Álgebra II (Primer cuatrimestre, 2020)

Guía de Trabajos Prácticos N°5

[En construcción]

Cuando podemos trasladar un problema práctico al lenguaje de la matemática, podemos, al mismo tiempo, "abstraernos" de las características secundarias del problema y, haciendo uso de fórmulas y teoremas generales, obtener resultados precisos. De este modo la abstracción de la matemática constituye su potencia; esta abstracción es una necesidad práctica.

A. N. Kolmogorov

Preliminares y notación

En todo lo que sigue

1. $\mathbb{K}$ es $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$.
2. $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ designa el producto interno canónico en $\mathbb{K}^n$ definido por $\langle x, y \rangle := y^* x$, donde $y^* := \overline{y^T}$ es el traspuesto conjugado del vector y.
3. Dada $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $A^* \in \mathbb{K}^{n \times m}$ es la matriz traspuesta conjugada de A: $A^* = \overline{A^T}$. Obsérvese que para todo $x \in \mathbb{K}^n$ e $y \in \mathbb{K}^m$ vale que

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle .$$

   Consecuentemente,
   a) $\text{nul}(A^*) = \text{col}(A)^\perp$;
   b) $\text{col}(A^*) = \text{nul}(A)^\perp$;
   c) $\text{nul}(A) = \text{col}(A^*)^\perp$;
   d) $\text{col}(A) = \text{nul}(A^*)^\perp$.
4. El *espectro* de una matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ es el conjunto de todos los autovalores de A:

$$\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{nul}(A - \lambda I) \neq \{0\}\}$$

5. $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{K}^{n \times n} \times \mathbb{K}^{n \times n} \to \mathbb{K}$ designa el producto interno canónico en $\mathbb{K}^{n \times n}$ definido por $\langle A, B \rangle := \text{tr}(B^* A)$, y $\|A\|_F := \sqrt{\langle A, A \rangle}$ designa su norma inducida, llamada la *norma de Frobenius.*
6. Una matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ es
   - *hermítica* si $A = A^*$.
   - *normal* si $AA^* = A^* A$. En otras palabras, A es *normal* si conmuta con su adjunta.
   - *unitaria* si $AA^* = A^* A = I$.
7. Dadas $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$, se dice que A y B son *unitariamente equivalentes*, y se escribe $A \sim B$, si existe una matriz unitaria $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tal que $A = UBU^*$.
8. Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es
   - *simétrica* si $A = A^T$.
   - *normal* si $AA^T = A^T A$. En otras palabras, A es *normal* si conmuta con su traspuesta.
   - *ortogonal* si $AA^T = A^T A = I$.
9. Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una matriz hermítica. La *inercia* de A es la terna $\text{In}(A) = (i_+(A), i_-(A), i_0(A))$, donde $i_+(A)$ es la cantidad de autovalores positivos de A (contados con su multiplicidad), $i_-(A)$ es la cantidad de autovalores negativos de A (contados con su multiplicidad), e $i_0(A)$ es la cantidad de autovalores nulos de A (contados con su multiplicidad).
10. $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ se llama *semi definida positiva* si A es hermítica y $\langle Ax, x \rangle \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{C}^n$.

Algunas propiedades

Sobre el espectro.

1. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz normal y sea $v \in \mathbb{C}^n$ un autovector de A asociado con el autovector λ. Entonces v es un autovector de A^* asociado con el autovalor $\overline{\lambda}$.
2. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz normal. Los autovectores de A asociados a distintos autovalores son ortogonales entre sí.
3. Todo autovalor de una matriz hermítica es un número real.

Algunas caracterizaciones. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

1. A es normal si y solo si $\|Ax\| = \|A^*x\|$ para todo $x \in \mathbb{C}^n$.
2. A es hermítica si y solo si $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$ para todo $x \in \mathbb{C}^n$.

Caracterización de las matrices unitarias. Sea $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. U es unitaria.
2. U^* es unitaria.
3. U es invertible y $U^{-1} = U^*$.
4. U preserva el producto escalar:
$$\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle\,, \qquad \text{para todo } x, y \in \mathbb{C}^n.$$
5. Si $\{v_i : i \in \mathbb{I}_n\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{C}^n$, entonces $\{Uv_i : i \in \mathbb{I}_n\}$ también lo es.
6. Las columnas de U constituyen una base ortonormal de $\mathbb{C}^n$.
7. Las filas de U constituyen una base ortonormal de $\mathbb{C}^n$.
8. Para todo $x \in \mathbb{C}^n$, vale que $\|Ux\| = \|x\|$ (i.e., la transformación lineal $U(x) := Ux$ es una *isometría*.)

Teoremas espectrales.

Para matrices normales. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Son equivalentes:

- A es normal.
- $\mathbb{C}^n$ tiene una base ortonormal constituida por autovectores de A.
- A es unitariamente equivalente a una matriz diagonal.

Para matrices hermíticas. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Son equivalentes:

- A es hermítica
- A es normal y $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.
- $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ y $\mathbb{C}^n$ tiene una base ortonormal constituida por autovectores de A.
- A es unitariamente equivalente a una matriz diagonal $\Lambda \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Para matrices simétricas. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Son equivalentes:

- A es simétrica.
- $\mathbb{R}^n$ tiene una base ortonormal constituida por autovectores de A.
- A es ortogonalmente equivalente a una matriz diagonal.

Ejercicios

---

1. Explicar por qué las siguientes matrices son diagonalizables unitariamente

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

y en cada caso hallar una matriz unitaria U y una matriz diagonal Λ tales que $A = U\Lambda U^*$.

---

2. Determinar cuáles de las siguientes parejas de matrices son unitariamente equivalentes

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & i \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} i & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$;

(b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$;

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$;

(d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}$;

(e) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix}$;

(f) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

: *¿Qué relación existe entre la traza, el determinante, los autovalores, y la norma de Frobenius de dos matrices unitariamente equivalentes?*

: *¿Será verdad que toda matriz diagonalizable es normal? Ricercar ...*

---

3. Sea $U \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz ortogonal con $\det(U) = 1$. Probar que

(a) 1 es un autovalor de U.

(b) Si $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ tal que $Uv_1 = v_1$, entonces en esa base la matriz de $U(x) := Ux$, $x \in \mathbb{R}^3$, es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix},$$

para algún $\theta \in [0, 2\pi)$.

: Dado que v_1 es un autovector de U, todos los coeficientes debajo del 1 tienen que ser 0, y como v_1 también es un autovector de U^* (¿por qué?), todos los coeficientes a la derecha del 1 también tienen que ser 0:

$$[U]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & U_{22} \end{bmatrix}.$$

El problema se reduce a probar que la matriz inferior derecha, U_{22}, es una matriz ortogonal cuyo determinante es 1 y que en consecuencia tiene que ser una matriz de rotación.

---

4. Explicar por qué las siguientes matrices $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ son diagonalizables ortogonalmente

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

y en cada caso hallar una matriz ortogonal U y una matriz diagonal Λ tales que $A = U\Lambda U^T$.

: ¿A ojo?

---

5. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T, \; v_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T, \; v_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T,$$

es una base de autovectores de A asociados a los autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, respectivamente. Probar que A es simétrica si y solo si $\lambda_2 = \lambda_3$.

---

6. Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ tal que

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T, \; v_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}^T, \; v_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T,$$

son autovectores asociados a los autovalores $2, -3, 5$, respectivamente. Probar que A es simétrica si y solo si $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$ es un autovector de A.

---

7. Hallar una matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ que posea las siguientes propiedades:

(**a**) $\sigma(A) = \{1, 1/4\}$ y $\mathrm{nul}(A - I) = \mathrm{gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T\right\}$.

(**b**) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \in \mathrm{nul}(A - I)$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T \in \mathrm{nul}(A - 2I)$ y $\det(A) = 12$.

(**c**) A es definida positiva, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ y $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}^T$ son autovectores de A, $\det(A) = 18$ y $\mathrm{tr}(A) = 8$.

: ¿A es única? ¿Por qué?

---

8. Sean $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ dos matrices hermíticas. Comprobar que $\mathrm{In(A)} = \mathrm{In(B)}$ si y solo si existe una matriz inversible S tal que $A = SBS^*$.

: *Notar primero que si* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *es una matriz hermítica con* $\mathrm{In}(\mathrm{A}) = (\mathrm{p}, \mathrm{q}, \mathrm{r})$, *entonces existe una matriz inversible* T *tal que*

$$A = T \begin{bmatrix} \mathbf{I}_p & & \\ & -\mathbf{I}_q & \\ & & \mathbf{0}_r \end{bmatrix} T^*.$$

Para ello recordar que si A *es hermítica,* $A = U\Lambda U^*$ *con* U *unitaria y* $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$*, donde* $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_p > 0$*,* $\lambda_{p+1} \leq \cdots \leq \lambda_{p+q} < 0$*, y* $\lambda_{p+q+1} = \cdots = \lambda_n = 0$*. Luego considerar* $T = UD$*, donde*

$$D = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_p}, \sqrt{-\lambda_{p+1}}, \ldots, \sqrt{-\lambda_{p+q}}, 1, \ldots, 1).$$

---

9. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ -i & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Comprobar que $\mathrm{In}(A) = \mathrm{In}(B)$ y hallar S inversible tal que $A = SBS^*$.

---

10. Hallar una descomposición en valores singulares de cada una de las siguientes matrices:

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{bmatrix}, \ \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \ \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}, \ \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

---

11. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

(**a**) Hallar los valores singulares de A, bases ortonormales de sus cuatro subespacios fundamentales y sus respectivas matrices de proyección.

(**b**) Hallar una descomposición en valores singulares reducida de A.

: *recuerdo haber visto algo similar en el apunte de J.L.M.A.*

---

12. Sean

$$U = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}.$$

Comprobar que $A = U\Sigma V^T$ es una descomposición en valores singulares de A y, a partir de ella, hallar la seudoinversa de Moore-Penrose de A; la matriz de proyección sobre $\mathrm{fil}(A)$ y la matriz de proyección sobre $\mathrm{col}(A)$.

---

13. En cada uno de los siguientes casos, hallar $A^\dagger$, la seudoinversa de Moore-Penrose de A, y determinar la solución por cuadrados mínimos de norma mínima de la ecuación $Ax = b$.

(**a**)

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

(**b**)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

---

14. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por $T(x) := Ax$ con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

(**a**) Hallar entre todos los $x \in \mathbb{R}^2$ que satisfacen $\|x\| = 1$ aquellos que maximizan $\|T(x)\|$ y determinar el valor $\max\limits_{\|x\|=1} \|T(x)\|$.

(**b**) Hallar entre todos los $x \in \mathbb{R}^2$ que satisfacen $\|x\| = 1$ aquellos que minimizan $\|T(x)\|$ y determinar el valor $\min\limits_{\|x\|=1} \|T(x)\|$.

: *observar que si $A = U\Sigma V^*$ es una descomposición en valores singulares de A, con $\Sigma = \operatorname{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ y $\sigma_1 \geq \sigma_2, \dots \geq \sigma_n$, entonces*

$$\|Ax\| = \|U\Sigma V^* x\| = \|\Sigma V^* x\| = \|\Sigma y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 |y_i|^2},$$

donde $y = V^* x$. Consecuentemente,

$$\{\|Ax\| : \|x\| = 1\} = \left\{ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 |y_i|^2} : \|y\| = 1 \right\}.$$

Lo restante cae por su propio peso...

---

15. Hallar $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ tal que

$$\max_{\|x\|=1} \|Ax\| = 2, \quad \min_{\|x\|=1} \|Ax\| = 1/4, \quad y \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

: *¿A, es única?*

---

16. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ la transformación definida por $T(x) := Ax$. En cada uno de los siguientes casos, caracterizar geométricamente y graficar la imagen por T de la circunferencia unitaria $S_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$.

(**a**) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(**b**) $A = \begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 1 & 11 \end{bmatrix}$.

(**c**) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

: *en cada caso, ¿qué significación geométrica tienen los $x \in S_1$ que maximizan (o minimizan) $\|T(x)\|$?, ¿qué representan los valores $\max\limits_{x \in S_1} \|T(x)\|$ y $\min\limits_{x \in S_1} \|T(x)\|$?*

---

17. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ la transformación definida por $T(x) := Ax$. En cada uno de los siguientes casos, caracterizar geométricamente y graficar la imagen por T de la circunferencia unitaria $S_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$.

(**a**) $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

(**b**) $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 10 & 0 \\ -2 & 0 & 10 \end{bmatrix}$.

(**c**) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

: *en cada caso, si $A = U\Sigma V^T$ es una descomposición en valores singulares de A, ¿qué significación geométrica tienen las columnas de U?, ¿qué representan los valores singulares de A?*

---

18. Hallar una descomposición polar para cada una de las matrices de 2×2 que aparecen en el **Ejercicio 10.**

: *una descomposición polar de una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es una representación de A como producto de una matriz semidefinida positiva y una matriz unitaria.*