de A_4 son las raíces de P_{A_4}. Observamos que las raíces de este polinomio son números complejos. Los autovalores de A_4 son $\lambda_1 = i$ y $\lambda_2 = -i$ (A_4 no tiene autovalores reales).

Calculemos los autoespacios:

- Para $\lambda = i$ resolvemos el sistema $(iI - A)v = 0$. Si $v = (x_1\ x_2)^t$ queda

$$\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  Las filas de la matriz de este sistema son múltiplos (si multiplicamos la fila 1 por i obtenemos la fila 2, esto es posible hacerlo si el espacio vectorial en que trabajamos admite escalares complejos). Resolviendo obtenemos $x_1 = ix_2$, por lo tanto los autovectores son de la forma $v = x_2(i\ 1)^t$, $x_2 \neq 0$, y el autoespacio asociado a $\lambda = i$ es

$$S_i = gen\{(i\ 1)^t\}$$

  La multiplicidad geométrica de $\lambda = i$ es 1.
- Para $\lambda_2 = -i$ resolvemos el sistema $(-iI - A)v = 0$. Si $v = (x_1\ x_2)^t$:

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  Análogamente al caso anterior obtenemos $x_1 = -ix_2$, por lo tanto los autovectores son de la forma $v = (-ix_2\ x_2)^t = x_2(-i\ 1)^t$, con $x_2 \neq 0$ y el autoespacio asociado a $\lambda = -i$ es

$$S_{-i} = gen\{(-i\ 1)^t\}$$

  La multiplicidad geométrica de $\lambda = -i$ es 1.

Esta matriz no es diagonalizable en $\mathbb{R}$, pero sí lo es en $\mathbb{C}$. Esto es existen matrices $Q \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ inversible y $D \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ diagonal tales que $A = QDQ^{-1}$. En este caso,

$$Q = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

5. Para hallar autovalores de la matriz $A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ podemos calcular el polinomio característico como hicimos hasta ahora o bien usar las particularidades que tiene esta matriz.

   Con sólo observar sus columnas o filas vemos que $rg(A) = 1$, de lo que deducimos que $dim(Nul(A)) = 2$ (ambos deben sumar la cantidad de columnas de la matriz).

   O sea que el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^3 / Ax = 0\}$, que no es otra cosa que $S_{\lambda=0}$, tendrá dimensión dos, por lo que $\lambda = 0$ será autovalor de A y su multiplicidad algebraica será por lo menos dos.

   Por otro lado sabemos que $tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$. Utilizando lo anterior, tenemos que $\lambda = 3$ es otro autovalor de A.

   Ya conocemos todos los autovalores de la matriz: $\lambda = 0$ doble y $\lambda = 3$ simple (no puede tener más ya que $A \in \mathbb{R}^{3x3}$).

   Buscamos los espacios propios:

   Para $\lambda = 0$ calculamos el espacio nulo de la matriz: $Ax = 0$. La única ecuación que se debe cumplir es $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, de donde $x_1 = -x_2 - x_3$.

   Así obtenemos: $S_{\lambda=0} = gen\left\{(-1\ 1\ 0)^t ; (-1\ 0\ 1)^t\right\}$.

   Si observamos la matriz, vemos que si sumamos las componentes de cada fila en todos los casos nos da 3. Es decir, $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ o sea $(1\ 1\ 1)^t$ es autovector asociado a $\lambda = 3$.

   Como ya sabíamos que $dim(S_{\lambda=3}) = 1$, podemos asegurar que $\mathrm{S}_{\lambda=3} = \mathrm{gen}\left\{(1\ 1\ 1)^{\mathrm{t}}\right\}$.

   En este caso, $\{(-1\ 1\ 0)^t ; (-1\ 0\ 1)^t ; (1\ 1\ 1)^t\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ y la matriz A es diagonalizable. Esto es, existen matrices $Q \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ inversible y $D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ diagonal tales que $A = QDQ^{-1}$. En este caso,

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

6. Calculemos autovalores y autovectores de la matriz $A_6 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

   Notemos que podríamos pensar que esta matriz está formada por bloques (matrices de menor tamaño) del siguiente modo:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0_{2\times 3} \\ 0_{3\times 2} & A_{22} \end{pmatrix},\ donde\ A_{11} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -9 & 2 \end{pmatrix}\ y\ A_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 12 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

   Vamos a mencionar las propiedades de las matrices por bloques incluidas en el ejercicio 6 de la guía 4 que nos ayudarán a resolver este ejercicio.

Recordemos la siguiente propiedad del determinante de matrices por bloques:

Si $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{K}^{m\times m}$ y $C \in \mathbb{K}^{n\times m}$, sea $M \in \mathbb{K}^{(n+m)\times(n+m)}$ la matriz por bloques definida por $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$. Entonces $det(M) = det(A) \cdot det(B)$

Entonces, dada una matriz $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n\times n}$, con A_{11} de $k \times k$, A_{12} de $k \times (n-k)$ y A_{22} de $(n-k) \times (n-k)$, tenemos que:

- El polinomio característico de A es el producto de los polinomios característicos de A_{11} y A_{22} ya que:

$$P_A(\lambda) = det(\lambda I_n - A) = det \begin{pmatrix} \lambda I_k - A_{11} & -A_{12} \\ 0 & \lambda I_{(n-k)} - A_{22} \end{pmatrix} = det(\lambda I_k - A_{11}) det(\lambda I_{(n-k)} - A_{22})$$

$$P_A(\lambda) = P_{A_{11}}(\lambda) P_{A_{22}}(\lambda)$$

- λ es autovalor de A si y sólo si λ es autovalor de A_{11} o de A_{22}.
  Esto sucede porque los autovalores de A son raíces del polinomio característico de A. Entonces λ es raíz de P_A si y sólo si es raíz de $P_{A_{11}}$ o de $P_{A_{22}}$.
- En el caso que $A_{12} = 0_{k\times(n-k)}$ podemos observar la siguiente relación entre los autovectores de A_{11}, A_{22} y A:
  - Si $v = (x_1 \ \cdots \ x_k)^t$ es autovector de A_{11} entonces $\tilde{v} = (x_1 \ \cdots \ x_k \ \underbrace{0 \cdots 0}_{(n-k)\ veces})^t$ es autovector de A.
  - Si $v = (y_1 \ \cdots \ y_{n-k})^t$ es autovector de A_{22} entonces $\tilde{v} = (\underbrace{0 \cdots 0}_{k\ veces} \ y_1 \ \cdots \ y_{n-k})^t$ es autovector de A.

En nuestro ejemplo, los autovalores de $A_{11} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -9 & 2 \end{pmatrix}$ son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 5$ y los autoespacios son $S_{-1} = gen\{(1\ 3)^t\}$ y $S_5 = gen\{(1\ -3)^t\}$.

Los autovalores de $A_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 12 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ son $\lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = 6$ y $\lambda_5 = -6$ y los autoespacios son $S_0 = gen\{(-6\ 0\ 1)^t\}$, $S_6 = gen\{(3\ 3\ 1)^t\}$ y $S_{-6} = gen\{(3\ -3\ 1)^t\}$.

Entonces los autovalores de A son $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 5$, $\lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = 6$ y $\lambda_5 = -6$.

Todos los autovalores de A son simples, por consiguiente, sus respectivos autoespacios tendrán dimensión 1 y los generadores pueden obtenerse de acuerdo a lo observado anteriormente.

Los autoespacios de A son:

$$S_{-1} = gen\{(1\ 3\ 0\ 0\ 0)^t\}, \quad S_5 = gen\{(1\ -3\ 0\ 0\ 0)^t\}, \quad S_0 = gen\{(0\ 0\ -6\ 0\ 1)^t\},$$

$$S_6 = gen\{(0\ 0\ 3\ 3\ 1)^t\}, \quad S_{-6} = gen\{(0\ 0\ 3\ -3\ 1)^t\}$$

El conjunto $\{(1\ 3\ 0\ 0\ 0)^t; (1\ -3\ 0\ 0\ 0)^t; (0\ 0\ -6\ 0\ 1)^t; (0\ 0\ 3\ 3\ 1)^t; (0\ 0\ 3\ -3\ 1)^t\}$ es una base de $\mathbb{R}^5$ y la matriz A es diagonalizable. Esto es, existen matrices $Q \in \mathbb{R}^{5\times5}$ inversible y $D \in \mathbb{R}^{5\times5}$ diagonal tales que $A = QDQ^{-1}$:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$