Ejercicios transformaciones lineales

1. Sea $L : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ el operador diferencial

$$L[y] = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y,$$

de orden mínimo tal que la ecuación diferencial $L[y] = f(t)$, con $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, tiene soluciones $y_1(t) = t + 2e^t + cos(t)$ e $y_2(t) = 3t + e^{2t} + 2e^t$. Entonces la ecuación $L[y] = f(t)$ es:

a) $y^{(6)} - 3y^{(5)} + 3y^{(4)} - 3y^{(3)} + 2y'' = 0$

b) $y^{(5)} - 2y^{(4)} + y^{(3)} - 2y'' = 2e^t$

c) $y^{(5)} - 2y^{(4)} + y^{(3)} - 2y'' = -4e^t$

d) $y^{(4)} - 2y^{(3)} + y'' - 2y' = -2e^t$

e) Ninguna de las anteriores.

Solución:

Lo primero que observamos es que las soluciones y_1 e y_2 son combinaciones lineales de t, e^t, $cos(t)$ y e^{2t}.

Si pensamos en una ecuación homogénea $L[y] = 0$, tendrían que ser raíces 0 (doble), 1, 2, i (y también -i) (como mínimo). El polinomio característico sería

$$p(r) = r^2(r-1)(r-2)(r-i)(r-(-i)) = r^2(r-1)(r-2)(r^2+1)$$

$$p(r) = r^6 - 3r^5 + 3r^4 - 3r^3 + 2r^2$$

Así que y_1 e y_2 son soluciones de la ecuación a).

Lo que tendríamos que pensar es si existe una ecuación de orden menor de la cual sean solución. Pensemos en una ecuación $L[y] = f$ con $f \neq 0$.

Si y_1 e y_2 son soluciones de $L[y] = f$ entonces $y_1 - y_2$ es solución de $L[y] = 0$. En este caso:

$$y_1(t) - y_2(t) = t + 2e^t + cos(t) - (3t + e^{2t} + 2e^t) = -2t + cos(t) - e^{2t}$$

Entonces pedimos que las raíces del polinomio característico sean 0 (doble), 2 e i (y -i). (Ya podemos descartar la ecuación d) porque 0 no es raíz doble). El polinomio característico es:

$$p(r) = r^2(r-2)(r-i)(r-(-i)) = r^2(r-2)(r^2+1) = r^5 - 2r^4 + r^3 - 2r^2$$

Así que la ecuación es $y^{(5)} - 2y^{(4)} + y^{(3)} - 2y'' = f(t)$

Para hallar $f(t)$ observemos que

$$y_1(t) = \underbrace{t + cos(t)}_{y_h} + \underbrace{2e^t}_{y_p} \quad e \quad y_2(t) = \underbrace{3t + e^{2t}}_{y_h} + \underbrace{2e^t}_{y_p}$$

Entonces $2e^t$ es una solución particular de la ecuación diferencial. Reemplazando esta solución en la ecuación obtenemos:

$$y^{(5)} - 2y^{(4)} + y^{(3)} - 2y'' = 2e^t - 4e^t + 2e^t - 4e^t = -4e^t = f(t)$$

Es decir, la ecuación es $y^{(5)} - 2y^{(4)} + y^{(3)} - 2y'' = -4e^t$ y la respuesta correcta es c).

2. Sean $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, $\{\phi_j : j \in I_n\} \subset \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{K})$ un conjunto de n funcionales lineales de $\mathbb{V}$ y $w_1, \cdots, w_n$ una colección de vectores de $\mathbb{V}$. Dada la transformación lineal $T : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ definida por

$$T(v) = \sum_{j=1}^{n} \phi_j(v) w_j$$

podemos afirmar que:

a) $Im(T) = gen\{w_1, \cdots, w_n\}$

b) T es un epimorfismo si y sólo si $\mathbb{V} = gen\{w_1, \cdots, w_n\}$

c) $Nu(T) = \{v \in \mathbb{V} : \phi_j(v) = 0, j \in I_n\}$

d) T es un monomorfismo si y sólo si $\{w_1, \cdots, w_n\}$ es LI.

e) T es un isomorfismo si y sólo si $\{w_1, \cdots, w_n\}$ es base de $\mathbb{V}$.

f) Ninguna de las anteriores.

Solución:

Pensemos en una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x, y) = \phi_1(x, y)w_1 + \phi_2(x, y)w_2$$

Si tomamos $\phi_1(x, y) = x$ y $\phi_2(x, y) = 2x$ nos queda

$$T(x, y) = \phi_1(x, y)w_1 + \phi_2(x, y)w_2 = xw_1 + 2xw_2 = x(w_1 + 2w_2)$$

Así que $Im(T) \neq gen\{w_1, w_2\}$ y a) es falsa.

Aunque tomemos $w_1 = (1, 0)$ y $w_2 = (0, 1)$ ($\{w_1, w_2\}$ es un conjunto generador de $\mathbb{R}^2$), T no queda un epimorfismo. Así que b) también es falsa.

Si, en cambio, tomamos $w_1 = (2, 0)$ y $w_2 = (-1, 0)$, nos queda $T(x, y) = (0, 0)$ y $Nu(T) = \mathbb{R}^2$. Entonces el núcleo no es el conjunto

$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \phi_1(x, y) = 0, \phi_2(x, y) = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$.

Entonces c) es falsa.

Volvamos al caso en que $w_1 = (1, 0)$ y $w_2 = (0, 1)$ (el conjunto $\{w_1, w_2\}$ es LI). La transformación lineal con la que venimos trabajando

$$T(x, y) = x(w_1 + 2w_2) = x(1, 2) = (x, 2x)$$

no es un monomorfismo. Así que la respuesta d) es falsa. El mismo ejemplo sirve para ver que e) es falsa.

Luego, la respuesta correcta es f).