EJERCICIO (Transformación Lineal)

a Justificar por qué existe una única transformación lineal $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$ que verifica:

$$T(1-3t^2) = (3\ 0\ 0)^T$$
$$T(2+2t) = (1\ 0\ 1)^T$$
$$T(1+3t^2) = (2\ 0\ 3)^T$$

Encontrar bases del núcleo y la imagen de T.

b Determinar si existe $p \in \mathbb{R}_2[x]$ tal que $T(p) = (0\ 0\ 2)^T$. En caso de existir, ¿es único?

c Determinar si existen bases B de $\mathbb{R}_2[x]$ y B' de $\mathbb{R}^3$ tales que :

$$[T]_B^{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Resolución:

a La TL queda definida univocamente si está definida sobre una base.
¿$\{1-3t^2,\ 2+2t,\ 1+3t^2\}$ es li?
Sí
Por lo tanto T está definida sobre una base de su dominio y $\exists$ una única T que cumple lo pedido.✓Encontremos Nu(T) e Im(T):

Podemos empezar directamente por la Im(T):

Im(T)=gen$\{(3\ 0\ 0)^T,\ (1\ 0\ 1)^T,\ (2\ 0\ 3)^T\}$

Tenemos que ver si estos tres vectores son li o ld.

Varias maneras:

Una de ellas, pongo los vectores de $\mathbb{R}^3$ como filas y triangulo:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow[3v_3-2v_1]{3v_2-v_1 1} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix}$$

$3v_3 - 2v_1 = 3(3v_2 - v_1)$

$3v_3 = 3(3v_2 - v_1) + 2v_1; \to 3v_3 = 9v_2 - v_1 \to v_3 = 1/3(9v_2 - v_1) = 3v_2 - 1/3v_1$

Im(T)=gen$\{(3\ 0\ 0)^T,\ (1\ 0\ 1)^T\}$

$B_{Im(T)} = \{(1\ 0\ 0)^T,\ (0\ 0\ 1)^T\}$(¿Por qué?)

¿Cómo busco Nu(T)?

Varias formas:

Primera cuestión, por el teo de dimensión para t.l. podemos afirmar que dim(Nu(T))=1, pues :

dim(Nu(T))+ dim(Im(T))=dim($\mathbb{R}_3[x]$)=3

Por las cuentas anteriores sabemos que:

$$v_3 = 3v_2 - 1/3\ v_1 \Rightarrow T(1+3t^2) = 3T(2+2t) - 1/3T(1-3t^2)$$

$$T((1+3t^2) = T(3(2+2t) - 1/3(1-3t^2)) = T(-t^2+6t+17/3)$$

$$T((1+3t^2) - T(3(2+2t) - 1/3(1-3t^2)) = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$\boxed{T(4t^2 - 6t - 14/3) = 0_{\mathbb{R}^3}}$$

Entonces encontramos que $4t^2 - 6t - 14/3 \in$ Nu(T) y como dim(Nu(T))=1, podemos afirmar que Nu(T)=gen$\{4t^2 - 6t - 14/3\}$

$$\boxed{B_{\text{Nu}}(T) = \{4t^2 - 6t - 14/3\}}$$

También podríamos haber buscado la matriz de esta tl, y buscar el Nu(T), a través del nulo de esa matriz. Recordando que si trabajamos con matriz de una tl. Todo el tiempo estamos trabajando con coordenadas y al calcular el nulo de esa matriz, estamos obteniendo las coordenadas, con respecto a la base del dominio elegida, de los elementos de Nu(T).

Si elijo $C = \{1-3t^2,\ 2+2t,\ 1+3t^2\}$ como base del dominio y $C' = \{(1\ 0\ 0)^T, (1\ 0\ 1)^T, (0\ 1\ 0)^T\}$ como base de $\mathbb{R}^3$, puedo calcular la matriz de T con respecto a estas bases y queda:

$$[T]_C^{C'} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces puedo calcular $P \in \mathbb{R}_2[x] /\ [T]_C^{C'}[p]^C = 0_{\mathbb{R}^3}$

b Nos piden hallar, si existe, $p \in \mathbb{R}_2[x]$ tal que $T(P) = (0\ 0\ 2)^T$
Antes de hacer cuentas, analicemos cómo será el conjunto solución de esta ecuación.

Como $(0\ 0\ 2)^T \in$ Im$(T) =$ gen$\{(1\ 0\ 0)^T,\ (0\ 0\ 1)^T\} \Rightarrow$ la ecuación tendrá solución.
Como Nu(T)$\neq$ $\mathbb{R}_2[x] Rightarrow T$ no es monomorfismo y la ecuación tendrá infinias soluciones. Más aún, todas las soluciones tendrán la forma:

$p = p_{part} + p_N;$ con $p_N \in$ Nu(T).

Por la definición de T sabemos que:
$T(1-3t^2) = (3\ 0\ 0)^T,\ T(2+2t) = (1\ 0\ 1)^T$

Y como $(0\ 0\ 2)^T = (\frac{-2}{3})(3\ 0\ 0)^T + 2(1\ 0\ 1)^T$ entonces:

$$\begin{aligned}(0\ 0\ 2)^T &= (\frac{-2}{3})T(1-3t^2) + 2T(2+2t) \\ &= T(\frac{-2}{3}(1-3t^2) + 2(2+2t));\ \text{por ser } T \text{ t.l.} \\ &= T(2t^2 + 4t + \frac{10}{3})\end{aligned}$$

Así encontramos una solución particular. Entonces podemos tomar $p_{part} = 2t^2 + 4t + \frac{10}{3}$ y como el Nu(T) ya lo calculamos, tenemos todas las soluciones.

Luego $\boxed{T(p) = (0\;0\;2)^T \Leftrightarrow p = 2t^2 + 4t + \frac{10}{3} + \lambda(4t^2 - 6t - 14/3); \quad \lambda \in \mathbb{R}.}$

c Aquí tenemos que hallar B y B' tal que:

$[T]_B^{B\prime} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

La primera pregunta es si T puede tener la representación pedida. Como dim(Im(T))=2 y rg($[T]_B^{B\prime}$)=2, entonces es posible hallar bases B y B' para que la representación matricial de T respecto a estas bases sea la pedida.

Analizando la matriz, los vectores de la base $B = \{v - 1,\ v_2,\ v_3\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$ y los de $B' = \{w_1,\ w_2, w_3\}$ base de $\mathbb{R}^3$ están relacionados de la siguiente manera:

- De la primera columna tenemos: $T(v_1) = w_1$
- De la segunda columna tenemos: $T(v_2) = 0_{\mathbb{R}^3}$
- De la tercera columna tenemos: $T(v_3) = 2w_3$

Evidentemente, debemos elegir $v_2 \in$ Nu(T), puede ser $v_2 = 4t^2 - 6t - 14/3$.

Ahora entonces sólo debemos completar la base con dos polinomis l.i. con este.

Elegimos $v_1 = 1 - 3t^2$ y $v_3 = 2 + 2t$ que son claramemnte l.i. con v_2.

Como ya conocemos el valor de T en los polinomios que bautizamos como v_1 y v_3, podemos calcular rapidamente los vectores de la base del codominio.

$T(v_1) = T(1 - 3t^2) = (3\;0\;0)^T$ y $T(v_3) = T(2 + 2t) = (1\;0\;1)^T$

Entonces elegimos $w_1 = (3\;0\;0)^T$ y $w_3 = (1/2\;0\;1/2)^T$

Para completar la base B' elegimos un vector l.i. con W_1 y w_3, por ejemplo $w_2 = (0\ 1\ 0)^T$

Entonces podemos exhibir dos bases que cumplen lo pedido.

Si $B = \{1 - 3t^2,\ 4t^2 - 6t - 14/3,\ 2 + 2t\}$

Y $B' = \{(3\ 0\ 0)^T, (0\ 1\ 0)^T,\ (1/2\ 0\ 1/2)^T\}$

Se cumple $[T]_B^{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$