Sea $T: \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ L.l / $[T]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ \alpha & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

con $B = \{1; 1-x; 1+2x+x^2\}$

a) Hallar $\alpha \in \mathbb{R}$ de modo que T no sea inyectiva y $3+x+x^2 \in Im(T)$.

b) Para el valor de α hallado calcular $T^{-1}(3+x+x^2)$

c) Definir una simetría $S: \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ respecto a $Im(T)$ en la dirección de gen $\{x^2\}$.
(usar α hallado en a)).

a) T no iny $\to$ dim $Nu(T) \geq 1 \to Im(T) \leq 2 \to \det([T]_B^B) = 0$

$3+x+x^2 \in Im(T) \to \exists p \in \mathbb{R}_2[x] / T(p) = 3+x+x^2$

$\hookrightarrow$ planteamos esto y pedimos INFINITAS SOLUCIONES.

$[T]_B^B \cdot [p]_B = [3+x+x^2]_B$

$\hookrightarrow$ buscamos estas coord:

$3+x+x^2 = \alpha(1) + \beta(1-x) + \gamma(1+2x+x^2)$

$\hookrightarrow$ igualdad de polinomios

$$\begin{cases} 3 = \alpha + \beta + \gamma & \longrightarrow \boxed{\alpha = 1} \\ 1 = -\beta + 2\gamma & \longrightarrow \boxed{\beta = 1} \\ 1 = \gamma & \longrightarrow \boxed{\gamma = 1} \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 = F_3 - F_1]{F_2 = F_2 - \alpha F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 2-\alpha & 2-\alpha^2 & 1-\alpha \\ 0 & 0 & -\alpha & 0 \end{array}\right)$$

$\hookrightarrow$ miramos la diagonal

$\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq 2$ S.C.D. NO

Si $\alpha = 2$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 = F_3 - F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

Abs S.I.

si $\alpha = 0$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ (*) S.C.I. → es lo que necesitamos.

Rta: $\alpha = 0$.

b) $T^{-1}(3+x+x^2) = \{ p \in \mathbb{R}_2[x] / T(p) = 3+x+x^2 \}$

↳ para hallar este conjunto resolvemos (*).

notamos: $[p]_B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ $\rightsquigarrow \begin{cases} a+b=1 & \longrightarrow a = 1-b \\ 2b+2c=1. & \longrightarrow c = \frac{1-2b}{2} \end{cases}$

armamos solución:

$$p(x) = (1-b).1 + b.(1-x) + \frac{1-2b}{2}(1+2x+x^2)$$

$$\boxed{p(x) = \underbrace{b.(-1-3x-x^2)}_{\text{genera Nu(T)}} + \underbrace{\tfrac{3}{2}+x+\tfrac{1}{2}x^2}_{\text{una solución particular.}} \qquad b \in \mathbb{R}}$$

c) Calculamos Im (T): $[T]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ con $\alpha=0$

Sabemos $\dim \operatorname{Im}(T) = 2$

tomamos 2 columnas Li:

$$v_1 = 1.1 + 0.(1-x) + 1.(1+2x+x^2) = 2+2x+x^2$$

$$v_2 = 0 + 2.(1-x) + 0.(1+2x+x^2) = 2-2x)$$

$$\operatorname{Im}(T) = \text{gen}\{2+2x+x^2;\ 2-2x\}$$

Observamos: $\{\underbrace{2+2x+x^2\,;\ 2-2x}_{\text{eje de simetría}}\,;\ \underbrace{x^2}_{\text{dirección}}\}$ es base de $\mathbb{R}_2[x]$

Definimos la simetría en esta base:

$$S(2+2x+x^2) = 2+2x+x^2$$
$$S(2-2x) = 2-2x$$
$$S(x^2) = -x^2$$

así queda bien definida.