
Álgebra II (Primer cuatrimestre, 2020)
GUÍA DE TRABAJOS PRÁCTICOS Nº6
[En construcción]

Cuando podemos trasladar un problema práctico al lenguaje de la matemática, podemos, al mismo tiempo, “abstraernos” de las características secundarias del problema y, haciendo uso de fórmulas y teoremas generales, obtener resultados precisos. De este modo la abstracción de la matemática constituye su potencia; esta abstracción es una necesidad práctica.

A. N. KOLMOGOROV

EJERCICIOS

1. SIP En cada uno de los siguientes casos, comprobar que $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es una forma cuadrática y expresarla en la forma $Q(x) = x^T Ax$, con $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ simétrica.

(a) $Q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 10x_1x_2 + 16x_2x_3 + 26x_1x_3.$

(b) $Q(x) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1.$

(c) $Q(x) = (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2.$

2. En cada uno de los siguientes casos, expresar la forma cuadrática $Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ como $x^T Ax$ con $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ simétrica, diagonalizar ortogonalmente $A = P\Lambda P^T$ y mediante el cambio de variables $x = Py$ escribir la forma cuadrática sin términos cruzados.

(a) $Q(x) = 9x_1^2 + 3x_2^2 - 8x_1x_2.$

(b) $Q(x) = -5x_1^2 - 2x_1^2 + 4x_1x_2.$

(c) $Q(x) = 2x_1^2 - 6x_2^2 + 6x_1x_2.$

3. En cada uno de los siguientes casos, expresar la forma cuadrática $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ como $x^T Ax$ con $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ simétrica, diagonalizar ortogonalmente $A = P\Lambda P^T$ y mediante el cambio de variables $x = Py$ escribir la forma cuadrática sin términos cruzados.

(a) $Q(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3.$

(b) $Q(x) = 5x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 - 6x_1x_3.$

(c) $Q(x) = x_3^2 + x_1x_2$

4. SIP Clasificar cada una de las formas cuadráticas que aparecen en los **Ejercicios 2. y 3.** y graficar sus conjuntos de nivel $\mathcal{N}_c(Q)$

5. Determinar para qué valores de $a \in \mathbb{R}$, la forma cuadrática en \mathbb{R}^2 ,


$$Q(x) = 2x_1^2 + ax_1x_2 + 18x_2^2,$$

es definida positiva.

6. Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ el producto interno canónico en \mathbb{R}^n y sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Demostrar que

$$\langle x, y \rangle_A := \langle Ax, y \rangle$$

define un producto interno en \mathbb{R}^n si, y sólo si, A es definida positiva.

7.  Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle_A : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ el producto interno definido por $\langle x, y \rangle_A := y^T A x$ con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \cos \theta \\ \cos \theta & 1 \end{bmatrix},$$

donde $\theta \in (0, \pi)$.

(a) Observar que $Q_A(x) = \langle x, x \rangle_A$ es una forma cuadrática en \mathbb{R}^2 .

(b) Hallar una matriz ortogonal $P \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ con $\det(P) = 1$ tal que el cambio de variable ortogonal $x = Py$ transforme la forma cuadrática $Q_A(x)$ en una forma cuadrática sin productos cruzados.

(c) ¿Cuáles son los ejes principales de la forma cuadrática $Q_A(x)$?

(d) Graficar el conjunto de nivel $\mathcal{N}_1(Q_A) = \{x \in \mathbb{R}^2 : Q_A(x) = 1\}$.

(e) ¿Cómo son los conjuntos de nivel $\mathcal{N}_c(Q_A)$ con $c > 0$?

8. Sea $Q : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ la forma cuadrática definida por

$$Q(x) = 5x_1^2 - 3x_2^2 + 2x_3^2 + 5x_4^2$$

(a) Hallar los valores máximo y mínimo de los cocientes de Rayleigh

$$\frac{Q(x)}{\|x\|^2}, \quad x \neq 0.$$

(b) Hallar el conjunto de todos $x_M \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ tales que

$$\frac{Q(x_M)}{\|x_M\|^2} = \max_{x \neq 0} \frac{Q(x)}{\|x\|^2}.$$

(c) Hallar el conjunto de todos $x_m \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ tales que


$$\frac{Q(x_m)}{\|x_m\|^2} = \min_{x \neq 0} \frac{Q(x)}{\|x\|^2}.$$

(d) Hallar el conjunto de todos $\hat{x}_M \in S_3$ tales

$$Q(\hat{x}_M) = \max_{\|x\|=1} Q(x).$$

(e) Hallar el conjunto de todos $\hat{x}_m \in S_3$ tales


$$Q(\hat{x}_m) = \min_{\|x\|=1} Q(x).$$

: recordar que $S_{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$.

9. Sea $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la forma cuadrática en \mathbb{R}^3 definida por $Q(x) = x^T A x$ con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Hallar $\max_{\|x\|=1} Q(x)$ y $\min_{\|x\|=1} Q(x)$.
- (b) Hallar el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ que maximizan los cocientes de Rayleigh.
- (c) Hallar el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ que minimizan los cocientes de Rayleigh.
- (d) Hallar y graficar el conjunto de todos los $x \in S_2$ que maximizan $Q(x)$.
- (e) Hallar y graficar el conjunto de todos los $x \in S_2$ que minimizan $Q(x)$.
-

10.  Sea $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la forma cuadrática en \mathbb{R}^3 definida por


$$Q(x) = 8x_1^2 + 8x_2^2 + 11x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

- (a) Hallar $\max_{\|x\|=1} Q(x)$ y $\min_{\|x\|=1} Q(x)$.
- (b) Hallar el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ que maximizan los cocientes de Rayleigh.
- (c) Hallar el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ que minimizan los cocientes de Rayleigh.
- (d) Hallar y graficar el conjunto de todos los $x \in S_2$ que maximizan $Q(x)$.
- (e) Hallar y graficar el conjunto de todos los $x \in S_2$ que minimizan $Q(x)$.
-

11. Sean $Q_1, Q_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ las formas cuadráticas en \mathbb{R}^2 definidas por

$$Q_1(x) = x_1x_2, \quad Q_2(x) = 9x_1^2 + 3x_2^2 - 8x_1x_2.$$

- (a) Hallar $\max_{Q_2(x)=1} Q_1(x)$ y $\min_{Q_2(x)=1} Q_1(x)$.
- (b) Hallar y graficar el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}^2$ tales que $Q_2(x) = 1$ y que maximizan $Q_1(x)$.
- (c) Hallar y graficar el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}^2$ tales que $Q_2(x) = 1$ y que minimizan $Q_1(x)$.
-

12.  En cada uno de los siguientes casos, hallar, si existen, el máximo y el mínimo de la forma cuadrática $Q_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $Q_1(x) = \|x\|^2$, sujeto a la restricción $Q_2(x) = 1$, para

(a) $Q_2(x) = 9x_1^2 + 3x_2^2 - 8x_1x_2$.

(b) $Q_2(x) = 2x_1^2 - 6x_2^2 + 6x_1x_2$.

: ¿Cuál es el significado geométrico de los resultados obtenidos?

13.  Sean $\theta \in (0, \pi)$. Hallar los puntos de la curva de ecuación

$$x_1^2 + 2 \cos \theta x_1 x_2 + x_2^2 = 1$$

cuya distancia al origen sea mínima y cuya distancia al origen sea máxima.

: ¿Cuál es el significado geométrico de los resultados obtenidos?