Álgebra II (Primer cuatrimestre, 2020)

Guía de Trabajos Prácticos Nº4

[En construcción]

Cuando podemos trasladar un problema práctico al lenguaje de la matemática, podemos, al mismo tiempo, "abstraernos" de las características secundarias del problema y, haciendo uso de fórmulas y teoremas generales, obtener resultados precisos. De este modo la abstracción de la matemática constituye su potencia; esta abstracción es una necesidad práctica.

A. N. Kolmogorov

Ejercicios

1. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -6 & 3 \\ 2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(**a**) Comprobar que 0, -1, y 2 son todos los autovalores de A, y encontrar autovectores asociados a cada uno de ellos.

(**b**) Verificar que esos autovectores forman una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

(**c**) Hallar la matriz de cambio de coordenadas de la base $\mathcal{B}$ en la base canónica $\mathcal{E}$, $P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}$, y comprobar, mediante multiplicación de matrices, que $A = P\Lambda P^{-1}$, donde $\Lambda = \operatorname{diag}(0, -1, 2)$.

---

2. En cada uno de los siguientes casos, hallar el polinomio característico de la matriz $A_i \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, analizar si la misma es diagonalizable, y en caso de serlo hallar una matriz inversible $P_i \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ y una matriz diagonal $\Lambda_i \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tales que $A_i = P_i \Lambda_i P_i^{-1}$:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},\ A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},\ A_4 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

¿Cómo se modifica el análisis precedente si se considera que las matrices A_i están en $\mathbb{C}^{2\times 2}$?

: *Obsérvese que para matrices A de 2×2 vale que*

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A),$$

y en consecuencia, las raíces de $p(\lambda)$ son $\lambda_\pm = \frac{1}{2}\left(\operatorname{tr}(A) \pm \sqrt{\operatorname{tr}(A)^2 - 4\det(A)}\right)$.

: *Obsérvese también que para matrices A de 2×2 vale que $p(A) = 0$. (Este resultado, conocido como el Teorema de Cayley-Hamilton, vale en general, es decir para matrices A de $n\times n$.)*

---

3. Explicar por qué las siguientes matrices no son diagonalizables en $\mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix},\ \lambda \in \mathbb{R};\quad \rho\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix},\ \rho > 0,\ \theta \in \mathbb{R}\setminus\{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

---

4. Encontrar los autovalores de cada una de las siguientes matrices A_i, sus multiplicidades algebraicas y geométricas y tantos autovectores linealmente independientes como sea posible, siendo

$$A_1 = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -3 \\ 20 & 3 & 10 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & 6 & 5 \end{bmatrix}.$$

¿Se pueden hallar una matriz inversible $P_i \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ y una matriz diagonal $\Lambda_i \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tales que $A_i = P_i \Lambda_i P_i^{-1}$?

: *recordar el teorema de Gauss sobre la forma de las raíces racionales de un polinomio con coeficientes enteros y observar que, en este caso, sólo pueden ser los divisores enteros del* $\det(A)$.

---

5. Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión $n > 1$. Explicar por qué

(**a**) si $S \in \mathcal{L}(\mathbb{V}) \setminus \{I_{\mathbb{V}}\}$ es una simetría (*i.e.*, $S^2 = I_{\mathbb{V}}$), existen $k \in \mathbb{N}$ y una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{V}$ tales que

$$[S]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_k & 0 \\ 0 & -\mathbf{I}_{n-k} \end{bmatrix}$$

con $\mathbf{I}_k$ la matriz identidad de $k \times k$ e $\mathbf{I}_{n-k}$ la matriz identidad de $(n-k)\times(n-k)$;

(**b**) si $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}) \setminus \{0_{\mathbb{V}}, I_{\mathbb{V}}\}$ es una proyección (*i.e.*, $T^2 = T$), existen $k \in \mathbb{N}$ y una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{V}$ tales que

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

con $\mathbf{I}_k$ la matriz identidad de $k \times k$.

---

6. STOP Sea A una matriz de $n \times n$ que admite la partición en bloques

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

con A_{11} de $k \times k$, A_{12} de $k \times (n-k)$ y A_{22} de $(n-k)\times(n-k)$.

(**a**) Demostrar que el polinomio característico de A es el producto de los polinomios característicos de A_{11} y A_{22}.

(**b**) Demostrar que λ es autovalor de A si y sólo si λ es autovalor de A_{11} ó A_{22}.

(**c**) Si $A_{12} = 0$ ¿qué relación puede establecerse entre los autovectores de A_{11} y A_{22} y los autovectores de A?

(**d**) Encontrar los autovalores de A, sus multiplicidades algebraicas y geométricas y tantos autovectores linealmente independientes como sea posible, siendo

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -6 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(**e**) Generalizar los incisos (**a**), (**b**) y (**c**) al caso en que la matriz A de $n \times n$ admite la siguiente partición en bloques

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1r} \\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_{rr} \end{bmatrix},$$

con $A_{11}, A_{22}, \dots, A_{rr}$ matrices cuadradas.

---

7. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz dependiente del parámetro real α:

$$A = \begin{bmatrix} 2\alpha + 4 & 1 - \alpha & -2\alpha - \alpha^2 \\ 0 & 4 - \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 4 - \alpha^2 \end{bmatrix}$$

(**a**) Obtener los valores de α para los que A es diagonalizable.

(**b**) Diagonalizar A para $\alpha = 1$ y para $\alpha = 2$.

---

8. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz no diagonalizable. Demostrar que existe una matriz inversible P tal que $P^{-1}AP = J$, donde J tiene alguna de las siguientes formas

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix},$$

con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y $\lambda \neq \mu$.

---

9. Encontrar los autovalores de cada una de las siguientes matrices A_i, sus multiplicidades algebraicas y geométricas. En caso de que A_i no sea diagonalizable, hallar una matriz inversible P_i tal que $P_i^{-1}A_iP_i = J_i$, donde J_i tiene alguna de las formas del ejercicio anterior.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -5 & 1 & -1 \\ 15 & 0 & 3 \\ 7 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 5 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

10. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales a coeficientes constantes

(a) $\begin{cases} y_1' = y_1 + 6y_2 \\ y_2' = 5y_1 + 2y_2 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} y_1' = -\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{3}y_2 \\ y_2' = \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{3}y_2 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} y_1' = -4y_1 - 6y_2 + 3y_3 \\ y_2' = 2y_1 + 4y_2 - 2y_3 \\ y_3' = -2y_1 - 2y_2 + y_3 \end{cases}$

---

11. Para cada una de las siguientes matrices $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, hallar la solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} Y' = AY \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$$

y analizar su comportamiento asintótico:

$$(\mathbf{a})\ \ A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad (\mathbf{b})\ \ A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad (\mathbf{c})\ \ A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

: *Observar que el comportamiento asintótico de la solución depende las características de los autovalores de la matriz A.*

: *¿Qué condiciones sobre los autovalores de $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ garantizan que todas las soluciones del problema de valores iniciales convergen a 0 cuando $t \to +\infty$? Si $4\det(A) \le \operatorname{tr}(A)^2$, ¿qué ocurre cuando $\operatorname{tr}(A) < 0$ y $\det(A) > 0$? ...*

---

12. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Hallar todos los $Y_0 \in \mathbb{R}^2$ tales que la solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} Y' = AY \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$$

tiene norma acotada cuando $t \to \infty$.

---

13. Hallar un conjunto fundamental de soluciones del sistema $Y' = AY$ con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

---

14. Para cada una de las siguientes matrices $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, hallar un conjunto fundamental de soluciones del sistema $Y' = AY$

$$(\mathbf{a})\ \ A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad (\mathbf{b})\ \ A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad (\mathbf{c})\ \ A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

---

15. Para cada una de las matrices del **Ejercicio 9.**, hallar la solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} Y' = AY \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$$

y analizar su comportamiento asintótico.

---

16. Resolver el problema no homogéneo $Y' = AY + F(t)$ con

$(\mathbf{a})$ $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ y $F(t) = \begin{bmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{bmatrix}$;

$(\mathbf{b})$ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ y $F(t) = \begin{bmatrix} -t^2 \\ 2t \end{bmatrix}$.

---

17. Resolver el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} Y' = AY + F(t) \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$$

con

$(\mathbf{a})$ $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$, $F(t) = \begin{bmatrix} t \\ 3e^t \end{bmatrix}$, $Y_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$;

$(\mathbf{b})$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, $F(t) = \begin{bmatrix} 2e^t \\ -e^t \end{bmatrix}$, $Y_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

---

18. Resolver el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} Y' = AY + F(t) \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$$

con $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz de **Ejercicio 13.** y

$$F(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e^t \cos(2t) \end{bmatrix}, \quad Y_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$